

РЕЛАКСАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ И ПОЛЗУЧЕСТЬ НЕКОТОРЫХ ЛИНЕЙНЫХ ВЯЗКО-УПРУГИХ СРЕД

В. Ф. ЛИСТОВНИЧИЙ, Т. Д. ШЕРМЕРГОР

(Москва)

Наследственные свойства линейных изотропных вязко-упругих сред вполне определяются ядрами интегральных операторов объемного и сдвигового упругих модулей. Хотя степень релаксации, связанная с объемным модулем для некоторых полимерных материалов, может достигать десятков процентов, в большинстве случаев оказывается достаточным учитывать лишь сдвиговую релаксацию, принимая объемный модуль постоянным. Если при этом материал в течение исследуемого отрезка времени не обладает склонностью к старению, то он может быть описан разностным ядром. В настоящее время чаще других используются дробно-экспоненциальные ядра, введенные в теорию вязко-упругости Ю. Н. Работновым [1-3]. Эти ядра приводят к симметричной колоколообразной функции распределения времен релаксаций [4, 5]. Однако релаксационный спектр полимеров асимметричен. Простейшими ядрами, учитывающими асимметрию релаксационного спектра, будут [5-7] ядро Ржаницына — Дэвидсона и вырожденная гипергеометрическая функция ${}_1F_1(\alpha + 1, 2, \theta)$, где $0 \leq \alpha \leq 1$. Недостатком отмеченных ядер является то, что они не обладают свойством расщепляемости. В связи с этим представляет интерес построение моделей таких сред, которые учитывают асимметрию спектра и приводят к расщепляемым операторам как модулей упругости M^* , так и податливостей J^* аналогично тому, как это было предложено Ю. Н. Работновым для ядра Абеля [1]. В дальнейшем будем называть материалы, для которых оба оператора M^* и J^* являются резольвентными, средами Работнова в отличие от простых сред, для которых один из операторов M^* или J^* определяется некоторым базисным интегральным оператором (обладающим, например, ядром Абеля, Ржаницына — Дэвидсона и др.), а другой — его резольвентой.

1. Будем исходить из следующих представлений для комплексных податливостей простых наследственных сред:

$$J(i\omega) = J_\infty + J_\infty (i\omega\tau)^{-\alpha} = J_\infty [1 + \kappa' (i\omega)^{-\alpha}] \quad (1.1)$$

$$J(i\omega) = J_\infty + \Delta J (1 + i\omega\tau)^{-\alpha} = J_\infty [1 + \kappa'' (1/\tau + i\omega)^{-\alpha}] \quad (1.2)$$

$$J(i\omega) = J_0 - \Delta J (1 + 1/i\omega\tau)^{-\alpha} = J_\infty \{1 + \kappa''' [\tau^{-\alpha} - (\tau + 1/i\omega)^{-\alpha}]^{-1}\} \quad (1.3)$$

$$\kappa' = \tau^{-\alpha}, \quad \kappa'' = (1/m - 1)\tau^{-\alpha}, \quad \kappa''' = (1/m - 1)\tau^\alpha, \quad m = J_\infty/J_0 \quad (1.4)$$

Здесь J_0 и J_∞ — соответственно релаксированная и нерелаксированная податливости, ΔJ — их разность, ω — циклическая частота, τ — характерное время релаксации и α — показатель дробности.

Переход в выражениях (1.1) — (1.3) от изображения к оригиналу приводит соответственно к ядрам Абеля, Ржаницына — Дэвидсона и к ядру типа вырожденной гипергеометрической функции.

Определим резольвентный оператор R^* равенством

$$R^*(\lambda, T) = (\lambda E^* + T^*)^{-1} \quad (1.5)$$

где E^* — единичный оператор, T^* — базисный оператор и λ — число. Из (1.5) следуют тождество Гильберта (условие расщепляемости) [3, 9]

$$R^*(\lambda, T)R^*(\mu, T) = \frac{1}{\mu - \lambda} [R^*(\lambda, T) - R^*(\mu, T)] \quad (1.6)$$

и правило понижения степени оператора

$$R^{*2}(\lambda, T) = -\frac{\partial}{\partial \lambda} R^*(\lambda, T) \quad (1.7)$$

Отметим, что соотношения (1.5) — (1.7) отличаются знаком от аналогичных формул алгебры \mathcal{E} -операторов. Удобство такого подхода состоит в том, что, как будет показано ниже, он приводит к положительным значениям параметров λ .

Операторы сдвиговых модулей упругости и податливости выражаются через резольвентный оператор R при помощи соотношений

$$M^* = M_\infty [1 - \kappa R^*(\lambda, T)], \quad J^* = J_\infty [1 + \kappa R^*(\lambda - \kappa, T)] \quad (1.8)$$

$$J^* = J_\infty [1 + \kappa R^*(\mu, T)], \quad M^* = M_\infty [1 - \kappa R^*(\mu + \kappa, T)] \quad (1.9)$$

где вторая пара получается из первой при помощи замены $\lambda - \kappa = \mu$. В обоих равенствах на первом месте стоят прямые операторы, определяющие наследственные свойства среды через резольвентный оператор R^* , а на втором — обратные, выражающиеся через тот же резольвентный оператор при помощи сдвига по параметру.

Потребуем, чтобы при $\lambda = 0$ резольвентный оператор (1.5) приводил к одному из равенств (1.1) — (1.3). Это дает

$$LT_1 = (i\omega)^\alpha \equiv LI_{-\alpha} \quad (1.10)$$

$$LT_2 = (1/\tau + i\omega)^\alpha \equiv LK_{-\alpha} \quad (1.11)$$

$$LT_3 = [\tau^{-\alpha} - (\tau + 1/i\omega)^{-\alpha}]^{-1} \equiv (LN_\alpha)_{-1} \quad (1.12)$$

Здесь L — оператор интегрального преобразования Фурье.

Равенствами (1.5), (1.8), (1.9) и одним из выражений (1.10) — (1.12) полностью определяются наследственные свойства сред Работнова.

2. Перейдем к вычислению явного значения параметров интегральных операторов упругих модулей и податливостей. Для этого перейдем в равенствах (1.8) и (1.9) к трансформантам Фурье и воспользуемся определением (1.5). Тогда для базисных операторов (1.10) — (1.12) приходим соответственно к следующим значениям искомых параметров:

$$\begin{aligned} \lambda = \mu + \kappa = \tau_e^{-\alpha}, \quad \kappa = \lambda(1 - m) = \mu(1/m - 1) \\ \lambda - \kappa = \mu = \tau_\sigma^{-\alpha}, \quad m = \tau_e^\alpha / \tau_\sigma^\alpha \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \lambda = n_e \tau^{-\alpha}, \quad \mu = n_\sigma \tau^{-\alpha}, \quad m = (1 + n_\sigma) / (1 + n_e) \\ \kappa = (1 - m)(n_e + 1)\tau^{-\alpha} = (1/m - 1)(n_\sigma + 1)\tau^{-\alpha} \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \lambda = n_e \tau^\alpha, \quad \mu = n_\sigma \tau^\alpha, \quad m = (1 + n_\sigma) / (1 + n_e) \\ \kappa = (1 - m)(n_e + 1)\tau^\alpha = (1/m - 1)(n_\sigma + 1)\tau^\alpha \end{aligned} \quad (2.3)$$

Обозначая

$$R(\lambda, I_{-\alpha}) = \mathcal{E}_\alpha(\lambda) \quad R(\lambda, K_{-\alpha}) = Q_\alpha(\lambda), \quad R(\lambda, N_\alpha) = P_\alpha(\lambda)$$

и имея в виду явные значения параметров согласно соотношениям (2.1) — (2.3), приведем операторы упругих модулей и податливостей к стандартной форме

$$M^* = M_\infty [1 - \kappa \mathcal{E}_\alpha^*(\lambda)], \quad J^* = J_\infty [1 + \kappa \mathcal{E}_\alpha^*(\mu)] \quad (2.4)$$

$$M^* = M_\infty [1 - \kappa Q_\alpha^*(\lambda)], \quad J^* = J_\infty [1 + \kappa Q_\alpha^*(\mu)] \quad (2.5)$$

$$M^* = M_\infty [1 - \kappa P_\alpha^*(\lambda)], \quad J^* = J_\infty [1 + \kappa P_\alpha^*(\mu)] \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_\alpha(\lambda, t) &= t^{\alpha-1} \sum_0^\infty \frac{(-1)^n (t/\tau)^{\alpha n}}{\Gamma[\alpha(n+1)]}, & Q_\alpha(\lambda, t) &= \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \mathcal{E}_\alpha(\lambda, t) \\ P_\alpha(\lambda, t) &= \frac{1}{\tau^{\alpha+1}} \sum_{k=0}^\infty \frac{n_e^k}{(n_e+1)^{k+1}} \{ \alpha(k+1) {}_1F_1[\alpha(k+1), 2, -t/\tau] - \\ & & & - k\alpha {}_1F_1(k\alpha+1, 2, -t/\tau) \} \end{aligned} \quad (2.7)$$

где ${}_1F_1(a, c, x)$ — вырожденная гипергеометрическая функция, а параметр λ выражен через время релаксации согласно соотношениям (2.1) — (2.3).

Предельный переход от среды Работнова к простой наследственной среде получим, положив $\lambda=0$ или $\mu=0$. Из отмеченных двух условий выберем то, которое при $m=0$ приводит к полной релаксации напряжений. Тогда предельный переход к реологическим моделям простых сред дает

$$M^* = M_\infty [1 - \kappa \mathcal{E}_\alpha^*(\kappa)], \quad J^* = J_\infty [1 + \kappa I_\alpha^*] \quad (2.8)$$

$(\mu=0, \tau_\sigma = \infty, m = M_0 = 0)$

$$M^* = M_\infty [1 - \kappa K_\alpha^*], \quad J^* = J_\infty [1 + \kappa Q_\alpha^*(\kappa)] \quad (2.9)$$

$(\lambda=0, \kappa = (1-m)\tau^{-\alpha}, n_\sigma = m-1)$

$$M^* = M_\infty [1 - \kappa N_\alpha^*], \quad J^* = J_\infty [1 + \kappa P_\alpha^*(\kappa)] \quad (2.10)$$

$(\lambda=0, \kappa = (1-m)\tau^\alpha, n_\sigma = m-1)$

$$I_\alpha(t) = t^{\alpha-1} / \Gamma(\alpha), \quad K_\alpha(t) = \exp(-t/\tau) I_\alpha(t) \quad (2.11)$$

$$N_\alpha(t) = \tau^{-\alpha} [\delta(t) + \alpha \tau^{-1} {}_1F_1(\alpha+1, 2, -t/\tau)]$$

Здесь $\delta(t)$ — дельта-функция, операторное значение которой равно единице, I_α — ядро Абеля, K_α — Ржаницына, а отличие ядра N_α от приведенного ранее [5] связано с тем, что операторы M^* и J^* выражаются через нерелаксированные значения модулей и податливостей.

Равенства (2.8) определяют свойства квазимаквелловской реологической модели [10], тогда как в выражениях (2.9) и (2.10), вообще говоря, $m \neq 0$. Вырожденный случай $M_0 = 0$, обеспечивающий полную релаксацию напряжений при достаточно больших t , получается из (2.9) и (2.10) при $\kappa = \tau^{-\alpha}$ и $\kappa = \tau^\alpha$ соответственно.

3. Резольвентные ядра могут быть определены в явном виде как при помощи рядов, так и в интегральном представлении. Если ряды сходятся недостаточно быстро, то интегральные представления могут иметь определенные преимущества при выполнении численных расчетов.

Ранее [4] был изложен метод нахождения интегральных представлений для резольвентных ядер и получено выражение для свертки дробно-экспоненциальной функции с единицей. Воспользуемся этим же методом для вычисления свертки с единицей операторов Q_α^* и P_α^* .

Соответствующий расчет приводит к следующим результатам:

$$\begin{aligned} \tau^{-\alpha} Q_\alpha^*(\lambda) \cdot 1 &= \frac{1}{n_e + 1} - \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \int_1^\infty \frac{\xi e^{-\theta x}}{\xi^2 + 2\xi n_e \cos \alpha \pi + n_e^2} \frac{dx}{x} \\ \tau^\alpha P_\alpha^*(\lambda) \cdot 1 &= \frac{1}{n_e + 1} - \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \int_0^1 \frac{\xi e^{-\theta x}}{\xi^2 (1+n_e)^2 - 2\xi (1+n_e) n_e \cos \alpha \pi + n_e^2} \frac{dx}{x} \end{aligned} \quad (3.1)$$

$\xi \equiv (x-1)^\alpha, \quad n_e = \lambda \tau^\alpha, \quad \theta = t/\tau$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{n_e + 1} - \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \int_0^1 \frac{\xi e^{-\theta x}}{\xi^2 (1+n_e)^2 - 2\xi (1+n_e) n_e \cos \alpha \pi + n_e^2} \frac{dx}{x} \\ &\xi \equiv (1/x - 1)^\alpha, \quad n_e = \lambda \tau^{-\alpha} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Согласно принятому подходу, изменение параметра λ , например в результате расшифровки агрегата операторов, изменяет величину n_e , но сохраняет неизменным эффективное время релаксации τ . Легко видеть, что в обоих случаях увеличение λ сопровождается возрастанием скорости релаксации.

Найденные выражения для сверток резольвентных операторов позволяют записать интегральные представления для релаксации напряжений и ползучести. Вводя функции релаксации $\varphi(t)$ и ползучести $\psi(t)$ соотношениями

$$\sigma(t) = M_0 \left[1 - \frac{1-m}{m} \varphi(t) \right] \varepsilon(t)$$

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 1(t) \quad (3.3)$$

$$\varepsilon(t) = J_\infty \left[1 + \frac{1-m}{m} \psi(t) \right] \sigma(t)$$

$$\sigma(t) = \sigma_0 1(t) \quad (3.4)$$

находим

$$\varphi = 1 - \frac{\kappa}{1-m} R_\alpha^*(\lambda) \cdot 1 \quad (3.5)$$

$$\psi = \frac{m}{1-m} \kappa R_\alpha^*(\mu) \cdot 1, \quad \mu = \lambda - \kappa$$

Здесь $1(t)$ — единичная функция Хевисайда, а R_α^* — любой из рассмотренных резольвентных операторов.

Для иллюстрации различия наследственных свойств, описываемых тремя типами резольвентных операторов, на фиг. 1 и 2 приведены спектры времен релаксации $H(\tau)$, вычисленные в соответствии с определением [11]

$$H\left(\tau = \frac{1}{\omega}\right) = \pm \frac{1}{\pi \Delta M} \text{Im } M(\omega e^{\pm i\pi}) \quad (3.6)$$

по формулам

$$H(\tau) = \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \frac{x^\alpha}{x^{2\alpha} + 2x^\alpha \cos \alpha \pi + 1} \quad (3.7)$$

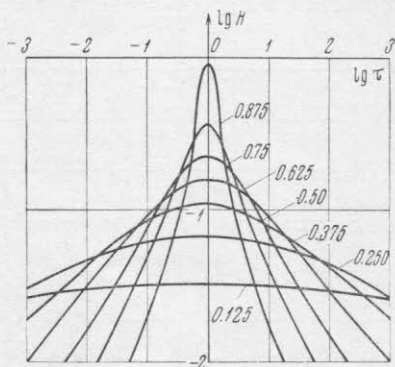
$$H(\tau) = \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \frac{(n_e + 1) \xi \Theta(1/x - 1)}{\xi^2 + 2\xi n_e \cos \alpha \pi + n_e^2} \quad (3.8)$$

$$H(\tau) = \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \frac{(n_e + 1) \zeta \Theta(x - 1)}{\zeta^2 (1 + n_e)^2 - 2\zeta (1 + n_e) n_e \cos \alpha \pi + n_e^2}$$

$$\xi = (1/x - 1)^\alpha, \quad \zeta = (x - 1)^\alpha, \quad x = \tau/\tau_0 \quad (3.9)$$

$$\Theta(z) = 1 \text{ при } z > 0, \quad \Theta(z) = 0 \text{ при } z < 0$$

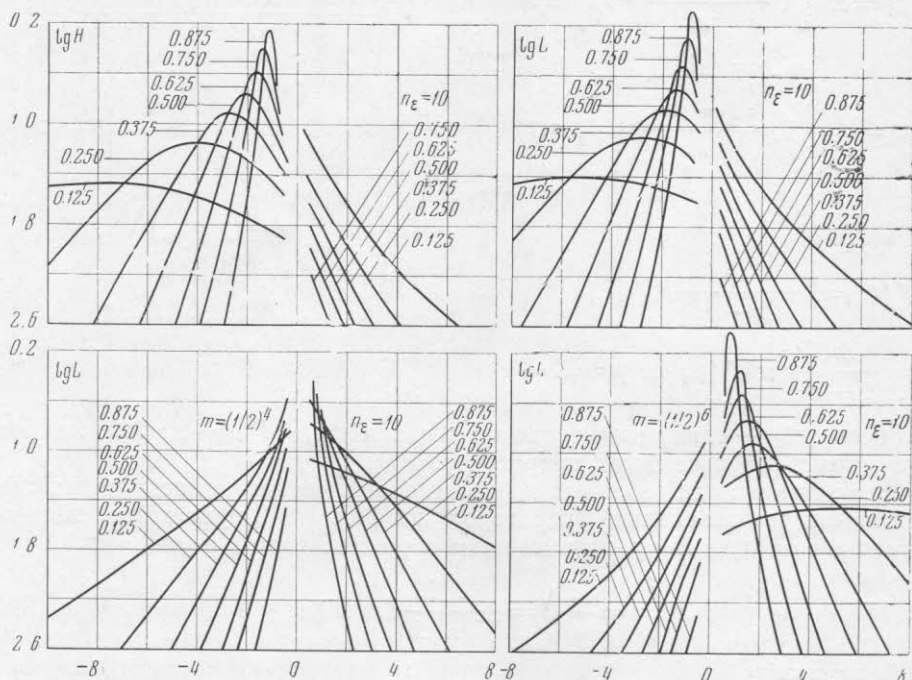
Здесь выражение (3.8) дает функцию распределения для дробно-экспоненциальных ядер, а (3.9) и (3.10) — для сред Работнова, построенных на базе операторов (1.11) и (1.12). Фиг. 1 относится к дробно-экспоненциальным ядрам, кривые фиг. 2, лежащие слева от асимптоты $\lg \tau = 0$, относятся к выражению (3.9), а справа от этой асимптоты — к (3.10). Во всех случаях цифры у кривых указывают значение показателя дробности, а для



Фиг. 1

фиг. 2 принято $n_\varepsilon = 10$. Оба семейства кривых фиг. 2 при приближении к асимптоте $\lg \tau = 0$ идут вниз. Как видно из формулы (3.10), кривые правого семейства также имеют максимум, однако он приходится на малые значения $\lg \tau$, тогда как для левого семейства они приходятся на большие значения $|\lg \tau|$.

Спектры времен запаздывания (ретардаций) для дробно-экспоненциальных ядер имеют такой же вид, как и спектр времен релаксаций, но сдвинутый вправо. Для двух других ядер изменяется также форма спектра. Соответствующие кривые $L(\tau)$ приведены также на фиг. 2. Во всех случаях принято $n_\varepsilon = 10$, а $m = 1/2, 1/16$ и $1/64$ соответственно.



Фиг. 2

Как и прежде, семейства слева относятся к средам Работнова, построенным на базе операторов (1.11), а справа — на базе (1.12). Функция распределения времен запаздывания, определяемая соотношением [11]

$$L\left(\tau = \frac{1}{\omega}\right) = \pm \frac{1}{\pi \Delta J} \operatorname{Im} J(\omega e^{\mp i\pi}) \quad (3.10)$$

в двух последних случаях вычислялась из выражений

$$L(\tau) = \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \frac{(n_\sigma + 1) \xi \Theta(1/x - 1)}{\xi^2 + 2\xi n_\sigma \cos \alpha \pi + n_\sigma^2} \quad (3.11)$$

$$L(\tau) = \frac{\sin \alpha \pi}{\pi} \frac{(n_\sigma + 1) \xi \Theta(x - 1)}{\xi^2 (1 + n_\sigma)^2 - 2n_\sigma (n_\sigma + 1) \xi \cos \alpha \pi + n_\sigma^2} \quad (3.12)$$

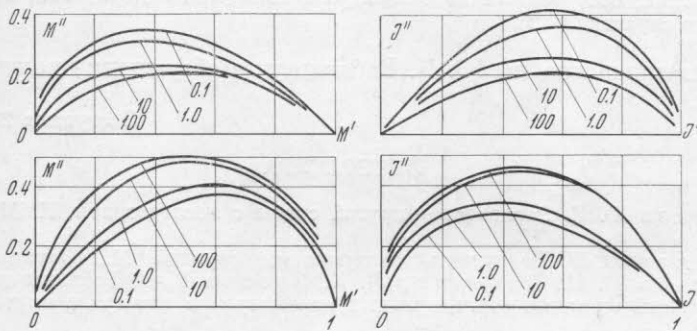
Для иллюстрации влияния параметра n на фиг. 3 приведены диаграммы, связывающие действительные и мнимые части упругих модулей

Фиг. 3, а, б) и податливостей (остальные графики). Значения параметра n указаны цифрами у кривых. Первые диаграммы относятся к определениям (2.5), а вторые — (2.6). Сопоставляя фазовые диаграммы, отметим, что увеличение n понижает фазовую диаграмму для среды Работнова, построенной на базе ядра Ржаницына — Дэвидсона, и повышает ее в случае использования базисного оператора (1.4).

4. Рассмотрим в качестве примера релаксацию напряжений в неограниченной среде с полостью радиуса R . Пусть в момент $t = 0$ на достаточно большом расстоянии от полости приложено однородное сдвиговое напряжение σ_{12}^0 . Тогда напряженное состояние в окрестности полости будет описываться выражением [12]

$$\sigma_{12} = \sigma_{12}^0 \left[1 + \frac{10\mu}{9K + 8\mu} \rho^3 + \frac{6K + 2\mu}{9K + 8\mu} \rho^5 \right], \quad \rho = \frac{R}{r} \quad (4.1)$$

объемный модуль K считается постоянным, а модуль сдвига μ определяется релаксационным оператором.



Фиг. 3

Примем для оператора модуля сдвига определение (1.8). Тогда подставляя значение (1.8) в выражение (4.1) и проводя расшифровку полученного соотношения при помощи условия расщепляемости (1.6), находим

$$\sigma_{12} = \sigma_{12}^0 [(1 + a_1 \rho^3 + a_2 \rho^5) - (a_3 \rho^3 + a_4 \rho^5) \varkappa R^* (\lambda - \varkappa_1) \cdot 1] \quad (4.2)$$

$$a_1 \equiv \frac{10\mu_\infty}{9K + 8\mu_\infty}, \quad a_2 \equiv \frac{6K + 2\mu_\infty}{9K + 8\mu_\infty} \quad (4.3)$$

$$a_3 \equiv \frac{9Ka_1}{9K + 8\mu_\infty}, \quad a_4 \equiv -\frac{15K\mu_\infty a_2}{(3K + 8\mu_\infty)(9K + 8\mu_\infty)}, \quad \varkappa_1 = \frac{4}{5}\varkappa a_1$$

Несмотря на различие знаков коэффициентов a_2 и a_4 сомножитель $(a_3 \rho^3 + a_4 \rho^5)$ при всех значениях $0 < \rho \leq 1$ остается положительным. В последнем легко убедиться, принимая во внимание, что $a_3 + a_4 = 60K\mu_\infty (9K + 8\mu_\infty)^{-2} > 0$. Таким образом, во всех точках рассматриваемой среды напряжение монотонно убывает со временем.

Зависимость от времени напряжения σ_{12} определяется функцией $\varkappa R^* (\lambda - \varkappa_1) \cdot 1$. Явный вид соответствующих сверток определяется выражениями (3.1) и (3.2), в которых следует сделать замену $\lambda \rightarrow \lambda - \varkappa_1$.

Для всех трех случаев моделей сред (2.4)–(2.6) интегральные представления позволяют получить асимптотические оценки для больших времен.

Учитывая, что при достаточно больших t существенный вклад дает подынтегральное выражение лишь при малых τ , из равенств (3.1) и (3.2) получим

$$\kappa Q_{\alpha}^{*}(\lambda - \kappa_1) \cdot 1 \approx k(1 - m) \left[1 - \frac{k\alpha(1 + \lambda_0 - k)^{-2}}{\Gamma(1 - \alpha)} \theta^{-\alpha-1} e^{-\theta} \right] \quad (4.4)$$

$$\kappa P_{\alpha}^{*}(\lambda - \kappa_1) \cdot 1 \approx k(1 - m) \left[1 - \frac{k\theta^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha - 1)(\lambda_0 + 1)} \right] \quad (4.5)$$

$$\kappa \mathcal{E}_{\alpha}^{*}(\lambda - \kappa_1) \cdot 1 \approx k(1 - m) \left(1 - \frac{k\theta^{-\alpha}}{\Gamma(1 - \alpha)} \right) \quad (4.6)$$

$$k^{-1} \equiv 1 - \frac{1}{5} a_1 (1 - m), \quad \theta = t / \tau$$

Сопоставляя асимптотические оценки, находим, что выражения (4.5) и (4.6) приводят к степенной зависимости от времени, тогда как резольвентное ядро, построенное на базе оператора Ржаницына — Дэвидсона, приводит к убыванию более быстро, чем экспоненциальное. Учет следующих членов разложения подынтегрального выражения для сверток резольвентных ядер может несколько изменить функциональную зависимость асимптотик [2], однако вывод о более быстром убывании функций релаксации, построенных на базе ядра Ржаницына — Дэвидсона, и в этом случае остается справедливым.

Авторы признательны Ю. Н. Работнову за обсуждение полученных результатов.

Поступила 28 V 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Работнов Ю. Н. Равновесие упругой среды с последствием. ПММ, 1948, т. 12, вып. 1.
2. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М., «Наука», 1966.
3. Работнов Ю. Н., Паперник Л. Х., Звонов Е. Н. Таблицы дробно-экспоненциальной функции отрицательных параметров и интеграла от нее. М., «Наука», 1969.
4. Листовничий В. Ф., Шермергор Т. Д. Ползучесть упруго-вязких сред с ядром типа вырожденной гипергеометрической функции. Изв. АН СССР. МТТ, 1969, № 1.
5. Шермергор Т. Д. Реологические характеристики упруговязких материалов, обладающих асимметричным релаксационным спектром. Инж. ж. МТТ, 1967, № 5.
6. Ржаницын А. Р. Теория ползучести. М., Стройиздат, 1968.
7. Davidson D. W., Cole R. H. Dielectric relaxation in glycerol, propylen glycol, and *n*-propanol. J. Chem. Phys., 1951, vol. 19, No. 12, p. 1484.
8. Громов В. Г. Алгебра операторов Вольтерра и ее применение в задачах вязкоупругости. Докл. АН СССР, 1968, т. 182, № 1.
9. Йосида К. Функциональный анализ. М., «Мир». 1967.
10. Шермергор Т. Д. Об использовании операторов дробного дифференцирования для описания наследственных свойств материалов. ПМТФ, 1966, № 6.
11. Ферри Дж. Вязко-упругие свойства полимеров. М., Изд-во иностр. лит., 1963.
12. Эшелби Дж. Континуальная теория дислокаций. М., Изд-во иностр. лит., 1963.