ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
ИНСТИТУТ МАШИНОВЕДЕНИЯ ИМ. А.А. БЛАГОНРАВОВА
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи

Носова

Носова Наталья Юрьевна

РАЗРАБОТКА И ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ МЕХАНИЗМОВ ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ С ШАРНИРНЫМИ ПАРАЛЛЕЛОГРАММАМИ С РАЗЛИЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

Специальность 05.02.18 – Теория механизмов и машин

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата технических наук

Научный руководитель
доктор технических наук
С.В. Хейло

Москва 2020

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы диссертации

Создание новых механизмов параллельной структуры является одним из направлений развития современных робототехнических систем в процессе автоматизации конкурентоспособных промышленных предприятий машиностроительной, пищевой, текстильной, космической и других отраслей; производстве медицинских приборов и устройств оборонного назначения. Промышленные робототехнические системы освобождают человека от тяжёлого, утомительного и однообразного ручного труда, позволяют заменить его в опасной и вредной для здоровья окружающей среде, а также в труднодоступных местах.

Использование свойства механизмов параллельной структуры воспринимать каждой кинематической цепью механизма только часть общей нагрузки позволяет создавать конструкции более высокой жёсткости с подвижными звеньями, но относительно небольшой массы; с лучшими динамическими характеристиками, а также повышенной точности позиционирования по сравнению с механизмами последовательной структуры. Однако, механизмы параллельной структуры имеют и недостатки: ограниченность рабочей зоны (пространства); наличие сингулярностей (особых положений) в области рабочего пространства; трудности проведения параметрического синтеза механизмов.

Еще одной важной особенностью механизмов параллельной структуры являются их сложные взаимосвязанные кинематические характеристики, когда поступательное движение кинематически связано с вращательным движением и наоборот. Поэтому математические модели для решения задач кинематики и динамики таких механизмов отличаются сложностью, что затрудняет их управление, планирование траекторий движений и позиционирование рабочего органа (выходного звена). Для преодоления указанных сложностей упрощают и разделяют законы управления механизмом. Это позволяет добиться синхронизации приводов, и улучшить динамические характеристики манипуляционных механизмов.

Кинематическая развязка положения и ориентации выходного звена (платформы или рабочего органа) упрощает решение кинематических и динамических задач, а также алгоритмы управления этими устройствами. Решение подобной задачи в основном сводится к уменьшению числа промежуточных звеньев механизма, что, с одной стороны, положительно сказывается на жёсткости механизма. С другой стороны, в механизмах с полной или частичной кинематической развязкой предъявляются повышенные требования к приводам, так как каждый привод в таких механизмах отвечает за одну степень свободы выходного звена, что увеличивает нагрузку на них. Тем не менее, важным преимуществом механизмов с кинематической развязкой являются их простые кинематические зависимости между входными и выходными координатами, упрощающие их динамический анализ и синтез.

Поэтому синтез новых пространственных механизмов параллельной структуры, обладающих развязкой движений, когда одни приводы управляют положением выходной платформы, а другие управляют её ориентацией, является актуальной задачей.

Объектом исследования являются пространственные механизмы параллельной структуры с шарнирными параллелограммами с различным числом степеней свободы.

Цель работы

Разработка и исследование пространственных механизмов параллельной структуры с шарнирными параллелограммами с различным числом степеней свободы, обладающих свойствами кинематической и динамической развязки за счёт наличия шарнирных параллелограммов в каждой кинематической цепи.

Задачи научного исследования

1. Выполнить структурный синтез и анализ новых механизмов параллельной структуры с шарнирными параллелограммами с четырьмя, пятью и шестью степенями свободы.
2. Решить задачи о положении и скоростях исследуемых объектов.
3. Выявить динамические свойства механизмов.
4. Экспериментально проверить работоспособность механизма параллельной структуры на натурной модели и определить рабочую зону механизма.

Научная новизна исследования

1. Разработан ряд механизмов параллельной структуры, основанных на развитии схемы типа «Orthoglide» с возможность одновременной передачи шарнирным параллелограммом поступательных и вращательных движений.
2. Представлена методика структурного, кинематического и динамического анализа разработанного ряда механизмов.
3. Апробирован алгоритм управления разработанным механизмом с шестью степенями свободы с кинематической развязкой, основанный на минимизации ошибок по положению, скорости и ускорению.
4. Изготовлена конструкция натурного макета разработанной схемы механизма с четырьмя степенями свободы для исследования его рабочей зоны и особых положений. На практике показана возможность передачи шарнирным параллелограммом вращательных и поступательных движений.

Теоретическая значимость работы

Теоретическая значимость работы состоит в разработке методик структурного анализа и синтеза, кинематического и динамического анализа механизмов параллельной структуры с кинематической развязкой, разработке алгоритма определения рабочей зоны и управления такими механизмами.

Практическая значимость работы

Практическая значимость работы заключается в том, что синтезированы новые схемы манипуляционных механизмов параллельной структуры с четырьмя, пятью и шестью степенями свободы с кинематической развязкой. Данные механизмы могут быть использованы на предприятиях машиностроительной, пищевой, текстильной, лёгкой и других отраслей промышленности, в медицинских устройствах, тренажёрах.

Методы исследования

Теоретические исследования проводились с использованием методов теории механизмов и машин, теоретической механики, теории винтового исчисления, дифференциального и матричного исчисления, компьютерного моделирования.

Положения, выносимые на защиту:

1. Развитие схемы типа «Orthoglide» с целью получения дополнительных вращательных движений выходного звена.
2. Методики решения задач о положениях и скоростях для разработанного механизма с шестью степенями свободы с получением кинематических характеристик механизма.
3. Методики решения задач динамики для сферических и поступательно-направляющих механизмов, являющихся частью механизма с шестью степенями свободы.
4. Конструкция натурной модели для исследования наличия особых положений.

Достоверность результатов обусловлена строгостью математических выкладок при использовании корректных допущений, а также сопоставлением теоретических и практических результатов.

Реализация результатов работы

Результаты работы могут быть использованы на различных предприятиях машиностроительной, пищевой, текстильной и других отраслях; в научно-исследовательских и расчётно-конструкторских отделах предприятий, организаций и вузов, занимающихся созданием современной робототехники для автоматизации широкого круга технических операций.

Апробация работы

Основные результаты доложены на следующих научно-технических конференциях:

- 65-я межвузовская научно-техническая конференция молодых ученых и студентов «Студенты и молодые ученые КГТУ производству, Кострома, КГТУ, 2013 г.;
- Межвузовская научно-техническая конференция аспирантов и студентов «Молодые учёные – развитию текстильной и лёгкой промышленности» (ПОИСК-2013), Иваново, 2013;
- Международная научно-техническая конференция «Дизайн, технологии и инновации в текстильной и лёгкой промышленности» (Инновации-2013), Москва, 2013 г.;
- Международная научная конференция «Машины, технологии и материалы для современного машиностроения, посвященная 75-летию Института машиноведения им. А.А. Благонравова РАН», Москва, 2013 г.;
- Международная научно-техническая конференция «Новое в технике и технологии текстильной и лёгкой промышленности», Витебск, 2013 г.;
- 2-й международный симпозиум «Современные проблемы создания и производства механических передач», Москва, 2013 г.;
- 66-я межвузовская научно-техническая конференция молодых учёных и студентов "Студенты и молодые учёные КГТУ производству", Кострома, 2014 г.;
- Международная научно-техническая конференция «Новое в технике и технологии текстильной и лёгкой промышленности», Витебск, 2014 г.;
- Международная научно-техническая конференция «Дизайн, технологии и инновации в текстильной и лёгкой промышленности» (Инновации-2014), Москва, 2014 г.;
- 3rd IFToMM Symposium on Mechanism Design for Robotics (MEDER 2015), Aalborg, Denmark, 2015 г.;
- 14th International Federation for the Promotion of Mechanism and Machine Science World Congress (IFToMM 2015), Taipei, Taiwan, 2015;
- Международная научно-техническая конференция «Дизайн, технологии и инновации в текстильной и лёгкой промышленности» (Инновации-2015), Москва, 2015;
- 4-й международный симпозиум «Современные проблемы создания и производства механических передач», Москва, 2018 г.;
- Международная конференция «Intelligent Technologies in Robotics». г. Москва, 2019 г.

Публикации

По результатам диссертации опубликована 21 научная работа, в том числе 5 статей в журналах из списка ВАК, 7 публикаций, входящие в базы Scopus и Web of Science, 2 главы в монографиях с соавторами, 2 патента РФ на изобретения и 1 патент РФ на полезную модель.

Структура диссертации

Диссертация состоит из введения, пяти глав, основных результатов и выводов, списка использованной литературы, приложения 1, списка публикаций по теме диссертации.

Диссертация включает: 100 рисунков; 120 источников использованной литературы; 1 приложение; общий объём диссертации – 141 стр.

ГЛАВА 1
ОБЗОР МЕХАНИЗМОВ ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ С РАЗЛИЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

В данной главе рассматривается краткое развитие механизмов параллельной структуры, основные типы, их конструктивные особенности и области применения.

1.1. Обзор механизмов параллельной структуры от трёх до шести степеней свободы

Механизмы параллельной структуры в терминологии теории механизмов и машин определены как манипуляторы, управляющие движением выходного звена посредством, как минимум, двух кинематических цепей, идущих от основания к выходному звену.

Вопросы создания первых механизмов параллельной структуры (МПС) и времени их появления затрагивали не малое количество авторов [1, 2, 3, 4, 5, 6]. Согласно некоторым из них, история МПС началась в 1928 году, когда Джеймс Гвиннетт (Gwinnett J.E.) подал заявку на патент о создании платформы движения для индустрии развлечений, в котором представлено устройство, схожее по своей структуре со сферическим механизмом параллельной структуры [7].

Спустя десятилетия, в 1942 г., Поллард (Pollard W.L.W) изобрёл робот для автоматического распыления краски и подал на него патент (рисунок 1.1) [8]. Изобретение состоит из трёх кинематических цепей с пятью степенями свободы (три вращательные и две поступательные). Кинематическая цепь механизма состоит из трёх звеньев. Три вращательных привода, расположенных на основании, поворачивают первые три звена, которые, в свою очередь, передают вращение на вторые звенья через карданный шарнир. Вторые звенья соединены с третьими сферическими шарнирами. Выходное звено соединено с третьими звеньями карданными шарнирами. Два линейных привода расположены на основании. Они передают движение на выходное звено гибкими вращательными стержнями. Три вращательных привода определяют положение выходного звена, два линейных привода контролируют его ориентацию.

Спустя несколько лет, в 1947 г., Гоф (Gough .V.E.) разработал новый робот параллельной структуры для решения проблем с аэродинамическими нагрузками [9]. В последствии, в 1965 г., Стюард (Stewart D.) доработал и описал манипулятор с шестью степенями свободы в качестве имитатора полета [10]. Данный робот и его модификации до сих пор остаются одними из самых востребованных роботов в мире [11, 12, 13, 14, 15].

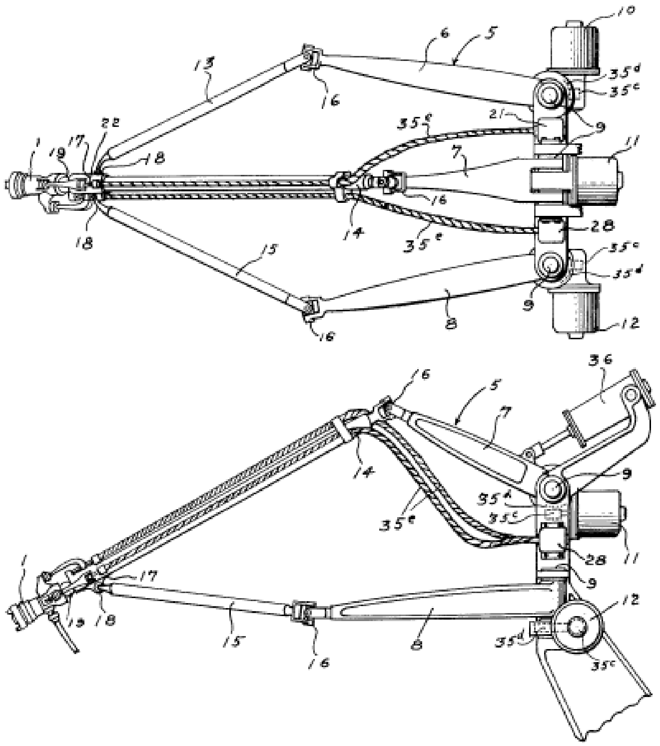


Рисунок 1.1. Первый пространственный промышленный робот параллельной структуры [8].

Платформа Стюарта обладает шестью степенями свободы и состоит из двух платформ: неподвижного основания и подвижной платформы. Они соединены между собой телескопическими звеньями изменяемой длины и крепятся посредством шаровых шарниров. Перемещение и ориентация подвижной платформы в пространстве осуществляется путем изменения длин указанных звеньев (рисунок 1.2).

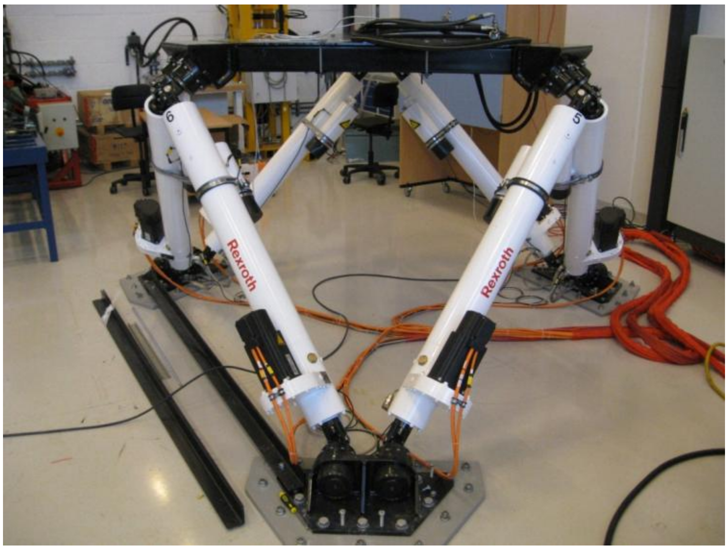


Рисунок 1.2. Платформа Стюарта.

Платформа Стюарта-Гофа успешно применяется во фрезерных станках [16, 17], в поддерживающих устройствах для хирургических операций [18, 19], в симуляторах полёта и подводных роботах [20, 21, 22].

Очередной скачок в развитии роботов рассматриваемых типов произошёл с момента создания робота DELTA, предложенный проф. Реймондом Клавелем (Clavel R.) в 1986 году (рисунок 1.3) [23, 24, 25, 26, 27]. Несмотря на то, что все двигатели (2) этого манипулятора вращательные, выходная платформа (6) не меняет свою ориентацию и всегда остается параллельной основанию (1), совершая при этом только возвратно-поступательные движения. Устойчивость платформы (6) обеспечивают три шарнирных параллелограмма (3), входящие в каждую кинематическую цепь. За счёт телескопического звена (4), который соединён с подвижной платформой (6) и неподвижным основанием (1) двумя карданными шарнирами и расположен вдоль центральной оси механизма, выходное звено (7) получает независимое вращение от неподвижного привода (5). Таким образом, принимая во внимание это дополнительное вращение, робот DELTA имеет четыре степени свободы. Рассматривая данный механизм можно говорить и о кинематической развязке, поскольку поступательное движение платформы (6) никак не влияет на вращательное движение выходного звена (7), оно является независимым. Высокое быстродействие данного МПС обеспечивается малыми массами промежуточных звеньев. Ряд аналогичных устройств был разработан под руководством М. Каррикато и В. Паренти-Кастелли (Carricato M., Parenti-Castelli V.) [28].

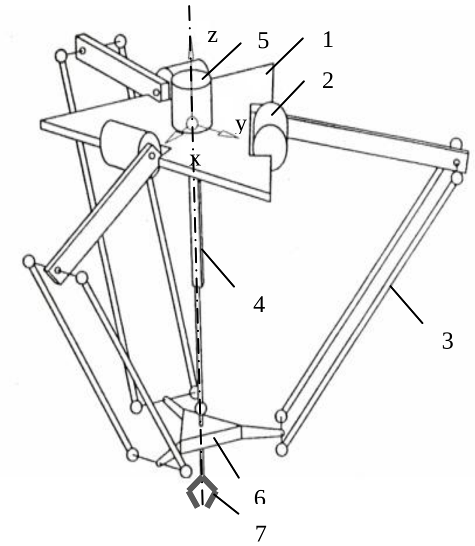


Рисунок 1.3. Робот-манипулятор DELTA [23].

Большой интерес к созданию и использованию МПС связан с их положительными свойствами по сравнению с механизмами последовательной структуры. Вследствие того, что каждая кинематическая цепь механизма воспринимает только часть общей нагрузки, появляется возможность создавать механические конструкции с более высокой жёсткостью, с подвижными звеньями относительно небольшой массы, с лучшими динамическими характеристиками повышать точность позиционирования и грузоподъёмность. Возможность располагать приводы на неподвижном основании уменьшает влияние сил инерции на движении звеньев механизма.

Однако, наряду со всеми преимуществами, МПС имеют недостатки. Это небольшое рабочее пространство, по сравнению с механизмами последовательной структуры; особые положения (сингулярности) в рабочем пространстве; трудности проведения параметрического синтеза механизмов; нелинейность связей между их кинематикой и динамикой.

Обзор литературы показывает, что большое количество механизмов имеют сложные, взаимосвязанные кинематические характеристики, когда поступательное движение кинематически связано с вращательным движением и наоборот. Поэтому кинематические и динамические модели механизма сложны как для анализа, так и для решения задач управления, планирования и позиционирования рабочего органа. Для преодоления указанных сложностей упрощают и разделяют законы управления механизмом. Это позволяет улучшить динамические характеристики манипуляторов, поскольку исключает необходимость синхронизировать различные исполнительные механизмы. Известно два принципа разделения законов управления МПС: 1) кинематическая развязка положения и ориентации выходного звена; 2) кинетическая развязка перемещений приводов и движений выходного звена.

Возможность выявления и реализации кинематической развязки между положением и ориентацией выходного звена (платформы) при решении задач кинематики для МПС весьма полезна, поскольку позволяет упростить вывод и решение уравнений, а так же активизировать алгоритмы управления. Решение подобной задачи в основном сводится к упрощению геометрии (числа промежуточных звеньев) механизма, с одной стороны, положительно сказывается на жёсткости механизма. С другой стороны, в механизмах с полной или частичной кинематической развязкой предъявляются повышенные требования к приводам, поскольку в каждый привод отвечает за одну степень свободы выходного звена, что увеличивает нагрузку на них. Тем не менее, важным преимуществом механизмов с кинематической развязкой являются их простые кинематические зависимости между входными и выходными координатами, упрощающие их динамический анализ.

Некоторые роботы с кинематической развязкой были предложены как иностранными учёными: Инносенти (Innocenti C.) [29], Бернером (Bernier D.) [30], Забалсой (Zabalza I.) [31], Такэдой (Takeda Y.) [32], Бриотом (Briot S.) [33, 34] и др., так и российскими. Колискором А.Ш., Крайневым А.Ф., Глазуновым В.А. и их учениками [5] был выполнен комплекс исследовательских работ, в результате которых предложено большое количество изобретений, связанных с использованием двигательных и измерительных устройств параллельной структуры, в том числе механизмов с кинематической развязкой. Теоретической основой этих разработок, а также анализа и синтеза этого класса пространственных механизмов, явилась общая теория винтов Диментберга Ф.М. [6, 35, 36, 37]. Корендясевым А.И., Саламандрой Б.Л., Тывесом Л.И. и др. изложены основы построения исполнительных механизмов роботов на основе математического анализа базовых схем робототехники, рассмотрены вопросы кинематики, динамики, управления и энергетических соотношений [38, 39].

Механизмы параллельной структуры с кинематической развязкой можно построить, объединяя несколько механизмов в один (например, сферические манипуляторы и МПС с линейными приводами), либо в многоплатформенные схемы, либо в интегрированные более сложные конструкции. Некоторые механизмы последнего типа основаны на принципе, так называемых, «6–4 полностью параллельных манипуляторах» («6-4 fully parallel manipulator», предложенных Паренти-Кастелли и Инноченти (рисунок 1.4) [29]. В то время как другие механизмы того же типа формируются путем объединения частей кинематических цепей поступательных манипуляторов с частями кинематических цепей сферических манипуляторов в более громоздкие кинематические цепи, которые содержат более одного привода. Представленные в работе [40] манипуляторы параллельной структуры с кинематической развязкой рассматриваются как промежуточная версия механизмов между двумя последними, в которой все приводы находятся на основании или рядом с основанием в упрощенной схеме с тремя кинематическими цепями (рисунок 1.5) [32, 41]. Такое преобразование позволяет сохранить лёгкость подвижных масс вместе с хорошими динамическими характеристиками, и уменьшить ограничения рабочего пространства благодаря исключению кинематических элементов.

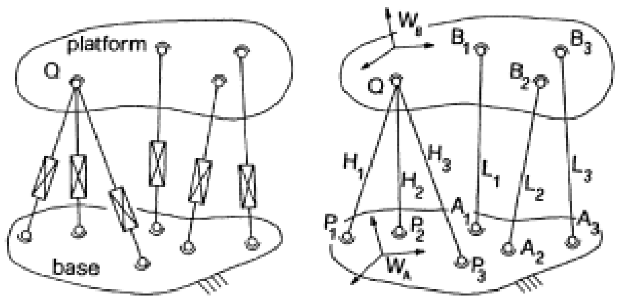


Рисунок 1.4. Схемы 6–4 параллельных манипуляторов [29].

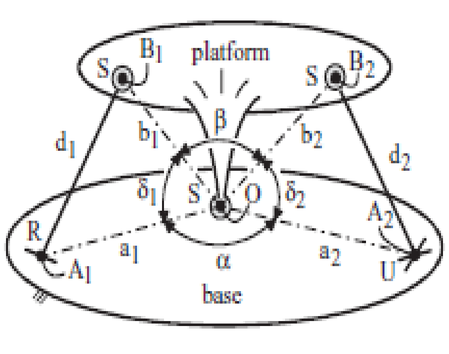


Рисунок 1.5. Схема манипулятора, предложенная Р. Ди Грегорио [41].

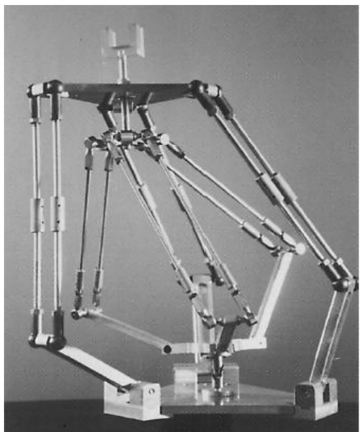


Рисунок 1.6.Манипулятор, состоящий из двух структур DELTA-робота [42].

В работе [42] представлен новый параллельный робот с шестью степенями свободы, использующий набор из двух структур робота Delta (рисунок 1.6). Предложен эффективный метод установления явных взаимосвязей между координатами выходного звена (рабочего органа) с активными и пассивными переменными звеньями кинематической цепи. Моделирование системы позволило проверить согласованность расчётов и показать рабочее пространство в зависимости от механических ограничений переменных пассивных звеньев. Предложен подход для изучения влияния малых зазоров пассивного звена на точность положения и вращения рабочего органа.

Миановский К. (Mianowski K.) в своей работе [43] представил прототип нового робота параллельной структуры POLMAN-3x2 с шестью степенями свободы, предназначенного для выполнения быстрых операций. В конструкции манипулятора были применены специальные механизмы передачи движения, обеспечивающие динамическую развязку. Объединив в своей работе идею пространственного параллелограмма, предложенного Р. Клавелем, идею специальной формы подвижной платформы, аналогичную той, что предложил Джакет (Jacket P.) [44], и, используя параллелограммы для передачи вращения от двигателей, расположенных на основании, к промежуточным звеньям, он получил очень интересную кинематическую схему параллельного манипулятора (рисунок 1.7). Робот POLMAN 3x2 состоит из трёх идентичных кинематических цепей с двумя активными и шестью пассивными степенями свободы каждая. Три одинаковых приводных механизма в виде пяти стержневых плоских параллелограммов с двумя степенями свободы установлены на основании таким образом, что их оси расположены в линиях, параллельных осям x, y, z декартовой системы координат. Подвижная платформа имеет форму полупространственного креста со сферическими шарнирами и соединена с приводными механизмами тремя идентичными параллелограммами, аналогичными тем, что используются в роботе DELTA. При такой конструкции положение выходного звена регулируется вращением стержней (1), (2) и (3), а ориентация регулируется вращением стержней (4), (5) и (6), что позволяет получать линейные перемещения подвижной платформы (прикрепленной к выходному звену манипулятора) независимо от движения шарниров.

В дальнейшем Миановский К. продолжил работу над роботом POLMAN-3x2, но заменил три вращательный привода на три линейных, расположенных на основании и перемещающихся по типичной рейке (рисунок 1.8) [45]. Вторые же три вращательных привода расположены соосно линейным приводам. Для передачи вращения он использовал карданный вал в каждой кинематической цепи с крюковыми соединениями (шарнир Гука) на концах. Каждый вал крепится к приводному механизму, имеющему две степени свободы (поступательную и вращательную). Подвижная платформа выполнена в виде сферического треугольника. Внутренние оси крюковых соединений на концах стержней параллельны друг другу, а внешние оси перпендикулярны внутренним осям. Это свойство можно использовать для изменения ориентации рабочего инструмента.

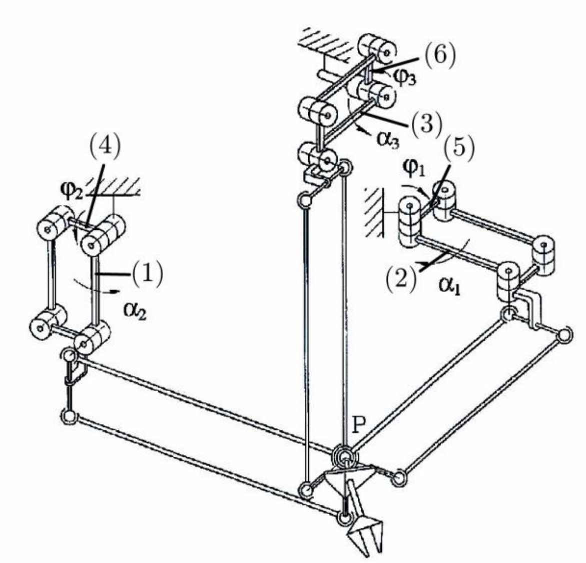


Рисунок 1.7. Схема манипулятора POLMAN 3x2 с шарнирными параллелограммами [43].

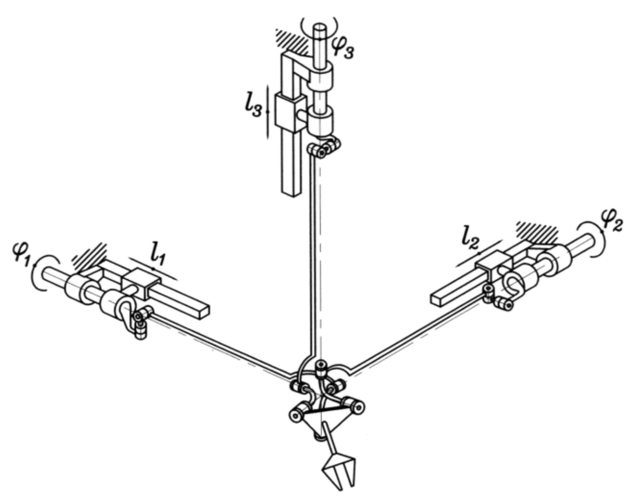


Рисунок 1.8. Схема манипулятора POLMAN 3x2 с карданными валами [45].

В работе [46] Яме Е., Морено Х., Салтарен Р. (Yime E., Moreno H., Saltaren R.) представили новый робот параллельный структуры с шестью степенями свободы и с кинематикой развязкой (рисунок 1.9). Три кинематических цепи контролируют положение одной точки подвижной платформы, а остальные цепи контролируют ориентацию подвижной платформы. Данный робот кинематически эквивалентен схеме, предложенной Инноченти (C. Innocenti) [29]. Одной из трудностей для создания указанного робота являлась разработка конструкции тройного сферического шарнира (механизма). Конструкция сферического шарнира основана на использовании центрального механизма вращательных шарниров с общей осью вращения. Звенья соединены с механизмом посредством соединительного звена с двумя вращательными шарнирами, которые пересекаются в центральной точке механизма. Наличие центрального сферического механизма между тремя внутренними кинематическим цепям позволяет получить кинематическую развязку: внутренние три цепи управляют положением платформы, в то время как внешние кинематические цепи управляет её ориентацией.

Ранее были проведены работы по проектированию механизмов с тройными сферическими шарнирами [29, 47, 48, 49, 50]. Использование сферических шарниров и механизмов в МПС выгодно с точки зрения возможности размещения нескольких звеньев вокруг одной точки вращения. Зачастую, это упрощает кинематику механизма (например, для платформы Гофа-Стюарта) и улучшает его функциональность.

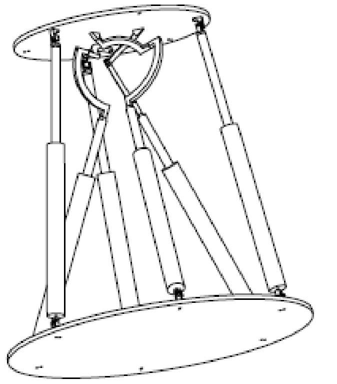


Рисунок 1.9. Манипулятор с тройным сферическим шарниром [46].

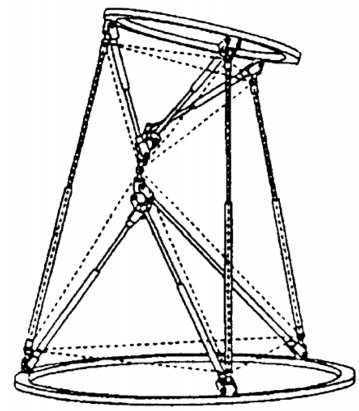


Рисунок 1.10. Модель робота параллельной структуры с избыточным числом связей [48].

Боссчер и Эберт-Упхофф (P. Bosscher and I. Elbert-Upholf) представили механизм, предназначенный для обеспечения возможности соединения нескольких звеньев в один сферический шарнирный механизм (рисунок 1.11) [47]. Этот механизм обеспечивает связь между основными звеньями, соединенными друг с другом через ряд из двух или более промежуточных звеньев. Основные и промежуточные звенья соединены между собой вращательными шарнирами, где все оси шарниров пересекаются в одной точке. Это расположение производит сферическое движение каждого звена в механизме вокруг этой точки пересечения. Кроме того, сферический шарнирный механизм позволяет соединениям звеньев образовывать замкнутую кинематическую цепь. За счёт включения замкнутых кинематических цепей жёсткость механизма может быть значительно повышена.

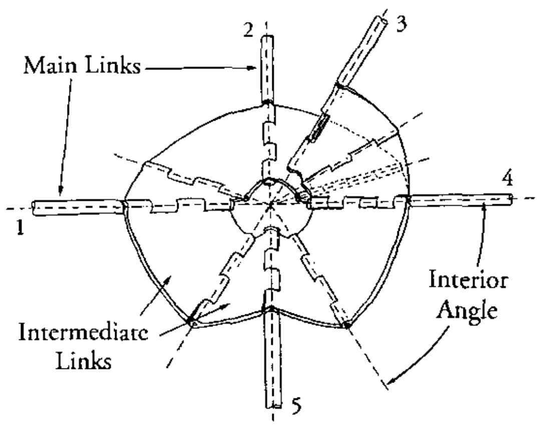


Рисунок 1.11. Схема сферического шарнирного механизма с пятью степенями свободы [47].

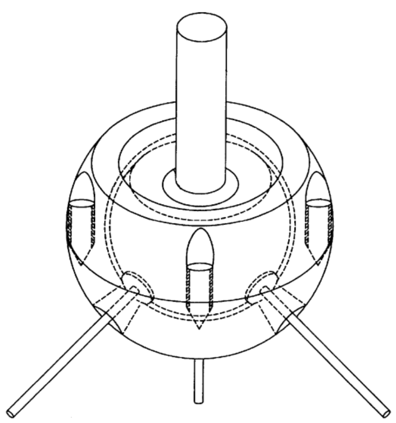
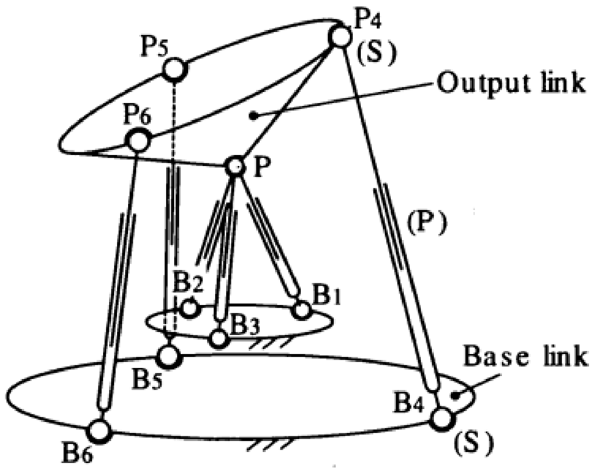
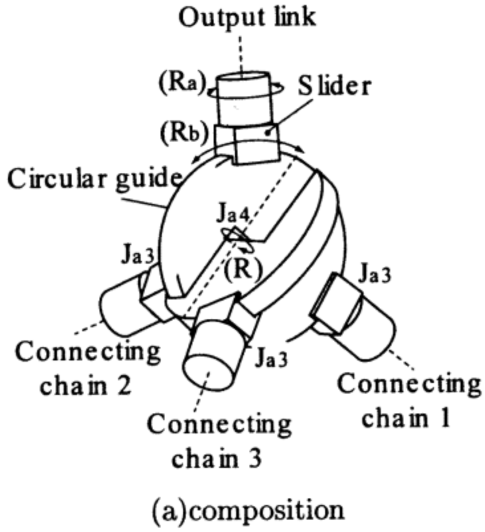


Рисунок 1.12. Сферический шарнир для соединения более трёх звеньев [49].

Зангане и Анжелес (Zanganeh K.E., Angeles J.) представили робот параллельной структуры с избыточным числом связей, где шесть звеньев соединяются в центре механизма с помощью сферического шарнира и шести шарнирных скоб [48]. Сонг и Ким (Song S., Kim W.) представили сферический шарнир для соединения трёх и более звеньев в одной точке [49].

В работе [32] Такеда др. (Takeda Y.) представили исследование разработки механизма с шестью степенями свободы, схожего со структурой робота Инночента (рисунок 1.13, a). Анализ движения и проектирование выполнялся путём разделения ориентации и положения выходного звена. Они представили тройной сферический шарнир, состоящий из небольшой платформы, которая соединена с каждым основным звеном двумя промежуточными звеньями с вращающимися шарнирами, оси которых ортогональны (рисунок 1.13, b). Платформа также содержит сферический шарнир, шар которого соединен с мобильной платформой робота.





a) b)

Рисунок 1.13.Механизм с 6 DOF с кинематической развязкой положения и ориентации выходного звена: а) общий вид механизма; b) схема сферического шарнира [32].

В работе [51] Джин, Чен и Ян (Jin Y., Chen I.-M., Yang G.) предложили новый манипулятор параллельный структуры с избирательным управлением с шестью степенями свободы и с тремя кинематическими цепями (рисунок 1.14). Рабочий орган манипулятора может производить, в зависимости от типов исполнительного механизма (вращательного или поступательного): вращательное (сферическое) движение, используя три вращательных привода и передавая три степени свободы; используя поступательные приводы, обеспечивать три степени свободы поступательного движения; три степени свободы гибридного движения; включение всех приводов обеспечивает шесть степеней свободы, т.е. полное пространственное движение. Архитектура манипулятора полностью разделяет перемещение и вращение рабочего органа для индивидуального управления. Синтез структуры параллельного манипулятора с избирательным управлением достигается использованием его геометрии. Анализ особенностей показывает, что параллельным манипулятором с избирательным управлением представляет собой изотропный поступательный механизм, у которого все двигатели находятся в режиме поступательного движения. Из-за развязанной структуры движения метод декомпозиции применяется как для анализа смещения, так и для оптимизации размеров.

В работе [52], на основе теории винтов и принципа движения кинематической цепи независимым двигателем, предложена методика структурного синтеза механизмов с полной кинематической развязкой с четырьмя степенями свободы, обеспечивающих три вращательных и одно поступательное движение (3R1T, где R – вращательное движение, T – поступательное движение) (рисунок 1.15).

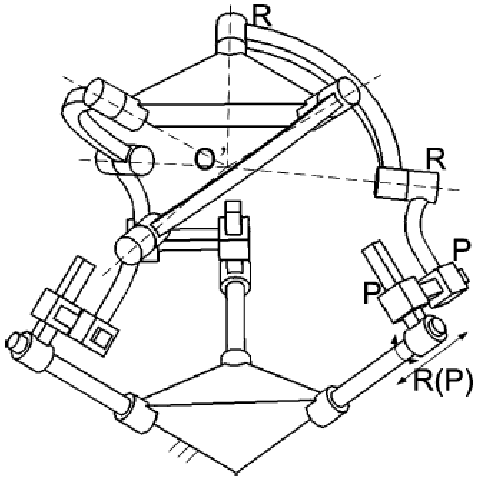


Рисунок 1.14. манипулятор параллельный структуры с избирательным управлением с шестью степенями свободы [51].

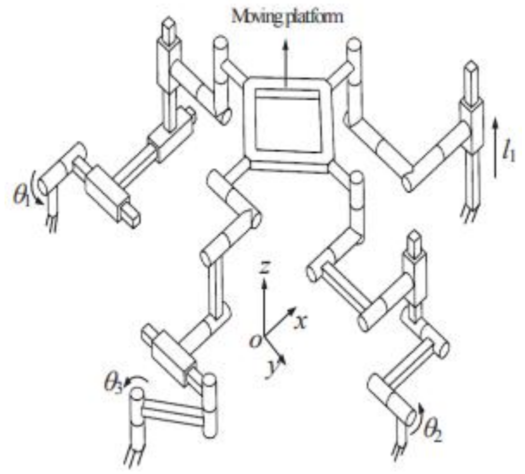


Рисунок 1.15. 3R1T механизм параллельной структуры с полной кинематической развязкой [52].

Учёными из Франции Вигеном Аракеляном и Себастьяном Брио (Briot S., Arakelian V.) [33, 34] было разработано и представлено новое семейство манипуляторов параллельной структуры – PAMINSA (**PA**rallel **M**anipulators of the **I.N.S.A.**, Франция) (рисунок 1.16). В своей работе они пытались разделить перемещения в горизонтальной плоскости от перемещений вдоль/вокруг других направлений. Для этих целей они используют свойства пантографа. Данный манипулятор имеет 4 степени свободы: три вращательных привода обеспечивают поступательное движение подвижной платформы, один линейный привод отвечает за вращательную степень свободы.

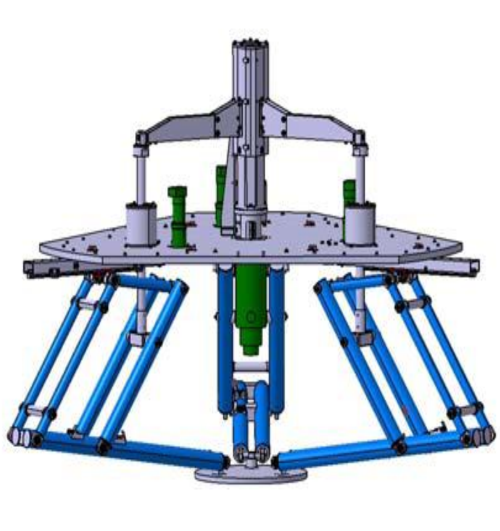


Рисунок 1.16. Манипулятор PAMINSA с четырьмя степенями свободы [33].

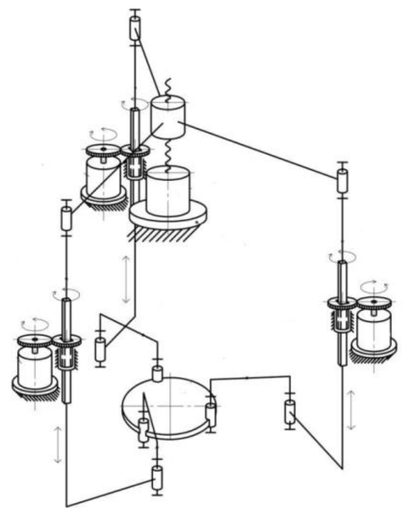


Рисунок 1.17. Манипулятор аналог с четырьмя степенями свободы [53].

Близким аналогом робота PAMINSA является манипулятор с четырьмя степенями свободы, однако механизм пантографа в полученном решении не требуется [53, 54] (рисунок 1.17). Это упростило конструкцию и сделало её более эффективной и надёжной в работе.

В Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Институте машиноведения им. А.А. Благонравова Российской Академии Наук (ИМАШ РАН) также занимались вопросами кинематической развязки. В частности Глазуновым В. А., Тывесом Л. И., Данилиным П.О. и др. был разработан МПС с шестью степенями свободы на основе универсальных шарниров с дополнительными ограничениями (рисунок 1.18) [55, 56].

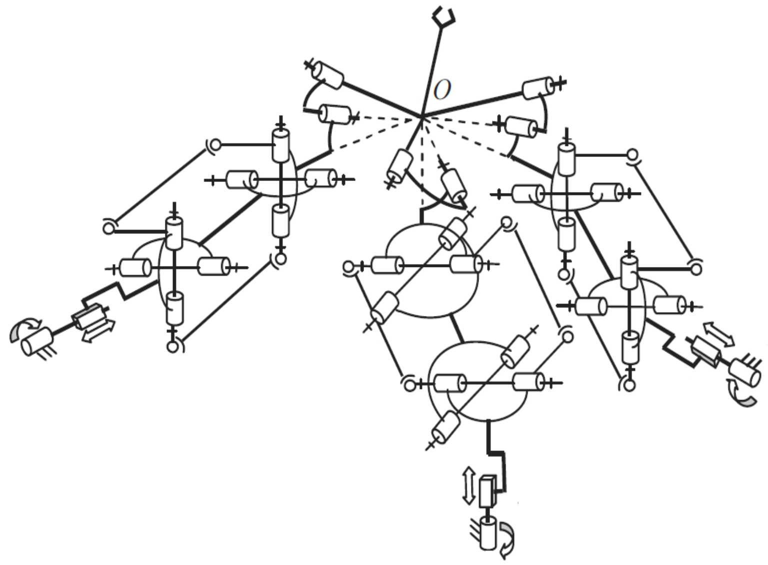


Рисунок 1.18 МПС на основе универсальных шарниров [55].

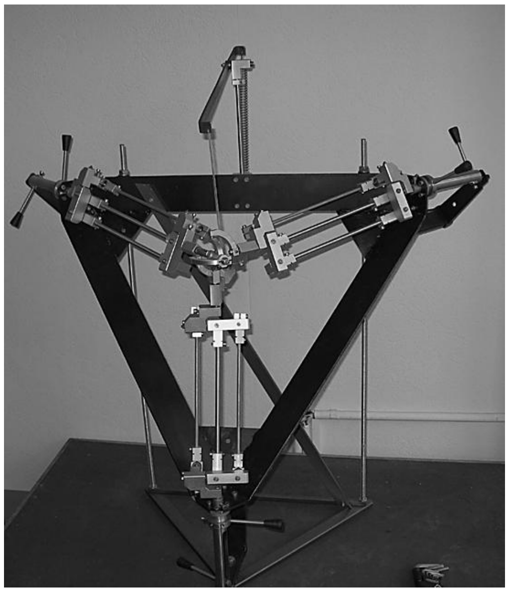


Рисунок 1.19 МСП с шестью степенями свободы на основе разработанной схемы [57].

Каждая кинематическая цепь механизма состоит из одного вращающегося привода, расположенного на основании, одного линейного привода, двух призматических кинематических пар, представленных в виде двух U-образных шарниров (где U – шарнир Гука) с дополнительными ограничениями, и двух пассивных пар вращения. С помощью теории винтов был произведен синтез данного механизма, анализ особых положений. Так же показано, что данный механизм имеет свойства кинематической развязки, где вращающиеся исполнительные механизмы отвечают за ориентацию выходного звена, в то время как линейные исполнительные механизмы отвечают за его положение.

В дальнейшем был изготовлен натурный образец МСП с шестью степенями свободы на основе разработанной схемы (рисунок 1.19) [57], где на практике было показано наличие кинематической развязки.

Еще один механизм параллельной структуры с шестью степенями свободы с кинематической развязкой представлен на рисунке 1.20 [35]. Он состоит из трёх кинематических цепей; каждая цепь содержит: двигатель вращательного перемещения, расположенный на основании; двигатель поступательного перемещения; два шарнирных параллелограмма, представляющие собой две поступательные кинематические пары; две промежуточные вращательные кинематические пары. Оси всех промежуточных пар пересекаются в точке O. С помощью теории винтового исчисления и подхода, основанного на замкнутых группах винтов, показаны все возможные повороты выходного звена и все ограничения, накладываемые кинематическими цепями, без вывода кинематических уравнений.

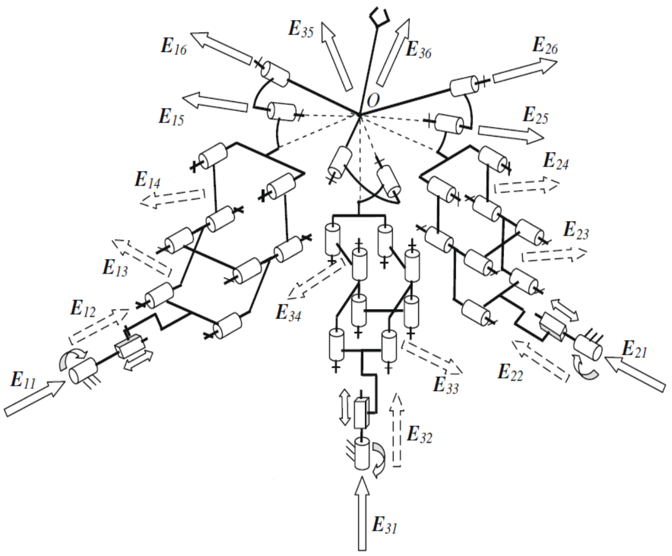


Рисунок 1.20. механизм с шестью степенями свободы с кинематической развязкой [35].

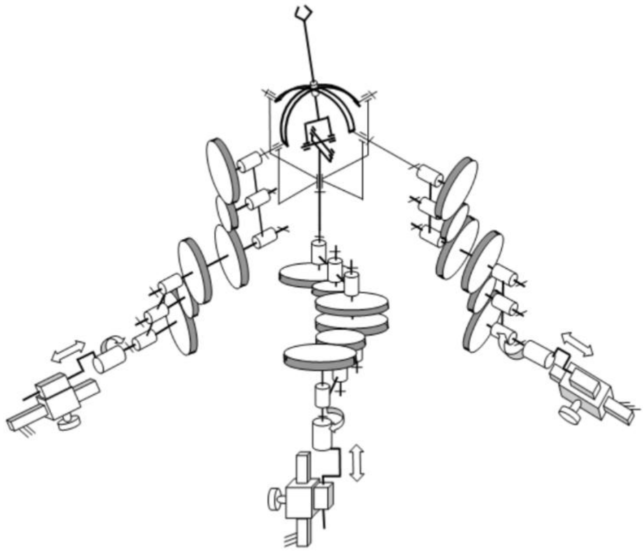


Рисунок 1.21. механизм с зубчатыми передачами [58].

В работе [58, 59] представлен еще один механизм с шестью степенями свободы с кинематической развязкой, разработанный в ИМАШ РАН. В данном механизме в каждой кинематической цепи вращение на выходное звено осуществляется через последовательно установленную систему зубчатых колёс (передач), которые расположены перпендикулярно оси двигателя вращательного перемещения. Две кинематические цепи содержат дугообразные направляющие, которые отвечают за положение выходного звена. В третьей кинематической цепи расположены два карданных шарнира, которые передают вращение на рабочий орган, и отвечают за его ориентацию (рисунок 1.21).

1.2 Механизмы параллельной структуры с шарнирными параллелограммами

Использование шарнирного параллелограмма в конструкции МПС позволяет выходному звену оставаться в фиксированном положении по отношению к входному звену. Пожалуй, самый известный манипуляционный механизм, содержащий в своей конструкции шарнирные параллелограммы, является манипулятор DELTA, описанный выше (рисунок 1.3).

На базе робота DELTA компанией Cama было разработано погрузочное устройство Triaflex (рисунок 1.22) [60, 61], которое включает в себя от четырёх до двенадцати DELTA-роботов. Поскольку один DELTA-робот может работать со скоростью до 120 циклов в минуту, то за счёт одновременного захвата нескольких продуктов при помощи системы «мультизахвата» робот может обрабатывать до 300 единиц продукции в минуту. А система Triaflex в свою очередь обеспечивает динамическую синхронизацию конвейерной ленты для захвата и перекладки продукции со скоростью до 110 метров в минуту. Это также позволяет отдельные единицы продукции помещать во вторичную упаковку для завёртывания.

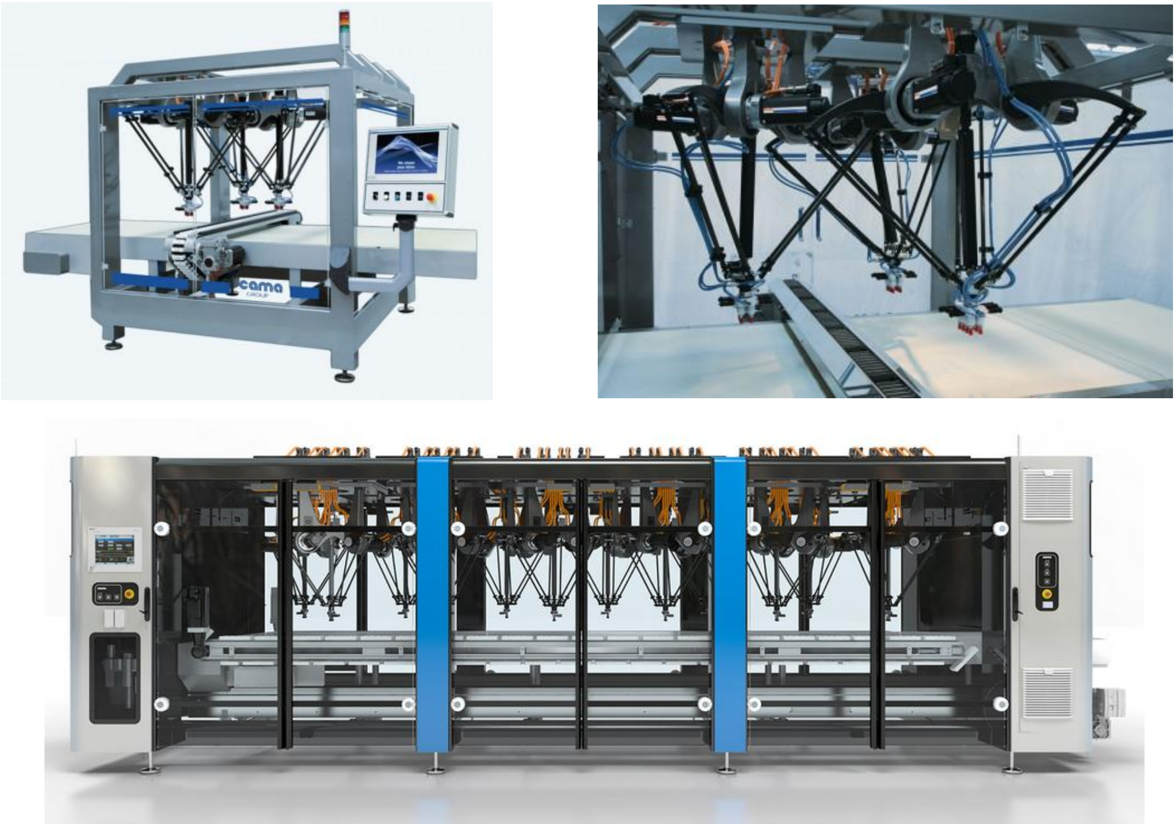


Рисунок 1.22. Погрузочное устройство Triaflex, состоящее из DELTA-роботов.

Уникальность данного погрузочного устройства от Cama, в отличие от других, состоит в том, что используется единый контроллер движения IndraMotion MLC от компании Rexroth для всего устройства Triaflex, а не управляется каждым роботом по отдельности со своим контроллером. Также в Triaflex возможно подключение четвёртого робота и двух дополнительных осей конвейера без негативного влияния на работу линии. Применение одного контроллера позволяет избежать необходимости создания многоканальных интерфейсов между устройствами управления отдельными роботами. Данные интерфейсы необходимы для обеспечения передачи информации с системы камеры и координации роботов для предотвращения столкновений.

На основе манипулятора DELTA были разработаны новые близкие по структуре механизмы (рисунок 1.23, 1.24) [62, 63]. Отличие данных схем манипуляторов от DELTA состоит в конструкции параллелограммов в кинематических цепях.

Рисунок 1.23. FlexPicker от ABB.

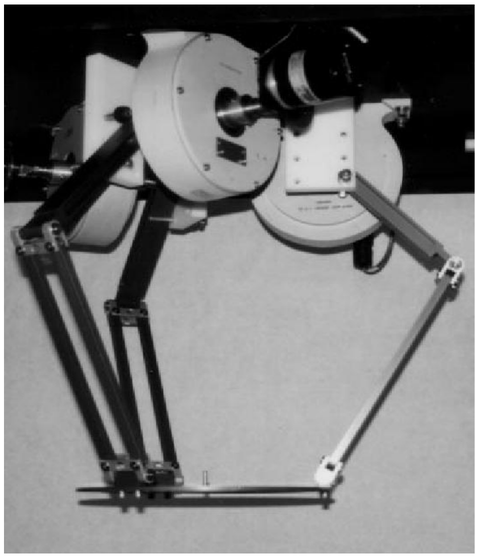


Рисунок 1.24. Манипуляторы с тремя поступательными степенями свободы [62].

Авторами Ли, Вангом и др. (Liu X.-J., Wang J., Gao F., Wang L.-P.) был предложен пространственный параллельный манипулятор с тремя степенями свободы, состоящий из трёх кинематических цепей, в одной из которых имеется шарнирный параллелограмм (рисунок 1.25) [64]. Подвижная платформа имеет три степени свободы: две поступательных и одну вращательную по отношению к неподвижному основанию. В этой конструкции наличии шарнирного параллелограмма гарантирует желаемую степень свободы на выходной платформе, для робота DELTA, например, ограничить вращение платформы.

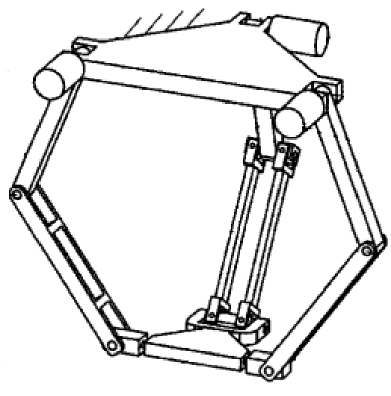


Рисунок 1.25.Пространственный параллельный манипулятор с тремя степенями свободы [64].

В дальнейшем они развили эту тему и в работе [65] рассматривается уже целое семейство МПС с тремя степенями свободы. Новизна его состоит в том, чтобы хотя бы одна кинематическая цепь содержала плоский шарнирный параллелограмм, при этом каждый разработанный манипулятор имеет высокую вращательную способность. А наличие хотя бы одного шарнирного параллелограмма в одной из кинематических цепей позволяет выходному звену не менять ориентации по отношению к основанию.

Пьеро Ф. и Компани́ О. (Pierrot F., Company O.) предложили целое семейство МПС с четырьмя степенями свободы и назвали его H4 [66]. Их решение заключается в создании полностью параллельного механизма без пассивной кинематической цепи, способного обеспечить высокую производительность с точки зрения скорости и ускорения. Манипулятор H4 имеет три поступательные степени свободы и одну вращательную вокруг своей оси. Манипулятор H4 полезен для высокоскоростной обработки в робототехнике и фрезерования в станкостроительной промышленности.

В работе [67, 68] авторы проводят кинематический анализ манипулятора H4, рассматривают различные варианты компоновки его структуры, методы синтеза при проектировании, решаются прямые и обратные задачи кинематики, анализ особых положений с использованием линейной геометрии и теории винтов (рисунок 1.26).

Рисунок 1.26 Симметричный манипулятор H4 с призматическими и вращательными соединениями [67].

Венгером Ф. и Шабля Д. (Wenger P., Chablat D.) был создан робот Orthoglide, относящийся к семейству трёх осевых поступательных МПС с переменными шаговыми точками и фиксированной длиной стоек [69] (рисунок 1.27). Данный механизм имеет три идентичные кинематические цепи PRPaR цепи (где P, R и Pa – призматический исполнительный механизм, вращательная кинематическая пара и шарнирный параллелограмм, соответственно). Эти соединения могут приводиться в действие с помощью линейных приводов или приводов с шарико-винтовой передачей. Выходное звено соединено с призматическим исполнительным механизмом через набор из трёх параллелограммов, поэтому он может двигаться только поступательно. Данный механизм имеет симметричную структуру и достаточно простую кинематическую цепь, где все соединения имеют одну степень свободы. За счёт своей конструкции данный механизм не имеет особых положений.

Развитием авторами вышеописанного робота Orthoglide является создание механизма с пятью степенями свободы, расширенного за счёт добавления карданных валов в два шарнирных параллелограмма в две кинематические цепи [70] (рисунок 1.28). В схему были добавлены кинематические пары, обеспечивающие вращение рабочего органа. Однако это потребовало введение передаточных элементов (валов), что снизило жёсткость конструкции.

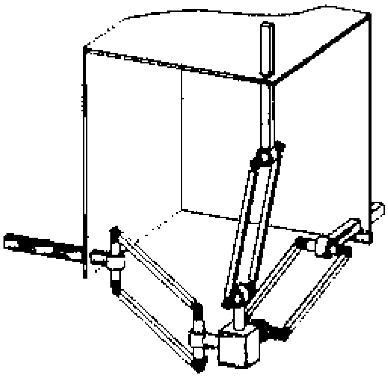


Рисунок 1.27. Схема робота Orthoglide [69].

Выходное звено манипулятора организовано в виде сферического запястья с двумя степенями свободы, полученного из механизма с тремя степенями свободы «Agile eye» авторов Госселена и Хамеля (Gosselin C. , Hamel J.F.) [71]. Тем не менее, французскими учёными было спроектировано сферическое запястье с двумя степенями свободы с высокой жёсткостью [72]. Данное запястье состоит из пяти звеньев, соединенных посредством вращательных шарниров. При этом приводятся в действие два вращательных шарнира, соединенные с основанием. Оси вращательных шарниров пересекаются (рисунок 1.29).

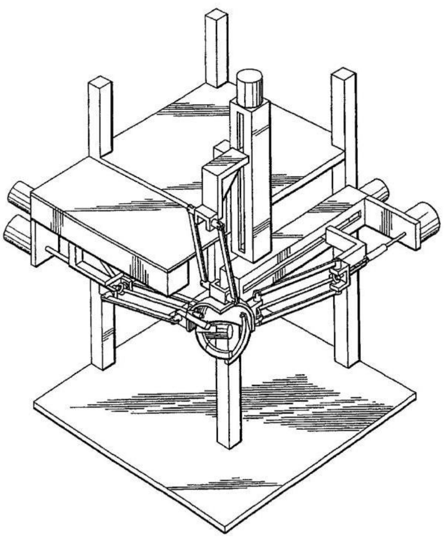


Рисунок 1.28.Манипулятор Orthoglide с пятью степенями свободы [70].

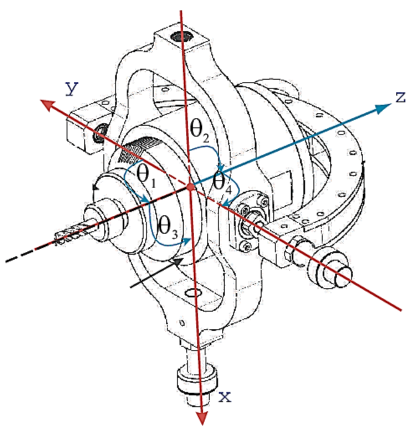


Рисунок 1.29. Сферическое запястье с двумя степенями свободы [72].

Наиболее важным преимуществом МПС с кинематической развязкой являются их очень простые кинематические зависимости между входными и выходными координатами, и, как следствие, упрощение их динамического анализа. Но, несмотря на все преимущества, такие механизмы имеют свои недостатки: увеличение количества промежуточных звеньев, которые умножает количество параметров, и могут вызывать ошибки на этапе изготовления; потеря жёсткости конструкций, что противоречит одному из самых из главных преимуществ механизмов параллельных структуры – каждая кинематическая цепь воспринимает только часть общей нагрузки, приводящая к созданию более жёстких механизмов (роботов). Очевидно, что попытка упростить законы управления МПС и сохранить их основные преимущества, является сложной задачей.

Увеличивая жёсткость конструкции за счёт замкнутых кинематических цепей, следовательно, и увеличивая грузоподъёмность относительно собственного веса, уменьшается рабочая зона манипулятора.

Также отмечалось, что система управления манипулятором параллельной структуры значительно сложнее, чем у манипуляторов последовательной структуры. Это объясняется тем, что движение выходного звена в рамках одной степени свободы должно скоординировано управляться работой всех приводов. Данную проблему можно решить частичной или полной развязкой движений выходного звена, где каждый привод отвечает за одну степень свободы выходного звена, но при этом увеличивается нагрузка на привод. С этим же в последствие будет связана потеря в жёсткости конструкции и повышение требований к приводам.

Ещё одним недостатком МПС является наличие сингулятностей (особых положений), в которых возможно происходит либо потеря степени свободы, либо теряется управляемость выходных звеном. Во избежание попадания в зоны или отдельные точки особых положений необходимо разрабатывать специальные алгоритмы обхода, прописанные в общем алгоритме управления системой, либо использование дополнительных приводов, что ведёт к усложнению конструкции и, следовательно, к усложнению системы управления данным механизмом.

Но с другой стороны при всех своих недостатках интерес к механизмам параллельной структуры не ослабевает и в общемировом масштабе является одним из перспективных направлений для исследований, о чём можно судить по результатам на конференциях и симпозиумах по робототехнике.

Выводы по главе

1. Анализ состояния и использования робототехнических устройств показал, что в последнее время все более интенсивно развиваются манипуляторы (механизмы) параллельной структуры. Большой интерес к МПС вызван их положительными свойствами, такими как: более вы-

сокая жёсткость конструкции; более высокая точность позиционирования и грузоподъёмность, меньшая инерционность в динамике [73].

2. Особо выделяются механизмы с кинематической развязкой, которые характеризуются относительно простыми кинематическими связями между входными и выходными координатами, что исключает необходимость синхронизировать исполнительные механизмы [74].

3. Введение кинематической развязки между положением и ориентацией выходного звена упрощает вывод и решение уравнений, а также способствует активизации системы управления.

4. Имеющиеся недостатки механизмов параллельной структуры, такие как небольшое рабочее пространство; наличие особых положений в близости от рабочего пространства, сложность параметрического синтеза и нелинейные соотношения между кинематикой и динамикой преодолеваются выбором объектов с соответствующими техническими условиями, выбором алгоритма управления, обеспечивающего обход особых положений, введением комплексных элементов, состоящих из группы звеньев.

ГЛАВА 2
АНАЛИЗ СТРУКТУРЫ И РАБОТОСПОСОБНОСТИ МЕХАНИЗМОВ ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ С ЧЕТЫРЬМЯ, ПЯТЬЮ И ШЕСТЬЮ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Из числа механизмов параллельной структуры, рассмотренных в главе 1, в качестве прототипа был выделен робот Orthoglide [69], относящийся к семейству поступательных МПС с переменными шаговыми точками и фиксированной длиной стоек. В каждой кинематической цепи располагается двигатель поступательного перемещения, который передаёт перемещение выходного звена только по одной координате декартовой системы. Данный механизм обладает свойством кинематической развязки, т.е. одно движение (перемещение) выходного звена обеспечивается за счёт только одного входного звена или группы звеньев кинематической цепи. Развитием робота Orthoglide является увеличение степеней его подвижности добавлением карданных валов в кинематические цепи [70], что снизило жёсткость конструкции.

В данной главе приводятся результаты дальнейшего развития робота Orthoglide с тремя степенями свободы в целях повышения его жёсткости. Для этой цели в исходную схему была введена дополнительная вращательная кинематическая пара, которая позволила двигателю поступательного перемещения выполнять с помощью шарнирного параллелограмма также вращательное движение. Это привело к увеличению функциональных возможностей механизмов. Для разработанных схем выполняется структурный анализ и синтез. Методом винтов [6, 35, 36, 37, 75] показана возможность передачи шарнирным параллелограммом вращательного движения.

В решении поставленных задач возникла трудность с определением числа степеней подвижностей механизмов с шарнирными параллелограммами. Для её преодоления было предложено допущение, что в цепи, содержащей двигатель поступательного перемещения, шарнирный параллелограмм рассматриваем как одноподвижную поступательную кинематическую пару, а в двух цепях, не имеющих двигателей вращательного перемещения, шарнирные параллелограммы заменяем карданными шарнирами. В данной главе последовательно рассматриваются задачи определения числа степеней подвижности механизмов с четырьмя, пятью и шестью степенями свободы.

2.1. Разработка структурных схем, определение числа степеней свободы механизмов и работоспособности механизма параллельной структуры с четырьмя степенями свободы

Рассмотрим механизм, являющийся развитием робота Orthoglide, у которого добавлена одна вращательная степень свободы, при этом вращение передается той же кинематической цепью, которая обеспечивает поступательное движение.

Пространственный механизм параллельной структуры включает: основание; выходное звено; рабочий орган, кинематически связанный с выходным звеном; три кинематические цепи, содержащие каждая двигатель поступательного перемещения, который расположен параллельно одной из ортогональных осей координат; начальную вращательную кинематическую пару, ось которой расположена перпендикулярно оси соответствующего двигателя поступательного перемещения; шарнирный параллелограмм, начальное звено которого совмещено с осью соответствующей начальной вращательной кинематической пары, а вращательные кинематические пары шарнирного параллелограмма расположены перпендикулярно оси начальной вращательной кинематической пары; конечную вращательную кинематическую пару, ось которой совмещена с осью конечного звена шарнирного параллелограмма; конечное звено кинематической цепи, сопряженное с выходным звеном механизма; в одной из кинематических цепей расположен двигатель вращательного перемещения, ось которого расположена параллельно оси соответствующего двигателя поступательного перемещения, а также выходная вращательная кинематическая пара, ось которой параллельна оси двигателя вращательного перемещения, сопрягающая конечное звено кинематической цепи с выходным звеном механизма. Конечное звено кинематической цепи, которая содержит двигатель вращательного перемещения, сопряжено посредством выходной вращательной кинематической пары с выходным звеном механизма и жёстко связано с рабочим органом, а конечные звенья двух других кинематических цепей жёстко связаны с выходным звеном механизма [76].

При определении числа степеней подвижности механизмов с шарнирными параллелограммами получаются отрицательные числа степеней подвижности из-за наличия избыточных кинематических пар и звеньев. Для решения этой проблемы было принято допущение, что в конечном случае в цепи, содержащей двигатель поступательного движения, шарнирный параллелограмм рассматриваем как одноподвижную поступательную кинематическую пару, а в двух цепях, не имеющих двигателей вращательного перемещения, шарнирные параллелограммы заменяем карданными шарнирами.

Определим число степеней подвижности механизма сначала без учёта принятого допущения.

Число степеней свободы данного манипуляционного механизма по формуле А.П. Малышева для пространственных механизмов (рисунок 2.1):

$$W = 6 \cdot (n-1) - 5 \cdot p_5 - 4 \cdot p_4, \tag{2.1}$$

где n – число звеньев; p_5 – число пар пятого класса (одноподвижных пар); p_4 – число пар четвертого класса (двухподвижных пар).

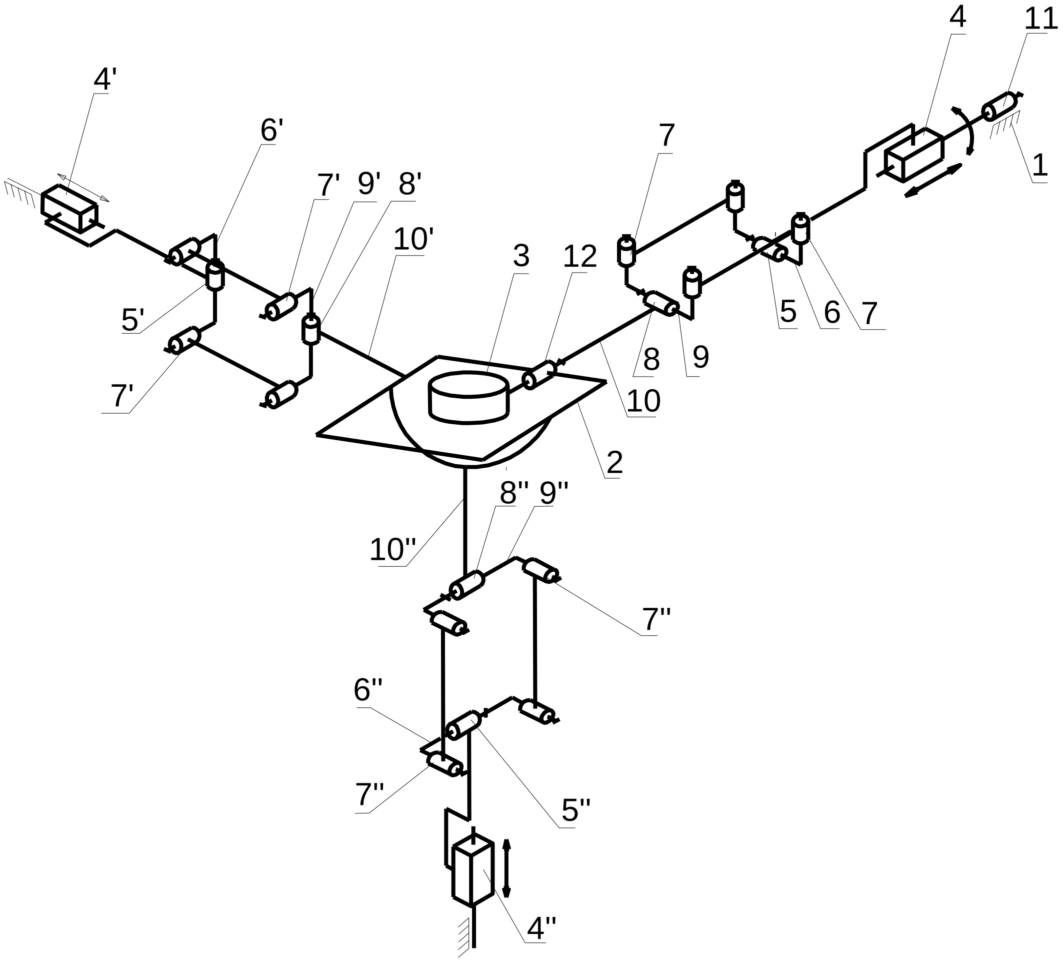


Рисунок 2.1. Структурная схема механизма с четырьмя степенями свободы.

Подсчитаем число (*n*) звеньев в механизме. Пространственный механизм включает: основание (1 – одно звено), выходное звено (2 – одно звено), рабочий орган (3 – одно звено). Каждая кинематическая цепь содержит двигатель поступательного перемещения (4, 4', 4"). Между двигателем поступательного перемещения (4, 4', 4") и начальной вращательной кинематической парой (5, 5', 5'') расположено звено (всего три звена), которое параллельно оси соответствующего двигателя поступательного перемещения (4, 4', 4"). Шарнирный параллелограмм, начальное звено (6, 6', 6'') которого (всего три звена) совмещено с осью соответствующей начальной вращательной кинематической парой (5, 5', 5'').Конечную вращательную кинематическую пару (8, 8', 8''), ось которой совмещена с осью конечного звена шарнирного параллелограмма (9, 9', 9'') (всего три звена) (кроме того, надо учесть промежуточные звенья параллелограмма – всего шесть звеньев). И конечное звено кинематической цепи (10, 10', 10''). В одной из кинематических цепей расположен двигатель вращательного перемещения (11), ось которого расположена параллельно оси соответствующего двигателя поступательного перемещения (4). Между двигателем вращательного перемещения (11) и двигателем поступательного перемещения (4) расположено звено (всего одно звено), которое параллельно оси соответствующего двигателя поступательного перемещения (4); выходная вращательная кинематическая пара (12), сопрягает конечное звено кинематической цепи (10) с выходным звеном механизма (2). Конечное звено кинематической цепи (10), содержащей двигатель вращательного перемещения (11), сопряжено посредством выходной вращательной кинематической пары (12) с выходным звеном механизма (2) и жёстко связано с рабочим органом (3), а конечные звенья двух других кинематических цепей (10’, 10’’) жестко связаны с выходным звеном механизма (2). Так как звено (10) жёстко связано с рабочим органом (3), а звенья (10’, 10’’) – с выходным звеном механизма (2), то звенья (10) и (3) можно принимать за одно звено, также как и звенья (10’,10’’) и (2). Таким образом, в общей сложности получаем 19 звеньев.

В число одноподвижных пар (p_5) пространственного механизма входят: основание (1), выходное звено (2), рабочий орган (3). Каждая кинематическая цепь содержит двигатель поступательного перемещения (4, 4’, 4”) (всего три кинематических пары). Начальную вращательную кинематическую пару (5, 5’, 5’’) (всего три кинематических пары); шарнирный параллелограмм, начальное звено (6, 6’, 6’’) которого совмещено с осью соответствующей начальной вращательной кинематической пары (5, 5’, 5’’); вращательные кинематические пары шарнирного параллелограмма (7, 7’, 7’’) (всего двенадцать кинематических пар). Конечную вращательную кинематическую пару (8, 8’, 8’’) (всего три кинематических пары). В одной из кинематических цепей расположен двигатель вращательного перемещения (11) (всего одна кинематическая пара), ось которого расположена параллельно оси соответствующего двигателя поступательного перемещения (4). Выходная вращательная кинематическая пара (12) (всего одна кинематическая пара), ось которой параллельна оси двигателя вращательного перемещения (11), сопрягающая конечное звено кинематической цепи (10) с выходным звеном механизма (2). Конечное звено кинематической цепи (10), содержащей двигатель вращательного перемещения (11), сопряжено посредством выходной вращательной кинематической пары (12) с выходным звеном механизма (2) и жёстко связано с рабочим органом (3), а конечные звенья двух других кинематических цепей (10’, 10’’) жёстко связаны с выходным звеном механизма (2). Получаем 23 одноподвижные кинематические пары в механизме.

Подставив полученные значения числа звеньев и одноподвижных кинематических пар в (2.1), имеем:

$$W = 6 \cdot (19 - 1) - 5 \cdot 23 = -7 .$$

Данный результат не является верным, так как не учитываются шарнирные параллелограммы. Примем, что число степеней свободы шарнирного параллелограмма по формуле П.Л. Чебышева равно единице. Тогда

$$W = 3 \cdot (n - 1) - 2 \cdot p_5 - p_4 , \qquad (2.2)$$

где n – число звеньев; p_5 – число пар пятого класса (одноподвижных пар); p_4 – число пар четвертого класса (двухподвижных пар).

По формуле (2.2) имеем:

$$W = 3 \cdot (4 - 1) - 2 \cdot 4 = 1.$$

Параллелограмм, будучи плоским механизмом, имеет одну степень свободы, и мы можем его рассматривать как одноподвижную поступательную кинематическую пару. Подсчитаем число степеней свободы при этом условии.

В данном случае принимаются во внимание те же звенья, что были и ранее за исключением промежуточных звеньев параллелограмма. Двенадцать вращательных кинематических пар трёх параллелограммов заменяются тремя поступательными кинематическими парами. При этом получаем:

$$W = 6 \cdot (13 - 1) - 5 \cdot 14 = 2.$$

Данный результат так же является не верным.

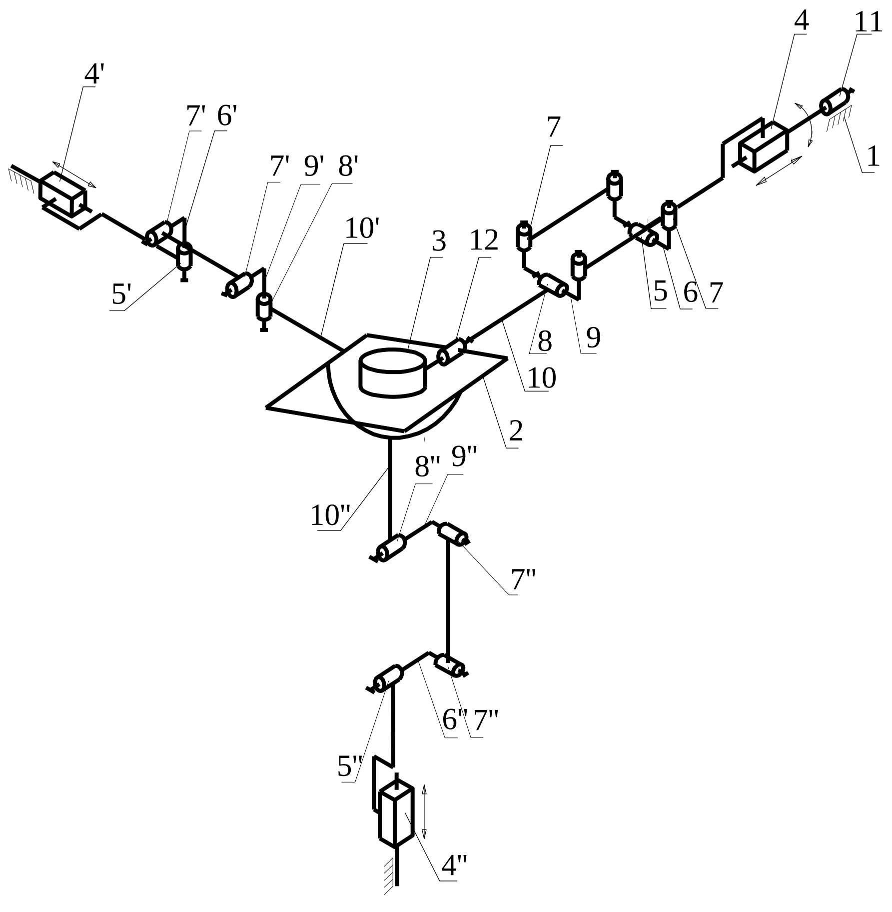


Рисунок 2.2. Структурная схема механизма с четырьмя степенями свободы с заменой шарнирных параллелограммов карданным шарниром.

Заменим в двух кинематических цепях, не содержащих двигатель вращательного перемещения, шарнирные параллелограммы карданным шарниром, а в третьей кинематической цепи, содержащей двигатель вращательного перемещения, шарнирный параллелограмм будем принимать как поступательную кинематическую пару (рисунок 2.2).

В таком случае подсчитаем число (n) звеньев в механизме. Пространственный механизм включает: основание (1 – одно звено), выходное звено (2 – одно звено), рабочий орган (3 – одно звено). Каждая кинематическая цепь содержит двигатель поступательного перемещения (4, 4’, 4”) и начальную вращательную кинематическую пару (5, 5’, 5’’), а также звено, расположенное между ними (всего три звена). В двух кинематических цепях начальное звено шарнирного параллелограмма (6, 6’, 6’’) (всего три звена) и конечное звено шарнирного параллелограмма (9, 9’, 9’’) (всего три звена) связаны между собой промежуточным звеном (всего два звена), а в кинематической цепи, содержащей двигатель вращательного перемещения, шарнирный параллелограмм считается замененный поступательной парой. Как и в предыдущем случае, звено (10) жёстко связано с рабочим органом (3), а звенья (10’, 10’’) – с выходным звеном механизма (2), то звенья (10) и (3) можно принимать за одно звено, также как и звенья (10’,10’’) и (2). Конечную вращательную кинематическую пару (8, 8’, 8’’), конечное звено кинематической цепи (10, 10’, 10’’). В одной из кинематических цепей расположен двигатель вращательного перемещения (11), ось которого расположена параллельно оси соответствующего двигателя поступательного перемещения (4). Между двигателем вращательного перемещения (11) и двигателем поступательного перемещения (4) расположено звено (всего одно звено), которое параллельно оси соответствующего двигателя поступательного перемещения (4). В общей сложности получаем 15 звеньев.

Теперь подсчитаем число одноподвижных пар (p_5). Пространственный механизм включает: основание (1), выходное звено (2), рабочий орган (3). Каждая кинематическая цепь содержит двигатель поступательного перемещения (4, 4’, 4”) (всего три кинематических пары). Начальную вращательную кинематическую пару (5, 5’, 5’’) (всего три кинематических пары), начальное звено (6, 6’, 6’’) совмещено с осью соответствующей начальной вращательной кинематической пары (5, 5’, 5’’); вращательные кинематические пары карданного шарнира (7’, 7’’) (всего четыре кинематических пары) и поступательная кинематическая пара (7) (всего одна). Конечную вращательную кинематическую пару (8, 8’, 8’’) (всего три кинематических пары). В одной из кинематических цепей расположен двигатель вращательного перемещения (11) (всего одна кинематическая пара), ось которого расположена параллельно оси соответствующего двигателя поступательного перемещения (4). Выходная вращательная кинематическая пара (12) (всего одна кинематическая пара), ось которой параллельна оси двигателя вращательного перемещения (11), сопрягающая конечное звено кинематической цепи (10) с выходным звеном механизма (2). Конечное звено кинематической цепи (10), содержащей двигатель вращательного перемещения (11), сопряжено посредством выходной вращательной кинематической пары (12) с выходным звеном механизма (2) и жёстко связано с рабочим органом (3), а конечные звенья двух других кинематических цепей (10’, 10’’) жёстко связаны с выходным звеном механизма (2). Получаем 16 одноподвижных кинематических пар в механизме.

Подставив полученные значения звеньев и одноподвижных кинематических пар в (2.1), имеем число степеней свободы механизма, равное четырём:

$$W = 6 \cdot (15 - 1) - 5 \cdot 16 = 4.$$

Для определения работоспособности рассматриваемого механизма с четырьмя степенями свободы воспользуемся методом винтового исчисления, рассмотрев плюккеровы координаты ортов осей кинематических пар. Этот метод позволяет выявить возможные особые положения (сингулярности), а также неуправляемую подвижность.

При этом каждой кинематической паре ставится в соответствие орт её оси, и составляется матрица плюккеровых координат этих ортов. Соответствующее построение приведено на рисунке 2.3.

Итак, рассмотрим плюккеровы координаты единичных винтов осей кинематических пар механизма, который находится в исходном положении (рисунок 2.3). Единичные винты, характеризующие положения осей кинематических пар, имеют координаты:

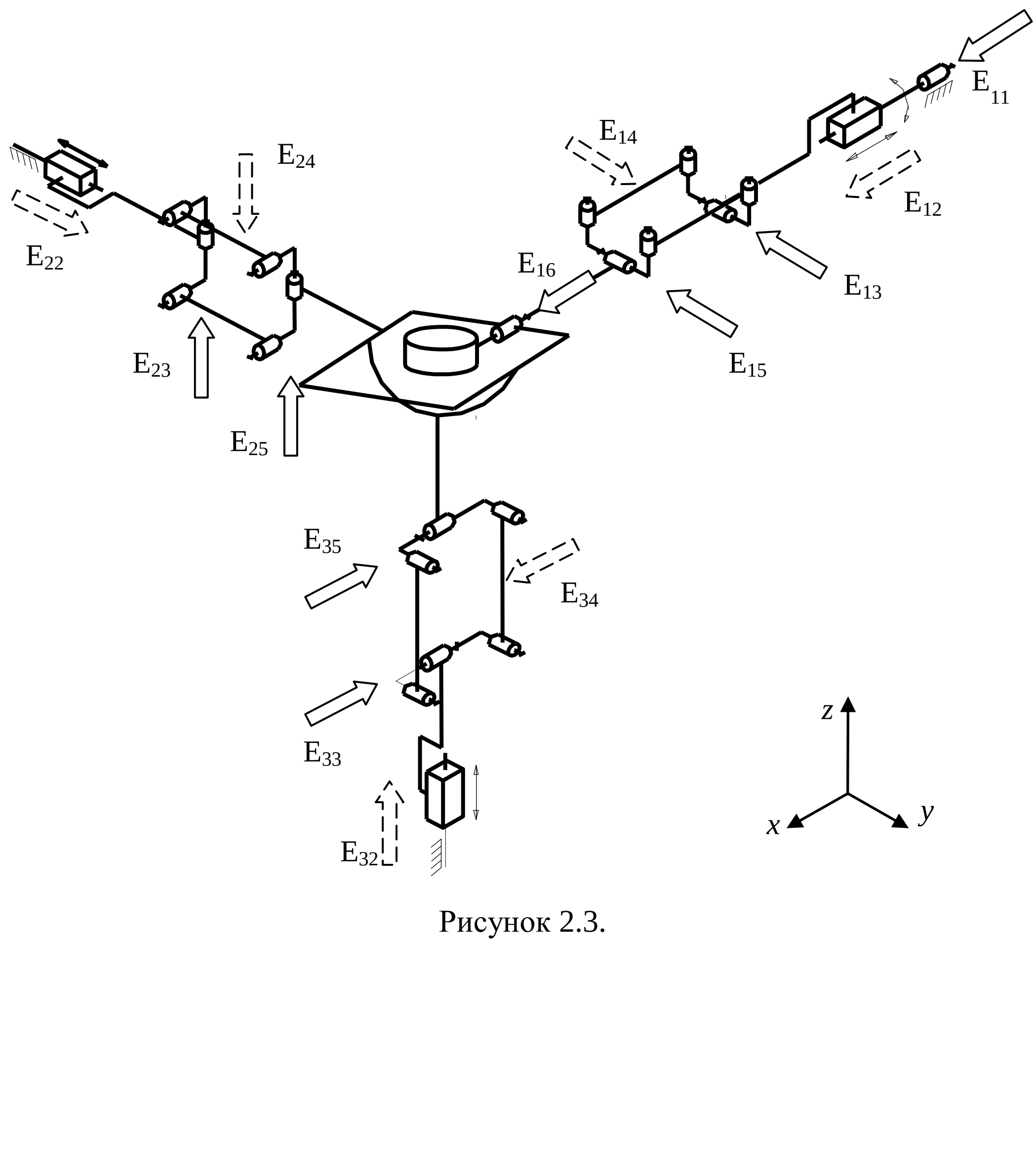


Рисунок 2.3.

E$_{11}$ (1, 0, 0, 0, 0, 0), **E$_{12}$** (0, 0, 0, 1, 0, 0), **E$_{13}$** (0, -1, 0, 0, 0, e^{o}_{13z}),
E$_{14}$ (0, 0, 0, 0, 1, 0), **E$_{15}$** (0, -1, 0, 0, 0, e^{o}_{15z}), **E$_{16}$** (1, 0, 0, 0, 0, 0),
E$_{22}$ (0, 0, 0, 0, 1, 0), **E$_{23}$** (0, 0, 1, e^{o}_{23x}, 0, 0), **E$_{24}$** (0, 0, 0, 0, 0, -1), **E$_{25}$** (0, 0, 1, e^{o}_{25x}, 0, 0);
E$_{32}$ (0, 0, 0, 0, 0, 1), **E$_{33}$** (-1, 0, 0, 0, e^{o}_{33y}, 0), **E$_{34}$** (0, 0, 0, 1, 0, 0), **E$_{35}$** (-1, 0, 0, 0, e^{o}_{35y}, 0).

Рассмотрим первую кинематическую цепь. Так как единичные винты **E$_{11}$** и **E$_{16}$** лежат на одной оси, то единичный винт **E$_{16}$** в расчёт не берём. В таком случае имеем пять единичных винтов. Условия взаимности плюккеровых координат единичных и силовых винтов можно записать в виде пяти уравнений, из которых необходимо найти одно неизвестное и, следовательно, получить один силовой винт:

$$r_x \cdot e^0_{11x} + r_y \cdot e^0_{11y} + r_z \cdot e^0_{11z} + r^0_x \cdot e_{11x} + r^0_y \cdot e_{11y} + r^0_z \cdot e_{11z} = 0$$
$$r_x \cdot 0 + r_y \cdot 0 + r_z \cdot 0 + r^0_x \cdot 1 + r^0_y \cdot 0 + r^0_z \cdot 0 = 0$$

$$r_x \cdot e^0_{12x} + r_y \cdot e^0_{12y} + r_z \cdot e^0_{12z} + r^0_x \cdot e_{12x} + r^0_y \cdot e_{12y} + r^0_z \cdot e_{12z} = 0$$
$$r_x \cdot 1 + r_y \cdot 0 + r_z \cdot 0 + r^0_x \cdot 0 + r^0_y \cdot 0 + r^0_z \cdot 0 = 0$$

$$r_x \cdot e^0_{13x} + r_y \cdot e^0_{13y} + r_z \cdot e^0_{13z} + r^0_x \cdot e_{13x} + r^0_y \cdot e_{13y} + r^0_z \cdot e_{13z} = 0$$
$$r_x \cdot 0 + r_y \cdot 0 + r_z \cdot e^0_{13z} + r^0_x \cdot 0 + r^0_y \cdot (-1) + r^0_z \cdot 0 = 0$$

$$r_x \cdot e^0_{14x} + r_y \cdot e^0_{14y} + r_z \cdot e^0_{14z} + r^0_x \cdot e_{14x} + r^0_y \cdot e_{14y} + r^0_z \cdot e_{14z} = 0$$
$$r_x \cdot 0 r_y \cdot 1 + r_z \cdot 0 + r^0_x \cdot 0 + r^0_y \cdot 0 + r^0_z \cdot 0 = 0$$

$$r_x \cdot e^0_{15x} + r_y \cdot e^0_{15y} + r_z \cdot e^0_{15z} + r^0_x \cdot e_{15x} + r^0_y \cdot e_{15y} + r^0_z \cdot e_{15z} = 0$$
$$r_x \cdot 0 + r_y \cdot 0 + r_z \cdot e^0_{15z} + r^0_x \cdot 0 + r^0_y \cdot (-1) + r^0_z \cdot 0 = 0$$

где: $\mathbf{e}_{ijx}$, $\mathbf{e}_{ijy}$, $\mathbf{e}_{ijz}$, $\mathbf{e}^0_{ijx}$, $\mathbf{e}^0_{ijy}$, $\mathbf{e}^0_{ijz}$ – векторная и моментная части единичного винта, соответственно, (i = 1, 2, 3 – номер кинематической цепи; j = 1, 2, 3 – номер кинематической пары); $\mathbf{r}_{ijx}$, $\mathbf{r}_{ijy}$, $\mathbf{r}_{ijz}$, $\mathbf{r}^0_{ijx}$, $\mathbf{r}^0_{ijy}$, $\mathbf{r}^0_{ijz}$ – векторная и моментная часть силового винта, соответственно, (i = 1, 2, 3 – номер кинематической цепи; j = 1, 2, 3 – номер кинематической пары).

Из системы уравнений получаем один силовой винт с координатами **R$_1$** (0, 0, 0, 0, 0, 1).

Рассмотрим вторую кинематическую цепь. Имеем четыре единичных винта. Условия взаимности плюккеровых координат единичных и силовых винтов можно записать в виде четырёх уравнений, из которых необходимо найти два неизвестных и получим, в данном случае, два силовых винта:

$$r_x \cdot e^0_{22x} + r_y \cdot e^0_{22y} + r_z \cdot e^0_{22z} + r^0_x \cdot e_{22x} + r^0_y \cdot e_{22y} + r^0_z \cdot e_{22z} = 0$$
$$r_x \cdot 0 + r_y \cdot 1 + r_z \cdot 0 + r^0_x \cdot 0 + r^0_y \cdot 0 + r^0_z \cdot 0 = 0$$

$$r_x \cdot e_{23x}^0 + r_y \cdot e_{23y}^0 + r_z \cdot e_{23z}^0 + r_x^0 \cdot e_{23x} + r_y^0 \cdot e_{23y} + r_z^0 \cdot e_{23z} = 0$$
$$r_x \cdot e_{23x}^0 + r_y \cdot 0 + r_z \cdot 0 + r_x^0 \cdot 0 + r_y^0 \cdot 0 + r_z^0 \cdot 1 = 0$$

$$r_x \cdot e_{24x}^0 + r_y \cdot e_{24y}^0 + r_z \cdot e_{24z}^0 + r_x^0 \cdot e_{24x} + r_y^0 \cdot e_{24y} + r_z^0 \cdot e_{241z} = 0$$
$$r_x \cdot 0 + r_y \cdot 0 + r_z \cdot (-1) + r_x^0 \cdot 0 + r_y^0 \cdot 0 + r_z^0 \cdot 0 = 0$$

$$r_x \cdot e_{25x}^0 + r_y \cdot e_{25y}^0 + r_z \cdot e_{25z}^0 + r_x^0 \cdot e_{25x} + r_y^0 \cdot e_{25y} + r_z^0 \cdot e_{25z} = 0$$
$$r_x \cdot e_{25x}^0 + r_y \cdot 0 + r_z \cdot 0 + r_x^0 \cdot 0 + r_y^0 \cdot 0 + r_z^0 \cdot 1 = 0$$

Из системы уравнений получаем два силовых винта с координатами **R₂** (0, 0, 0, 1, 0, 0); **R₃** (0, 0, 0, 0, 1, 0).

Рассмотрим третью кинематическую цепь. Имеем четыре единичных винта. Условия взаимности плюккеровых координат единичных и силовых винтов можно записать в виде четырёх уравнений, из которых необходимо найти два неизвестных и получим, в данном случае, два силовых винта:

$$r_x \cdot e_{32x}^0 + r_y \cdot e_{32y}^0 + r_z \cdot e_{32z}^0 + r_x^0 \cdot e_{32x} + r_y^0 \cdot e_{32y} + r_z^0 \cdot e_{32z} = 0$$
$$r_x \cdot 0 + r_y \cdot 0 + r_z \cdot 1 + r_x^0 \cdot 0 + r_y^0 \cdot 0 + r_z^0 \cdot 0 = 0$$

$$r_x \cdot e_{33x}^0 + r_y \cdot e_{33y}^0 + r_z \cdot e_{33z}^0 + r_x^0 \cdot e_{33x} + r_y^0 \cdot e_{33y} + r_z^0 \cdot e_{33z} = 0$$
$$r_x \cdot 0 + r_y \cdot e_{33y}^0 + r_z \cdot 0 + r_x^0 \cdot (-1) + r_y^0 \cdot 0 + r_z^0 \cdot 0 = 0$$

$$r_x \cdot e_{34x}^0 + r_y \cdot e_{34y}^0 + r_z \cdot e_{34z}^0 + r_x^0 \cdot e_{34x} + r_y^0 \cdot e_{34y} + r_z^0 \cdot e_{34z} = 0$$
$$r_x \cdot 1 + r_y \cdot 0 + r_z \cdot 0 + r_x^0 \cdot 0 + r_y^0 \cdot 0 + r_z^0 \cdot 0 = 0$$

$$r_x \cdot e_{35x}^0 + r_y \cdot e_{35y}^0 + r_z \cdot e_{35z}^0 + r_x^0 \cdot e_{35x} + r_y^0 \cdot e_{35y} + r_z^0 \cdot e_{35z} = 0$$
$$r_x \cdot 0 + r_y \cdot e_{35y}^0 + r_z \cdot 0 + r_x^0 \cdot (-1) + r_y^0 \cdot 0 + r_z^0 \cdot 0 = 0$$

Из системы уравнений получаем два силовых винта с координатами**R₄** (0, 0, 0, 0, 1, 0); **R₅** (0, 0, 0, 0, 0, 1).

Координаты силовых винтов можно представить в виде соответствующей матрицы **(R)** 6x5:

$$(R) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Из этой матрицы следует, что имеют место лишь три независимых силовых винта. Это винты бесконечно большого параметра (моменты), ограничивающие вращения.

Рассмотрим отдельно первую кинематическую цепь, причём сместим её относительно оси координат и найдём для данной цепи плюккеровы координаты (рисунок 2.4).

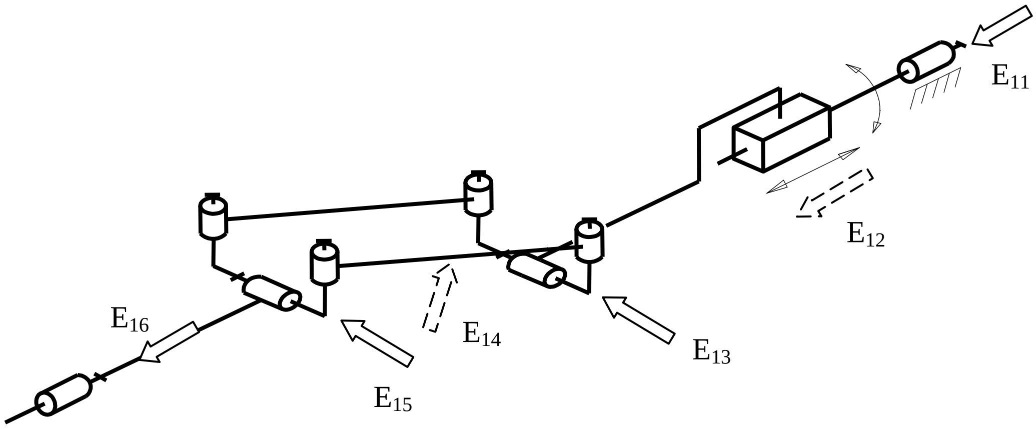


Рисунок 2.4. Первая кинематическая цепь механизма с четырьмя степенями свободы.

Рассмотрим плюккеровы координаты единичных винтов осей кинематических пар механизма (рисунок 2.4). Единичные винты, характеризующие положения осей кинематических пар, имеют координаты:

E_{11} (1, 0, 0, 0, 0, 0), **E_{12}** (0, 0, 0, 1, 0, 0), **E_{13}** (0, -1, 0, 0, 0, e^o_{13z}),

E_{14} (0, 0, 0, e^o_{14x} , e^o_{14y}, 0), **E_{15}** (0, -1, 0, 0, 0, e^o_{15z}), **E_{16}** (1, 0, 0, 0, 0, e^o_{16z}).

Составим матрицу из полученных координат единичных винтов:

$$(E)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & e^0_{13z}\\ 0 & 0 & 0 & e^0_{14x} & e^0_{14y} & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & e^0_{15z}\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^0_{16z}\end{pmatrix}.$$

Уберём из полученной матрицы один столбец, в котором получили нули:

$$(E)'=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & e^0_{13z}\\ 0 & 0 & e^0_{14x} & e^0_{14y} & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & e^0_{15z}\\ 1 & 0 & 0 & 0 & e^0_{16z}\end{pmatrix}.$$

Выпишем матрицы размера 5х5, вычеркивая по одной строке.

$$(E_1)=\begin{pmatrix}0&0&1&0&0\\0&-1&0&0&e^0_{13z}\\0&0&e^0_{14x}&e^0_{14y}&0\\0&-1&0&0&e^0_{15z}\\1&0&0&0&e^0_{16z}\end{pmatrix};\ (E_2)=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&-1&0&0&e^0_{13z}\\0&0&e^0_{14x}&e^0_{14y}&0\\0&-1&0&0&e^0_{15z}\\1&0&0&0&e^0_{16z}\end{pmatrix};\ (E_3)=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&e^0_{14x}&e^0_{14y}&0\\0&-1&0&0&e^0_{15z}\\1&0&0&0&e^0_{16z}\end{pmatrix};$$

$$(E_4)=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&-1&0&0&e^0_{13z}\\0&-1&0&0&e^0_{15z}\\1&0&0&0&e^0_{16z}\end{pmatrix};\ (E_5)=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&-1&0&0&e^0_{13z}\\0&0&e^0_{14x}&e^0_{14y}&0\\0&-1&0&0&e^0_{15z}\end{pmatrix}.$$

Проанализируем эти матрицы с точки зрения возможности внутренней подвижности в данной цепи. Можно показать, что частичная цепь, включающая четыре кинематических пары (за исключением поступательного привода), имеет подвижность.

Рассматриваем матрицу (E_2), пытаясь выразить последнюю строку через четыре первых строки. Задача сведется к системе линейных уравнений относительно скалярных множителей. Очевидно, что множитель при третьей строке этой матрицы должен быть равен нулю. Получим систему трёх уравнений относительно трех неизвестных. Запишем эту систему:

$$\begin{aligned}&a\cdot 1+0+0+0=1\\&0+b\cdot(-1)+0+c\cdot(-1)=0\\&0+b\cdot e^0_{13z}+0+c\cdot e^0_{15z}=e^0_{16z}\end{aligned}\quad . \tag{2.3}$$

Решив систему (2.3), и выразив третье уравнение через второе уравнение, найдём неизвестное c:

$$\begin{aligned}&a=1,\\&b=-c,\\&b\cdot e^0_{13z}=e^0_{16z}-c\cdot e^0_{15z}.\end{aligned}\ ,\rightarrow\quad \begin{aligned}&a=1,\\&b=-c,\\&-c\cdot e^0_{13z}=e^0_{16z}-c\cdot e^0_{15z}.\end{aligned}\ ,\rightarrow\quad \begin{aligned}&a=1,\\&b=-c,\\&-c\cdot e^0_{13z}+c\cdot e^0_{15z}=e^0_{16z},\\&c=\frac{e^0_{16z}}{e^0_{15z}-e^0_{13z}}.\end{aligned}$$

Таким образом, можно найти указанные коэффициенты, которые выражают скорости в соответствующих кинематических парах. В данной цепи имеется внутренняя подвижность, что свидетельствует о возможности передачи вращения с вращательного привода на вращательную кинематическую пару, сопряженную с выходным звеном.

Подобный анализ можно сделать для модифицированного механизма, для которого представлены единичные винты кинематических пар (рисунок 2.5).

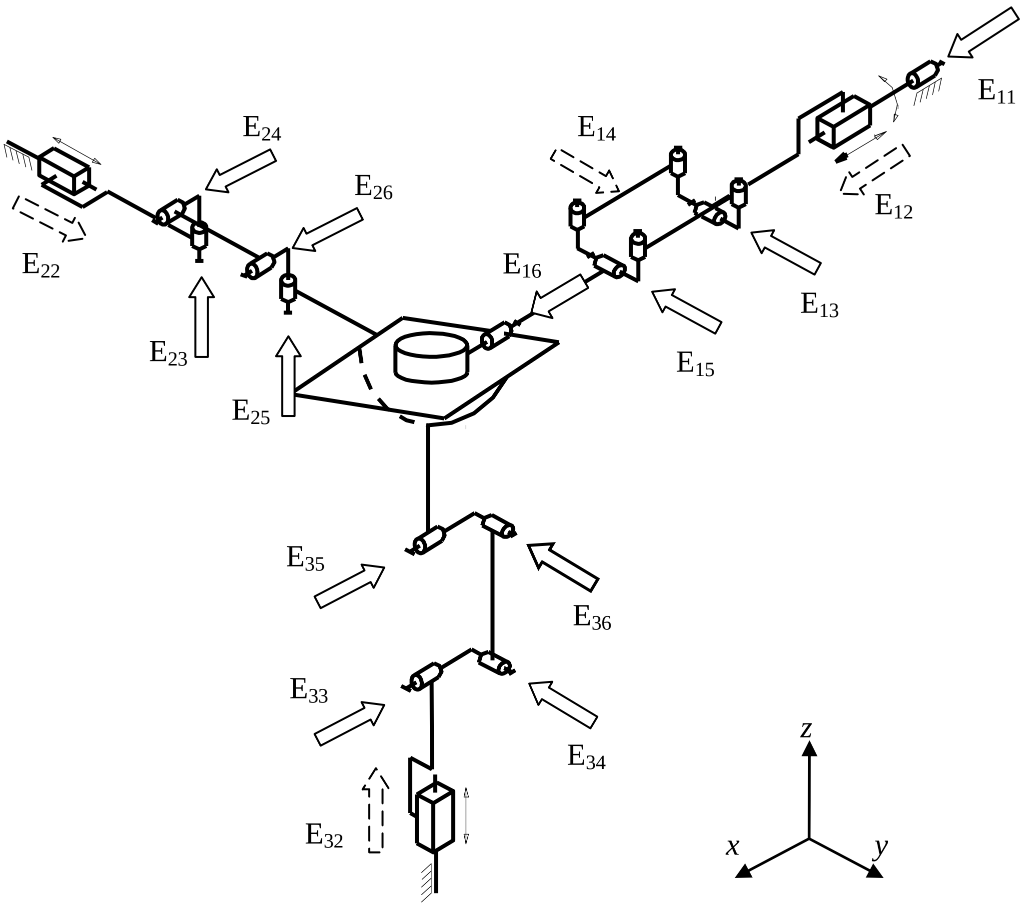


Рисунок 2.5.

2.2. *Разработка структурных схем, определение числа степеней свободы механизмов и работоспособности механизма параллельной структуры с пятью степенями свободы*

Рассмотрим механизм с пятью степенями свободы, добавив к исходной схеме механизма Orthoglide два двигателя вращательного перемещения и дополнительные выходные вращательные кинематические пары, сопрягающие конечные звенья соответствующих кинематических цепей с выходным звеном механизма.

Пространственный механизм (рисунок 2.6) включает основание, выходное звено, рабочий орган, кинематически связанный с выходным звеном и три кинематические цепи. Каждая кинематическая цепь содержит двигатель поступательного перемещения, расположенный параллельно одной из ортогональных осей координат, начальную вращательную кинематическую пару, шарнирный параллелограмм, начальное звено которого совмещено с осью соответствующей начальной вращательной кинематической парой.

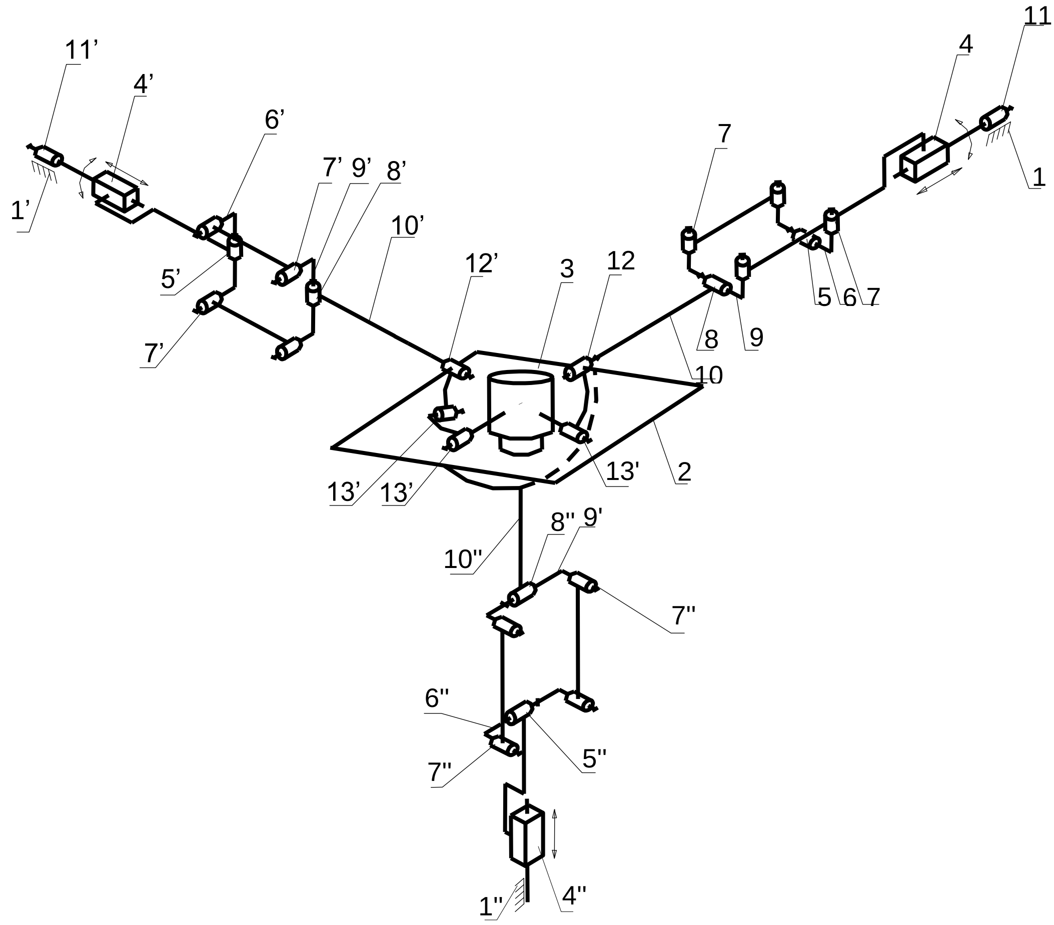


Рисунок 2.6. Структурная схема механизма с пятью степенями свободы.

Каждый шарнирный параллелограмм содержит по четыре вращательных кинематических пары, которые расположены перпендикулярно оси начальной вращательной кинематической пары, а также конечную вращательную кинематическую пару, ось которой совмещена с осью конечного звена шарнирного параллелограмма. Конечное звено одной из кинематических цепей сопряжено с выходным звеном механизма. В двух кинематических цепях расположены двигатели вращательного перемещения, оси которых расположены параллельно оси соответствующего двигателя поступательного перемещения, а также выходные вращательные кинематические пары, сопрягающие конечные звенья соответствующих кинематических цепей с выходным звеном механизма. Конечные звенья двух кинематических цепей, содержащих двигатели вращательного перемещения, сопряжены с рабочим органом посредством промежуточных вращательных кинематических пар. В одной кинематической цепи расположены две промежуточные вращательные кинематические пары, а в другой кинематической цепи расположена одна промежуточная вращательная кинематическая пара. Оси выходных и промежуточных вращательных кинематических пар расположены с пересечением в одной точке, а конечное звено третьей кинематической цепи жёстко связано с выходным звеном механизма. Конечные звенья кинематических цепей, содержащих двигатели вращательного перемещения, сопряжены посредством выходных вращательных кинематических пар с выходным звеном механизма [77].

Для определения числа степеней свободы данного манипуляционного механизма воспользуемся формулой А.П. Малышева для пространственных механизмов (2.1).

Подсчитаем число (n) звеньев в механизме и число одноподвижных пар (p_5). Пространственный механизм включает основание (1), выходное звено (2) рабочий орган (3). Каждая из трёх кинематических цепей содержит: двигатель поступательного перемещения (4, 4’, 4”); начальную вращательную кинематическую пару (5, 5’, 5’’); начальное звено шарнирного параллелограмма (6, 6’, 6’’); вращательные кинематические пары шарнирного параллелограмма (7, 7’, 7’’); конечную вращательную кинематическую пару (8, 8’, 8’’); конечное звено шарнирного параллелограмма (9, 9’, 9’’);промежуточные звенья параллелограмма; конечное звено кинематической цепи (10, 10’, 10’’). В двух кинематических цепях расположены двигатели вращательного перемещения (11, 11’), оси которых расположены параллельно оси соответствующих двигателей поступательного перемещения (4, 4’). Между двигателями вращательного перемещения (11, 11’) и двигателями поступательного перемещения (4, 4’) расположены звенья, которые параллельны осям соответствующих двигателей поступательного перемещения (4, 4’). Выходные вращательные кинематические пары (12, 12’) сопрягают конечные звенья кинематических цепей (10, 10’) с выходным звеном механизма (2). Конечные звенья (10, 10’) кинематических цепей, содержащих двигатели вращательного перемещения (11, 11’), сопряжены с рабочим органом (3) посредством промежуточных вращательных кинематических пар (13, 13’), причём в одной кинематической цепи расположены две промежуточные вращательные кинематические пары (13’), а в другой кинематической цепи расположена одна промежуточная вращательная кинематическая пара (13). Оси выходных (12, 12’) и промежуточных (13, 13’) вращательных кинематических пар расположены с пересечением в одной точке, а конечное звено третьей кинематической цепи (10’’) жёстко связано с выходным звеном механизма (2). Конечные звенья кинематических цепей (10, 10’), содержащих двигатели вращательного перемещения (11, 11’), сопряжены посредством выходных вращательных кинематических пар (12, 12’) с выходным звеном механизма (2). Конечное звено кинематической цепи (10), содержащей двигатель вращательного перемещения (11), сопряжено посредством выходной вращательной кинематической пары (12) с выходным звеном механизма (2) и жёстко связано с рабочим органом (3), а конечные звенья двух других кинематических цепей (10’, 10’’) жёстко связаны с выходным звеном механизма (2). Так как звено (10’’) жёстко связано с рабочим органом (3), а звенья (10, 10’) – с выходным звеном механизма (2), то звенья (10’’) и (3) можно принимать за одно звено, также как и звенья (10, 10’) и (2).

В общей сложности получаем 21 звено и 25 одноподвижных кинематических пар в механизме, подставляя значение которых в (2.1), имеем:

$$W = 6 \cdot (21 - 1) - 5 \cdot 25 = -5.$$

Данный результат не является верным, так как не учитываются шарнирные параллелограммы. Как и в случае механизма с четырьмя степенями свободы, число степеней свободы шарнирного параллелограмма равно единице по формуле (2.2), следовательно, имеет одну степень свободы, и мы можем его рассматривать как одноподвижную поступательную кинематическую пару. Двенадцать вращательных кинематических пар трёх параллелограммов заменяются тремя поступательными кинематическими парами. Принимая во внимание звенья и одноподвижные кинематические пары, что были ранее с учётом замены шарнирных параллелограммов, согласно (2.1) получаем следующее значение числа степеней свободы:

$$W = 6 \cdot (15 - 1) - 5 \cdot 16 = 4.$$

Данный результат так же является не верным.

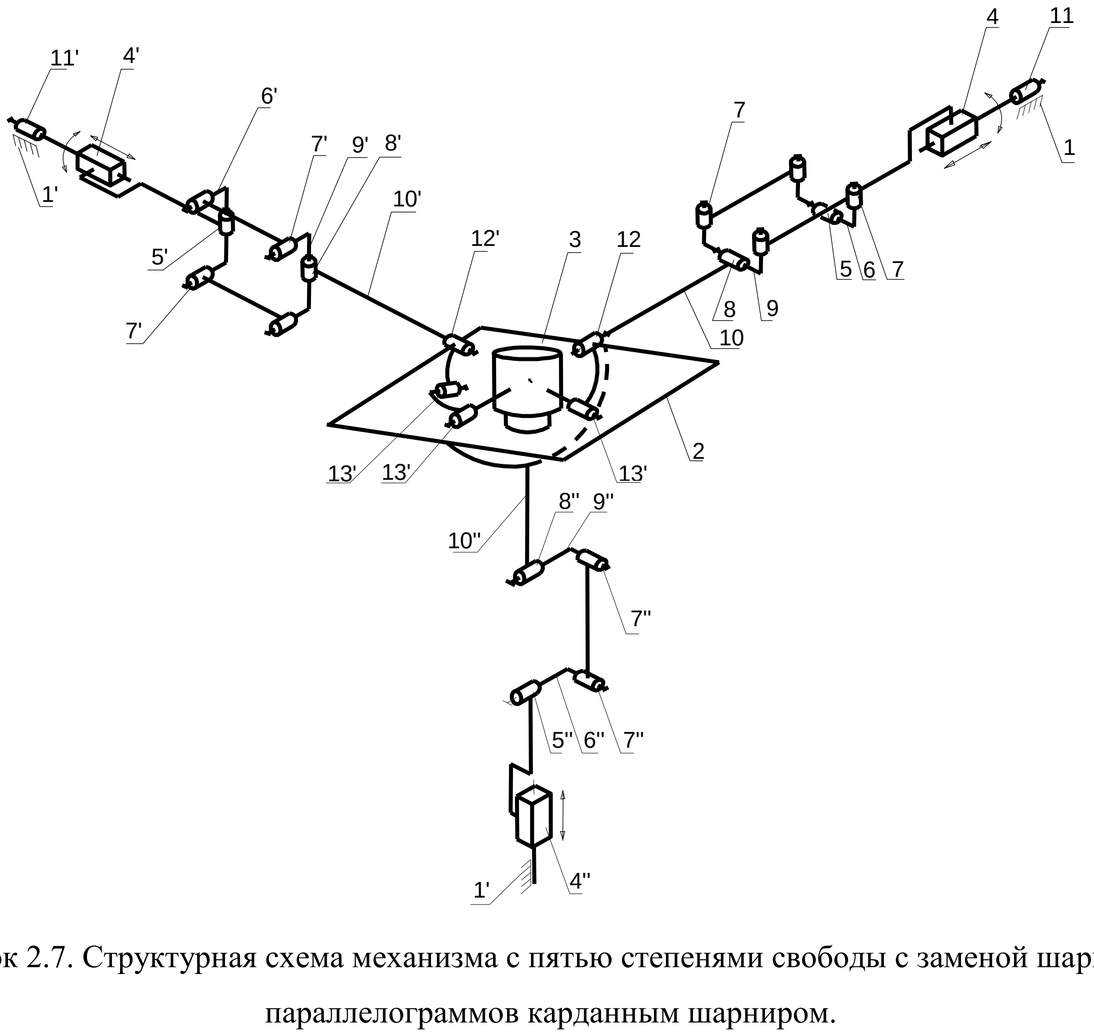


Рисунок 2.7. Структурная схема механизма с пятью степенями свободы с заменой шарнирных параллелограммов карданным шарниром.

Заменим в кинематической цепи, не содержащей двигатель вращательного перемещения, шарнирный параллелограмм карданным шарниром, а в двух других кинематических цепях, содержащих двигатели вращательного перемещения, шарнирные параллелограммы будем принимать как поступательные кинематические пары (рисунок 2.7). В общем сложности в полученном механизме имеем 16 звеньев и 17 одноподвижных кинематических пар. Согласно (2.1) имеем:

$$W = 6 \cdot (16 - 1) - 5 \cdot 17 = 5.$$

Таким образом, число степеней свободы равно пяти. Данный результат является верным.

Для определения работоспособности рассматриваемого механизма с пятью степенями свободы воспользуемся методом винтового исчисления, рассмотрев плюккеровы координаты ортов осей кинематических пар.

Каждой кинематической паре ставится в соответствие орт её оси, и составляется матрица плюккеровых координат этих ортов. Соответствующее построение приведено на рисунке 2.8.

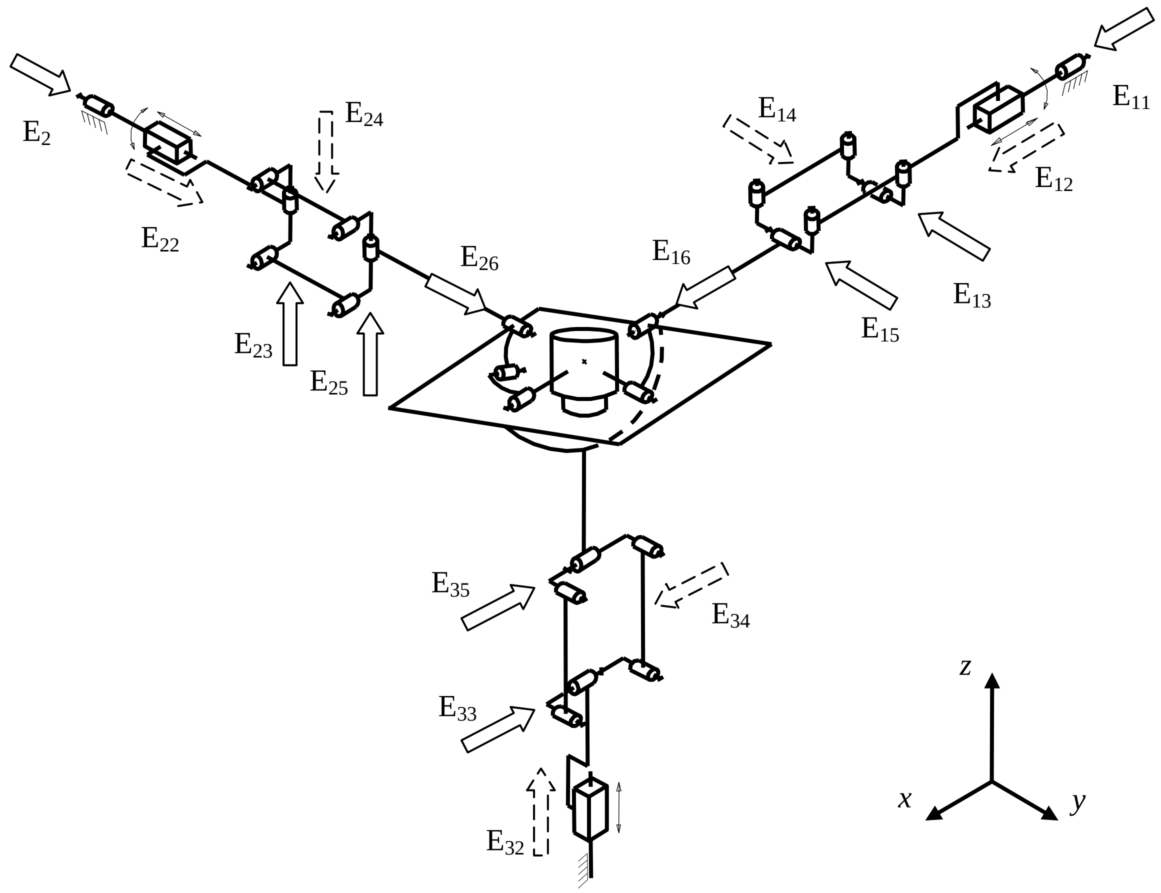


Рисунок 2.8.

Рассмотрим плюккеровы координаты единичных винтов осей кинематических пар механизма, который находится в исходном положении (рисунок 2.8). Единичные винты, характеризующие положения осей кинематических пар, имеют координаты:

$\mathbf{E_{11}}$ (1, 0, 0, 0, 0, 0), $\mathbf{E_{12}}$ (0, 0, 0, 1, 0, 0), $\mathbf{E_{13}}$ (0, -1, 0, 0, 0, e^{o}_{13z}),

$\mathbf{E_{14}}$ (0, 0, 0, 0, 1, 0), $\mathbf{E_{15}}$ (0, -1, 0, 0, 0, e^{o}_{15z}), $\mathbf{E_{16}}$ (1, 0, 0, 0, 0, 0);

E$_{21}$ (0, 1, 0, 0, 0, 0), **E**$_{22}$ (0, 0, 0, 0, 1, 0), **E**$_{23}$ (0, 0, 1, e^{o}_{23x}, 0, 0),

E$_{24}$ (0, 0, 0, 0, 0, -1), **E**$_{25}$ (0, 0, 1, e^{o}_{25x}, 0, 0, **E**$_{26}$ (0, 1, 0, 0, 0, 0),);

E$_{32}$ (0, 0, 0, 0, 0, 1), **E**$_{33}$ (-1, 0, 0, 0, e^{o}_{33y}, 0), **E**$_{34}$ (0, 0, 0, 1, 0, 0), **E**$_{35}$ (-1, 0, 0, 0, e^{o}_{35y}, 0).

Рассмотрим первую кинематическую цепь. Как и в случае для механизма с четырьмя степенями свободы, получаем те же условия взаимности плюккеровых координат единичных и силовых винтов в виде пяти уравнений, из которых получаем один силовой винт с координатами **R**$_{1}$ (0, 0, 0, 0, 0, 1).

Рассмотрим вторую кинематическую цепь. Единичные винты **E**$_{21}$ и **E**$_{26}$ лежат на одной оси, поэтому единичный винт **E**$_{26}$ в расчёт не берём. В таком случае имеем пять единичных винтов. Условия взаимности плюккеровых координат единичных и силовых винтов можно записать в виде пяти уравнений, из которых необходимо найти одно неизвестное и, следовательно, получить один силовой винт:

$$r_x \cdot e^0_{21x} + r_y \cdot e^0_{21y} + r_z \cdot e^0_{21z} + r^0_x \cdot e_{21x} + r^0_y \cdot e_{21y} + r^0_z \cdot e_{21z} = 0$$
$$r_x \cdot 0 + r_y \cdot 0 + r_z \cdot 0 + r^0_x \cdot 0 + r^0_y \cdot 1 + r^0_z \cdot 0 = 0$$

$$r_x \cdot e^0_{22x} + r_y \cdot e^0_{22y} + r_z \cdot e^0_{22z} + r^0_x \cdot e_{22x} + r^0_y \cdot e_{22y} + r^0_z \cdot e_{22z} = 0$$
$$r_x \cdot 0 + r_y \cdot 1 + r_z \cdot 0 + r^0_x \cdot 0 + r^0_y \cdot 0 + r^0_z \cdot 0 = 0$$

$$r_x \cdot e^0_{23x} + r_y \cdot e^0_{23y} + r_z \cdot e^0_{23z} + r^0_x \cdot e_{23x} + r^0_y \cdot e_{23y} + r^0_z \cdot e_{23z} = 0$$
$$r_x \cdot e^0_{23x} + r_y \cdot 0 + r_z \cdot 0 + r^0_x \cdot 0 + r^0_y \cdot 0 + r^0_z \cdot 1 = 0$$

$$r_x \cdot e^0_{24x} + r_y \cdot e^0_{24y} + r_z \cdot e^0_{24z} + r^0_x \cdot e_{24x} + r^0_y \cdot e_{24y} + r^0_z \cdot e_{241z} = 0$$
$$r_x \cdot 0 + r_y \cdot 0 + r_z \cdot (-1) + r^0_x \cdot 0 + r^0_y \cdot 0 + r^0_z \cdot 0 = 0$$

$$r_x \cdot e^0_{25x} + r_y \cdot e^0_{25y} + r_z \cdot e^0_{25z} + r^0_x \cdot e_{25x} + r^0_y \cdot e_{25y} + r^0_z \cdot e_{25z} = 0$$
$$r_x \cdot e^0_{25x} + r_y \cdot 0 + r_z \cdot 0 + r^0_x \cdot 0 + r^0_y \cdot 0 + r^0_z \cdot 1 = 0$$

Из системы уравнений получаем силовой винт с координатами **R**$_{2}$ (0, 0, 0, 1, 0, 0).

Рассмотрим третью кинематическую цепь. Получаем два силовых винта с координатами **R**$_{3}$ (0, 0, 0, 0, 1, 0); **R**$_{4}$ (0, 0, 0, 0, 0, 1), которые совпадают с винтами, полученными при анализе механизма с четырьмя степенями свободы.

Координаты силовых винтов можно представить в виде соответствующей матрицы **(R)** 6x5:

$$(R) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Из этой матрицы следует, что имеют место лишь три независимых силовых винта. Это винты бесконечно большого параметра (моменты), ограничивающие вращение.

Рассмотрим отдельно первую кинематическую цепь, сместив её относительно оси координат, и найдём для данной цепи плюккеровы координаты. Можно заметить, что данная кинематическая цепь в точности повторяет кинематическую цепь механизма с четырьмя степенями свободы (рисунок 2.4), и, следовательно, имеем координаты:

$\mathbf{E_{11}}$ (1, 0, 0, 0, 0, 0), $\mathbf{E_{12}}$ (0, 0, 0, 1, 0, 0), $\mathbf{E_{13}}$ (0, -1, 0, 0, 0, e^o_{13z}),
$\mathbf{E_{14}}$ (0, 0, 0, e^o_{14x} , e^o_{14y}, 0), $\mathbf{E_{15}}$ (0, -1, 0, 0, 0, e^o_{15z}), $\mathbf{E_{16}}$ (1, 0, 0, 0, 0, e^o_{16z}).

Имеем матрицу из найденных координат единичных винтов и получаем следующие коэффициенты для определения скоростей в кинематических парах:

$$(E)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & e^0_{13z} \\ 0 & 0 & 0 & e^0_{14x} & e^0_{14y} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & e^0_{15z} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^0_{16z} \end{pmatrix}; \qquad \begin{aligned} &a=1, \\ &b=-c, \\ &c=\frac{e^0_{16z}}{e^0_{15z}-e^0_{13z}}. \end{aligned}$$

В данной цепи имеется внутренняя подвижность, что свидетельствует о возможности передачи вращения с вращательного привода на вращательную кинематическую пару, сопряженную с выходным звеном.

В двух кинематических цепях имеет место внутренняя подвижность – передача вращения от вращательного привода к конечной вращательной кинематической паре. Из выше сказанного можно заключить, что частичный механизм, расположенной между выходным звеном (2) и конечным звеном (рабочим инструментом (3)), должен обладать двумя степенями свободы. Убедимся в этом.

По формуле В. В. Добровольского имеем:

$$W=3\cdot(n-1)-2\cdot p_5, \tag{2.4}$$
$$W=3\cdot(5-1)-2\cdot 5=2.$$

Итак, этот частичный сферический механизм имеет две степени свободы. Таким образом, выходное звено может перемещаться по трём координатам и имеет три поступательные степени свободы, а конечное звено относительно выходного звена имеет две вращательные степени свободы.

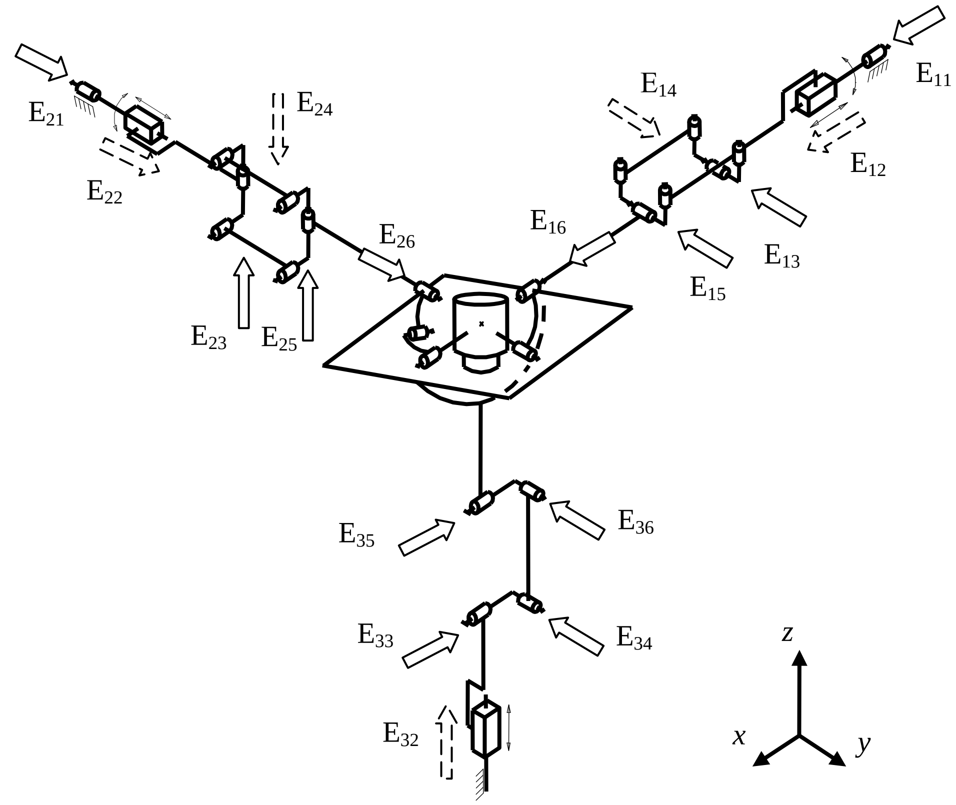


Рисунок 2.9.

Подобный анализ можно сделать для модифицированного механизма, для которого представлены единичные винты кинематических пар (рисунок 2.9).

2.3. Разработка структурных схем, определение числа степеней свободы механизмов и работоспособности механизма параллельной структуры с шестью степенями свободы

Рассмотрим механизм с шестью степенями свободы, добавив к исходной схеме механизма Orthoglide три двигателя вращательного движения в три кинематические цепи.

Пространственный механизм (рисунок 2.10) включает в себя все те же структурные элементы, что и механизм с пятью степенями свободы. Дополнительно третью кинематическую цепь снабжаем двигателем вращательного перемещения, ось которого расположена параллельно оси соответствующего двигателя поступательного перемещения, а также выходной вращательной кинематической парой, ось которой параллельна оси соответствующего двигателя вращательного перемещения, сопрягающей конечное звено соответствующей кинематической цепи с выходным звеном механизма. Кроме того эта кинематическая цепь снабжена двумя дополнительными промежуточными вращательными кинематическими парами, сопрягающими конечное звено третьей кинематической цепи с рабочим органом. Конечные звенья всех трёх кинематических цепей сопряжены посредством выходных вращательных кинематических пар с выходным звеном механизма [78].

Определим число степеней свободы данного манипуляционного механизма по формуле А.П. Малышева для пространственных механизмов (2.1).

Подсчитаем число (n) звеньев в механизме и число одноподвижных пар (p_5). Пространственный механизм (рисунок 2.10) включает: основание (1); выходное звено (2); рабочий орган (3) и три кинематические цепи. Каждая кинематическая цепь содержит: двигатель поступательного перемещения (4, 4', 4"); начальную вращательную кинематическую пару (5, 5', 5''); начальное звено шарнирного параллелограмма (6, 6', 6''); конечную вращательную кинематическую пару (8, 8', 8''); конечное звено шарнирного параллелограмма (9, 9', 9''); промежуточные звенья параллелограмма; конечное звено кинематической цепи (10, 10', 10''). В трёх кинематических цепях расположены двигатели вращательного перемещения (11, 11', 11") и выходные вращательные кинематические пары (12, 12', 12"). Конечные звенья (10, 10', 10'') всех кинематических цепей сопряжены посредством выходных вращательных кинематических пар (12, 12', 12'') с выходным звеном механизма (2). В общей сложности получаем 23 звена и 27 одноподвижных кинематических пар в механизме.

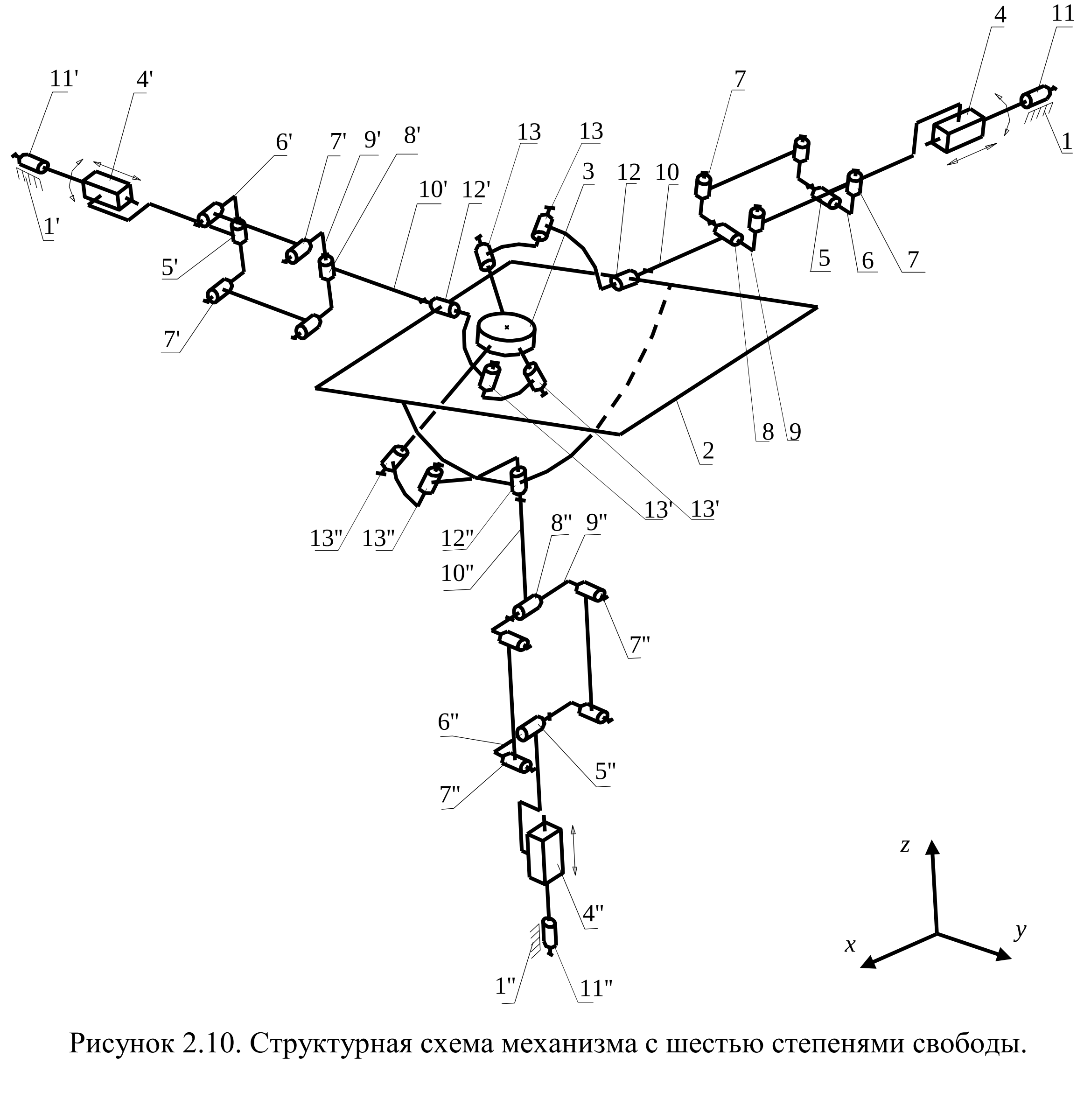


Рисунок 2.10. Структурная схема механизма с шестью степенями свободы.

Подставив полученные значения в (2.1), имеем:

$$W = 6 \cdot (23 - 1) - 5 \cdot 27 = -3.$$

Данный результат не является верным, так как не учитываются шарнирные параллелограммы. Число степеней свободы шарнирного параллелограмма по формуле (2.2) равно единице, следовательно, мы можем его рассматривать как одноподвижную поступательную кинематическую пару. Подсчитаем число степеней свободы при этом условии. Во внимание принимаются те же звенья, что были и ранее за исключением промежуточных звеньев параллелограмма. Двенадцать вращательных кинематических пар трёх параллелограммов заменяются тремя поступательными кинематическими парами. При этом получаем:

$$W = 6 \cdot (17 - 1) - 5 \cdot 18 = 6.$$

Данный результат является верным. Таким образом, число степеней свободы равно шести.

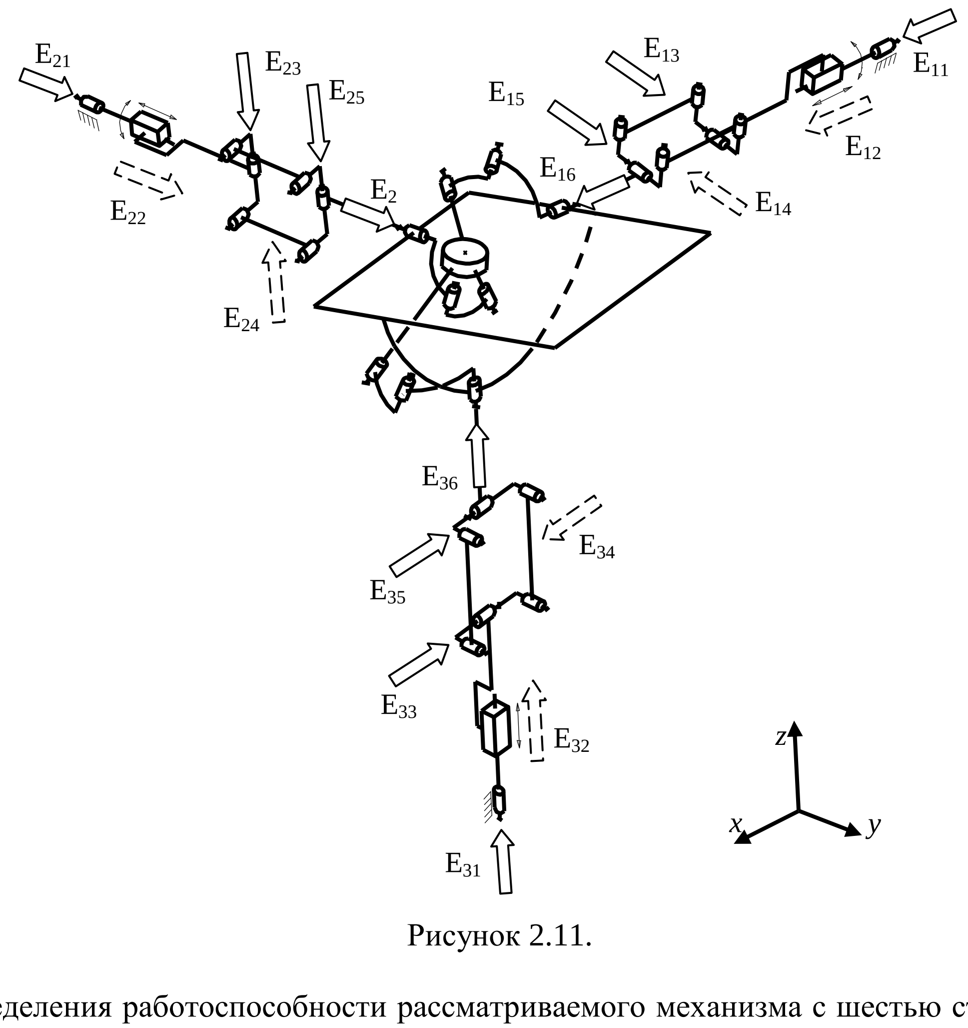


Рисунок 2.11.

Для определения работоспособности рассматриваемого механизма с шестью степенями свободы воспользуемся методом винтов, рассмотрев плюккеровы координаты ортов осей кинематических пар.

Каждой кинематической паре поставим в соответствие орт её оси и составим матрицу плюккеровых координат этих ортов. Соответствующее построение приведено на рисунке 2.11.

Рассмотрим плюккеровы координаты единичных винтов осей кинематических пар механизма, который находится в исходном положении (рисунок 2.11). Единичные винты, характеризующие положения осей кинематических пар, имеют координаты:

E$_{11}$ (1, 0, 0, 0, 0, 0), **E$_{12}$** (0, 0, 0, 1, 0, 0), **E$_{13}$** (0, 1, 0, 0, 0, e^{o}_{13z}),
E$_{14}$ (0, 0, 0, 0, -1, 0), **E$_{15}$** (0, 1, 0, 0, 0, e^{o}_{15z}), **E$_{16}$** (1, 0, 0, 0, 0, 0);
E$_{21}$ (0, 1, 0, 0, 0, 0), **E$_{22}$** (0, 0, 0, 0, 1, 0), **E$_{23}$** (0, 0, -1, e^{o}_{23x}, 0, 0),
E$_{24}$ (0, 0, 0, 0, 0, 1), **E$_{25}$** (0, 0, -1, e^{o}_{25x}, 0, 0, **E$_{26}$** (0, 1, 0, 0, 0, 0),);
E$_{31}$ (0, 0, 1, 0, 0, 0), **E$_{32}$** (0, 0, 0, 0, 0, 1), **E$_{33}$** (-1, 0, 0, 0, e^{o}_{33y}, 0),
E$_{34}$ (0, 0, 0, 1, 0, 0), **E$_{35}$** (-1, 0, 0, 0, e^{o}_{35y}, 0), **E$_{36}$** (0, 0, 1, 0, 0, 0).

В первой кинематической цепи имеем силовой винт с координатами **R$_1$** (0, 0, 0, 0, 0, 1), во второй кинематической цепи – **R$_2$** (0, 0, 0, 1, 0, 0). Процесс нахождения силовых винтов **R$_1$** и **R$_2$** описан выше для механизмов с четырьмя и пятью степенями свободы.

Рассмотрим третью кинематическую цепь. Единичные винты **E$_{31}$** и **E$_{36}$** лежат на одной оси, поэтому единичный винт **E$_{36}$** в расчёт не берём. В таком случае имеем пять единичных винтов. Условия взаимности плюккеровых координат единичных и силовых винтов можно записать в виде пяти уравнений, из которых необходимо найти одно неизвестное и, следовательно, получить один силовой винт:

$$r_x \cdot e^0_{31x} + r_y \cdot e^0_{31y} + r_z \cdot e^0_{31z} + r^0_x \cdot e_{31x} + r^0_y \cdot e_{31y} + r^0_z \cdot e_{31z} = 0$$
$$r_x \cdot 0 + r_y \cdot 0 + r_z \cdot 0 + r^0_x \cdot 0 + r^0_y \cdot 0 + r^0_z \cdot 1 = 0$$

$$r_x \cdot e^0_{32x} + r_y \cdot e^0_{32y} + r_z \cdot e^0_{32z} + r^0_x \cdot e_{32x} + r^0_y \cdot e_{32y} + r^0_z \cdot e_{32z} = 0$$
$$r_x \cdot 0 + r_y \cdot 0 + r_z \cdot 1 + r^0_x \cdot 0 + r^0_y \cdot 0 + r^0_z \cdot 0 = 0$$

$$r_x \cdot e^0_{33x} + r_y \cdot e^0_{33y} + r_z \cdot e^0_{33z} + r^0_x \cdot e_{33x} + r^0_y \cdot e_{33y} + r^0_z \cdot e_{33z} = 0$$
$$r_x \cdot 0 + r_y \cdot e^0_{33y} + r_z \cdot 0 + r^0_x \cdot (-1) + r^0_y \cdot 0 + r^0_z \cdot 0 = 0$$

$$r_x \cdot e^0_{34x} + r_y \cdot e^0_{34y} + r_z \cdot e^0_{34z} + r^0_x \cdot e_{34x} + r^0_y \cdot e_{34y} + r^0_z \cdot e_{34z} = 0$$
$$r_x \cdot 1 + r_y \cdot 0 + r_z \cdot 0 + r^0_x \cdot 0 + r^0_y \cdot 0 + r^0_z \cdot 0 = 0$$

$$r_x \cdot e^0_{35x} + r_y \cdot e^0_{35y} + r_z \cdot e^0_{35z} + r^0_x \cdot e_{35x} + r^0_y \cdot e_{35y} + r^0_z \cdot e_{35z} = 0$$
$$r_x \cdot 0 + r_y \cdot e^0_{35y} + r_z \cdot 0 + r^0_x \cdot (-1) + r^0_y \cdot 0 + r^0_z \cdot 0 = 0$$

Из системы уравнений получаем силовой винта с координатами **R$_3$** (0, 0, 0, 0, 1, 0).

Координаты силовых винтов можно представить в виде соответствующей матрицы **(R)** 6x5:

$$(R) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Из этой матрицы следует, что имеют место лишь три независимых силовых винта. Это винты бесконечно большого параметра (моменты), ограничивающие вращения.

Для механизма с шестью степенями свободы отдельно рассмотрим первую кинетическую цепь, сместив её относительно оси координат, для нахождения плюккеровых координат. Данная кинематическая цепь в точности повторяет кинематическую цепь механизмов с четырьмя и пятью степенями свободы (рисунок 2.4). Следовательно, она будет иметь координаты:

$\mathbf{E_{11}}$ (1, 0, 0, 0, 0, 0), $\mathbf{E_{12}}$ (0, 0, 0, 1, 0, 0), $\mathbf{E_{13}}$ (0, -1, 0, 0, 0, e^o_{13z}),

$\mathbf{E_{14}}$ (0, 0, 0, e^o_{14x} , e^o_{14y}, 0), $\mathbf{E_{15}}$ (0, -1, 0, 0, 0, e^o_{15z}), $\mathbf{E_{16}}$ (1, 0, 0, 0, 0, e^o_{16z}).

Получаем матрицу из найденных координат единичных винтов, откуда находим коэффициенты:

$$(E)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & e^0_{13z} \\ 0 & 0 & 0 & e^0_{14x} & e^0_{14y} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & e^0_{15z} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^0_{16z} \end{pmatrix}; \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} & a=1, \\ & b=-c, \\ & c=\frac{e^0_{16z}}{e^0_{15z}-e^0_{13z}}. \end{aligned}$$

Указанные коэффициенты выражают скорости в соответствующих кинематических парах. В третьей цепи имеется внутренняя подвижность, что свидетельствует о возможности передачи вращения с двигателя вращательного перемещения на вращательную кинематическую пару, сопряженную с выходным звеном.

В трёх кинематических цепях имеет место внутренняя подвижность – передача вращения двигателем вращательного перемещения к конечной вращательной кинематической паре. Таким образом, частичный механизм, расположенной между выходным звеном и конечным звеном, должен обладать тремя степенями свободы. Убедимся в этом, применив формулу В.В. Добровольского (2.4):

$$W=3\cdot(6-1)-2\cdot 6=3.$$

Полученный частичный сферический механизм имеет три степени свободы. Таким образом, выходное звено может перемещаться по трём координатам и имеет три поступательные степени свободы, а конечное звено относительно выходного звена имеет три вращательные степени свободы, что свидетельствует о наличии в данном механизме кинематической развязки между поступательными и вращательными движениями [79].

Выводы по главе

1. Выбор МПС Orthoglide в качестве объекта исследований определяется его особенностью – изоморфизмом структуры. Состоящий из трёх идентичных кинематических цепей, данный меха-

низм также обладает кинематической развязкой – одним движением (перемещением) входного звена (или группы звеньев) кинематической цепи обеспечивается только одно движение выходного звена. За счёт своей конструкции робот Orthoglide не имеет особых положений, в том числе и в рабочей зоне.

2. При синтезе рассматриваемых механизмов с четырьмя, пятью и шестью степенями свободы с шарнирными параллелограммами серьёзную проблему представляет определение их числа степеней подвижностей.

3. Проблема решена принятием допущения, что в цепи, содержащей двигатель поступательного движения, шарнирный параллелограмм рассматриваем как одноподвижную поступательную кинематическую пару, а в двух цепях, не имеющих двигателей вращательного перемещения, шарнирные параллелограммы заменяем карданными шарнирами.

4. Полученные результаты использованы далее при разработке структурного ряда МПС повышенной жёсткости [76, 77, 78, 79].

ГЛАВА 3
ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛОЖЕНИЙ И СКОРОСТЕЙ МЕХАНИЗМОВ ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ С РАЗВЯЗКОЙ ПОСТУПАТЕЛЬНЫХ И ВРАЩАТЕЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЙ

В данной главе рассматривается важнейшая для анализа, синтеза и управления задача о положениях, которая заключается в определении взаимосвязи между обобщенными и абсолютными координатами. Рассмотренный в главе 2 механизм с шестью степенями свободы имеет кинематическую развязку по положению и ориентации выходного звена, следовательно, его можно условно разделить на два механизма – поступательный механизм параллельной структуры с тремя степенями свободы и сферический механизм с тремя степенями свободы. Анализ данных механизмов можно производить независимо друг от друга.

Определение положений поступательного механизма с тремя степенями свободы и с шарнирными параллелограммами связано с необходимостью учитывать условие параллельности и неизменности их длин звеньев. Для облегчения решения этой задачи исходный механизм заменялся упрощенным. Отличие последнего состояло в том, что шарнирный параллелограмм представлялся одноподвижной поступательной кинематической парой. В результате решения системы уравнений были составлены уравнения связи между входными (обобщёнными) и выходными (абсолютными) координатами при решении как прямой, так и обратной задач кинематики. Решение задачи о положениях сферического механизма с тремя степенями свободы составлены с использованием сферической системы координат и в углах поворота при переходе подвижной системы координат в неподвижную.

Для определения скоростей поступательного и сферического механизмов используется аналитический метод, основанный на изучении свойств матрицы Якоби.

3.1. Решение прямой и обратной задач кинематики для механизма параллельной структуры с поступательными движениями выходного звена

В данном параграфе на примере механизма с шестью степенями свободы, соответствующее описание которого приведено в главе 2, рассматривается решение прямой и обратной задач кинематики для той части механизма, которая определяет поступательное перемещение выходного звена.

3.1.1. Решение обратной задачи кинематики

Рассмотрим решение обратной задачи кинематики (о положении) механизма параллельной структуры с двигателями поступательного перемещения, расположенными по осям декартовой системы координат x, y, z.

Поступательные движения обусловлены тем, что в каждой цепи имеется шарнирный параллелограмм, две вращательные кинематические пары и двигатель поступательного перемещения. Для анализа схем типа Orthoglide (рисунок 3.1) может быть использован механизм «пирамида» (рисунок 3.2), который получается из исходного таким образом, что все кинематические цепи мысленно сдвигаются к центру выходного звена. Обобщенными (входными) координатами будут отрезки, характеризующие положения точек B_1, B_2, B_3. Абсолютными (выходными) координатами выходного звена будут координаты точки A.

Целью обратной задачи кинематики является поиск переменных положения входных звеньев (x_{B1}, y_{B2}, z_{B3}) по известным координатам рабочей точки манипулятора (x_A; y_A; z_A). Обратная задача кинематики в общем случае может иметь несколько решений, соответствующих одному положению инструмента.

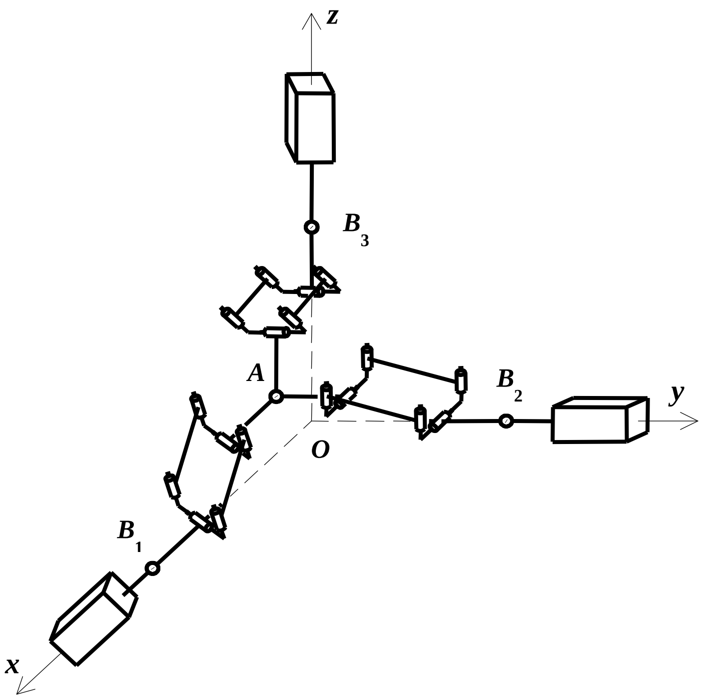


Рисунок 3.1. поступательный механизм параллельной структуры с тремя степенями свободы.

В системе координат x, y, z расположена точка A, положение которой не совпадает с началом системы координат точкой O. Необходимо определить координаты x_{B1}, y_{B2}, z_{B3}, то есть на какое расстояние L_x^*, L_y^*, L_x^* переместятся входные звенья механизма.

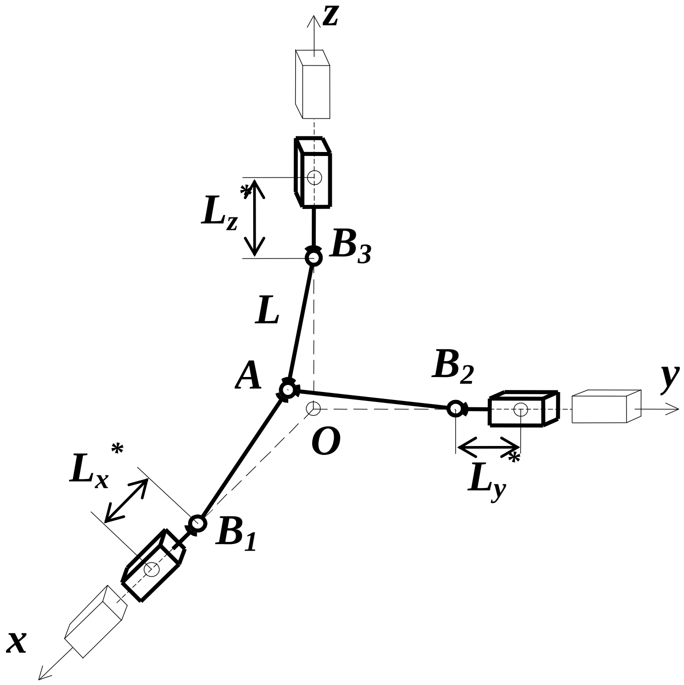


Рисунок 3.2. Механизм «пирамида» – расчетная схема механизма с тремя степенями свободы.

Точка A имеет координаты $(x_A;\ y_A;\ z_A)$. Чтобы узнать на какое расстояние переместились входные звенья механизма относительно начала координат, запишем следующие уравнения:

$$
\begin{aligned}
&(x_A - x_{B1})^2 + (y_A - y_{B1})^2 + (z_A - z_{B1})^2 = L^2,\\
&(x_A - x_{B2})^2 + (y_A - y_{B2})^2 + (z_A - z_{B2})^2 = L^2,\\
&(x_A - x_{B3})^2 + (y_A - y_{B3})^2 + (z_A - z_{B3})^2 = L^2.
\end{aligned} \tag{3.1}
$$

В системе уравнений (3.1) L есть длина промежуточного звена каждой цепи. Координаты y_{B1}^2, z_{B1}^2, x_{B2}^2, z_{B2}^2, x_{B3}^2 и y_{B3}^2 обратятся в ноль, поскольку соответствующие входные звенья расположены вдоль координатных осей. Получаем выражения:

$$
\begin{aligned}
&(x_A - x_{B1})^2 + y_A^2 + z_A^2 = L^2,\\
&x_A^2 + (y_A - y_{B2})^2 + z_A^2 = L^2,\\
&x_A^2 + y_A^2 + (z_A - z_{B3})^2 = L^2.
\end{aligned} \tag{3.2}
$$

Из полученных трёх уравнений необходимо найти три неизвестных, а именно x_{B1}, y_{B2}, z_{B3}, причём эти уравнения не зависимы.

Для определения x_{B1}, y_{B1}, z_{B3} используем первое, второе и третье уравнения, соответственно, раскрывая скобки и получая соответствующие решения уравнений с двумя неизвестными:

$$x_A^2 - 2\cdot x_A \cdot x_{B1} + x_{B1}^2 + y_A^2 + z_A^2 = L^2 \rightarrow A\cdot x_{B1}^2 + B\cdot x_{B1} + C = 0 \rightarrow \begin{aligned} x_{B1} &= \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4\cdot A\cdot C}}{2\cdot A} \\ B &= -2\cdot x_A \\ C &= x_A^2 + y_A^2 + z_A^2 - L^2 \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$x_A^2 + y_A^2 - 2\cdot y_A \cdot y_{B2} + y_{B2}^2 + z_A^2 = L^2 \rightarrow A\cdot y_{B2}^2 + B\cdot y_{B2} + C = 0 \rightarrow \begin{aligned} y_{B2} &= \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4\cdot A\cdot C}}{2\cdot A} \\ B &= -2\cdot y_A \\ C &= x_A^2 + y_A^2 + z_A^2 - L^2 \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$x_A^2 + y_A^2 + z_A^2 - 2\cdot z_A \cdot z_{B3} + z_{B3}^2 = L^2 \rightarrow A\cdot z_{B3}^2 + B\cdot z_{B3} + C = 0 \rightarrow \begin{aligned} z_{B3} &= \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4\cdot A\cdot C}}{2\cdot A} \\ B &= -2\cdot z_A \\ C &= x_A^2 + y_A^2 + z_A^2 - L^2 \end{aligned} \quad (3.5)$$

Для проверки полученных уравнений зададим значения координат точки A ($x_A; y_A; z_A$), где $x_A = 2$; $y_A = 3$; $z_A = 1$. Длина звена $L = 5$.

Определим координаты точек x_{B11} и x_{B12}, подставляя значения в (3.3) и получаем следующие решения:

$$\begin{aligned} A &= 1 \\ B &= -2\cdot x_A \\ C &= x_A^2 + y_A^2 + z_A^2 - L^2 \end{aligned}; \qquad \begin{aligned} A &= 1 \\ B &= -2\cdot 2 = -4 \\ C &= 2^2 + 3^2 + 1^2 - 5^2 = -11 \end{aligned};$$

$$x_{B11} = -1.87;\ x_{B12} = 5.87.$$

Координаты точек y_{B21} и y_{B22} определим, подставляя их в выражение (3.4):

$$\begin{aligned} A &= 1 \\ B &= -2\cdot y_A \\ C &= x_A^2 + y_A^2 + z_A^2 - L^2 \end{aligned}; \qquad \begin{aligned} A &= 1 \\ B &= -2\cdot 3 = -6 \\ C &= 2^2 + 3^2 + 1^2 - 5^2 = -11 \end{aligned};$$

$$y_{B21} = -1.47;\ y_{B22} = 7.47.$$

И координаты точек z_{B31} и z_{B32} определим, подставляя их в выражение (3.5):

$$\begin{aligned} A &= 1 \\ B &= -2\cdot z_A \\ C &= x_A^2 + y_A^2 + z_A^2 - L^2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} A &= 1 \\ B &= -2\cdot 1 = -2 \\ C &= 2^2 + 3^2 + 1^2 - 5^2 = -11 \end{aligned};$$

$$z_{B31} = -2.46;\ z_{B32} = 4.46.$$

Таким образом, получили координаты ($x_{B11}; y_{B21}; z_{B31}$), равные, соответственно, (-1.87; -1.47; -2.46) и координаты ($x_{B12}; y_{B22}; z_{B32}$), равные (5.87; 7.47; 4.46), соответственно. Такие координаты будут иметь звенья, если рабочая точка манипулятора (x_A; y_A; z_A) будет располагаться в координатах (2; 3; 1), соответственно при длине звена равном $L = 5$.

3.1.2. Решение прямой задачи кинематики

Для решения прямой задачи кинематики значения положений входных звеньев (x_{B1}, y_{B2}, z_{B3}) считаются известными, а целью является нахождение положения рабочей точки инструмента (x_A; y_A; z_A). Эта задача допускает несколько решений, соответствующих различным положениям инструмента.

Для нахождения координат точки *A* (x_A; y_A; z_A) воспользуемся системой уравнений (3.1), описанной выше. Координаты y_{B1}^2; z_{B1}^2; x_{B2}^2; z_{B2}^2; x_{B3}^2 и y_{B3}^2 обратятся в ноль, при этом получаем выражения, соответствующие системе уравнений (3.2).

Из полученных трёх уравнений необходимо найти три неизвестных – x_A, y_A, z_A, причем эти уравнения зависимы. Раскрывая скобки во всех трёх уравнениях системы (3.2), получаем следующую систему выражений:

$$\begin{aligned} &x_A^2 - 2 \cdot x_A \cdot x_{B1} + x_{B1}^2 + y_A^2 + z_A^2 = L^2 \\ &x_A^2 + y_A^2 - 2 \cdot y_A \cdot y_{B2} + y_{B2}^2 + z_A^2 = L^2 \\ &x_A^2 + y_A^2 + z_A^2 - 2 \cdot z_A \cdot z_{B3} + z_{B3}^2 = L^2 \end{aligned} \qquad (3.6)$$

Для выражения y_A через x_A используем первые два уравнения, вычитая из первого уравнения второе и получим:

$$\begin{aligned} &x_{B1}^2 - 2 \cdot x_A \cdot x_{B1} - y_{B2}^2 + 2 \cdot y_A \cdot y_{B2} = 0, \\ &2 \cdot y_A \cdot y_{B2} = y_{B2}^2 - x_{B1}^2 + 2 \cdot x_A \cdot x_{B1}, \\ &y_A = \frac{y_{B2}^2 - x_{B1}^2}{2 \cdot y_{B2}} + \frac{2 \cdot x_A \cdot x_{B1}}{2 \cdot y_{B2}}, \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} &a = \frac{y_{B2}^2 - x_{B1}^2}{2 \cdot y_{B2}}, \\ &b = \frac{2 \cdot x_{B1}}{2 \cdot y_{B2}} = \frac{x_{B1}}{y_{B2}}, \\ &y_A = a + b \cdot x_A. \end{aligned} \qquad (3.7)$$

Для нахождения z_A через x_A используем первое и третье уравнения:

$$\begin{aligned} &x_{B1}^2 - 2 \cdot x_A \cdot x_{B1} - z_{B3}^2 + 2 \cdot z_A \cdot z_{B3} = 0, \\ &2 \cdot z_A \cdot z_{B3} = z_{B3}^2 - x_{B1}^2 + 2 \cdot x_A \cdot x_{B1}, \\ &z_A = \frac{z_{B3}^2 - x_{B1}^2}{2 \cdot z_{B3}} + \frac{2 \cdot x_A \cdot x_{B1}}{2 \cdot z_{B3}}, \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} &c = \frac{z_{B3}^2 - x_{B1}^2}{2 \cdot z_{B3}}, \\ &d = \frac{2 \cdot x_{B1}}{2 \cdot z_{B3}} = \frac{x_{B1}}{z_{B3}}, \\ &z_A = c + d \cdot x_A. \end{aligned} \qquad (3.8)$$

Для определения x_A подставим в первое уравнение найденные выше y_A и z_A.

$$x_A^2 - 2 \cdot x_A \cdot x_{B1} + x_{B1}^2 + y_A^2 + z_A^2 = L^2,$$

$$x_A^2 - 2 \cdot x_A \cdot x_{B1} + x_{B1}^2 + (a + b \cdot x_A)^2 + (c + d \cdot x_A)^2 = L^2,$$

$$x_A^2 - 2 \cdot x_A \cdot x_{B1} + x_{B1}^2 + a^2 + 2 \cdot a \cdot (b \cdot x_A) + (b \cdot x_A)^2 + c^2 + 2 \cdot c \cdot (d \cdot x_A) + (d \cdot x_A)^2 = L^2,$$

$$x_A^2 - 2 \cdot x_A \cdot x_{B1} + x_{B1}^2 + a^2 + 2 \cdot a \cdot (b \cdot x_A) + b^2 \cdot {x_A}^2 + c^2 + 2 \cdot c \cdot (d \cdot x_A) + d^2 \cdot {x_A}^2 = L^2,$$

$$\begin{aligned} &A\cdot x_A^2 + B\cdot x_A + C = 0,\\ &x_A = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4\cdot A\cdot C}}{2\cdot A}, \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} &A = 1 + b^2 + d^2,\\ &B = -2\cdot x_{B1} + 2\cdot a\cdot b + 2\cdot c\cdot d,\\ &C = x_{B1}^2 + a^2 + c^2 - L^2. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Для проверки полученных уравнений зададим координаты точек положения входных звеньев (x_{B1}, y_{B2}, z_{B3}), где $x_{B1} = 2$; $y_{B2} = 3$; $z_{B3} = 1$. Длина звена $L = 5$. Необходимо определить координаты положения рабочей точки инструмента A (x_A, y_A, z_A).

Определим координаты точек y_{A1} и y_{A2}, подставляя заданные параметры в (3.7):

$$a = 0.83; \qquad b = 0.67; \qquad y_A = 0.83 + 0.67\cdot x_A.$$

Определим координаты точек z_{A1} и z_{A2}, подставляя заданные параметры в (3.8):

$$c = -1.5; \qquad d = 2.0; \qquad z_A = -1.5 + 2\cdot x_A.$$

Определим координаты точек x_{A1} и x_{A2}, подставляя заданные параметры в (3.9):

$$A = 5.44; \qquad B = -8.89; \qquad C = -18.06;$$

$$x_{A1} = -1.18; \qquad x_{A2} = 2.81.$$

Подставляя полученные значения x_{A1} и x_{A2} в уравнения для определения y_{A1}, y_{A2} и z_{A1}, z_{A2}, получим решения:

$$y_{A1} = 0.05; \qquad y_{A2} = 2.71,$$

$$z_{A1} = -3.86; \qquad z_{A2} = 4.12.$$

Таким образом, получили координаты положения рабочей точки инструмента A (x_{A1}; y_{A1}; z_{A1}), равные, соответственно, (-1.18; 0.05; -3.86) и координаты (x_{A2}; y_{A2}; z_{A2}), равные (2.81; 2.71; 4.12), соответственно. Такие координаты будет иметь рабочая точка инструмента A, если положения входных звеньев (x_{B1}; y_{B2}; z_{B3}) будет располагаться в координатах (2; 3; 1), соответственно при длине звена равном $L = 5$.

3.2. Решение задачи о скоростях методом дифференцирования уравнений связи для механизма параллельной структуры с поступательными движениями выходного звена

Решим задачу о скоростях для поступательного механизма параллельной структуры. Решение задачи о скоростях необходимо для определения взаимосвязи между координатами выходного звена и координатами входных звеньев (т.е. взаимосвязи между обобщенными координатами и абсолютными), и описывается функцией положения. Метод, который будет использоваться для решения задачи о скоростях, разработан Х. Анджелесом и К. Госсленом, и применим только к «полностью параллельным» механизмам (механизмы, где число кинематических цепей в механизме равно числу его степеней свободы, или к механизмам с взаимно независимыми (не входящими в одно уравнение связи) перемещениями в активных парах) [80, 81, 82]. То есть допускается (подразумевается), что в каждой цепи имеется только одна приводная (входная) кинематическая пара (звено), что позволяет обеспечить независимость перемещений в этих входных звенья друг от друга. Функция положения механизма в неявном виде выражается уравнением:

$$F(x_A, y_A, z_A, x_{B1}, y_{B2}, z_{B3}) = 0. \tag{3.10}$$

Уравнение связи между скоростями во входных звеньях и скоростями выходного звена для поступательного механизма с тремя кинематическими цепями можно представить системой уравнений:

$$\begin{cases} F_1(x_A, y_A, z_A, x_{B1}) = 0 \\ F_2(x_A, y_A, z_A, y_{B2}) = 0, \\ F_3(x_A, y_A, z_A, z_{B3}) = 0 \end{cases}$$

или для рассматриваемого механизма (рисунок 3.1):

$$\begin{cases} F_1 = \left(x_A - x_{B1}\right)^2 + y_A^2 + z_A^2 - L^2 = 0 \\ F_2 = x_A^2 + \left(z_y - y_{B2}\right)^2 + z_A^2 - L^2 = 0\,. \\ F_3 = x_A^2 + y_A^2 + \left(z_A - z_{B3}\right)^2 - L^2 = 0 \end{cases} \quad (3.11).$$

Для решения задачи о скоростях воспользуемся аналитическим методом, который основан на изучении свойств матрицы Якоби, представленной в общем виде:

$$A \cdot V = (-B) \cdot V_{i1},$$

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_A} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_A} & \dfrac{\partial F_1}{\partial z_A} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x_A} & \dfrac{\partial F_2}{\partial y_A} & \dfrac{\partial F_2}{\partial z_A} \\ \dfrac{\partial F_3}{\partial x_A} & \dfrac{\partial F_3}{\partial y_A} & \dfrac{\partial F_3}{\partial z_A} \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_{B1}} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial F_2}{\partial y_{B2}} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\partial F_3}{\partial z_{B3}} \end{pmatrix}; \; V = \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix}; \; V_{i1} = \begin{pmatrix} V_{11} \\ V_{21} \\ V_{31} \end{pmatrix}, \tag{3.12}$$

где $\boldsymbol{A}$ – матрица частных производных от неявной функции по абсолютным координатам x_A, y_A, z_A; $\boldsymbol{B}$ – матрица частных производных от неявной функции по обобщенным координатам x_{B1}, y_{B2}, z_{B3}; $\boldsymbol{V}$ – вектор скорости выходного звена; $\boldsymbol{V_{i1}}$ – вектор скоростей во входных звеньях (входные скорости).

Необходимо найти частные производные от неявной функции между обобщёнными и абсолютными координатами. Подставляя наши значения в (3.12), получим систему уравнений:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_A} & \frac{\partial F_1}{\partial y_A} & \frac{\partial F_1}{\partial z_A} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_A} & \frac{\partial F_2}{\partial y_A} & \frac{\partial F_2}{\partial z_A} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x_A} & \frac{\partial F_3}{\partial y_A} & \frac{\partial F_3}{\partial z_A} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_{B1}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial F_2}{\partial y_{B2}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial F_3}{\partial z_{B3}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_{11} \\ V_{21} \\ V_{31} \end{pmatrix}. \tag{3.13}$$

Продифференцируем уравнение связи для рассматриваемого поступательного механизма параллельной структуры и получим следующие выражения:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_A} = 2 \cdot x_A - 2 \cdot x_{B1}; \ \frac{\partial F_1}{\partial y_A} = 2 \cdot y_A; \ \frac{\partial F_1}{\partial z_A} = 2 \cdot z_A; \ \frac{\partial F_1}{\partial x_{B1}} = 2 \cdot x_{B1} - 2 \cdot x_A;$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x_A} = 2 \cdot x_A; \ \frac{\partial F_2}{\partial y_A} = 2 \cdot y_A - 2 \cdot y_{B2}; \ \frac{\partial F_2}{\partial z_A} = 2 \cdot z_A; \ \frac{\partial F_2}{\partial y_{B2}} = 2 \cdot y_{B2} - 2 \cdot y_A;$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial x_A} = 2 \cdot z_A; \ \frac{\partial F_3}{\partial y_A} = 2 \cdot y_A; \ \frac{\partial F_3}{\partial z_A} = 2 \cdot z_A - 2 \cdot z_{B3}; \ \frac{\partial F_3}{\partial z_{B3}} = 2 \cdot z_{B3} - 2 \cdot z_A.$$

В общем виде система уравнений (3.13) будет иметь вид:

$$\begin{pmatrix} 2 \cdot x_A - 2 \cdot x_{B1} & 2 \cdot y_A & 2 \cdot z_A \\ 2 \cdot y_A & 2 \cdot y_A - 2 \cdot y_{B2} & 2 \cdot z_A \\ 2 \cdot z_A & 2 \cdot y_A & 2 \cdot z_A - 2 \cdot z_{B3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2 \cdot x_{B1} - 2 \cdot x_A & 0 & 0 \\ 0 & 2 \cdot x_{B1} - 2 \cdot x_A & 0 \\ 0 & 0 & 2 \cdot x_{B1} - 2 \cdot x_A \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_{11} \\ V_{21} \\ V_{31} \end{pmatrix}.$$

Решим обратную задачу о скоростях. Зададим скорости выходного звена: V_{11} = 0.5 *м/с*, V_{21} = 1 *м/с*, V_{31} = 2 *м/с*, положение выходного звена в точке *A* (2; 3; 1), L = 5. Подставим заданные значения в (3.13) и получим систему:

$$\begin{pmatrix} 15{,}75 & 6 & 2 \\ 4 & 20{,}94 & 2 \\ 4 & 6 & 10{,}93 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -15{,}75 & 0 & 0 \\ 0 & -20{,}94 & 0 \\ 0 & 0 & -10{,}93 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Найдем из данных матриц V_x, V_y, V_z, приведя уравнения к линейному виду и выразим неизвестные V_x, V_y, V_z:

$$\begin{aligned} 15{,}75 \cdot V_x + 6 \cdot V_y + 2 \cdot V_z &= 7{,}87 \\ 4 \cdot V_x + 20{,}94 \cdot V_y + 2 \cdot V_z &= 20{,}94. \\ 4 \cdot V_x + 6 \cdot V_y + 10{,}93 \cdot V_z &= 21{,}86 \end{aligned}$$

Значения скоростей в приводных вращательных шарнирах (входные скорости) равны V_x = – 0.022 *м/с*, V_y = 0.857 *м/с*, V_z = 1.537 *м/с*.

Таким образом, для рассматриваемого поступательного механизма была найдена взаимосвязь между координатами выходного звена и координатами входных звеньев. Решена задача кинематики, прямая и обратная задачи о скоростях методом дифференцирования уравнений связи [83].

3.3. *Решение прямой задачи кинематики для сферического механизма параллельной структуры*

Рассмотрим сферическую часть синтезированного в прошлой главе механизма с шестью степенями свободы (рисунок 3.3), состоящего и трёх кинематических цепей с пересекающимися осями под углом 90°. Каждое входное звено сопряжено с двигателем вращательного перемещения. Выходное звено представляет собой две пересекающиеся полусферы и инструмент, вращающийся вокруг трех осей x, y, z с пересечением в точке O.

Абсолютными (выходными) координатами являются углы поворота платформы: α, β, γ – повороты вокруг осей x, y, z, соответственно. Обобщенными (входными) координатами являются углы поворота входных звеньев первой, второй и третьей кинематической цепи φ_{11}, φ_{21}, φ_{31}, соответственно.

Для определения скоростей и особых положений сферического механизма необходимо решить задачу о положениях, т.е. найти взаимосвязь между входными и выходными координатами. Проведём расчёт аналитическим методом.

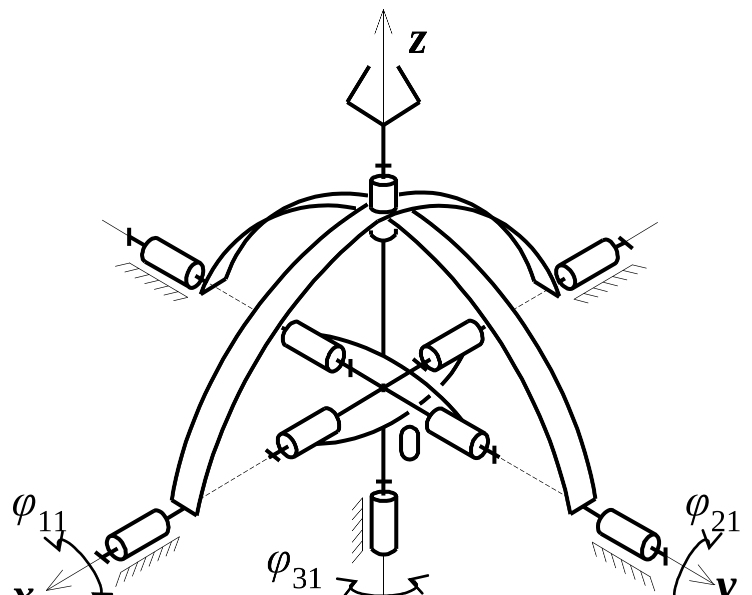


Рисунок 3.3. Сферическая часть механизма с шестью степенями свободы. Расчётная схема.

Входные (приводные) звенья осуществляют поворот в следующей последовательности: вокруг осей Ox, Oy, Oz. Соответствующие этому матрицы поворота B_1, B_2, B_3 имеют вид:

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi_{11} & -\sin\varphi_{11} \\ 0 & \sin\varphi_{11} & \cos\varphi_{11} \end{pmatrix};\ B_2 = \begin{pmatrix} \cos\varphi_{21} & 0 & \sin\varphi_{21} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi_{21} & 0 & \cos\varphi_{21} \end{pmatrix};\ B_3 = \begin{pmatrix} \cos\varphi_{31} & -\sin\varphi_{31} & 0 \\ \sin\varphi_{31} & \cos\varphi_{31} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

где φ_{11} – угол поворота первого (входного) звена по оси Ox; φ_{12}– угол поворота второго звена по оси Oy; φ_{13} – угол поворота третьего звена по оси Oz.

Выходное звено выполняет последовательный поворот вокруг осей Ox и Oy, вращение вокруг оси Oz не рассматриваем, т.к. поворот по оси Oz влияет на ориентацию инструмента, а не на его положение (рисунок 3.4).

При нулевом положении углов φ_{11} и φ_{21} выходное звено расположено по оси Oz на расстояние ρ, равное константе.

После поворота на угол φ_{11} вокруг оси Ox мы получаем значение выходного звена в неподвижной системе координат, т.е. значение точки $Mx = (a\ b\ c)$, равное:

$$Mx = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi_{11} & -\sin\varphi_{11} \\ 0 & \sin\varphi_{11} & \cos\varphi_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin\varphi_{11} \\ \cos\varphi_{11} \end{pmatrix}.$$

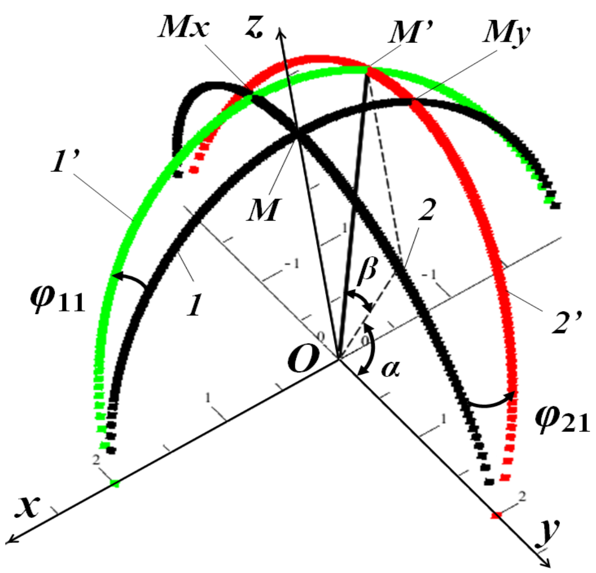


Рисунок 3.4.

После поворота на угол φ_{21} вокруг оси Oy мы получаем значение выходного звена в неподвижной системе, т.е. значение точки $My = (d\ e\ f)$, равное:

$$My = \begin{pmatrix} d \\ e \\ f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi_{21} & 0 & \sin\varphi_{21} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi_{21} & 0 & \cos\varphi_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\varphi_{21} \\ 0 \\ \cos\varphi_{21} \end{pmatrix}.$$

При повороте входных звена на углы φ_{11} и φ_{21} местоположение вектора **OM’** (выходного звена) определяется из пересечения двух полуокружностей 1’ и 2’ (см. рисунок 3.4).

Выпишем уравнения для определения положения выходного звена (точки M'), что является решением прямой задачи кинематики.

Точка M' лежит на сфере, центром которой является точка O:

$$x_M^2 + y_M^2 + z_M^2 = \rho^2. \tag{3.14}$$

Уравнение плоскости, в которой лежит дуга 1, проходящая через ось Ox, запишем следующим образом:

$$y_M + c \cdot z = 0.$$

Подставим значение точки Mx = (0, –sin φ_{11}, cos φ_{11}), которая лежит на полудуге 1' в полученное уравнение плоскости:

$$-\sin\varphi_{11} + c \cdot \cos\varphi_{11} = 0,$$

$$c = \tan\varphi_{11},$$

$$y_M + \tan\varphi_{11} \cdot z = 0. \tag{3.15}$$

Уравнение плоскости, в которой лежит дуга 2, проходящая через ось Oy, запишем следующим образом:

$$x_M + d \cdot z = 0.$$

Подставим значение точки My = (sin φ_{21}, 0, cos φ_{21}), которая лежит на полудуге 2' в полученное уравнение плоскости:

$$\sin\varphi_{21} + d \cdot \cos\varphi_{21} = 0,$$

$$d = -\tan\varphi_{21},$$

$$x_M - \tan\varphi_{21} \cdot z = 0. \tag{3.16}$$

Запишем систему уравнений определения положения точки M':

$$\begin{cases} x_M^2 + y_M^2 + z_M^2 = \rho^2 \\ y_M + \tan\varphi_{11} \cdot z_M = 0. \\ x_M - \tan\varphi_{21} \cdot z_M = 0 \end{cases} \tag{3.17}$$

Подставляя в первое уравнение системы (3.17) уравнения 2 и 3 получим координаты точки z:

$$z_M^2 \cdot \left(\tan^2\varphi_{11} + \tan^2\varphi_{21} + 1\right) = \rho^2,$$

$$z_M = \pm\frac{\rho}{\sqrt{\tan^2\varphi_{11} + \tan^2\varphi_{21} + 1}}. \tag{3.18}$$

Таким образом, выражая z и подставляя её в уравнения (3.15) и (3.16), получим координаты x и y, что является решением прямой задачи кинематики.

$$z_M = \frac{\rho}{\sqrt{\tan^2\varphi_{11} + \tan^2\varphi_{21} + 1}},$$

$$x_M = \tan\varphi_{21} \cdot \frac{\rho}{\sqrt{\tan^2\varphi_{11} + \tan^2\varphi_{21} + 1}}, \tag{3.19}$$

$$y_M = -\tan\varphi_{11} \cdot \frac{\rho}{\sqrt{\tan^2\varphi_{11} + \tan^2\varphi_{21} + 1}}.$$

Запишем решение прямой задачи кинематики (3.19) в сферической системе координат через два угла α, β и длину вектора ρ (рисунок 3.5). Для этого заменим в полученной нами системе (3.19) x_M, y_M, z_M на следующие выражения:

$$x_M = \rho \cdot \cos\beta \cdot \sin\alpha,$$

$$y_M = \rho \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta, \tag{3.20}$$

$$z_M = \rho \cdot \sin\beta.$$

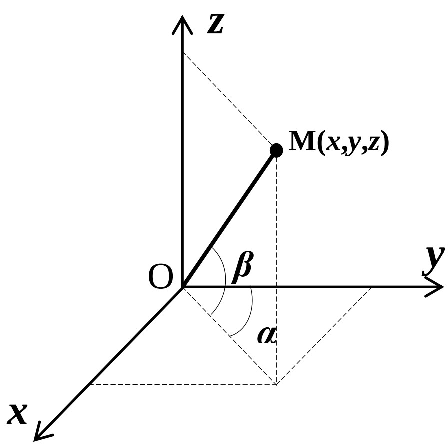


Рисунок 3.5.

Получим:

$$\rho \cdot \cos\beta \cdot \sin\alpha + \tan\varphi_{11} \cdot \left(\frac{\rho}{\sqrt{\tan^2\varphi_{11} + \tan^2\varphi_{21} + 1}} \right) = 0,$$

$$\rho \cdot \cos\alpha \cdot \cos\beta - \tan\varphi_{21} \cdot \left(\frac{\rho}{\sqrt{\tan^2\varphi_{11} + \tan^2\varphi_{21} + 1}} \right) = 0, \tag{3.21}$$

$$\rho \cdot \sin\beta - \left(\frac{\rho}{\sqrt{\tan^2\varphi_{11} + \tan^2\varphi_{21} + 1}} \right) = 0.$$

В виду того, что $\rho = const$, сократим полученные выражения на ρ:

$$\cos\beta\cdot\sin\alpha+\tan\varphi_{11}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{\tan^2\varphi_{11}+\tan^2\varphi_{21}+1}}\right)=0,$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta-\tan\varphi_{21}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{\tan^2\varphi_{11}+\tan^2\varphi_{21}+1}}\right)=0, \tag{3.22}$$

$$\sin\beta-\left(\frac{1}{\sqrt{\tan^2\varphi_{11}+\tan^2\varphi_{21}+1}}\right)=0.$$

Из системы уравнений (3.20) можно найти выходные параметры звена *OM’* в сферической системе координат, т.е. получить решение прямой задачи кинематики в углах α и β через углы φ_{11} и φ_{21}.

Из уравнения 3 системы (3.20) найдём значение угла β:

$$\beta=\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{\tan^2\varphi_{11}+\tan^2\varphi_{21}+1}}\right). \tag{3.23}$$

Подставляя полученное значение β в уравнение 1 системы (3.20), найдем значение угла α:

$$\alpha=\arccos\left(\frac{-\tan\varphi_{11}}{\cos\beta}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{\tan^2\varphi_{11}+\tan^2\varphi_{21}+1}}\right)\right). \tag{3.24}$$

Таким образом, получили решение прямой задачи кинематики в углах α и β.

Уравнение связи для рассматриваемого сферического механизма можно представить следующей системой уравнений в общем виде:

$$F(\alpha,\beta,\varphi_{11},\varphi_{21})=0, \tag{3.25}$$

$$\begin{cases} F_1(\alpha,\beta,\varphi_{11},\varphi_{21})=0,\\ F_2(\alpha,\beta,\varphi_{11},\varphi_{21})=0. \end{cases} \tag{3.26}$$

Подставляя в уравнения связей (3.26) уравнения из системы (3.21), получим следующую систему уравнений, описывающую взаимосвязь между входными и выходными координатами:

$$\begin{cases} F_1 = \cos\beta \cdot \sin\alpha + \tan\varphi_{11} \cdot \left(\dfrac{1}{\sqrt{\tan^2\varphi_{11} + \tan^2\varphi_{21} + 1}} \right), \\ F_2 = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \tan\varphi_{21} \cdot \left(\dfrac{1}{\sqrt{\tan^2\varphi_{11} + \tan^2\varphi_{21} + 1}} \right), \\ F_3 = \sin\beta - \left(\dfrac{1}{\sqrt{\tan^2\varphi_{11} + \tan^2\varphi_{21} + 1}} \right). \end{cases} \tag{3.27}$$

Уравнением 3 из системы (3.27) мы пренебрегаем, т.к. оно будет функционально зависимо от двух предыдущих.

Таким образом, составлены уравнения связи между углами поворота в приводных вращательных шарнирах и углами поворота (изменения ориентации) выходного звена (3.27). Используя полученную систему уравнений, можно переходить к решению задачи о скоростях.

3.3.1. Решение задачи о скоростях методом дифференцирования уравнений связи для сферического механизма

Решим задачу о скоростях для сферического механизма параллельной структуры. Решение задачи о скоростях необходимо для определения взаимосвязи между координатами (углами поворота) выходного звена и координатами (углами поворота) входных звеньев (т.е. взаимосвязи между обобщенными координатами и абсолютными), и описывается функцией положения (3.27), решение которой проводилось выше.

Для решения задачи о скоростях воспользуемся аналитическим методом, который основан на изучении свойств матрицы Якоби, представленной в общем виде:

$$C \cdot V = (-D) \cdot \omega_1, \tag{3.28}$$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial \alpha} & \dfrac{\partial F_1}{\partial \beta} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial \alpha} & \dfrac{\partial F_2}{\partial \beta} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial \varphi_{11}} & \dfrac{\partial F_1}{\partial \varphi_{21}} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial \varphi_{11}} & \dfrac{\partial F_2}{\partial \varphi_{21}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_{11} \\ \dot{\varphi}_{21} \end{pmatrix}, \tag{3.29}$$

где $\boldsymbol{C}$ – матрица частных производных от неявной функции по абсолютным координатам α, β; $\boldsymbol{D}$ – матрица частных производных от неявной функции по обобщенным координатам φ_{11}, φ_{21}; $\boldsymbol{V}$ – скорости изменения углов ориентации выходного звена, определяющиеся углами α, β; $\boldsymbol{\omega_1}$ – обобщенные скорости во вращательных шарнирах (входные скорости – углы поворота).

Согласно системе уравнений (3.29) необходимо найти частные производные от неявной функции между обобщёнными и абсолютными координатами, составив две матрицы. Продифференцировав уравнения из системы (3.27), получаем следующие выражения:

$$\frac{\partial F_1}{\partial \varphi_{11}} = \frac{\partial}{\partial \varphi_{11}} \cdot \left(\cos\beta \cdot \sin\alpha + \tan\varphi_{11} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{\tan^2 \varphi_{11} + \tan^2 \varphi_{21} + 1}} \right) \right) =$$

$$= \frac{1 + \tan^2 \varphi_{11}}{\sqrt{\tan^2 \varphi_{11} + \tan^2 \varphi_{21} + 1}} - \frac{\tan^2 \varphi_{11} \cdot \left(1 + \tan^2 \varphi_{11}\right)}{\left(\tan^2 \varphi_{11} + \tan^2 \varphi_{21} + 1\right)^{3/2}};$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial \varphi_{21}} = -\frac{\tan\varphi_{11} \cdot \tan\varphi_{21} \cdot \left(1 + \tan^2 \varphi_{21}\right)}{\left(\tan^2 \varphi_{11} + \tan^2 \varphi_{21} + 1\right)^{3/2}};$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial \alpha} = \cos\alpha \cdot \cos\beta; \qquad \frac{\partial F_1}{\partial \beta} = -\sin\beta \cdot \sin\alpha;$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial \varphi_{11}} = \frac{\partial}{\partial \varphi_{11}} \cdot \left(\cos\alpha \cdot \cos\beta - \tan\varphi_{21} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{\tan^2 \varphi_{11} + \tan^2 \varphi_{21} + 1}} \right) \right) = \frac{\tan\varphi_{21} \cdot \tan\varphi_{11} \cdot \left(1 + \tan^2 \varphi_{11}\right)}{\left(\tan^2 \varphi_{11} + \tan^2 \varphi_{21} + 1\right)^{3/2}};$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial \varphi_{21}} = -\frac{1 + \tan^2 \varphi_{21}}{\sqrt{\tan^2 \varphi_{11} + \tan^2 \varphi_{21} + 1}} + \frac{\tan^2 \varphi_{21} \cdot \left(1 + \tan^2 \varphi_{21}\right)}{\left(\tan^2 \varphi_{11} + \tan^2 \varphi_{21} + 1\right)^{3/2}};$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial \alpha} = -\cos\beta \cdot \sin\alpha; \qquad \frac{\partial F_2}{\partial \beta} = -\cos\alpha \cdot \sin\beta.$$

Перепишем систему (3.29) в виде:

$$\begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_1}{\partial \beta} \\ \frac{\partial F_2}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_2}{\partial \beta} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \varphi_{11}} & \frac{\partial F_1}{\partial \varphi_{21}} \\ \frac{\partial F_2}{\partial \varphi_{11}} & \frac{\partial F_2}{\partial \varphi_{21}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_{11} \\ \dot{\varphi}_{21} \end{pmatrix}. \tag{3.30}$$

Решим прямую задачу о скоростях. Зададим следующие углы поворота φ_{11} и φ_{21}, равные, соответственно, 0.3 *рад* и 0.5 *рад*. Угловые скорости $\dot{\varphi}_{11}$ и $\dot{\varphi}_{21}$ равны 0.01 *рад/сек* и 0.02 *рад/сек*.

Подставляя полученные продифференцированные выражения в (3.30), а также значения углов α и β (3.23, 3.24) получим следующие решение системы:

$$\begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -0.262 & -0.737 \\ -0.463 & 0.417 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0.864 & -0.133 \\ 0.112 & -0.864 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.01 \\ 0.02 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.021 \\ 0.016 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, определили скорости изменения углов ориентации выходного звена $\dot{\alpha}$ и $\dot{\beta}$, равные, при заданных начальных условиях, –0.021 *рад/сек* и 0.016 *рад/сек*, соответственно.

3.4. Решение задачи кинематики (о положении) для сферического механизма параллельной структуры с использованием метода поворота системы координат

Для решение прямой и обратной задачи кинематики в большинстве случаев бывает удобно получать решение задачи в углах поворота при переходе подвижной системы координат в неподвижную. Для этого используются различные методы поворота системы координат. Наиболее часто используемые системы поворота: традиционная – вокруг осей x, y, z последовательно; в углах Эйлера (поворот на угол собственного вращения, угол нутации и прецессии; в углах Эйлера-Крылова [5, 84]. Для рассматриваемого сферического механизма (рисунок 3.6) решим обратную задачу о положении и скоростях, используя традиционную систему поворота вокруг осей $Oxyz$.

Сферический механизм состоит из трёх кинематических цепей с пересекающимися осями под углом 90°. Каждое входное звено сопряжено с двигателем вращательного перемещения. Выходное звено представляет собой две пересекающиеся полусферы и инструмент, вращающийся вокруг трёх осей x, y, z с пересечением в точке O.

Для нахождения положения выходного звена в подвижной системе координат $Ox_1x_2x_3$ воспользуемся последовательным поворотом вокруг осей $Oxyz$ в неподвижной системе координат на углы α, β, γ. Абсолютными (выходными) координатами являются углы поворота выходного звена – α, β, γ. Обобщенными (входными) координатами являются углы поворота приводных вращательных шарниров первой, второй и третьей кинематической цепей – φ_{11}, φ_{21}, φ_{31}, соответственно.

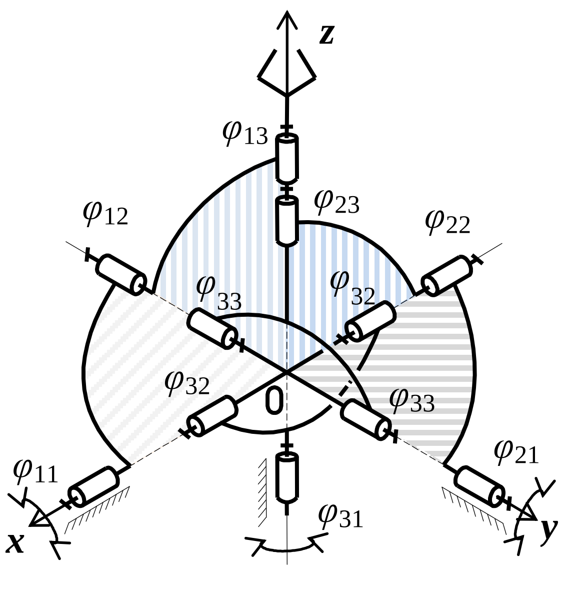


Рисунок 3.6. Сферическая часть механизма с шестью степенями свободы. Расчётная схема.

Для определения скоростей сферического механизма необходимо решить задачу о положении, т.е. найти взаимосвязь между входными и выходными координатами . Проведём расчёт аналитическим методом.

Повороты через углы α, β, γ позволяют мысленно совместить неподвижную систему координат ($Oxyz$) с подвижной ($Ox_1x_2x_3$), совершая первый поворот вокруг оси Ox на угол α. Второй поворот на угол β вокруг оси Oy'. И третий поворот вокруг оси Ox_3 на угол γ (рисунок 3.7).

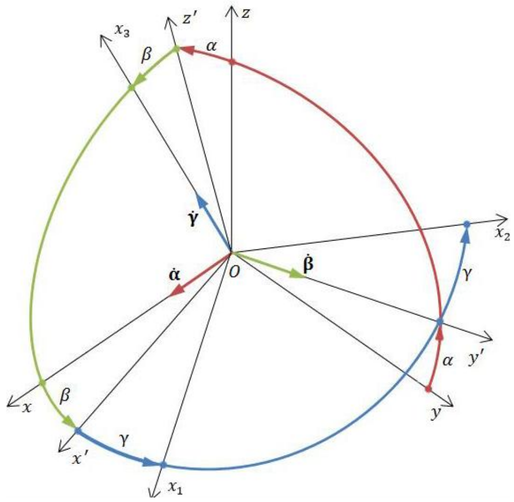


Рисунок 3.7.

Матрицы, описывающие поворот выходного звена вокруг осей x, y, z соответственно, при переходе от подвижной системы координат к неподвижной системе, выглядят следующим образом:

$$A_1=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha\\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix};\ A_2=\begin{pmatrix}\cos\beta & 0 & \sin\beta\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta\end{pmatrix};\ A_3=\begin{pmatrix}\cos\gamma & -\sin\gamma & 0\\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Матрица, отражающая переход выходного звена от подвижной системы координат к неподвижной системе, будет иметь вид:

$$A=A_3\cdot A_2\cdot A_1; \tag{3.31}$$

$$A=\begin{pmatrix}\cos\beta\cdot\cos\gamma & cos\gamma\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta-\cos\alpha\cdot\sin\gamma & \sin\alpha\cdot\sin\gamma+\cos\alpha\cdot\cos\gamma\cdot\sin\beta\\ \cos\beta\cdot\sin\gamma & \cos\alpha\cdot\cos\gamma+\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma & \cos\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma-\cos\gamma\cdot\sin\alpha\\ -\sin\beta & \cos\beta\cdot\sin\alpha & \cos\alpha\cdot\cos\beta\end{pmatrix}.$$

В первой кинематической цепи входное звено осуществляет поворот в следующей последовательности: вокруг осей x ,y, z. Соответствующие этому матрицы поворота $B_1^/$, $B_2^/$, $B_3^/$ имеют вид:

$$B_1^{/} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi_{11} & -\sin\varphi_{11} \\ 0 & \sin\varphi_{11} & \cos\varphi_{11} \end{pmatrix};\ B_2^{/} = \begin{pmatrix} \cos\varphi_{12} & 0 & \sin\varphi_{12} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi_{12} & 0 & \cos\varphi_{12} \end{pmatrix};\ B_3^{/} = \begin{pmatrix} \cos\varphi_{13} & -\sin\varphi_{13} & 0 \\ \sin\varphi_{13} & \cos\varphi_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где φ_{ij} – угол поворота первого (входного) звена; φ_{ij}– угол поворота второго звена; φ_{ij} – угол поворота третьего звена (i = 1, 2, 3 – номер кинематической цепи; j – номер кинематической пары).

Матрицу перехода входного звена из подвижной системы координат в неподвижную систему координат можно представить как:

$$B^{/} = B_1^{/} \cdot B_2^{/} \cdot B_3^{/};$$

$$B^{/} = \begin{pmatrix} \cos\varphi_{12}\cdot\cos\varphi_{13} & -\cos\varphi_{12}\cdot\sin\varphi_{13} & \sin\varphi_{12} \\ \cos\varphi_{13}\cdot\sin\varphi_{11}\cdot\sin\varphi_{12} - \cos\varphi_{11}\cdot\sin\varphi_{13} & -\sin\varphi_{11}\cdot\sin\varphi_{12}\cdot\sin\varphi_{13} - \cos\varphi_{11}\cdot\cos\varphi_{13} & -\cos\varphi_{12}\cdot\sin\varphi_{11} \\ -\cos\varphi_{11}\cdot\cos\varphi_{13}\cdot\sin\varphi_{12} - \sin\varphi_{11}\cdot\sin\varphi_{13} & \cos\varphi_{11}\cdot\sin\varphi_{12}\cdot\sin\varphi_{13} - \cos\varphi_{13}\cdot\sin\varphi_{11} & \cos\varphi_{11}\cdot\cos\varphi_{12} \end{pmatrix}.$$

Единичный вектор кинематической пары первой кинематической цепи, сопряженной с выходным звеном механизма, имеет координаты $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (рисунок 3.8). Подставляя в уравнение связи между входными и выходными координатами $A\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = B^{/}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ найденные значения матриц A и $B^{/}$, получим выражение:

$$\begin{pmatrix} \sin\alpha\cdot\sin\gamma + \cos\alpha\cdot\cos\gamma\cdot\sin\beta \\ \cos\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma - \cos\gamma\cdot\sin\alpha \\ \cos\alpha\cdot\cos\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\varphi_{12} \\ -\cos\varphi_{12}\cdot\sin\varphi_{11} \\ \cos\varphi_{11}\cdot\cos\varphi_{12} \end{pmatrix}.$$

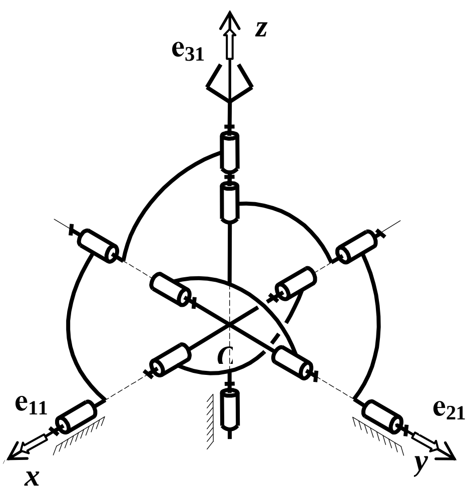


Рисунок 3.8

Из полученного выражения можно выразить угол φ_{11} через α, β и γ:

$$\cos\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma-\cos\gamma\cdot\sin\alpha=-\cos\varphi_{12}\cdot\sin\varphi_{11},$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\cos\varphi_{11}\cdot\cos\varphi_{12},$$

$$\frac{\cos\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma-\cos\gamma\cdot\sin\alpha}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}=-\frac{\sin\varphi_{11}}{\cos\varphi_{11}},$$

$$\frac{\cos\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma-\cos\gamma\cdot\sin\alpha}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}+\tan\varphi_{11}. \qquad (3.32)$$

Матрицу перехода входного звена второй кинематической цепи из подвижной системы координат в неподвижную систему можно представить как:

$$B^{//}=B_2^{/}\cdot B_1^{/}\cdot B_3^{/};$$

$$B^{//}=\begin{pmatrix}\sin\varphi_{21}\cdot\sin\varphi_{22}\cdot\sin\varphi_{23}-\cos\varphi_{21}\cdot\cos\varphi_{23} & \cos\varphi_{21}\cdot\sin\varphi_{23}+\cos\varphi_{23}\cdot\sin\varphi_{21}\cdot\sin\varphi_{22} & \cos\varphi_{22}\cdot\sin\varphi_{21}\\ \cos\varphi_{22}\cdot\sin\varphi_{23} & \cos\varphi_{22}\cdot\cos\varphi_{23} & -\sin\varphi_{22}\\ \cos\varphi_{23}\cdot\sin\varphi_{21}+\cos\varphi_{21}\cdot\sin\varphi_{22}\cdot\sin\varphi_{23} & \cos\varphi_{21}\cdot\cos\varphi_{23}\cdot\sin\varphi_{22}-\sin\varphi_{21}\cdot\sin\varphi_{23} & \cos\varphi_{21}\cdot\cos\varphi_{22}\end{pmatrix}.$$

Единичный вектор **e** оси кинематической пары второй кинематической цепи, сопряженной с выходным звеном механизма, имеет координаты $\mathbf{e}_{31}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$. Подставим в уравнение связи между входными и выходными координатами $A\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=B^{//}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ найденные значения матриц A и $B^{//}$, и получим выражение:

$$\begin{pmatrix}\sin\alpha\cdot\sin\gamma+\cos\alpha\cdot\cos\gamma\cdot\sin\beta\\ \cos\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma-\cos\gamma\cdot\sin\alpha\\ \cos\alpha\cdot\cos\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\varphi_{22}\cdot\sin\varphi_{21}\\ -\sin\varphi_{22}\\ \cos\varphi_{21}\cdot\cos\varphi_{22}\end{pmatrix}.$$

Из полученного выражения можно выразить угол φ_{21} через α, β и γ:

$$\sin\alpha\cdot\sin\gamma+\cos\alpha\cdot\cos\gamma\cdot\sin\beta=\cos\varphi_{22}\cdot\sin\varphi_{21},$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\cos\varphi_{21}\cdot\cos\varphi_{22},$$

$$\frac{\sin\alpha\cdot\sin\gamma+\cos\alpha\cdot\cos\gamma\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}=\frac{\sin\varphi_{21}}{\cos\varphi_{21}},$$

$$\frac{\sin\alpha\cdot\sin\gamma+\cos\alpha\cdot\cos\gamma\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}-\tan\varphi_{21}=0. \qquad (3.33)$$

Матрицу перехода третьей кинематической цепи из подвижной системы координат в неподвижную систему можно представить как:

$$B^{///} = B_3^{/} \cdot B_1^{/} \cdot B_2^{/};$$

$$B^{//} = \begin{pmatrix} \cos\varphi_{31}\cdot\cos\varphi_{33} - \sin\varphi_{31}\cdot\sin\varphi_{32}\cdot\sin\varphi_{33} & -\cos\varphi_{32}\cdot\sin\varphi_{31} & \cos\varphi_{31}\cdot\sin\varphi_{33} + \cos\varphi_{33}\cdot\sin\varphi_{31}\cdot\sin\varphi_{32} \\ \cos\varphi_{33}\cdot\sin\varphi_{31} + \cos\varphi_{31}\cdot\sin\varphi_{32}\cdot\sin\varphi_{33} & \cos\varphi_{31}\cdot\cos\varphi_{32} & \sin\varphi_{31}\cdot\sin\varphi_{33} - \cos\varphi_{31}\cdot\cos\varphi_{33}\cdot\sin\varphi_{32} \\ \cos\varphi_{32}\cdot\sin\varphi_{33} & -\sin\varphi_{32} & -\cos\varphi_{32}\cdot\cos\varphi_{33} \end{pmatrix}.$$

Единичный вектор оси кинематической пары третьей кинематической цепи, сопряженной с выходным звеном, имеет координаты $A\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = B^{///}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$. Подставив в уравнение связи $A\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = B^{///}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ найденные значения матриц A и $B^{///}$, получим выражение:

$$\begin{pmatrix} \cos\gamma\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta - \cos\alpha\cdot\sin\gamma \\ \cos\alpha\cdot\cos\gamma + \sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma \\ \cos\beta\cdot\sin\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos\varphi_{32}\cdot\sin\varphi_{31} \\ \cos\varphi_{31}\cdot\cos\varphi_{32} \\ -\sin\varphi_{32} \end{pmatrix}.$$

Из полученного выражения можно выразить угол φ_{21} через α, β и γ:

$$\cos\gamma\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta - \cos\alpha\cdot\sin\gamma = -\cos\varphi_{32}\cdot\sin\varphi_{31},$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\gamma + \sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma = \cos\varphi_{31}\cdot\cos\varphi_{32},$$

$$\frac{\cos\gamma\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta - \cos\alpha\cdot\sin\gamma}{\cos\alpha\cdot\cos\gamma + \sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma} = -\frac{\sin\varphi_{31}}{\cos\varphi_{31}},$$

$$\frac{\cos\alpha\cdot\sin\gamma - \cos\gamma\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\gamma + \sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma} + \tan\varphi_{31} = 0. \tag{3.34}$$

Функция положения сферического механизма в неявном виде выражается уравнением:

$$F(\alpha,\beta,\gamma,\varphi_{11},\varphi_{21},\varphi_{31}) = 0. \tag{3.35}$$

Уравнения связи для рассматриваемого сферического механизма можно представить следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} F_1(\alpha,\beta,\gamma,\varphi_{11}) = 0, \\ F_2(\alpha,\beta,\gamma,\varphi_{21}) = 0, \\ F_3(\alpha,\beta,\gamma,\varphi_{31}) = 0. \end{cases} \tag{3.36}$$

Углы φ_{11}, φ_{21}, φ_{31}, выраженные через углы α, β, γ в уравнениях (3.32 – 3.34), подставим в уравнения связи (3.36) и получим следующую систему уравнений, описывающую взаимосвязь между входными и выходными координатами сферического механизма:

$$\begin{cases} F_1 = \dfrac{\cos\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma - \cos\gamma \cdot \sin\alpha}{\cos\alpha \cdot \cos\beta} + \tan\varphi_{11}, \\ F_2 = \dfrac{\sin\alpha \cdot \sin\gamma + \cos\alpha \cdot \cos\gamma \cdot \sin\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta} - \tan\varphi_{21}, \\ F_3 = \dfrac{\cos\alpha \cdot \sin\gamma - \cos\gamma \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\gamma + \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma} + \tan\varphi_{31}. \end{cases} \tag{3.37}$$

Таким образом, составлены уравнения связи между углами поворота во входных звеньях и углами поворота выходного звена (3.37). Используя полученную систему, можно переходить к решению задачи о скоростях.

3.4.1. Решение задачи о скоростях методом дифференцирования уравнений связи для сферического механизма

Решение задачи о скоростях необходимо для определения взаимосвязи между координатами (углами поворота) выходного звена и координатами (углами поворота) входных звеньев (т.е. взаимосвязи между обобщенными координатами и абсолютными), и описывается функцией положения (3.37), решение которой проводилось выше.

Для решения задачи о скоростях воспользуемся аналитическим методом, который основан на изучении свойств матрицы Якоби [80], представленной в общем виде:

$$C \cdot V = (-D) \cdot \omega_1; \tag{3.38}$$

$$C = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial \alpha} & \dfrac{\partial F_1}{\partial \beta} & \dfrac{\partial F_1}{\partial \gamma} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial \alpha} & \dfrac{\partial F_2}{\partial \beta} & \dfrac{\partial F_2}{\partial \gamma} \\ \dfrac{\partial F_3}{\partial \alpha} & \dfrac{\partial F_3}{\partial \beta} & \dfrac{\partial F_3}{\partial \gamma} \end{pmatrix}; \; D = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial \varphi_{11}} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial F_2}{\partial \varphi_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\partial F_3}{\partial \varphi_{31}} \end{pmatrix}; \; V = \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{pmatrix}; \; \omega_1 = \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_{11} \\ \dot{\varphi}_{21} \\ \dot{\varphi}_{31} \end{pmatrix},$$

где $\boldsymbol{C}$ – матрица частных производных от неявной функции по абсолютным координатам α, β, γ; $\boldsymbol{D}$ – матрица частных производных от неявной функции по обобщенным координатам φ_{11}, φ_{21}, φ_{31}; $\boldsymbol{V}$ – скорости изменения углов ориентации выходного звена, определяющиеся углами α, β, γ; $\boldsymbol{\omega_1}$ – обобщенные скорости в приводных вращательных шарнирах (входные скорости – углы поворота).

Необходимо найти частные производные от неявной функции между обобщёнными и абсолютными координатами, составив две матрицы:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_1}{\partial \beta} & \frac{\partial F_1}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial F_2}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_2}{\partial \beta} & \frac{\partial F_2}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial F_3}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_3}{\partial \beta} & \frac{\partial F_3}{\partial \gamma} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \varphi_{11}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial F_2}{\partial \varphi_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial F_3}{\partial \varphi_{31}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_{11} \\ \dot{\varphi}_{21} \\ \dot{\varphi}_{31} \end{pmatrix}. \tag{3.39}$$

Продифференцируем полученные уравнения связи (3.37):

$$\frac{\partial F_1}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\cos\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma - \cos\gamma \cdot \sin\alpha}{\cos\alpha \cdot \cos\beta} + \tan\varphi_{11}\right) = \frac{2\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)^2}{\cos\alpha^2 \cdot \cos\beta};$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial \beta} = \sin\gamma - \frac{\sin\beta \cdot (\cos\gamma \cdot \sin\alpha - \sin\gamma \cdot \cos\alpha \cdot \sin\beta)}{\cos\beta^2 \cdot \cos\alpha};$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial \gamma} = \frac{\sin\gamma \cdot \sin\alpha + \cos\gamma \cdot \cos\alpha \cdot \sin\beta}{\cos\beta \cdot \sin\alpha};$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial \varphi_{11}} = tg\varphi_{11}^2 + 1.$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\sin\alpha \cdot \sin\gamma + \cos\alpha \cdot \cos\gamma \cdot \sin\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\beta} - \tan\varphi_{21}\right) = \frac{\sin\gamma}{\cos\beta \cdot \cos\alpha^2};$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial \beta} = \cos\gamma + \frac{\sin\beta \cdot (\sin\gamma \cdot \sin\alpha + \cos\gamma \cdot \cos\alpha \cdot \sin\beta)}{\cos\beta^2 \cdot \cos\alpha};$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial \gamma} = \frac{\cos\gamma \cdot \sin\alpha - \sin\gamma \cdot \cos\alpha \cdot \sin\beta}{\cos\beta \cdot \cos\alpha};$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial \varphi_{21}} = -tg\varphi_{21}^2 - 1.$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\cos\alpha \cdot \sin\gamma - \cos\gamma \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta}{\cos\alpha \cdot \cos\gamma + \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma} + \tan\varphi_{31}\right) = \frac{\sin\beta}{(\cos\alpha \cdot \cos\gamma + \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma)^2};$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial \beta} = \frac{\cos\gamma \cdot \cos\beta \cdot \sin\alpha}{\cos\gamma \cdot \cos\alpha + \sin\gamma \cdot \sin\beta \cdot \sin\alpha} + \frac{\sin\gamma \cdot \cos\beta \cdot \sin\alpha \cdot (\sin\gamma \cdot \cos\alpha - \cos\gamma \cdot \sin\beta \cdot \sin\alpha)}{(\cos\gamma \cdot \cos\alpha + \sin\gamma \cdot \sin\beta \cdot \sin\alpha)^2};$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial \gamma} = -\frac{(\sin\gamma \cdot \cos\alpha - \cos\gamma \cdot \sin\beta \cdot \sin\alpha)^2}{(\cos\gamma \cdot \cos\alpha + \sin\gamma \cdot \sin\beta \cdot \sin\alpha)^2} - 1;$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial \varphi_{31}} = tg\varphi_{31}^2 + 1.$$

Перепишем систему (3.39) в виде:

$$\begin{pmatrix} \dot{\varphi}_{11} \\ \dot{\varphi}_{21} \\ \dot{\varphi}_{31} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \varphi_{11}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial F_2}{\partial \varphi_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial F_3}{\partial \varphi_{31}} \end{pmatrix}^{1} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_1}{\partial \beta} & \frac{\partial F_1}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial F_2}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_2}{\partial \beta} & \frac{\partial F_2}{\partial \gamma} \\ \frac{\partial F_3}{\partial \alpha} & \frac{\partial F_3}{\partial \beta} & \frac{\partial F_3}{\partial \gamma} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{pmatrix}. \tag{3.40}$$

Решим обратную задачу о скоростях. Зададим такие углы поворота выходного звена α, β, γ и такие угловые скорости выходного звена $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}$, чтобы изменения положения по углу φ_{31} и угловой скорости по $\dot{\varphi}_{31}$ не было. За положение выходного звена отвечает только две кинематические цепи, расположенные по осям координат *Ox* и *Oy*, и, следовательно, два угла φ_{11} и φ_{21}. Третья кинематическая цепь, расположенная вдоль оси *Oz* отвечает за ориентацию выходного звена, так как в её структуре имеется карданный шарнир, который не совершает поворот всего механизма по оси *Oz*.

При таком условии углы поворота выходного звена α, β, γ равны, соответственно, 0.5000 *рад*, 0.2000 *рад* и 0.0181 *рад*; угловые скорости выходного звена $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}$ равны 0.0500 *рад/сек*, 0.0200 *рад/сек*, 0.0233 *рад/сек*. Необходимо определить обобщенные скорости в приводных вращательных шарнирах $\dot{\varphi}_{11}, \dot{\varphi}_{21}, \dot{\varphi}_{31}$.

Подставляя значения углов и скоростей в частные производные от неявной функции между обобщёнными и абсолютными координатами (3.40), найдём значение угловых скоростей в приводных вращательных шарнирах (входные скорости):

$$\begin{pmatrix} \dot{\varphi}_{11} \\ \dot{\varphi}_{21} \\ \dot{\varphi}_{31} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1.2833 & 0 & 0 \\ 0 & -1.0685 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0000 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1.3171 & -0.0001 & 0.2616 \\ 0.1429 & 1.0472 & 0.1089 \\ 0.2549 & 0.5291 & -1.0000 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0.0500 \\ 0.0200 \\ 0.0233 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\varphi}_{11} \\ \dot{\varphi}_{21} \\ \dot{\varphi}_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0465 \\ 0.0379 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, решили обратную задачу о скоростях, и нашли значение угловых скоростей в приводных вращательных шарнирах $\dot{\varphi}_{11}$, $\dot{\varphi}_{21}$ и $\dot{\varphi}_{31}$, равные, соответственно, 0.0465 *рад/сек*, 0.0379 *рад/сек* и 0. Значение обобщённых координат (углов поворота) $\varphi_{11}, \varphi_{21}, \varphi_{31}$ при заданных углах поворота выходного звена будут равны – φ_{11} = 0.0498 *рад*, φ_{21} = 0.0205 *рад*, φ_{31} = 0.0098 *рад* [85].

Выводы по главе

1. Решены обратная и прямая задачи о положениях для механизма параллельной структуры с поступательными движениями выходного звена и выведены уравнения связи между скоро-

стями в приводных вращательных шарнирах и скоростями выходного звена, что позволило решить задачу о скоростях методом дифференцирования уравнений связи [83].

2. Для сферического механизма параллельной структуры также решены прямая и обратная задачи о положениях. Используя сферическую систему координат, были аналитически определены выходные параметры выходного звена (углы α и β) и составлены уравнения связи входных и выходных координат. Задача о скоростях решена методом дифференцирования уравнений связи.

3. Для сферического механизма с использованием метода поворота системы координат составлены уравнения связи между углами поворота в приводных вращательных шарнирах и углами ориентации выходного звена. А так же решена обратная задачи о скоростях методом дифференцирования уравнений связи [85].

ГЛАВА 4
АНАЛИЗ ДИНАМИЧЕСКИХ СВОЙСТВ МЕХАНИЗМА ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ С КИНЕМАТИЧЕСКОЙ РАЗВЯЗКОЙ

Динамический анализ представляет собой гораздо более широкую проблему, чем кинематический анализ. Это обусловлено необходимостью учёта законов управления, параметров обратных связей, характеристик двигателей, и т.д. Совместное действие всех двигателей необходимо для осуществления любого простейшего движение, даже по прямой линии. Динамические свойства механизмов параллельной структуры относительно мало исследованы. Анализ ограничивается, как правило, решением обратных задач динамики, когда по требуемому закону движения выходного звена определяются усилия в приводах [86, 87, 88]. В широком смысле к динамическому анализу можно отнести исследование поведения системы (механизма) в поле действия приложенной к нему силы (нагрузки) [13, 89, 90, 91, 92, 93].

В работах [94, 95, 96, 62, 97, 98] рассматривались плоские, поступательные и сферические механизмы с тремя степенями свободы. Динамика движения механизма моделировалась при разных законах требуемого движения, но не было соответствия динамической модели и реальных параметров механизма. В работах [4, 86, 87, 95, 99] использовались различные алгоритмы управления, один из которых основан на минимизации интегральной ошибки по координате, скорости или ускорению. На основе различных численных экспериментов установлено, что данный алгоритм эффективен для механизмов параллельной структуры.

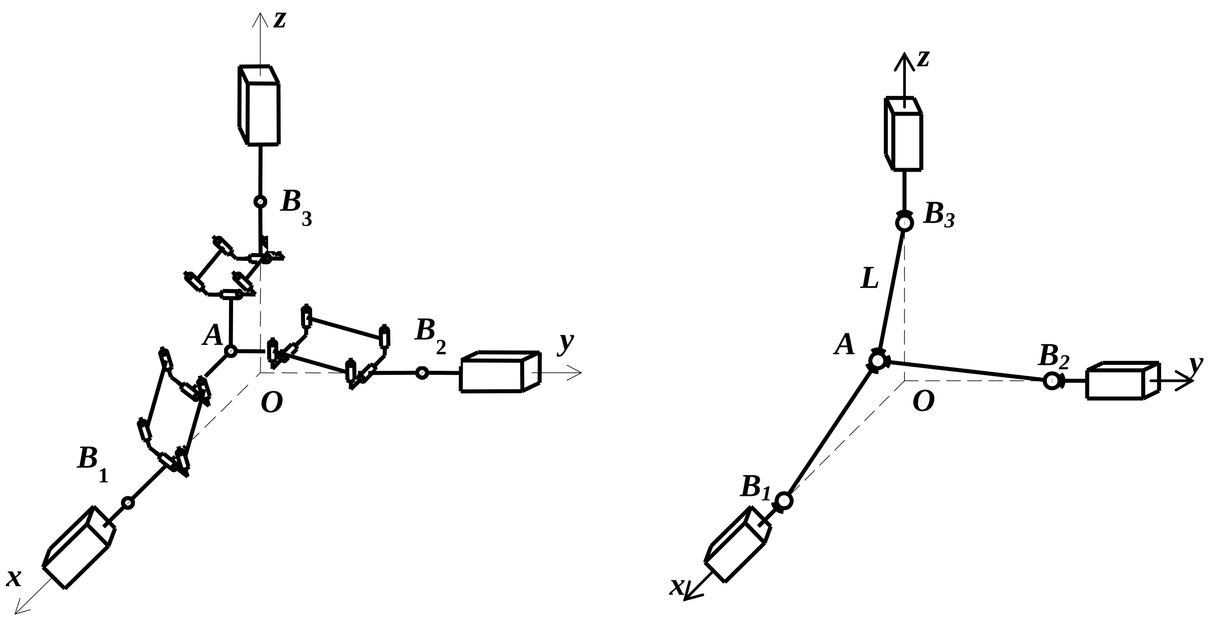
В данной главе решается задача динамического анализа для рассматриваемого механизма с шестью степенями свободы, отдельно для поступательной части и для сферической.

4.1. Динамический анализ механизма параллельной структуры с поступательными движениями выходного звена

Проведём динамический анализ механизма с шестью степенями свободы, рассмотренного в предыдущих главах, в той его части, что отвечает за поступательные движения. Механизм состоит из трёх кинематических цепей, расположенных ортогонально, трёх двигателей поступательного перемещения, каждый из которых обеспечивает движение одной из степеней подвижности в каждой кинематической цепи. Три шарнирных параллелограмма имитируют наличие двух карданных шарниров в соответствующей кинематической цепи (рисунок 4.1(а)). На вход каждого из приводов подаётся управляющий сигнал. Выходом системы является движение рабочего органа – выходного звена механизма в рабочем пространстве. В качестве приводов используются установленные на неподвижном основании электрические двигатели постоянного тока с механизмом преобразования вращательного движения в поступательное.

При поступательном движении каждая точка выходного звена имеет одинаковые скорости, поэтому в расчётной схеме выходное звено может быть заменено материальной точкой, а параллелограммы заменяются соответствующими звеньями типа сферического шарнира (рисунок 4.1 (b)).

Необходимые законы движения приводов определяются из решения обратной задачи динамики, когда на выходное звено (исполнительный звено) подаётся заданный (требуемый) закон движения. Система управления двигателями по соответствующему алгоритму вычисляет требуемые напряжения в двигателе. На основе решения прямой задачи динамики определяются реальные движения выходного звена механизма, которые сопоставляются с требуемыми движениями.



a) b)

Рисунок 4.1. a) механизм поступательной структуры с тремя степенями свободы;

b) расчётная схема механизма с тремя степенями свободы.

Составим общее уравнение динамики, используя принцип возможных перемещений [100, 101] в записи через обобщённые координаты. В качестве независимых обобщённых координат взяты координаты точек, значение которых однозначно определяют положения всех точек системы.

Для рассматриваемого механизма (рисунок 4.1 (b)) обобщёнными координатами (q_1, q_2, q_3) примем перемещение приводов в точках B_1, B_2, B_3 вдоль осей Ox, Oy, Oz, которые однозначно определяют положение точки A, т.е. положение выходного звена.

Задавая элементарные приращения входным координатам δq_1, δq_2, δq_3, считая, что имеем систему с идеальными связями, получаем следующее общее уравнение динамики относительно координат выходного звена (точки А) в общем виде:

$$\sum\left[\left(P_x\frac{\partial r_x}{\partial q_1}-ma_x\frac{\partial r_x}{\partial q_1}\right)\delta q_1+\left(P_y\frac{\partial r_y}{\partial q_2}-ma_z\frac{\partial r_y}{\partial q_2}\right)\delta q_2+\left(P_z\frac{\partial r_z}{\partial q_3}-ma_z\frac{\partial r_z}{\partial q_3}\right)\delta q_3\right]=0,$$

где m – масса выходного звена; P_x, P_y, P_z – усилия в приводах;a_x, a_y, a_z – ускорения выходного звена ($a_k = \ddot{x}\cdot\mathbf{i}+\ddot{y}\cdot\mathbf{j}+\ddot{z}\cdot\mathbf{k}$, k – x, y, z); $\frac{\partial r_x}{\partial q_1}$; $\frac{\partial r_y}{\partial q_2}$; $\frac{\partial r_z}{\partial q_3}$ – бесконечно малые приращения обобщенных координат системы и равны ($\frac{\partial r_i}{\partial q_j}=\frac{\partial x}{\partial q_j}\mathbf{i}+\frac{\partial y}{\partial q_j}\mathbf{j}+\frac{\partial z}{\partial q_j}\mathbf{k}$ (j – 1, 2, 3 – номер кинематической цепи)).

С учётом всех выбранных обобщённых координат, активных сил, приложенных к системе, заданных возможных перемещений получаем следующие уравнения динамики системы относительно координат выходного звена:

$$\begin{cases} P_x\cdot\delta q_1-\left(m\ddot{x}\frac{\partial x}{\partial q_1}+m\ddot{x}\frac{\partial y}{\partial q_1}+m\ddot{x}\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)\cdot\delta q_1-mg\frac{\partial z}{\partial q_1}\cdot\delta q_1=0,\\ P_y\cdot\delta q_2-\left(m\ddot{x}\frac{\partial x}{\partial q_2}+m\ddot{x}\frac{\partial y}{\partial q_2}+m\ddot{x}\frac{\partial z}{\partial q_2}\right)\cdot\delta q_2-mg\frac{\partial z}{\partial q_2}\cdot\delta q_2=0,\\ P_z\cdot\delta q_3-\left(m\ddot{x}\frac{\partial x}{\partial q_3}+m\ddot{x}\frac{\partial y}{\partial q_3}+m\ddot{x}\frac{\partial z}{\partial q_3}\right)\cdot\delta q_3-mg\frac{\partial z}{\partial q_3}\cdot\delta q_3=0.\end{cases}\tag{4.1}$$

Для определения коэффициентов $\frac{\partial x}{\partial q_i},\frac{\partial y}{\partial q_i},\frac{\partial z}{\partial q_i}$ необходимо рассмотреть уравнения связей, записанные в виде неявных функций от координат системы $F_i(x,y,z,q_i)=0$, где i = 1, 2, 3 – номер кинематической цепи.

Переменная q_i в данных функциях представлена как функция переменных x, y, z. Систему уравнений, связывающую скорости входных и выходных звеньев, получаем дифференцированием полученных неявных функций по переменным x, y, z:

$$\frac{\partial F_i}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial F_i}{\partial y}\dot{y}+\frac{\partial F_i}{\partial z}\dot{z}+\frac{\partial F_i}{\partial q_i}\dot{q}_i=0,$$

где i = 1, 2, 3 – номер кинематической цепи.

Формулы для определения искомых переменных коэффициентов получаем из выше приведённых полученных выражений:

$$\frac{\partial x}{\partial q_i}=-\frac{\partial F_i}{\partial q_i}\bigg/\frac{\partial F_i}{\partial x};\qquad \frac{\partial y}{\partial q_i}=-\frac{\partial F_i}{\partial q_i}\bigg/\frac{\partial F_i}{\partial y};\qquad \frac{\partial z}{\partial q_i}=-\frac{\partial F_i}{\partial q_i}\bigg/\frac{\partial F_i}{\partial z},\tag{4.2}$$

где i = 1, 2, 3 – номер кинематической цепи.

Предполагается, что алгоритм управления механизмом параллельной структуры, связанный с вычислением моментов и сил по заданному закону движения, должен минимизировать ошибки по ускорению, скорости и координате. Ранее, в работе [95], этот подход применялся для манипулятора параллельной структуры с двумя параллелограммами в каждой цепи.

Уравнения связи для расчётной схемы механизма поступательной структуры с тремя степенями свободы (рисунок 4.1 (b)) представляют собой систему уравнений в виде:

$$\begin{cases} F_1 = (x-q_1)^2 + y^2 + z^2 - L^2 = 0, \\ F_2 = x^2 + (y-q_2)^2 + z^2 - L^2 = 0, \\ F_3 = x^2 + y^2 + (z-q_3)^2 - L^2 = 0. \end{cases} \tag{4.3}$$

Запишем уравнения скоростей, основанном на изучении свойств матрицы Якоби, представленной в общем виде:

$$A \cdot V = (-B) \cdot V_{i1}, \tag{4.4}$$

$$A = J(A) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x} & \frac{\partial F_3}{\partial y} & \frac{\partial F_3}{\partial z} \end{pmatrix}; \; B = J(B) == \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial q_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial F_2}{\partial q_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial F_3}{\partial q_3} \end{pmatrix}; \; V = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}; \; V_{i1} = \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{pmatrix}.$$

Дифференцируя первый раз (4.3) по t, получим систему, связывающую скорость выходного звена и угловые скорости входных звеньев (4.4). На примере первого уравнения имеем:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dF_1}{dt}\right) = 2\left(\frac{d}{dt}x - \frac{d}{dt}q_1\right)^2 + 2(x-q_1)\cdot\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}x - \frac{\partial^2}{\partial t^2}q_1\right) + 2\left(\frac{\partial}{\partial t}y\right)^2 + 2x\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}y\right) + 2\left(\frac{\partial}{\partial t}z\right)^2 +$$
$$+ 2x\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}z\right) + 2\left(\frac{\partial}{\partial t}q_i\right)^2 + 2x\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}q_i\right) = 0$$

Записав данную систему в виде функции от времени, получим систему:

$$J(A)(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} = -J(B)(t) = \begin{pmatrix} \dot{q}_1(t) \\ \dot{q}_2(t) \\ \dot{q}_3(t) \end{pmatrix}. \tag{4.5}$$

Зададим значения координат для точки A ($x; y; z$), где $x = 1$ *м*, $y = 1$ *м*; $z = 1$ *м*. Длина звена $L = 3$ *м*.

Значения частных производных, входящих в (4.4), равны:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = 2x - 2q_1; \; \frac{\partial F_1}{\partial y} = 2y; \; \frac{\partial F_1}{\partial z} = 2z; \; \frac{\partial F_1}{\partial q_1} = 2q_1 - 2x,$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = 2x;\ \frac{\partial F_2}{\partial y} = 2y - 2q_2;\ \frac{\partial F_2}{\partial z} = 2z;\ \frac{\partial F_2}{\partial q_2} = 2q_2 - 2y,$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial x} = 2x;\ \frac{\partial F_3}{\partial y} = 2\cdot;\ \frac{\partial F_3}{\partial z} = 2z - 2q_3;\ \frac{\partial F_3}{\partial q_3} = 2q_3 - 2z.$$

Тогда, уравнения скоростей (4.4) принимают вид:

$$\begin{pmatrix} 2x-2q_1 & 2y & 2z \\ 2x & 2y-2q_2 & 2z \\ 2x & 2y & 2z-2q_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2q_1-2x & 0 & 0 \\ 0 & 2q_2-2y & 0 \\ 0 & 0 & 2q_3-2z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{pmatrix}.$$

В общее уравнения динамики (4.1) входят значения ускорений входных и выходных звеньев. Для дальнейшего решения задачи динамики необходимо выразить ускорения входных звеньев через ускорения выходных. Дифференцируя уравнения (4.3) второй раз по t, получаем уравнения, связывающие ускорения входных и выходных звеньев. Данное выражение позволяет определить искомые ускорения и его можно записать в матричной форме:

$$J(A)\cdot\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} + \frac{dJ(A)}{dt}\cdot\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = -\left(J(B)\cdot\begin{pmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{pmatrix} + \frac{dJ(B)}{dt}\cdot\begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{pmatrix}\right). \tag{4.6}$$

Получаем следующие выражения:

$$\begin{aligned}
&2(\dot{x}-\dot{q}_1)^2 + 2(x-q_1)(\ddot{x}-\ddot{q}_1) + 2\dot{y}^2 + 2y\cdot\ddot{y}^2 + 2\dot{z}^2 + 2z\cdot\ddot{z} = 0,\\
&2\dot{x}^2 + 2x\cdot\ddot{x} + 2\dot{y}^2 + 2(\dot{y}\cdot\dot{q}_2)^2 + 2(y-q_2)(\ddot{y}-\ddot{q}_2) + 2\dot{z}^2 + 2z\cdot\ddot{z} = 0,\\
&2\dot{x}^2 + 2x\cdot\ddot{x} + 2\dot{y}^2 + 2y\cdot\ddot{y}^2 + 2(\dot{z}-\dot{q}_3)^2 + 2(z-q_3)(\ddot{z}-\ddot{q}_3) = 0.
\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
\ddot{q}_1 &= \ddot{x} - \frac{(2y\cdot\dot{y}+2z\cdot\dot{z})^2}{4\cdot(L^2-y^2-z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{2\dot{y}^2+2\dot{z}^2+2y\cdot\ddot{y}+2z\cdot\ddot{z}}{2\cdot\sqrt{L^2-y^2-z^2}},\\
\ddot{q}_2 &= \ddot{y} - \frac{(2x\cdot\dot{x}+2z\cdot\dot{z})^2}{4\cdot(L^2-x^2-z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{2\dot{x}^2+2\dot{z}^2+2x\cdot\ddot{x}+2z\cdot\ddot{z}}{2\cdot\sqrt{L^2-x^2-z^2}},\\
\ddot{q}_3 &= \ddot{z} - \frac{(2x\cdot\dot{x}+2y\cdot\dot{y})^2}{4\cdot(L^2-x^2-y^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{2\dot{x}^2+2\dot{y}^2+2x\cdot\ddot{x}+2y\cdot\ddot{y}}{2\cdot\sqrt{L^2-x^2-y^2}},
\end{aligned} \tag{4.7}$$

где $\ddot{q}_1$, $\ddot{q}_2$, $\ddot{q}_3$ – выражены из уравнений (4.3) и продифференцированы.

Предположим, что известны требуемые законы изменения координат $x_T(t)$, $y_T(t)$, $z_T(t)$ и, соответственно, требуемые скорости $\dot{x}_T(t)$, $\dot{y}_T(t)$, $\dot{z}_T(t)$ и ускорения $\ddot{x}_T(t)$, $\ddot{y}_T(t)$, $\ddot{z}_T(t)$.

Необходимо найти силы (моменты) в приводах, при которых происходит минимизация ошибки по координате:

$$\Delta_1(t) = x_T(t) - x(t)\,;\ \Delta_2(t) = y_T(t) - y(t)\,;\ \Delta_3(t) = z_T(t) - z(t)\,,$$

по скорости:

$$\dot{\Delta}_1(t) = \dot{x}_T(t) - \dot{x}(t)\,;\ \dot{\Delta}_2(t) = \dot{y}_T(t) - \dot{y}(t)\,;\ \dot{\Delta}_3(t) = \dot{z}_T(t) - \dot{z}(t)\,,$$

по ускорению:

$$\ddot{\Delta}_1(t) = \ddot{x}_T(t) - \ddot{x}(t)\,;\ \ddot{\Delta}_2(t) = \ddot{y}_T(t) - \ddot{y}(t)\,;\ \ddot{\Delta}_3(t) = \ddot{z}_T(t) - \ddot{z}(t)\,.$$

Закон изменения ошибки должен соответствовать движению колебательного звена, при котором обеспечивается устойчивость и минимизация ошибки по положению, скорости и ускорению [4, 86, 87, 95].

Законы ускорений выходного звена в системе с обратными связями имеют вид:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \ddot{x}_T + \gamma_1 \cdot (\dot{x}_T - \dot{x}) + \gamma_0 \cdot (x_T - x), \\ \ddot{y} &= \ddot{y}_T + \gamma_1 \cdot (\dot{y}_T - \dot{y}) + \gamma_0 \cdot (y_T - y), \\ \ddot{z} &= \ddot{z}_T + \gamma_1 \cdot (\dot{z}_T - \dot{z}) + \gamma_0 \cdot (z_T - z), \end{aligned} \tag{4.8}$$

где γ_0, γ_1 - коэффициенты обратных связей.

Соотношения из системы (4.8) определяют необходимые законы формирования управляющих сил и моментов, реализующих движение по назначенной траектории.

Для получения обобщающих результатов задавались различные начальные условия движения механизма, различные коэффициенты обратных связей γ_0, γ_1, а также различные частоты ω закона движения по траектории.

Входящие в уравнения (4.3) абсолютные скорости выражаются из уравнения скоростей через обобщенные скорости.

Зададим постоянную времени τ, характеризующую длительность протекания переходного процесса, равную $\tau \approx 0.018$ *сек*, время переходного процесса при этом будет составлять – t = 0.076 *сек*, а коэффициенты обратных связей $\gamma_0 = 3086$, $\gamma_1 = 78.5$. Для упрощения пренебрегаем массой входных звеньев и силой веса.

При моделировании движения механизма по заданному закону используем уравнения (4.1). При этом силы в приводах P_i должны подчиняться уравнениям, полученных подстановкой ускорений $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{z}$ из уравнений (4.2) в уравнения движения (4.1):

$$\begin{aligned} P_i = {} & m \cdot \left(\ddot{x}_T + \gamma_1 \cdot (\dot{x}_T - \dot{x}) + \gamma_0 \cdot (x_T - x)\right) \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial q_i} + \cdot m \cdot \left(\ddot{y}_T + \gamma_1 \cdot (\dot{y}_T - \dot{y}) + \gamma_0 \cdot (y_T - y)\right) \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial q_i} + \\ & + m \cdot \left(\ddot{z}_T + \gamma_1 \cdot (\dot{z}_T - \dot{z}) + \gamma_0 \cdot (z_T - z)\right) \cdot \frac{\partial z}{\partial q_i} - mg \frac{\partial \lambda}{\partial q_i}, \end{aligned} \tag{4.9}$$

где $i = 1, 2, 3$, $\lambda = x, y, z$.

Зададим закон движения исполнительного звена в виде:

$$x_T(t) = 0.1 \cdot \sin(\omega t);\;\; y_T(t) = 0.1 \cdot \sin(\omega t);\;\; z_T(t) = 0.1 \cdot \sin(\omega t). \qquad (4.10)$$

1. Рассмотрим движение механизма при следующих начальных условиях: x (0) = 0, y (0) = 0, z (0) = 0, угловая частота колебаний ω = 40 *рад/сек*. Расчётное время t = 0.4 *сек.* Дифференциальные уравнения ошибки принимают вид:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \ddot{x}_T + 78.5 \cdot (\dot{x}_T - \dot{x}) + 3086 \cdot (x_T - x), \\ \ddot{y} &= \ddot{y}_T + 78.5 \cdot (\dot{y}_T - \dot{y}) + 3086 \cdot (y_T - y), \\ \ddot{z} &= \ddot{z}_T + 78.5 \cdot (\dot{z}_T - \dot{z}) + 3086 \cdot (z_T - z). \end{aligned} \qquad (4.11)$$

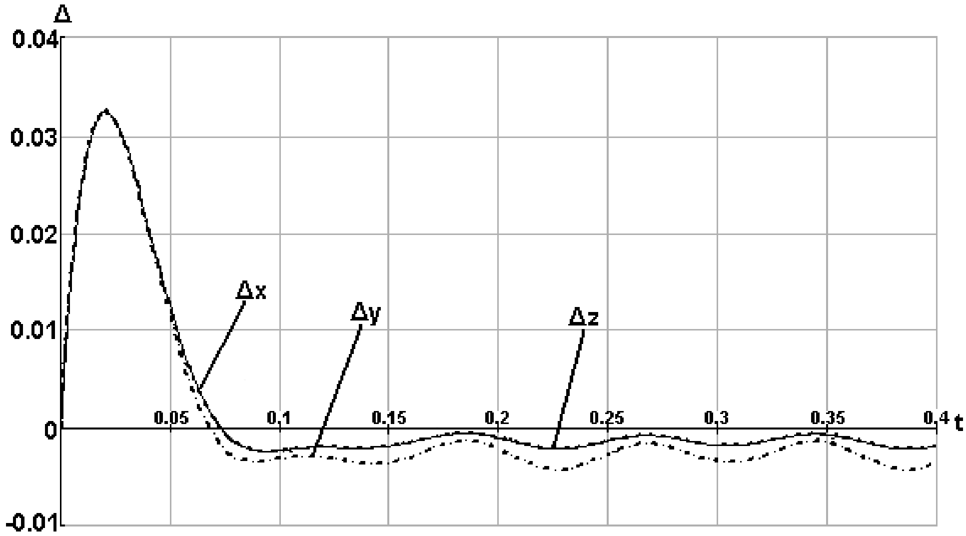


Рисунок 4.2. График изменения ошибки по координате.

В результате расчёта были получены графики изменения ошибок по различным координатам (рисунок 4.2). Для наглядности на рисунке 4.3 представлены графики требуемого закона движения $x_T(t)$, фактического закона $x(t)$ и абсолютной ошибки $\Delta(t)$, где $\Delta = x_T(t) - x(t)$.

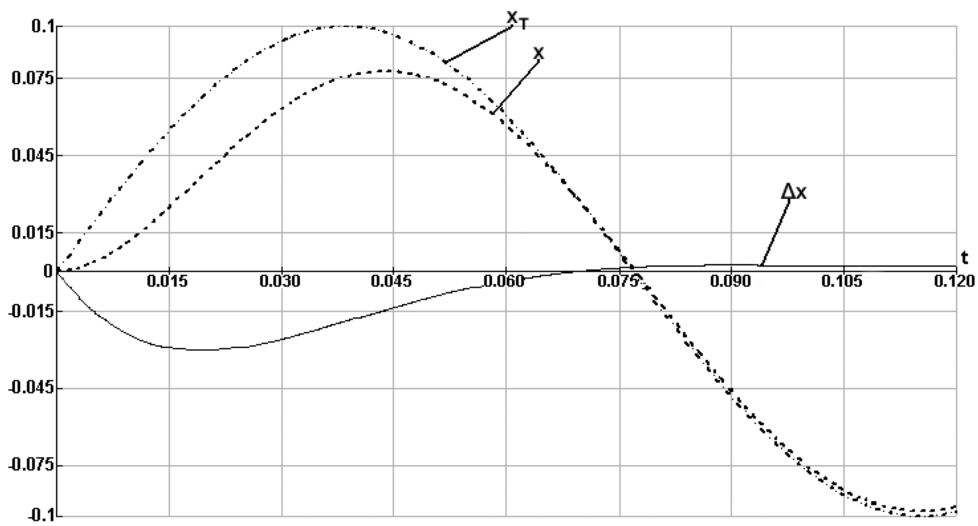


Рисунок 4.3. График изменения ошибки положения $\Delta x(t)$, изменения фактической $x_T(t)$ координаты, фактической $x(t)$ координаты при управлении механизмом с обратной связью.

Анализируя графики на рисунке 4.2 и рисунке 4.3 можно заключить, что при принятых начальных условиях и приложении к динамической системе внешнего воздействия в виде синусоиды система принимает установившиеся значения в пределах установленного переходного процесса, при этом можно отметить появление незначительной ошибки движения выходного звена, которая также имеет установившиеся значения.

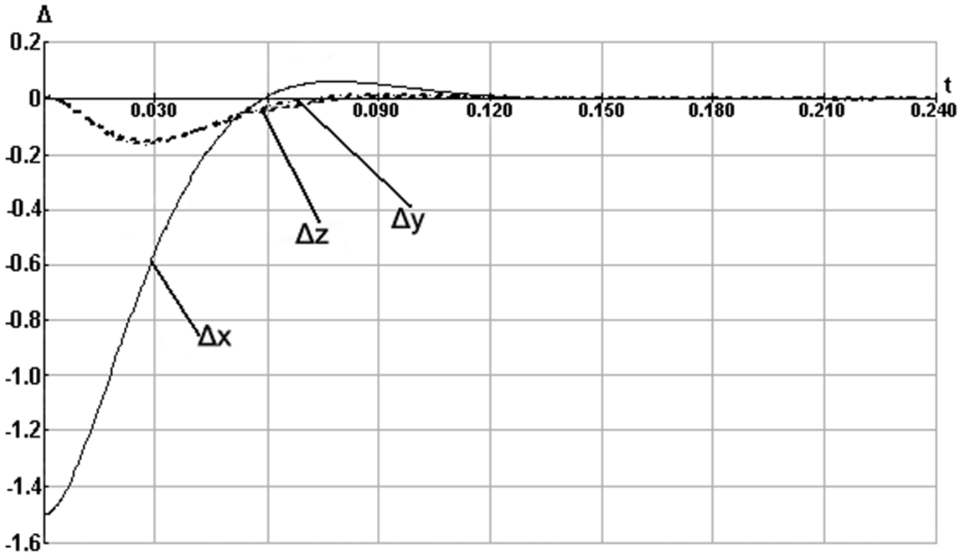


Рисунок 4.4. График изменения ошибки по координате.

2. Рассмотрим случай, когда начальные условия составляют: x (0) = 1.5 *м*, y (0) =0, z (0) = 0. Значение угловая частота колебаний и коэффициенты обратных связей остаются неизменными: ω = 40 *рад/сек*, γ_0 = 3086, γ_1 = 78.5. Время переходного процесса составляет – t = 0.076 *сек*. Расчётное время процесса – t = 0.25 *сек*. Соответствующие графики показаны на рисунках 4.4, 4.5, 4.6.

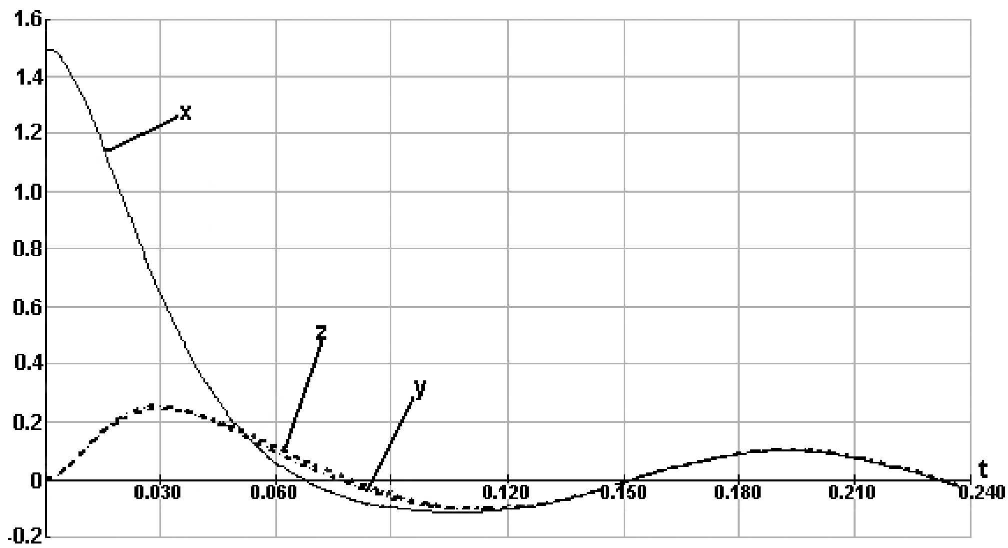


Рисунок 4.5. График движения выходного звена.

Анализ графиков на рисунках 4.4, 4.5, 4.6 показывает, что при начальных условиях, значительно не соответствующих предписанному закону, увеличилась ошибка по положению, а также время переходного процесса.

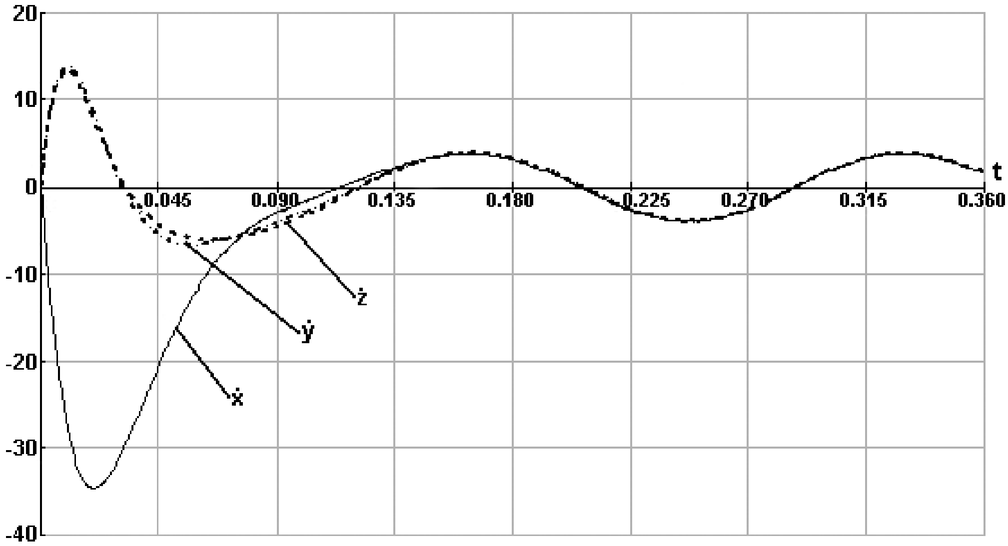


Рисунок 4.6. График скоростей выходного звена.

3. Рассмотрим случай, когда в 10 раз увеличена угловая частота, ω = 400 *рад/сек*, при неизменных начальных условиях: x (0) = 0 *м*, y (0) = 0, z (0) = 0. Коэффициенты обратных связей равны γ_0 = 3086, γ_1 = 78.5. Время переходного процесса также не менялось, и составляет – t = 0.076 *сек.* Соответствующие графики показаны на рисунках 4.7, 4.8, 4.9.

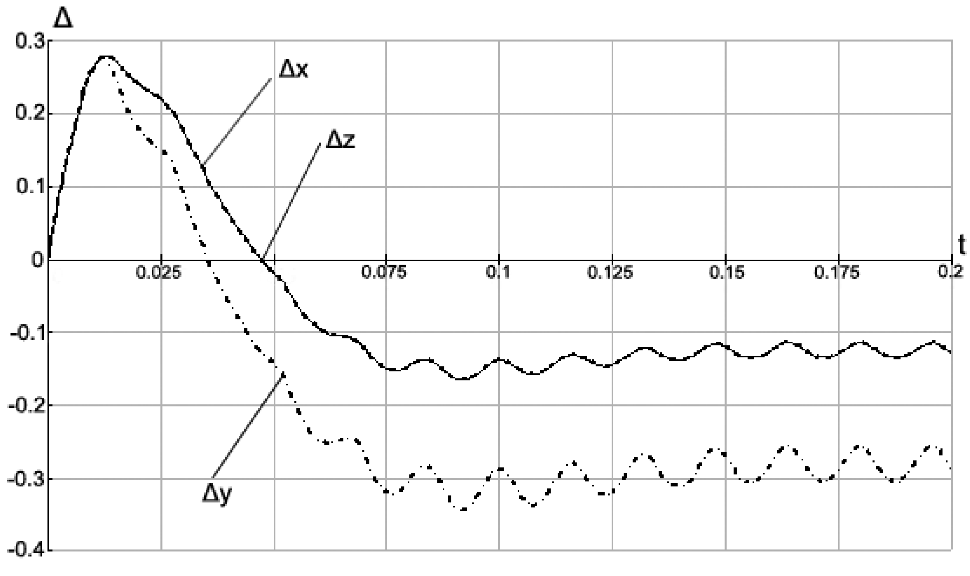


Рисунок 4.7. График изменения ошибки по координате.

Анализ графиков на рисунках 4.7, 4.8, 4.9 показывает, что при увеличении угловой частоты увеличилась ошибка по положению, а также время переходного процесса.

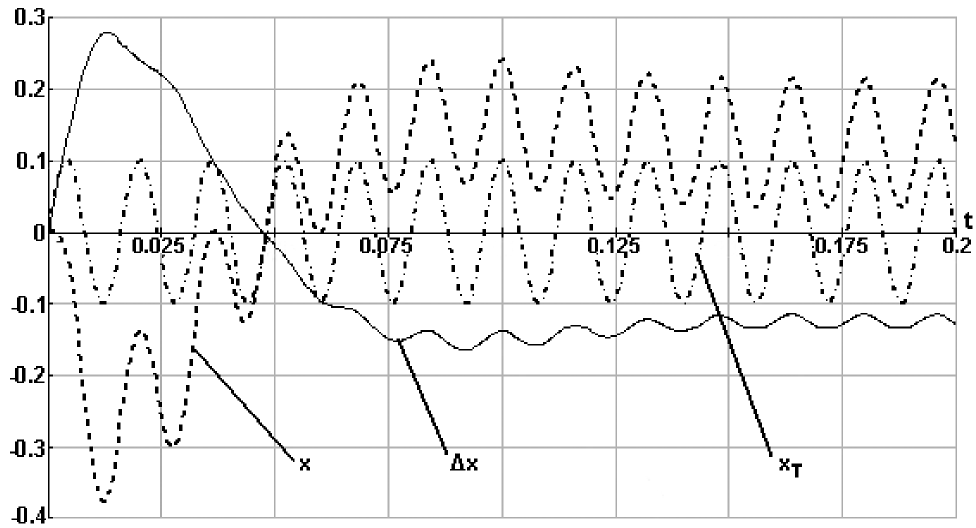


Рисунок 4.8. График изменения ошибки положения $\Delta x(t)$, изменения фактической $x_T(t)$ координаты, фактической $x(t)$ координаты при управлении механизмом с обратной связью.

4. Рассмотрим случай, когда в 10 раз уменьшены коэффициенты обратных связей γ_0 = 308.6, γ_1 = 7.85, при начальных условиях x (0) = 1.5 *м*, y (0) =0, z (0) = 0, ω = 40 *рад/сек*. Время переходного процесса t = 0.076 *сек*, расчётное время t = 1.2 *сек*. Соответствующие графики показаны на рисунках 4.10, 4.11, 4.12.

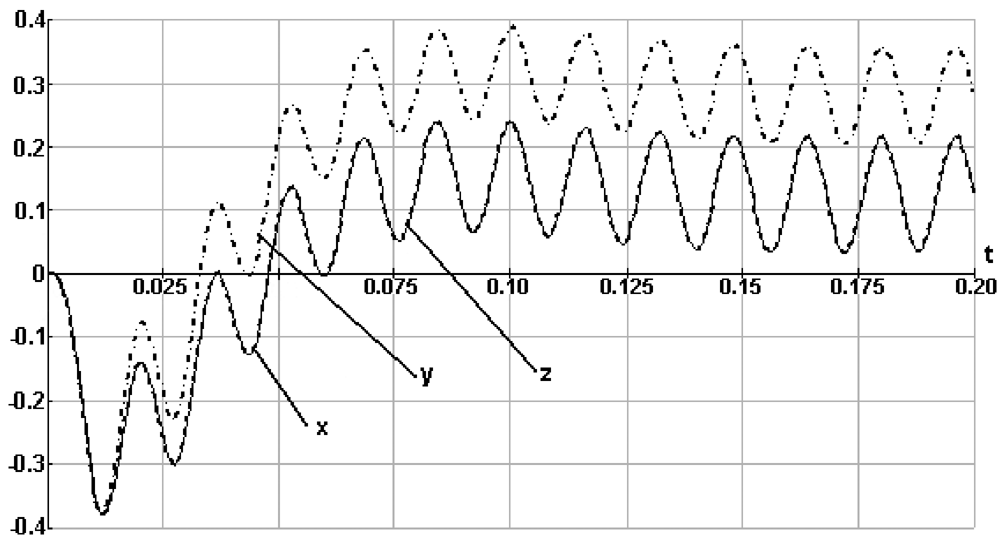


Рисунок 4.9. График движения выходного звена.

Анализ графиков на рисунках 4.10, 4.11, 4.12 показывает, что при уменьшении коэффициентов обратных связей ошибка по положению принимает установившиеся значения в пределах установленного переходного процесса, при этом можно отметить появление незначительной ошибки движения выходного звена, которая также имеет установившиеся значения.

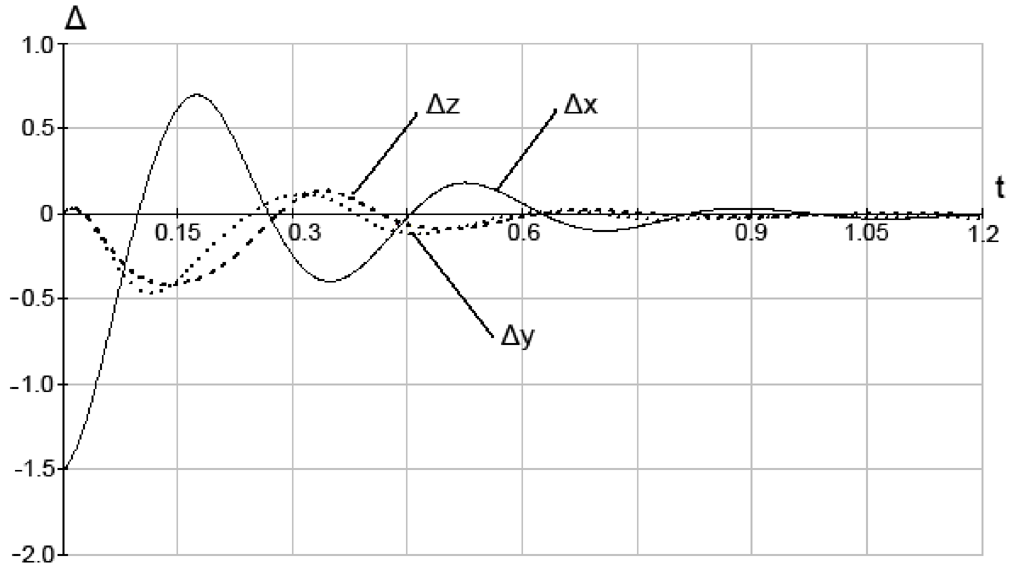


Рисунок 4.10. График изменения ошибки по координате.

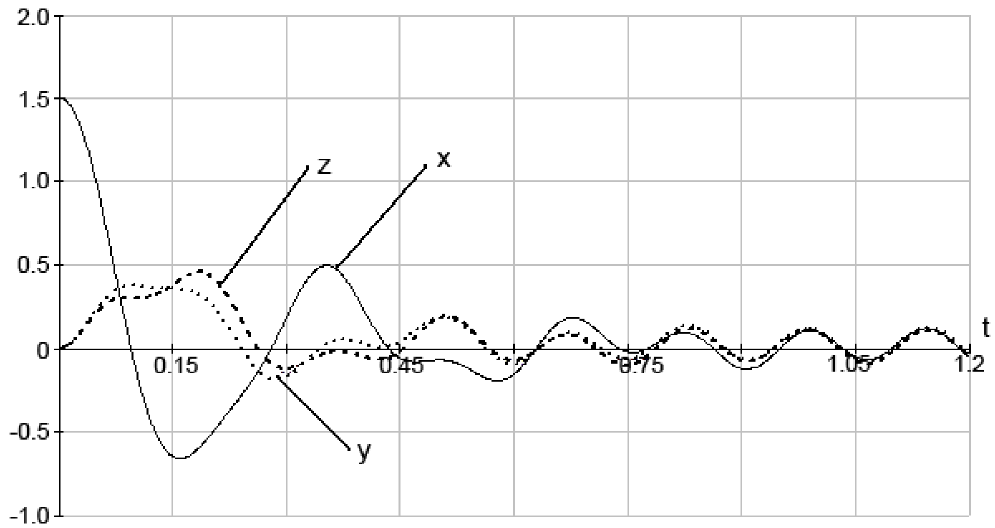


Рисунок 4.11. График движения выходного звена.

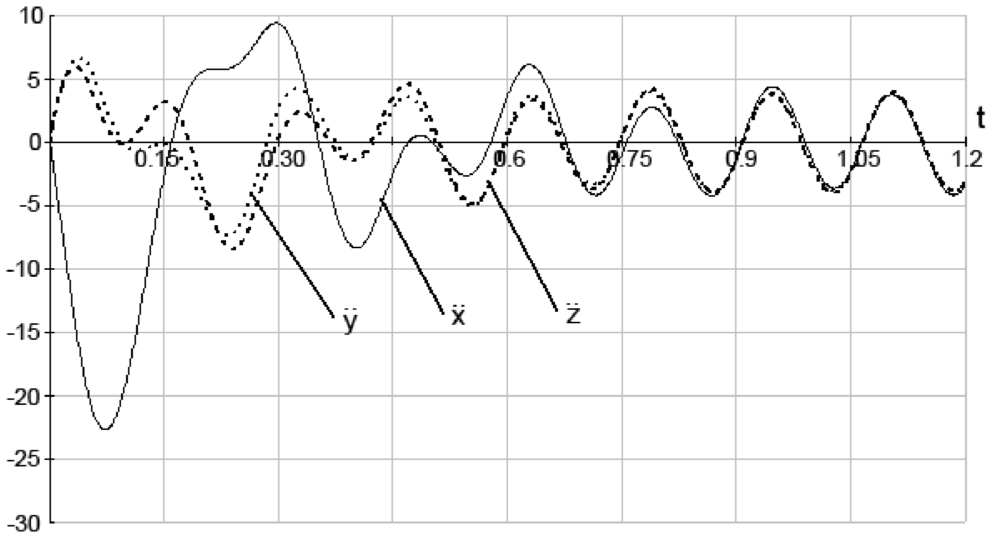


Рисунок 4.12. График ускорений выходного звена.

Для поступательной части рассматриваемого механизма параллельной структуры с шестью степенями свободы была составлена динамическая модель для решения задач динамики [102, 103, 104, 105, 106]. На основе этих задач был отработан алгоритм управления требуемого движения выходного звена. Для анализа работоспособности предложенного манипулятора и оценки пригодности данного алгоритма, рассматривались различные начальные условия движения, различные коэффициенты обратных связей γ_0, γ_1, а также различные частоты движения по траектории ω, при этом ошибка движения по заданному закону имела приемлемые значения.

4.1. Динамический анализ сферического механизма параллельной структуры с тремя степенями свободы

Рассмотрим сферический механизм параллельной структуры (рисунок 4.13), в котором каждое входное звено цепи соединено с вращательным двигателем. Выходное звено представляет собой платформу, которая вращается вокруг трёх осей, пересекающихся в точке O, выходными координатами являются углы поворота выходного звена α, β, γ. Обобщенными координатами являются углы поворота приводных вращательных шарниров первой, второй и третьей кинематических цепей – φ_{11}, φ_{21}, φ_{31}, соответственно.

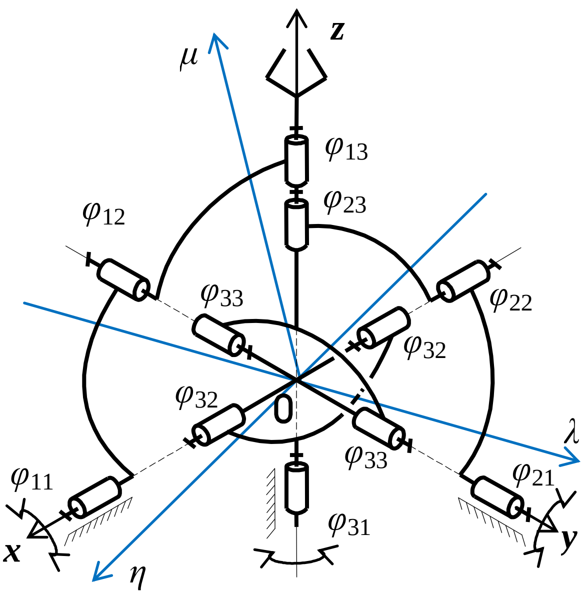


Рисунок 4.13. Расчётная схема сферического манипулятора.

Выходному звену механизма поставим в соответствие подвижную систему координат η, λ, μ, оси которой расположены по главным центральным осям инерции этого звена. Отметим, что при нулевых значениях углов ориентации выходного звена ($\alpha=\beta=\gamma=0$) направления осей η, λ, μ совпадают с направлениями осей x, y, z, соответственно.

Сферическое движение тела (выходного звена) вокруг центра масс представляет собой движение выходного звена по отношению к подвижной системе координат η, λ, μ, и определяется дифференциальными уравнениями движения тела вокруг неподвижной точки в проекциях на главные оси инерции или динамическими уравнениями Эйлера в общем виде:

$$\begin{cases} M_\eta = J_\eta \cdot \dfrac{d\omega_\eta}{dt} + \omega_\lambda \cdot \omega_\mu \cdot \left(J_\mu - J_\lambda\right), \\ M_\lambda = J_\lambda \cdot \dfrac{d\omega_\lambda}{dt} + \omega_\mu \cdot \omega_\eta \cdot \left(J_\eta - J_\mu\right), \\ M_\mu = J_\mu \cdot \dfrac{d\omega_\mu}{dt} + \omega_\eta \cdot \omega_\mu \cdot (J_\lambda - J_\eta), \end{cases} \tag{4.12}$$

где J_η, J_λ, J_μ – главные моменты инерции тела относительно главных центральных осей инерции η, λ, μ, соответственно (в данном случае – постоянные числа); M_η, M_λ, M_μ – проекции главного момента внешних сил, приложенных к телу, относительно осей подвижной системы координат η, λ, μ (в общем случае являются функциями t, α, β, γ, ω_η, ω_λ, ω_μ, т.е. рассматриваем их как моменты в приводах); ω_η, ω_λ, ω_μ – проекции вектора угловой скорости выходного звена на оси η, λ, μ; $\dfrac{d\omega_i}{dt} = \varepsilon_i$ – проекции углового ускорения выходного звена на подвижные оси ($i = \eta, \lambda, \mu$), т.е. $\ddot{\alpha}, \ddot{\beta}, \ddot{\gamma}$.

Для рассматриваемого сферического механизма в качестве обобщённых координат примем углы поворота в приводных вращательных шарнирах φ_{11}, φ_{21}, φ_{31} вдоль осей Ox, Oy, Oz, которые однозначно определяют положение выходного звена.

Главный момент сил инерции системы (выходного звена) относительно центра O будет равен:

$$M_{\Phi O}^{И} = -\frac{dK_O}{dt},$$

где K_O – кинетический момент системы относительно центра O: $\dot{\mathbf{K}}_O = \mathbf{J}_O\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{J}_O\boldsymbol{\omega}$, где $\dot{\boldsymbol{\omega}} = \dot{\omega}_\eta + \dot{\omega}_\lambda + \dot{\omega}_\mu$ – вектор угловой скорости.

Для рассматриваемого сферического механизма в качестве обобщённых координат примем углы поворота в приводных вращательных шарнирах φ_{11}, φ_{21}, φ_{31} вдоль осей Ox, Oy, Oz, которые однозначно определяют положение выходного звена.

Используя принцип Д'Аламбера и рассматривая систему (звенья) как находящуюся в равновесии, запишем следующее условие:

$$\sum M_i + M_{\Phi i} = 0,$$

где M_i – главный момент внешних сил, приложенный к i-му звену; $M_{\Phi i}$ – главный момент сил инерции i-го звена ($M_\Phi = J_i \cdot \varepsilon_i$ - предполагается, что главный вектор сил инерции приложен к центру масс; i = 1, 2, 3 – номер звена кинематической цепи).

Составим общее уравнение динамики для сферического механизма (рисунок 4.13). С учётом выбранных обобщённых координат, заданных элементарных приращений (возможное угловое перемещение) $\delta\varphi_{11}$, $\delta\varphi_{21}$, $\delta\varphi_{31}$, активных сил, приложенных к системе (считаем, что звено уравновешено – центр тяжести совпадает с центром вращения, т.е. с точкой O), получаем следующие уравнения динамики:

$$\begin{cases} M_\eta \cdot \delta\varphi_{11} - \left(J_\eta \ddot{\alpha} \dfrac{\partial\alpha}{\partial\varphi_{11}} + J_\eta \ddot{\beta} \dfrac{\partial\beta}{\partial\varphi_{11}} + J_\eta \ddot{\gamma} \dfrac{\partial\gamma}{\partial\varphi_{11}} \right) \cdot \delta\varphi_{11} = 0, \\ M_\lambda \cdot \delta\varphi_{21} - \left(J_\lambda \ddot{\alpha} \dfrac{\partial\alpha}{\partial\varphi_{21}} + J_\lambda \ddot{\beta} \dfrac{\partial\beta}{\partial\varphi_{21}} + J_\lambda \ddot{\gamma} \dfrac{\partial\gamma}{\partial\varphi_{21}} \right) \cdot \delta\varphi_{21} = 0, \\ M_\mu \cdot \delta\varphi_{31} - \left(J_\mu \ddot{\alpha} \dfrac{\partial\alpha}{\partial\varphi_{31}} + J_\mu \ddot{\beta} \dfrac{\partial\beta}{\partial\varphi_{31}} + J_\mu \ddot{\gamma} \dfrac{\partial\gamma}{\partial\varphi_{31}} \right) \cdot \delta\varphi_{31} = 0. \end{cases} \tag{4.13}$$

где $\dfrac{\partial\alpha}{\partial\varphi_{i1}}$; $\dfrac{\partial\beta}{\partial\varphi_{i1}}$; $\dfrac{\partial\gamma}{\partial\varphi_{i1}}$ – бесконечно малые приращения обобщенных координат системы и равны (i – 1, 2, 3 – номер кинематической цепи).

Для определения коэффициентов $\dfrac{\partial\alpha}{\partial\varphi_{i1}}$; $\dfrac{\partial\beta}{\partial\varphi_{i1}}$; $\dfrac{\partial\gamma}{\partial\varphi_{i1}}$ можно рассмотреть уравнения взаимосвязи между входными и выходными координатами, записанные в виде неявных функций от координат системы $F_i(\alpha, \beta, \gamma, \varphi_{i1}) = 0$ (i = 1, 2, 3 – номер кинематической цепи), как это было сделано для поступательного механизма. Или же воспользоваться решением задачи о скоростях методом винтов [5, 6].

Для решения данной задачи необходимо определить силовые и кинематические винты [6]. Силовой винт $\mathbf{R}_i$ с координатами ($\mathbf{r}_{ij}$, $\mathbf{r}_{ij}$, $\mathbf{r}_{ij}$, $\mathbf{r}_{ij}^\circ$, $\mathbf{r}_{ij}^\circ$, $\mathbf{r}_{ij}^\circ$) взаимен двум ортам осей $\mathbf{e}_{i2}$ и $\mathbf{e}_{i3}$ не приводных пар (где i = 1, 2, 3 – номер кинематической цепи, j – оси координат в неподвижной системе координат Ox, Oy, Oz), где $\mathbf{r}_{ij}$, $\mathbf{r}_{ij}$, $\mathbf{r}_{ij}$ – проекции векторной части винта, $\mathbf{r}_{ij}^\circ$, $\mathbf{r}_{ij}^\circ$, $\mathbf{r}_{ij}^\circ$ – проекции моментной части винта. Винт $\mathbf{R}_i$ уравновешен совокупностью винтов, т.е. реакциями в парах, соответствующих ортам $\mathbf{e}_{i2}$ и $\mathbf{e}_{i3}$. Из плюккеровых координат найденных силовых винтов $\mathbf{R}_i$ можно составить матрицу, описывающую ограничения перемещения (вращения) выходного звена:

$$\begin{pmatrix} r_{1x} & r_{1y} & r_{1z} & r_{1x}^\circ & r_{1y}^\circ & r_{1z}^\circ \\ r_{2x} & r_{2y} & r_{2z} & r_{2x}^\circ & r_{2y}^\circ & r_{2z}^\circ \\ r_{3x} & r_{3y} & r_{3z} & r_{3x}^\circ & r_{3y}^\circ & r_{3z}^\circ \end{pmatrix}. \tag{4.14}$$

Кинематический винт $\mathbf{U}_i$ характеризует перемещение тела, и имеет координаты ($\mathbf{u}_{ijx}$, $\mathbf{u}_{ijy}$, $\mathbf{u}_{ijz}$ $\mathbf{u}_{ijx}^\circ$, $\mathbf{u}_{ijy}^\circ$, $\mathbf{u}_{ijz}^\circ$), где $\mathbf{u}_{ijx}$, $\mathbf{u}_{ijy}$, $\mathbf{u}_{ijz}$ – проекции векторной части винта, $\mathbf{u}_{ijx}^\circ$, $\mathbf{u}_{ijy}^\circ$, $\mathbf{u}_{ijz}^\circ$ – проекции моментной части винта (i = 1, 2, 3 – номер кинематической цепи, j –номер соответствующей кинематической пары). Кинематический винт $\mathbf{U}_i$ равен сумме кинематических винтов звеньев цепи $\mathbf{U}_i = \mathbf{U}_{i1} + \mathbf{U}_{i2} + \mathbf{U}_{i3}$, где $\mathbf{U}_{i1}$, $\mathbf{U}_{i2}$, $\mathbf{U}_{i3}$ – кинематические винты в первой, второй и третьей парах i-го звена.

Группу кинематических винтов для каждой кинематической цепи можно представить в виде матрицы, в которой построчно записываются плюккеровы координаты винта. Число строк матрицы зависит от числа кинематических пар в отдельно взятой кинематической цепи. Для рассматриваемого сферического механизма можно составить три таких матрицы, состоящих из трёх строк:

$$\begin{pmatrix} u_{i1x} & u_{i1x} & u_{i1z} & u^{\circ}_{i1x} & u^{\circ}_{i1y} & u^{\circ}_{i1z} \\ u_{i2x} & u_{i2x} & u_{i2z} & u^{\circ}_{i2x} & u^{\circ}_{i2y} & u^{\circ}_{i2z} \\ u_{i3x} & u_{i3x} & u_{i3z} & u^{\circ}_{i3x} & u^{\circ}_{i3y} & u^{\circ}_{i3z} \end{pmatrix}. \tag{4.15}$$

Моментная часть скалярного произведения двух винтов есть сумма скалярных произведений вектора первого винта на момент второго относительно некоторой точки и произведение вектора второго винта на момент первого относительно той же точки, и называется относительным моментом. Поскольку силовой винт $\mathbf{R}_i$ взаимен с кинематическими винтами $\mathbf{U}_1$, $\mathbf{U}_2$, $\mathbf{U}_3$, то их относительный момент равен нулю [6]:

$$\mathrm{mom}(\mathbf{R}_i \cdot \mathbf{U}_{i1}) = \mathrm{mom}(\mathbf{R}_i \cdot \mathbf{U}_{i2}) = \mathrm{mom}(\mathbf{R}_i \cdot \mathbf{U}_{i3}) = 0 \rightarrow \mathrm{mom}(\mathbf{R}_i \cdot \mathbf{U}_i) = \mathrm{mom}(\mathbf{R}_i \cdot \mathbf{U}_{i1})$$

Для того чтобы решить задачу о скоростях методом винтов, необходимо рассмотреть следующее условие для каждой кинематической цепи:

$$\mathbf{R}_i \cdot \mathbf{U}_{ij} \cdot \dot{q}_i = \boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{R}_i, \tag{4.16}$$

где $\boldsymbol{\Omega}$ (ω_η, ω_λ, ω_μ V_η, V_λ, V_μ) – плюккеровы координаты винта, характеризующие угловые и линейные скорости выходного звена вдоль осей координат (в рассматриваемом механизме поступательное перемещение отсутствует, следовательно, $V_\eta = V_\lambda = V_\mu = 0$); $\dot{q}_i$ – угловая скорость, сообщаемая приводной вращательной паре кинематической цепи (i = 1, 2, 3 – номер кинематической пары).

Уравнение (4.16) для рассматриваемого сферического механизма примет вид:

$$\begin{aligned} \omega_{11} \cdot \left(\mathbf{u}_{1x}\mathbf{r}^{\circ}_{1x} + \mathbf{u}_{1y}\mathbf{r}^{\circ}_{1y} + \mathbf{u}_{1z}\mathbf{r}^{\circ}_{1z}\right) &= \omega_\eta \mathbf{r}^{\circ}_{1\eta} + \omega_\lambda \mathbf{r}^{\circ}_{1\lambda} + \omega_\mu \mathbf{r}^{\circ}_{1\mu}, \\ \omega_{21} \cdot \left(\mathbf{u}_{2x}\mathbf{r}^{\circ}_{2x} + \mathbf{u}_{2y}\mathbf{r}^{\circ}_{2y} + \mathbf{u}_{2z}\mathbf{r}^{\circ}_{2z}\right) &= \omega_\eta \mathbf{r}^{\circ}_{2\eta} + \omega_\lambda \mathbf{r}^{\circ}_{2\lambda} + \omega_\mu \mathbf{r}^{\circ}_{2\mu}, \\ \omega_{31} \cdot \left(\mathbf{u}_{3x}\mathbf{r}^{\circ}_{3x} + \mathbf{u}_{3y}\mathbf{r}^{\circ}_{2y} + \mathbf{u}_{3z}\mathbf{r}^{\circ}_{3z}\right) &= \omega_\eta \mathbf{r}^{\circ}_{3\eta} + \omega_\lambda \mathbf{r}^{\circ}_{3\lambda} + \omega_\mu \mathbf{r}^{\circ}_{3\mu}, \end{aligned} \tag{4.17}$$

где левая часть выражения отвечает за плюккеровы координаты силовых и кинематических винтов в приводных вращательных шарнирах, правая часть – отвечает за плюккеровы координаты силовых и кинематических винтов выходного звена.

Решение обратной задачи о скоростях находится из системы (4.17), относительно координат ω_{11}, ω_{21}, ω_{31}, решение прямой задачи – относительно координат ω_η, ω_λ, ω_μ.

Для определения плюккеровых координат силовых винтов $\mathbf{R}_j$ выходного звена с координатами ($\mathbf{r}_{i\eta}$, $\mathbf{r}_{i\lambda}$, $\mathbf{r}_{i\mu}$, $\mathbf{r}_{i\eta}^\circ$, $\mathbf{r}_{i\lambda}^\circ$, $\mathbf{r}_{i\mu}^\circ$) в подвижной системе координат $O\eta\lambda\beta$ запишем координаты единичных векторов $\mathbf{e}_{i2}$ и $\mathbf{e}_{i3}$ в неподвижной системе (где где $\mathbf{r}_{i\eta}$, $\mathbf{r}_{i\lambda}$, $\mathbf{r}_{i\mu}$ – проекции векторной части силового винта, $\mathbf{r}_{i\eta}^\circ$, $\mathbf{r}_{i\lambda}^\circ$, $\mathbf{r}_{i\mu}^\circ$ – проекции моментной части винта; i = 1, 2, 3 – номер кинематической цепи).

Координаты единичных векторов второй ($\mathbf{e}_{12}$) и третьей ($\mathbf{e}_{13}$) кинематических пар первой кинематической цепи, соответственно, $\mathbf{e}_{12}$ (x_{12}, y_{12}, z_{12}) и $\mathbf{e}_{13}$ (x_{13}, y_{13}, z_{13}), в неподвижной системе координат имеют следующие значения:

(x_{12}, y_{12}, z_{12}) – координаты единичного вектора второй кинематической пары, равные произведению матрицы, описывающей поворот входного звена вокруг оси Ox, на координаты второй пары в начальном положении:

$$\begin{pmatrix} x_{12} \\ y_{12} \\ z_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi_{11} & -\sin\varphi_{11} \\ 0 & \sin\varphi_{11} & \cos\varphi_{11} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos\varphi_{11} \\ -\sin\varphi_{11} \end{pmatrix};$$

(x_{13}, y_{13}, z_{13}) – координаты единичного вектора оси третьей кинематической пары, равные произведению матрицы A, описывающей поворот выходного звена, на координаты третьей пары в начальном положении:

$$\begin{pmatrix} x_{13} \\ y_{13} \\ z_{13} \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\alpha\cdot\sin\gamma + \cos\alpha\cdot\cos\gamma\cdot\sin\beta \\ \cos\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma - \cos\gamma\cdot\sin\alpha \\ \cos\alpha\cdot\cos\beta \end{pmatrix},$$

где A – матрица поворота, описывающая переход выходного звена из подвижной системы координат в неподвижную (глава 3).

Координаты единичных векторов второй ($\mathbf{e}_{22}$) и третьей ($\mathbf{e}_{23}$) кинематических пар второй кинематической цепи, соответственно, $\mathbf{e}_{22}$ (x_{22}, y_{22}, z_{22}) и $\mathbf{e}_{23}$ (x_{23}, y_{23}, z_{23}), в неподвижной системе координат равны:

$$\begin{pmatrix} x_{22} \\ y_{22} \\ z_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi_{21} & 0 & \sin\varphi_{21} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi_{21} & 0 & \cos\varphi_{21} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos\varphi_{21} \\ 0 \\ \sin\varphi_{21} \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} x_{23} \\ y_{23} \\ z_{23} \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\alpha\cdot\sin\gamma + \cos\alpha\cdot\cos\gamma\cdot\sin\beta \\ \cos\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma - \cos\gamma\cdot\sin\alpha \\ \cos\alpha\cdot\cos\beta \end{pmatrix}.$$

Координаты единичных векторов второй ($\mathbf{e}_{32}$) и третьей ($\mathbf{e}_{33}$) кинематических пар третьей кинематической цепи, соответственно, $\mathbf{e}_{32}$ (x_{32}, y_{32}, z_{32}) и $\mathbf{e}_{33}$ (x_{33}, y_{33}, z_{33}), в неподвижной системе координат равны:

$$\begin{pmatrix} x_{32} \\ y_{32} \\ z_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi_{31} & -\sin\varphi_{31} & 0 \\ \sin\varphi_{31} & \cos\varphi_{31} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi_{31} \\ \sin\varphi_{31} \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} x_{33} \\ y_{33} \\ z_{33} \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\gamma\cdot\sin\beta\cdot\sin\alpha - \sin\gamma\cdot\cos\alpha \\ \cos\gamma\cdot\cos\alpha + \sin\gamma\cdot\sin\beta\cdot\sin\alpha \\ \cos\beta\cdot\sin\alpha \end{pmatrix}.$$

Координаты единичных векторов $\mathbf{e}_{\eta ij}$, $\mathbf{e}_{\eta ij}$, $\mathbf{e}_{\eta ij}$ (i = 1, 2, 3 – номер кинематической цепи; j = 1, 2, 3 – номер кинематической пары) вторых кинематических пар первой, второй и третьей кинематических цепей в подвижной системе координат определяются матрицей A^{-1}, обратной матрице A:

$$\begin{pmatrix} e_{\eta 12} \\ e_{\lambda 12} \\ e_{\mu 12} \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x_{12} \\ y_{12} \\ z_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\beta\cdot\sin\varphi_{11} - \sin\gamma\cdot\cos\beta\cdot\cos\varphi_{11} \\ -\cos\varphi_{11}\cdot\cos\gamma\cdot\cos\alpha - \cos\beta\cdot\sin\alpha\cdot\sin\varphi_{11} - \sin\gamma\cdot\sin\beta\cdot\sin\alpha\cdot\cos\varphi_{11} \\ \cos\gamma\cdot\sin\alpha\cdot\cos\varphi_{11} - \cos\beta\cdot\cos\alpha\cdot\sin\varphi_{11} - \sin\gamma\cdot\cos\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos\varphi_{11} \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} e_{\eta 22} \\ e_{\lambda 22} \\ e_{\mu 22} \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x_{22} \\ y_{22} \\ z_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\beta\cdot\sin\varphi_{21} - \cos\gamma\cdot\cos\beta\cdot\cos\varphi_{21} \\ \sin\gamma\cdot\cos\alpha\cdot\cos\varphi_{21} + \cos\beta\cdot\sin\alpha\cdot\sin\varphi_{21} - \cos\gamma\cdot\sin\beta\cdot\sin\alpha\cdot\cos\varphi_{21} \\ \cos\beta\cdot\cos\alpha\cdot\sin\varphi_{21} - \sin\gamma\cdot\sin\alpha\cdot\cos\varphi_{21} - \cos\gamma\cdot\cos\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos\varphi_{21} \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} e_{\eta 32} \\ e_{\lambda 32} \\ e_{\mu 32} \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x_{32} \\ y_{32} \\ z_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\gamma - \varphi_{31})\cdot\cos\beta \\ \cos\gamma\cdot\cos\alpha\cdot\sin\varphi_{31} - \sin\gamma\cdot\cos\alpha\cdot\cos\varphi_{31} + \cos\gamma\cdot\sin\beta\cdot\sin\alpha\cdot\cos\varphi_{31} + \sin\gamma\cdot\sin\beta\cdot\sin\alpha\cdot\sin\varphi_{31} \\ \sin\gamma\cdot\sin\alpha\cdot\cos\varphi_{31} - \cos\gamma\cdot\sin\alpha\cdot\sin\varphi_{31} + \cos\gamma\cdot\cos\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos\varphi_{31} + \sin\gamma\cdot\cos\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\varphi_{31} \end{pmatrix}.$$

Координаты единичных векторов третьих кинематических пар первой, второй и третьей кинематических цепей в подвижной системе координат определяются координатами единичного вектора оси третьей пары в её начальном положении:

$$\begin{pmatrix} e_{\eta 13} \\ e_{\lambda 13} \\ e_{\mu 13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \qquad \begin{pmatrix} e_{\eta 23} \\ e_{\lambda 23} \\ e_{\mu 23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} e_{\eta 33} \\ e_{\lambda 33} \\ e_{\mu 33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Для первой кинематической цепи координаты моментной части силового винта $\mathbf{r}_1^\circ$ ($\mathbf{r}_{1\eta}^\circ$, $\mathbf{r}_{1\lambda}^\circ$, $\mathbf{r}_{1\mu}^\circ$) можно рассчитать как:

$$\mathbf{r}_1^\circ = \mathbf{e}_{12}\cdot\mathbf{e}_{33} = \begin{bmatrix} \bar\eta & \bar\lambda & \bar\mu \\ e_{\eta 12} & e_{\lambda 12} & e_{\mu 12} \\ e_{\eta 13} & e_{\lambda 13} & e_{\mu 13} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\eta}\cdot(e_{\lambda 12}e_{\mu 13} - e_{\mu 12}e_{\lambda 13}) - \boldsymbol{\lambda}\cdot(e_{\mu 12}e_{\eta 13} - e_{\eta 12}e_{\mu 13}) +$$

$\boldsymbol{\mu} \cdot (e_{\eta 12} e_{\lambda 13} - e_{\lambda 12} e_{\eta 13})$;

$$r_{1\eta}^0 = -(\cos\gamma \cdot \cos\alpha \cdot \cos\varphi_{11} + \cos\beta \cdot \sin\alpha \cdot \sin\varphi_{11} + \sin\gamma \cdot \sin\beta \cdot \sin\alpha \cdot \cos\varphi_{11});$$

$$r_{1\lambda}^0 = -(\sin\beta \cdot \sin\varphi_{11} - \sin\gamma \cdot \cos\beta \cdot \cos\varphi_{11});$$

$$r_{1\mu}^0 = 0 .$$

Для второй и третьей кинематических цепей координаты моментной части ($\mathbf{r}_{2\eta}°$, $\mathbf{r}_{2\lambda}°$, $\mathbf{r}_{2\mu}°$)и ($\mathbf{r}_{3\eta}°$, $\mathbf{r}_{3\lambda}°$, $\mathbf{r}_{3\mu}°$) силовых винтов $\mathbf{r}_2°$ и $\mathbf{r}_3°$ можно рассчитать как:

$$\mathbf{r}_2^{\circ} = \mathbf{e}_{22} \cdot \mathbf{e}_{23} = \begin{bmatrix} \overline{\eta} & \overline{\lambda} & \overline{\mu} \\ e_{\eta 22} & e_{\lambda 22} & e_{\mu 22} \\ e_{\eta 23} & e_{\lambda 23} & e_{\mu 23} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\eta} \cdot (e_{\lambda 22} e_{\mu 23} - e_{\mu 22} e_{\lambda 23}) - \boldsymbol{\lambda} \cdot (e_{\mu 22} e_{\eta 23} - e_{\eta 22} e_{\mu 23}) +$$

$+ \boldsymbol{\mu} \cdot (e_{\eta 22} e_{\lambda 23} - e_{\lambda 22} e_{\eta 23})$;

$$r_{2\eta}^0 = \sin\gamma \cdot \cos\alpha \cdot \cos\varphi_{21} + \cos\beta \cdot \sin\alpha \cdot \sin\varphi_{21} - \cos\gamma \cdot \sin\beta \cdot \sin\alpha \cdot \cos\varphi_{21};$$

$$r_{2\lambda}^0 = \sin\beta \cdot \sin\varphi_{21} + \cos\gamma \cdot \cos\beta \cdot \cos\varphi_{21}; \quad r_{2\mu}^0 = 0;$$

$$\mathbf{r}_3^{\circ} = \mathbf{e}_{32} \cdot \mathbf{e}_{33} = \begin{bmatrix} \overline{\eta} & \overline{\lambda} & \overline{\mu} \\ e_{\eta 32} & e_{\lambda 32} & e_{\mu 32} \\ e_{\eta 33} & e_{\lambda 33} & e_{\mu 33} \end{bmatrix} = \boldsymbol{\eta} \cdot (e_{\lambda 32} e_{\mu 33} - e_{\mu 32} e_{\lambda 33}) - \boldsymbol{\lambda} \cdot (e_{\mu 32} e_{\eta 33} - e_{\eta 32} e_{\mu 33}) +$$

$+ \boldsymbol{\mu} \cdot (e_{\eta 32} e_{\lambda 33} - e_{\lambda 32} e_{\eta 33})$;

$$r_{3\eta}^0 = \begin{matrix} -\sin\gamma \cdot \sin\alpha \cdot \cos\varphi_{31} + \cos\gamma \cdot \sin\alpha \cdot \sin\varphi_{31} - \cos\gamma \cdot \cos\alpha \cdot \sin\beta \cdot \cos\varphi_{31} - \\ -\sin\gamma \cdot \cos\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\varphi_{31} \end{matrix};$$

$$r_{3\lambda}^0 = -(\cos(\gamma - \varphi_{31}) \cdot \cos\beta); \qquad r_{3\mu}^0 = \cos(\gamma - \varphi_{31}) \cdot \cos\beta .$$

Моментная часть плюккеровых координат силовых винтов в подвижной системе координат равна:

$$\begin{pmatrix} r_{1\eta}^0 \\ r_{1\lambda}^0 \\ r_{1\mu}^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos\gamma \cdot \cos\alpha \cdot \cos\varphi_{11} - \cos\beta \cdot \sin\alpha \cdot \sin\varphi_{11} - \sin\gamma \cdot \sin\beta \cdot \sin\alpha \cdot \cos\varphi_{11} \\ -\sin\beta \cdot \sin\varphi_{11} + \sin\gamma \cdot \cos\beta \cdot \cos\varphi_{11} \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} r_{2\eta}^0 \\ r_{2\lambda}^0 \\ r_{3\mu}^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\gamma \cdot \cos\alpha \cdot \cos\varphi_{21} + \cos\beta \cdot \sin\alpha \cdot \sin\varphi_{21} - \cos\gamma \cdot \sin\beta \cdot \sin\alpha \cdot \cos\varphi_{21} \\ \sin\beta \cdot \sin\varphi_{21} + \cos\gamma \cdot \cos\beta \cdot \cos\varphi_{21} \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} r_{3\xi}^0 \\ r_{3\eta}^0 \\ r_{3\zeta}^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\gamma \cdot \sin\alpha \cdot \cos\varphi_{31} + \cos\gamma \cdot \sin\alpha \cdot \sin\varphi_{31} - \cos\gamma \cdot \cos\alpha \cdot \sin\beta \cdot \cos\varphi_{31} - \sin\gamma \cdot \cos\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\varphi_{31} \\ -(\cos(\gamma - \varphi_{31}) \cdot \cos\beta) \\ \cos(\gamma - \varphi_{31}) \cdot \cos\beta \end{pmatrix}.$$

Моментные части плюккеровых координат ($\mathbf{r}_{1x}°$, $\mathbf{r}_{1y}°$, $\mathbf{r}_{1z}°$), ($\mathbf{r}_{2x}°$, $\mathbf{r}_{2y}°$, $\mathbf{r}_{2z}°$) и ($\mathbf{r}_{3x}°$, $\mathbf{r}_{3y}°$, $\mathbf{r}_{3z}°$) силовых винтов в $\mathbf{r}_1°$, $\mathbf{r}_2°$, $\mathbf{r}_3°$ в неподвижной системе координат равны произведению матриц перехода входного звена В$^{/}$, В$^{//}$, В$^{///}$ на координаты единичных векторов кинематических пар соответствующих кинематических цепей, сопряженных с выходным звеном механизма (глава 3) [107]:

$$\begin{pmatrix} r_{1x}^0 \\ r_{1y}^0 \\ r_{1z}^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\varphi_{12} \\ -\cos\varphi_{12}\cdot\sin\varphi_{11} \\ \cos\varphi_{11}\cdot\cos\varphi_{12} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} r_{2x}^0 \\ r_{2y}^0 \\ r_{3z}^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi_{22}\cdot\sin\varphi_{21} \\ -\sin\varphi_{22} \\ \cos\varphi_{21}\cdot\cos\varphi_{22} \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} r_{3x}^0 \\ r_{3y}^0 \\ r_{3z}^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos\varphi_{32}\cdot\sin\varphi_{31} \\ \cos\varphi_{31}\cdot\cos\varphi_{32} \\ -\sin\varphi_{32} \end{pmatrix}.$$

Промежуточные углы $\sin\varphi_{12}$, $\sin\varphi_{22}$, $\sin\varphi_{22}$ находятся из уравнения связи входных и выходных координат (глава 3) и равны:

$$\begin{gathered} \sin\varphi_{12} = \sin\alpha\cdot\sin\gamma + \cos\alpha\cdot\cos\gamma\cdot\sin\beta; \\ \sin\varphi_{22} = \cos\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma - \cos\gamma\cdot\sin\alpha; \\ \sin\varphi_{32} = \cos\beta\cdot\sin\alpha. \end{gathered} \tag{4.18}$$

Переменные коэффициенты $\dfrac{d\omega_\eta}{dt};\dfrac{d\omega_\lambda}{dt};\dfrac{d\omega_\mu}{dt}$ из уравнения (4.12) есть проекции углового ускорения на оси в подвижной системе координат $\varepsilon_\eta = \dfrac{d\omega_\eta}{dt}$; $\varepsilon_\lambda = \dfrac{d\omega_\lambda}{dt}$; $\varepsilon_\mu = \dfrac{d\omega_\mu}{dt}$, и равны производным по времени t от проекций угловых скоростей на эти же оси. Поскольку сферическое движение тела в каждый момент времени может рассматриваться как вращение вокруг мгновенной оси, проходящую через неподвижную точку O, тогда общей вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ (вращение) можно разложить на три составляющих вокруг осей, проходящих через эту же точку O ($\boldsymbol{\omega} = \mathbf{i}_1\,\omega_\eta + \mathbf{j}_1\,\omega_\lambda + \mathbf{k}_1\,\omega_\lambda$) [100].

Разложим вектор угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ выходного звена на подвижные оси координат η, λ, μ и обозначим его проекции на эти оси как ω_η, ω_λ, ω_μ. Для нахождения проекций угловых скоростей ω_η, ω_λ, ω_μ, запишем следующие соотношения:

$$\begin{cases} \omega_\eta = \dot\alpha\cdot\alpha_\eta + \dot\beta\cdot\beta_\eta + \dot\gamma\cdot\gamma_\eta, \\ \omega_\lambda = \dot\alpha\cdot\alpha_\lambda + \dot\beta\cdot\beta_\lambda + \dot\gamma\cdot\gamma_\lambda, \\ \omega_\mu = \dot\alpha\cdot\alpha_\mu + \dot\beta\cdot\beta_\mu + \dot\gamma\cdot\gamma_\mu. \end{cases} \text{ или } \begin{pmatrix} \omega_\eta \\ \omega_\lambda \\ \omega_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_\eta & \beta_\eta & \gamma_\eta \\ \alpha_\lambda & \beta_\lambda & \gamma_\lambda \\ \alpha_\mu & \beta_\mu & \gamma_\mu \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \dot\alpha \\ \dot\beta \\ \dot\gamma \end{pmatrix}, \tag{4.19}$$

где $\dot\alpha$, $\dot\beta$, $\dot\gamma$ – скорости изменения углов ориентации выходного звена-подвижные оси η, λ, μ.

Выходное звено в подвижной системе координат имеет следующие координаты единичных векторов:

$\begin{pmatrix} \gamma_\xi \\ \gamma_\eta \\ \gamma_\zeta \end{pmatrix}$ – координаты единичного вектора первой кинематической пары третьей кинематической цепи, соответствующие угловой скорости $\dot{\gamma}$ на оси вподвижной системе координат η, λ, μ:

$\begin{pmatrix} \gamma_\eta \\ \gamma_\lambda \\ \gamma_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$;

$\begin{pmatrix} \beta_\xi \\ \beta_\eta \\ \beta_\zeta \end{pmatrix}$ – координаты единичного вектора кинематической пары, соответствующие угловой скорости $\dot{\beta}$ на оси в подвижной системе координат η, λ, μ, равные произведению матрицы поворота вокруг оси $O\mu$ на координаты кинематической пары в начальном положении вокруг оси Oy): $\begin{pmatrix} \beta_\xi \\ \beta_\eta \\ \beta_\zeta \end{pmatrix} = A_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\gamma \\ \cos\gamma \\ 0 \end{pmatrix}$;

$\begin{pmatrix} \alpha_\xi \\ \alpha_\eta \\ \alpha_\zeta \end{pmatrix}$ – координаты кинематической пары, соответствующие угловой скорости $\dot{\alpha}$, равные произведению матриц поворота выходного звена на координаты кинематической пары в начальном положении вокруг оси Ox: $\begin{pmatrix} \alpha_\xi \\ \alpha_\eta \\ \alpha_\zeta \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta \cdot \cos\gamma \\ \cos\beta \cdot \sin\gamma \\ -\sin\beta \end{pmatrix}$.

Подставим найденные значения в систему уравнений (4.19):

$$\begin{aligned} \omega_\eta &= \dot{\alpha} \cdot (\cos\beta \cdot \cos\gamma) + \dot{\beta} \cdot (-\sin\gamma) + \dot{\gamma} \cdot 0, \\ \omega_\lambda &= \dot{\alpha} \cdot (\cos\beta \cdot \sin\gamma) + \dot{\beta} \cdot \cos\gamma + \dot{\gamma} \cdot 0, \\ \omega_\mu &= \dot{\alpha} \cdot (-\sin\beta) + \dot{\beta} \cdot 0 + \dot{\gamma} \cdot 1. \end{aligned}$$

Выразим скорости $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}$.через проекции скоростей выходного звена на подвижные оси координат ω_η, ω_λ, ω_μ:

$$\begin{pmatrix} \omega_\eta \\ \omega_\lambda \\ \omega_\mu \end{pmatrix} = AA \cdot \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{pmatrix} = AA^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \omega_\eta \\ \omega_\lambda \\ \omega_\mu \end{pmatrix},$$

где $AA = \begin{pmatrix} \cos\beta \cdot \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \cos\beta \cdot \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ -\sin\beta & 0 & 1 \end{pmatrix}$,и получаем значение скоростей $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}$:

$$\dot{\alpha} = \frac{\omega_\eta \cdot \cos\gamma + \omega_\lambda \cdot \sin\gamma}{\cos\beta};$$

$$\dot{\beta} = \omega_\lambda \cdot \cos\gamma - \omega_\eta \cdot \sin\gamma; \tag{4.20}$$

$$\dot{\gamma} = tg\beta \cdot (\omega_\eta \cdot \cos\gamma + \omega_\lambda \cdot \sin\gamma) + \omega_\mu.$$

Бесконечно малые приращения обобщенных координат системы $\frac{\partial\alpha}{\partial\varphi_{i1}}$; $\frac{\partial\beta}{\partial\varphi_{i1}}$; $\frac{\partial\gamma}{\partial\varphi_{i1}}$ можно записать в виде:

$$\frac{\partial\alpha}{\partial\varphi_{i1}} = -\frac{\partial F_i}{\partial\varphi_{i1}} \bigg/ \frac{\partial F_i}{\partial\alpha};\ \frac{\partial\beta}{\partial\varphi_{i1}} = -\frac{\partial F_i}{\partial\varphi_{i1}} \bigg/ \frac{\partial F_i}{\partial\beta};\ \frac{\partial\gamma}{\partial\varphi_{i1}} = -\frac{\partial F_i}{\partial\varphi_{i1}} \bigg/ \frac{\partial F_i}{\partial\gamma}. \tag{4.21}$$

Если учесть тот факт, что $\dot{\alpha} = \frac{d\alpha}{dt} \rightarrow \omega_\eta$; $\dot{\beta} = \frac{d\beta}{dt} \rightarrow \omega_\lambda$; $\dot{\gamma} = \frac{d\gamma}{dt} \rightarrow \omega_\mu$; $\dot{\varphi}_{11} = \frac{d\varphi_{11}}{dt} \rightarrow \omega_{11}$; $\dot{\varphi}_{21} = \frac{d\varphi_{21}}{dt} \rightarrow \omega_{21}$; $\dot{\varphi}_{31} = \frac{d\varphi_{31}}{dt} \rightarrow \omega_{31}$, тогда отношение углов ориентации выходного звена от углов поворотов приводных вращательных шарниров (уравнение (4.21)) можно переписать в следующей форме:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial\alpha}{\partial\varphi_{11}} = \frac{\omega_\eta}{\omega_{11}} = \frac{r^0_{1\eta}}{r^0_{1x}};\quad \frac{\partial\beta}{\partial\varphi_{11}} = \frac{\omega_\lambda}{\omega_{11}} = \frac{r^0_{1\lambda}}{r^0_{1y}};\quad \frac{\partial\gamma}{\partial\varphi_{11}} = \frac{\omega_\mu}{\omega_{11}} = \frac{r^0_{1\mu}}{r^0_{1z}};\\
\frac{\partial\alpha}{\partial\varphi_{21}} = \frac{\omega_\eta}{\omega_{21}} = \frac{r^0_{2\eta}}{r^0_{2x}};\quad \frac{\partial\beta}{\partial\varphi_{21}} = \frac{\omega_\lambda}{\omega_{21}} = \frac{r^0_{2\lambda}}{r^0_{2y}};\quad \frac{\partial\gamma}{\partial\varphi_{21}} = \frac{\omega_\mu}{\omega_{21}} = \frac{r^0_{2\mu}}{r^0_{2z}};\\
\frac{\partial\alpha}{\partial\varphi_{31}} = \frac{\omega_\eta}{\omega_{31}} = \frac{r^0_{3\eta}}{r^0_{3x}};\quad \frac{\partial\beta}{\partial\varphi_{31}} = \frac{\omega_\lambda}{\omega_{31}} = \frac{r^0_{3\lambda}}{r^0_{3z}};\quad \frac{\partial\gamma}{\partial\varphi_{31}} = \frac{\omega_\mu}{\omega_{31}} = \frac{r^0_{3\mu}}{r^0_{3z}}.
\end{gathered} \tag{4.22}$$

Подставляя полученные соотношения (4.22) в общее уравнение динамики (4.13), можно переходить к решению и нахождению действующих моментов в приводах.

Моменты в приводах равны:

$$M_i = -c_i \cdot \varphi_{ij}, \tag{4.23}$$

где M_i – моменты в приводах в первой, второй и третьей кинематических цепях, соответственно; c_i – жесткость привода, *Н·м/рад*; i – 1, 2, 3 – номер кинематической цепи; j – 1, 2, 3 – номер кинематической пары.

Предположим, что известны требуемые законы изменения ориентации выходного звена: $\alpha_T(t)$, $\beta_T(t)$, $\gamma_T(t)$ и, соответственно, требуемые скорости $\dot{\alpha}_T(t)$, $\dot{\beta}_T(t)$, $\dot{\gamma}_T(t)$ и ускорения $\ddot{\alpha}_T(t)$, $\ddot{\beta}_T(t)$, $\ddot{\gamma}_T(t)$.

Необходимо найти силы (моменты) в приводах, при которых происходит минимизация ошибки по координате:

$$\Delta(t) = \alpha_T(t) - \alpha(t); \Delta(t) = \beta_T(t) - \beta(t); \Delta(t) = \gamma_T(t) - \gamma(t);$$

по скорости:

$$\dot{\Delta}(t) = \dot{\alpha}_T(t) - \dot{\alpha}(t);\ \dot{\Delta}(t) = \dot{\beta}_T(t) - \dot{\beta}(t);\ \dot{\Delta}(t) = \dot{\gamma}_T(t) - \dot{\gamma}(t);$$

по ускорению:

$$\ddot{\Delta}(t) = \ddot{\alpha}_T(t) - \ddot{\alpha}(t);\ \ddot{\Delta}(t) = \ddot{\beta}_T(t) - \ddot{\beta}(t);\ \ddot{\Delta}(t) = \ddot{\gamma}_T(t) - \ddot{\gamma}(t).$$

Закон изменения ошибки соответствует движению колебательного звена, при котором обеспечивается устойчивость и минимизация ошибки по положению, скорости и ускорению [4, 86, 87, 95].

Законы ускорений выходного звена в системе с обратными связями имеют вид:

$$\begin{aligned}
\ddot{\alpha} &= \ddot{\alpha}_T + \gamma_1(\dot{\alpha}_T - \dot{\alpha}) + \gamma_0(\alpha_T - \alpha);\\
\ddot{\beta} &= \ddot{\beta}_T + \gamma_1(\dot{\beta}_T - \dot{\beta}) + \gamma_0(\beta_T - \beta);\\
\ddot{\gamma} &= \ddot{\gamma}_T + \gamma_1(\dot{\gamma}_T - \dot{\gamma}) + \gamma_0(\gamma_T - \gamma).
\end{aligned} \tag{4.24}$$

где γ_0, γ_1 - коэффициенты обратных связей.

Дифференцирую второй раз по t уравнения скоростей (4.20), найдем значения ускорений выходного звена в подвижной системе координат:

$$\begin{aligned}
\ddot{\alpha} &= \frac{(-\sin\gamma\cdot\dot{\gamma}\cdot\omega_\eta + \cos\gamma\cdot\dot{\omega}_\eta + \cos\gamma\cdot\dot{\gamma}\cdot\omega_\lambda + \sin\gamma\cdot\dot{\omega}_\lambda)}{\cos\beta} + \frac{(\cos\gamma\cdot\omega_\eta + \sin\gamma\cdot\omega_\lambda\cdot\sin\beta\cdot\dot{\beta})}{\cos^2\beta};\\
\ddot{\beta} &= -\sin\gamma\cdot\dot{\gamma}\cdot\omega_\lambda + \cos\gamma\cdot\dot{\omega}_\lambda - \cos\gamma\cdot\dot{\gamma}\cdot\omega_\eta - \sin\gamma\cdot\dot{\omega}_\eta;\\
\ddot{\gamma} &= (1+\tan^2\beta)\cdot\dot{\beta}\cdot(\cos\gamma\cdot\omega_\eta + \sin\gamma\cdot\omega_\lambda) +\\
&+ \tan\beta\cdot(-\sin\gamma\cdot\dot{\gamma}\cdot\omega_\eta + \cos\gamma\cdot\dot{\omega}_\eta + \cos\gamma\cdot\dot{\gamma}\cdot\omega_\lambda + \sin\gamma\cdot\dot{\omega}_\lambda) + \dot{\omega}_\mu.
\end{aligned} \tag{4.25}$$

Эти соотношения определяют искомые законы формирования управляющих сил и моментов, реализующих движение по назначенной траектории.

Для получения обобщающих результатов задавались различные начальные условия движения исполнительного (выходного) звена рассматриваемого сферического механизма, различные коэффициенты обратных связей γ_0, γ_1, а также различные частоты ω закона движения по траектории.

Зададим следующие начальные условия: постоянную времени τ, характеризующую длительность протекания переходного процесса, $\tau \approx 0.018$ *сек*; время переходного процесса при этом будет составлять – $t = 0.076$ *сек*; коэффициенты обратных связей равны $\gamma_0 = 3086$, $\gamma_1 = 78.5$; моменты инерции равны: $J_\eta = 30$ *кг·м*^{2}; $J_\lambda = 20$ *кг·м*^{2}; $J_\mu = 10$ *кг·м*^{2}.Для упрощения пренебрегаем массой входных звеньев и силой веса.

При моделировании движения механизма по заданному закону используем уравнения (4.12). При этом силы (моменты) в приводах M_i должны подчиняться уравнениям, полученных подстановкой ускорений $\ddot{\alpha}_T(t)$, $\ddot{\beta}_T(t)$, $\ddot{\gamma}_T(t)$ из уравнений (4.25) в общее уравнения динамики (4.13):

$$M_i = J_\eta \cdot (\ddot{\alpha}_T + \gamma_1(\dot{\alpha}_T - \dot{\alpha}) + \gamma_0(\alpha_T - \alpha)) \cdot \frac{\partial k}{\partial \varphi_{i1}} + \cdot J_\lambda \cdot (\ddot{\beta}_T + \gamma_1(\dot{\beta}_T - \dot{\beta}) + \gamma_0(\beta_T - \beta)) \cdot \frac{\partial k}{\partial \varphi_{i1}} + \\ + J_\mu \cdot (\ddot{\gamma}_T + \gamma_1(\dot{\gamma}_T - \dot{\gamma}) + \gamma_0(\gamma_T - \gamma)) \cdot \frac{\partial k}{\partial \varphi_{i1}}, \tag{4.26}$$

где i = 1, 2, 3 – номер кинематической цепи; $k = \alpha, \beta, \gamma$ – угол ориентации выходного звена.

Зададим закон движения исполнительного звена в виде:

$$\ddot{\alpha}_T(t) = 0.1 \cdot \sin(\omega t),\ \ddot{\beta}_T(t) = 0.1 \cdot \sin(\omega t),\ \ddot{\gamma}_T(t) = 0.1 \cdot \sin(\omega t). \tag{4.27}$$

1. Рассмотрим движение исполнительного звена при следующих начальных условиях: $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$; угловая частота колебаний – ω = 10 *рад/сек*. Расчётное время процесса – t = 0.2 *сек*. Дифференциальные уравнения ошибки принимают вид:

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} &= \ddot{\alpha}_T + 78.5 \cdot (\dot{\alpha}_T - \dot{\alpha}) + 3086 \cdot \gamma_0(\alpha_T - \alpha); \\ \ddot{\beta} &= \ddot{\beta}_T + 78.5 \cdot (\dot{\beta}_T - \dot{\beta}) + 3086 \cdot (\beta_T - \beta); \\ \ddot{\gamma} &= \ddot{\gamma}_T + 78.5 \cdot (\dot{\gamma}_T - \dot{\gamma}) + 3086 \cdot (\gamma_T - \gamma). \end{aligned} \tag{4.28}$$

В результате расчета были получены графики изменения ошибок по различным координатам (рисунок 4.14). Для наглядности на рисунке 4.15 представлены графики требуемого закона движения α_T, фактического закона α и абсолютной ошибки $\Delta\alpha$.

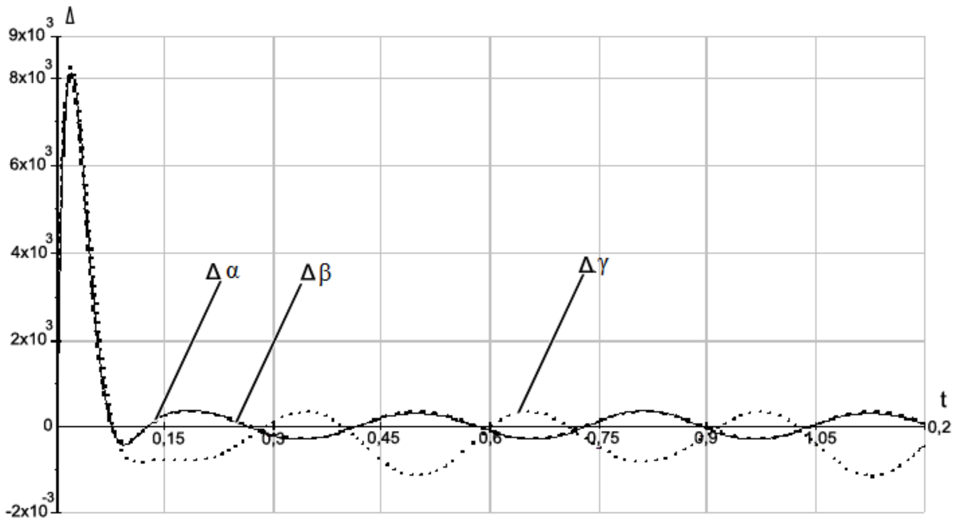


Рисунок 4.14. График изменения ошибки по координате.

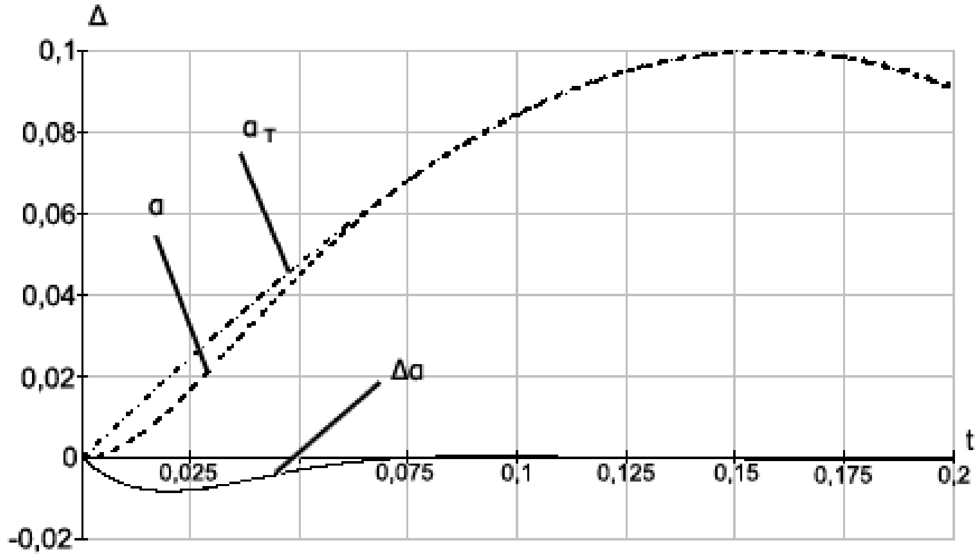


Рисунок 4.15. График изменения ошибки положения $\Delta\alpha(t)$, изменения фактической $\alpha_T(t)$ координаты, фактической $\alpha(t)$ координаты при управлении механизмом с обратной связью.

Анализируя графики на рисунках 4.14, 4.15 можно заключить, что при принятых начальных условиях и приложении к динамической системе внешнего воздействия в виде синусоиды система принимает установившиеся значения в пределах установленного переходного процесса, при этом можно отметить появление незначительной ошибки движения выходного звена, которая также имеет установившиеся значения. Максимальное значение составляет $1{,}17x10^{-3}$.

2. Рассмотрим движение при угловой частоте колебаний – ω = 40 *рад/сек*. Начальные условия: $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$; коэффициенты обратных связей остаются равны – γ_0 = 3086, γ_1 = 78.5 Время переходного процесса – t = 0.076 *сек*, расчётное время прохождения процесса – t = 0,8 сек. Соответствующие графики показаны на рисунках 4.16, 4.17, 4.18.

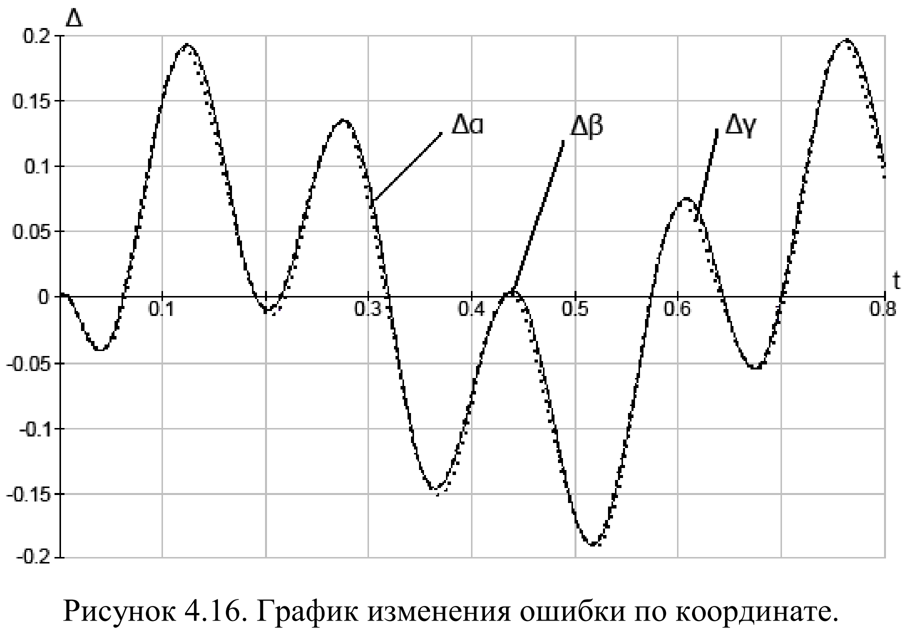


Рисунок 4.16. График изменения ошибки по координате.

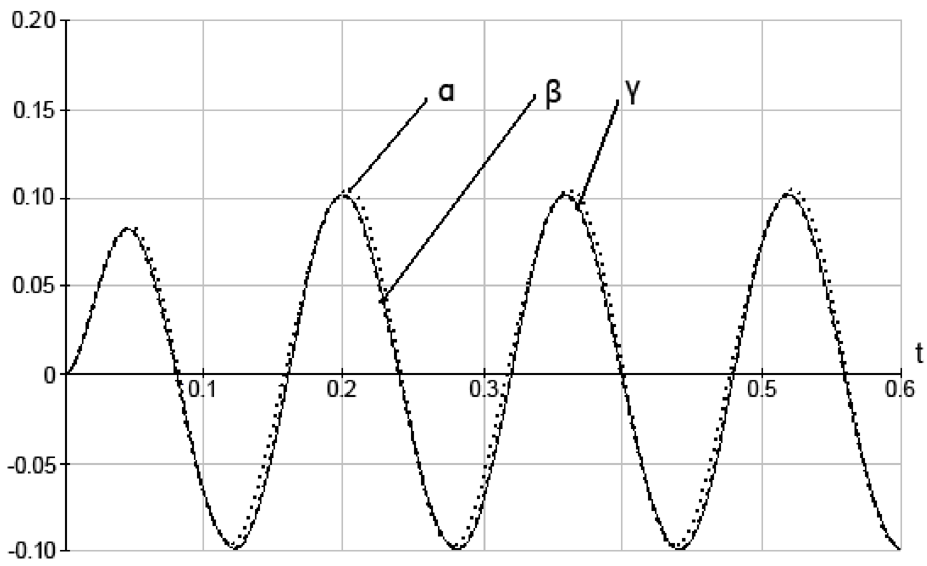


Рисунок 4.17. График движения выходного звена.

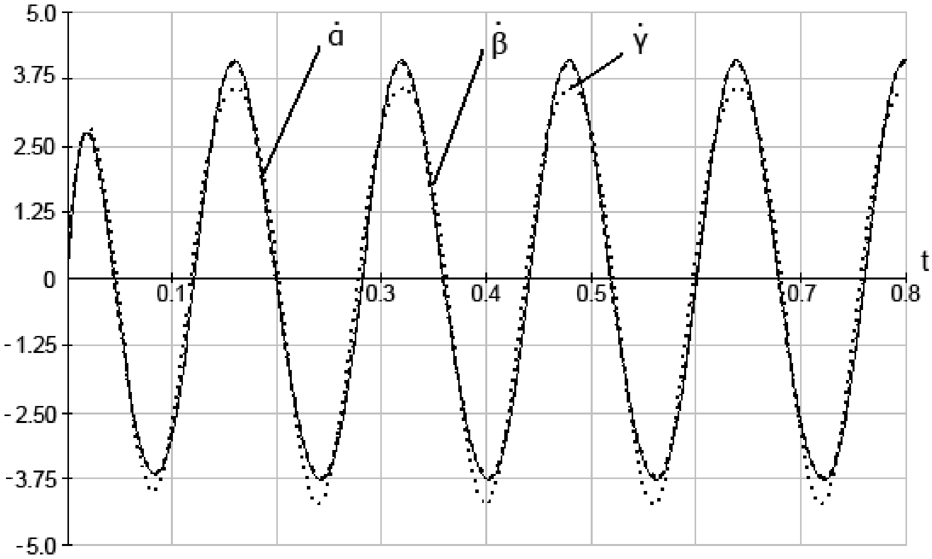


Рисунок 4.18. График скоростей выходного звена.

Анализ графиков на рисунках 4.16, 4.17, 4.18 показывает, что при увеличении угловой частоты увеличилась ошибка по положению, а также время переходного процесса.

3. Рассмотрим случай, когда начальные условия составляют: $\alpha = 0.5$ *м*, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, при этом угловая частота и коэффициенты обратных связей остаются неизменными, $\omega = 10$ *рад/сек*, $\gamma_0 = 3086$, $\gamma_1 = 78.5$; время переходного процесса – $t = 0.076$ *сек*, расчётное время – $t = 0.2$ *сек*. Соответствующие графики показаны на рисунках 4.19, 4.20, 4.21.

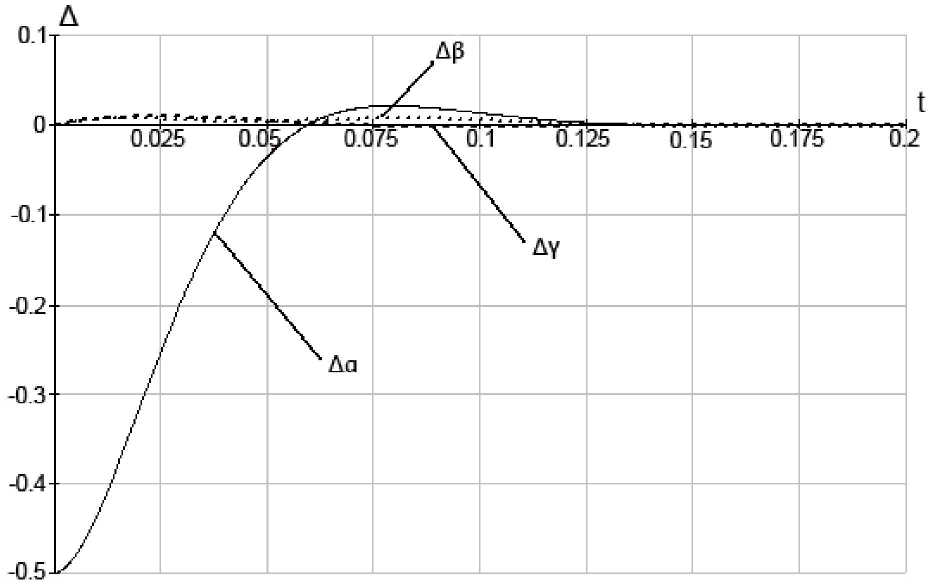


Рисунок 4.19. График изменения ошибки по координате.

Анализ графиков на рисунках 4.19, 4.20, 4.21 показывает, что при начальных условиях, значительно не соответствующих предписанному закону, увеличилась ошибка по положению, а также время переходного процесса.

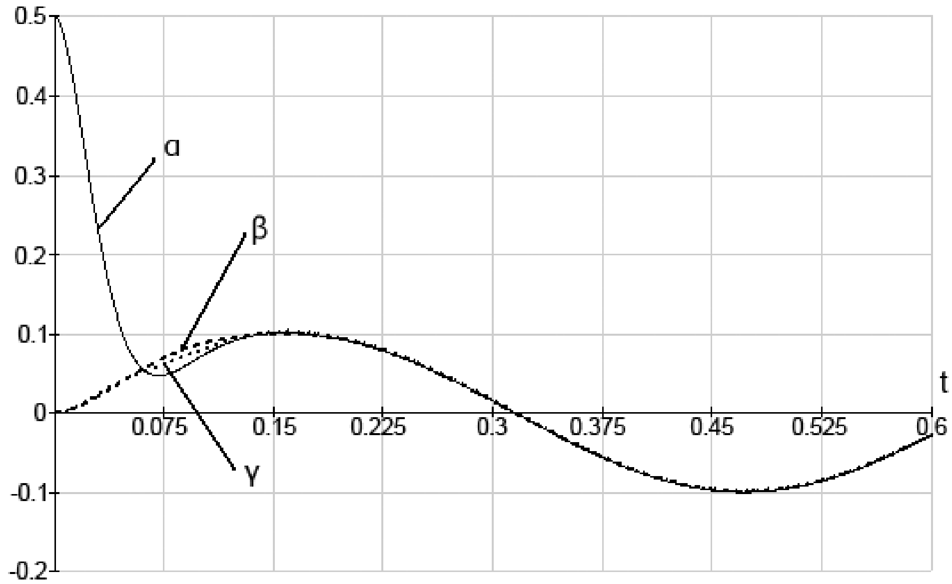


Рисунок 4.20. График движения выходного звена.

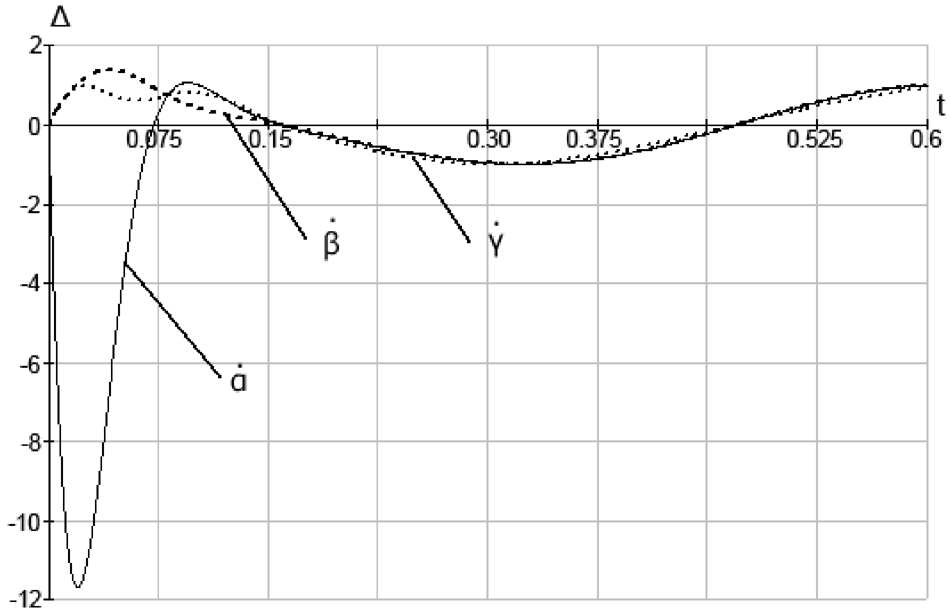


Рисунок 4.21. График скоростей выходного звена.

4. Рассмотрим случай, когда в 10 раз уменьшены коэффициенты обратных связей: γ_0 = 308.6, γ_1 = 7.85, при неизменных начальных условиях: α = 0, β = 0, γ = 0, ω = 10 *рад/сек*, время переходного процесса составляет – t = 0.076 *сек.* Соответствующие графики показаны на рисунках 4.22, 4.23, 4.24.

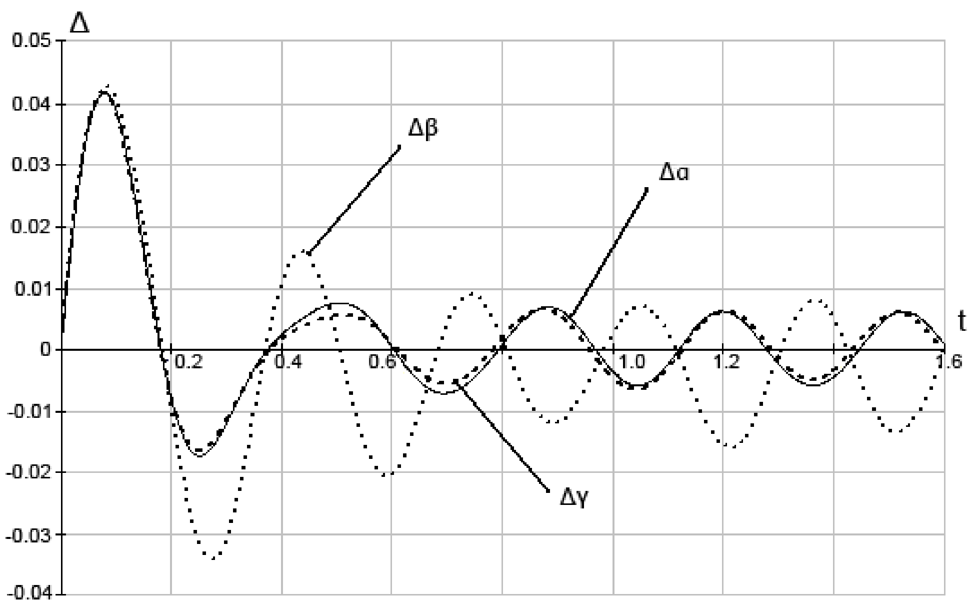


Рисунок 4.22. График изменения ошибки по координате.

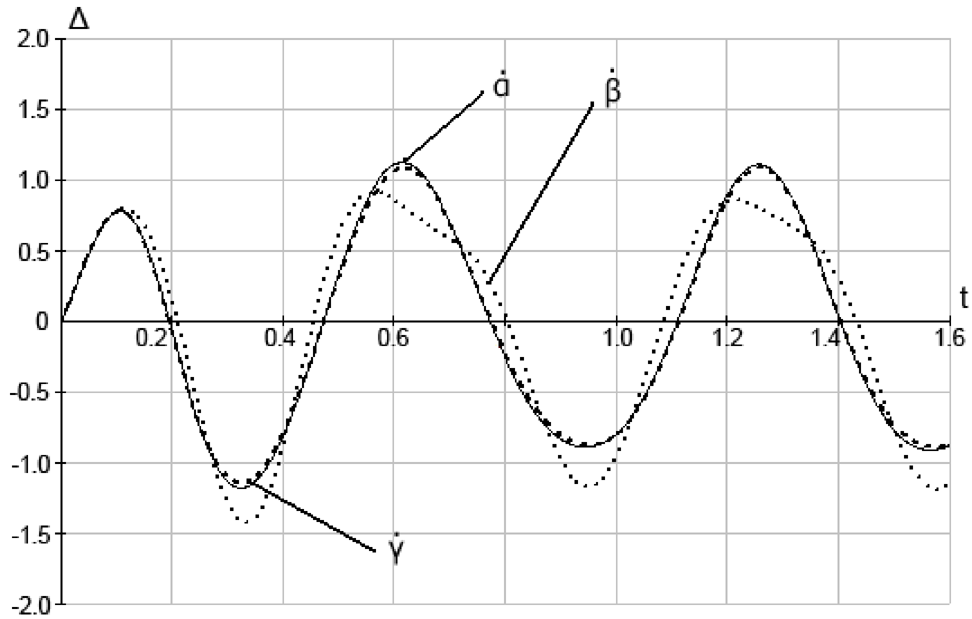


Рисунок 4.23. График скоростей выходного звена.

Для рассматриваемого механизма параллельной структуры с шестью степенями свободы (для сферической части данного механизма), была составлена динамическая модель для решения задач динамики [105, 106, 108]. На основе этих задач был отработан алгоритм управления требуемого движения выходного звена. Для анализа работоспособности предложенного манипулятора и оценки пригодности данного алгоритма, рассматривались различные начальные условия движения, различные коэффициенты обратных связей γ_0, γ_1, а также различные частоты движения по траектории ω. При этом ошибка движения по заданному закону имела приемлемые значения.

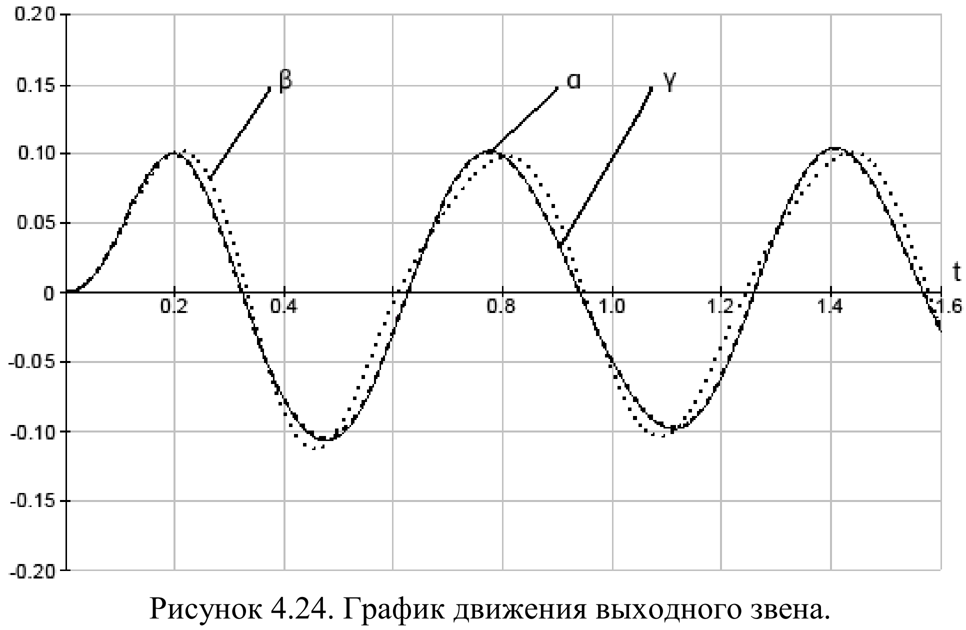


Рисунок 4.24. График движения выходного звена.

Кроме того, можно говорить и о динамической развязке, поскольку поступательные движения связаны с большими амплитудами перемещений и скоростей, в то время как вращательные движения не обусловливают больших динамических нагрузок.

Выводы по главе

1. Для исследования свойств механизма поступательной структуры составлена модель решения задач динамики [102, 103, 104, 105, 106]. На основе этой модели отработан алгоритм управления заданным законом движения выходного звена. Работоспособность предложенного механизма оценивалась по его движениям при различных начальных условиях, различных коэффициентах обратных связей (γ_0, γ_1), а так же при различных частотах сигналов управления.

2. Аналогичные процедуры были использованы для исследования сферического механизма [105, 106, 108].

3. Показана эффективность динамической развязки. Отработка заданных движений выходным звеном для поступательной и сферической частей механизма проиллюстрирована графиками. Она позволила существенно уменьшить отклонения в движении сферической части при сохранении того же режима работы поступательной части.

ГЛАВА 5
РАЗРАБОТКА ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ МОДЕЛИ МЕХАНИЗМА ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ С КИНЕМАТИЧЕСКОЙ РАЗВЯЗКОЙ С ЧЕТЫРЬМЯ СТЕПЕНЯМ СВОБОДЫ

Экспериментальная модель механизма соответствует механизму, предложенному в главе 2. Данный механизм состоит из трёх кинематических цепей, содержащих двигатель поступательного перемещения, механизм шарнирного параллелограмма и конечной вращательной кинематической пары. В одной из кинематических цепей имеется дополнительный двигатель вращательного перемещения, обуславливающий вращение выходного звена.

Приводится описание модели и результаты определения особых положений в режиме ручного управления механизмом.

5.1. Описание конструкции действующей модели

В данном параграфе представим конструкцию действующей модели конструкции с четырьмя степеням свободы с кинематической развязкой, обеспечивающей разделение поступательного движения и одного вращения. Данная экспериментальная модель содержит, как это было описано ранее, три кинематические цепи, в каждой из которой есть двигатель поступательного перемещения, шарнирный параллелограмм, а также вращательные кинематические пары, оси которых расположены перпендикулярно осям шарнирного параллелограмма (рисунок 5.1).

Приведём описание разработанной конструкции механизма параллельной структуры с четырьмя степенями свободы. Данная модель соответствует патенту на изобретение № 2534706 Российской Федерации. Пространственный механизм с четырьмя степенями свободы / Носова Н.Ю., Глазунов В.А., Палочкин С.В., Хейло С.В.; Заявитель и патентообладатель: ФГБОУ ВПО «Московский государственный университет дизайна и технологии». Заявка № 2013132024. Приоритет изобретения 11.07.2013 г. Зарегистрировано в государственном реестре изобретений Российской Федерации 06.10.2013 г. Срок действия патента 11.07.2033 г. [76].

В одной из кинематических цепей содержится двигатель вращательного перемещения, который через шарнирный параллелограмм передаёт вращение на выходное звено. Основание выполнено в виде треугольной «звезды», а подвижная платформа в виде круглого кольца, с которым сопряжены три кинематические цепи. Для того чтобы одна кинематическая цепь не воспринимала весь вес конструкции, расположение трёх цепей выполнено в виде пирамиды.

Рисунок 5.1. Общий вид механизма с четырьмя степенями свободы.

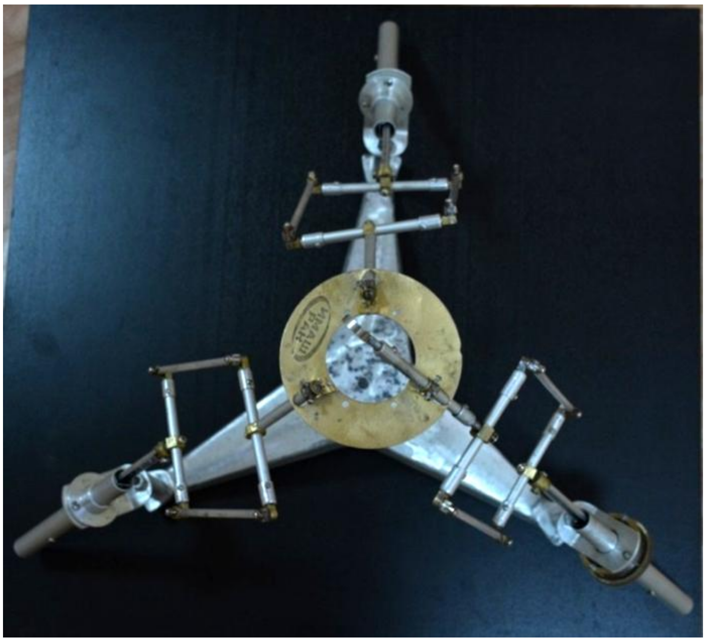


Рисунок 5.2.

В среднем положении весь механизм имеет симметричный вид (рисунок 5.2). Следует отметить, что в каждой из кинематических цепей могут располагаться не только двигатели поступательного перемещения, но и двигатели вращательного перемещения (рисунок 5.3).

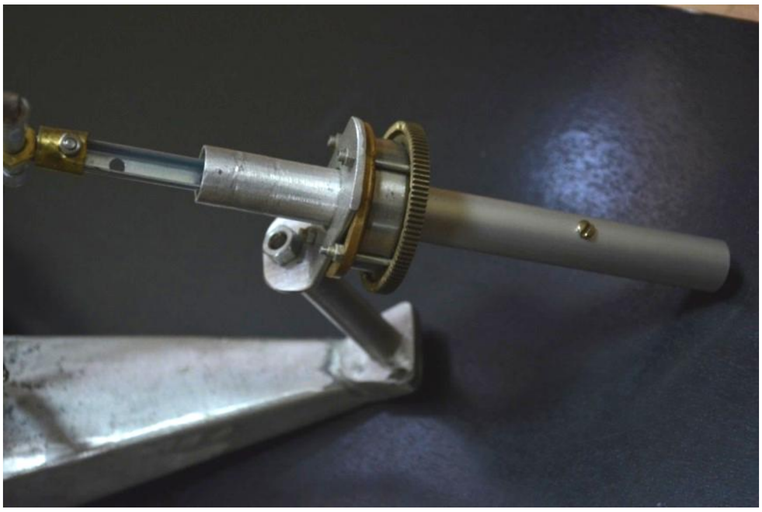


Рисунок 5.3.

Ось двигателя вращательного перемещения должна быть расположена вдоль оси двигателя поступательного перемещения, кроме того для передачи вращения от соответствующего двигателя может быть предусмотрена зубчатая передача (рисунки 5.4., 5.5). Весь этот узел крепится к основанию посредством вертикально установленной штанги.

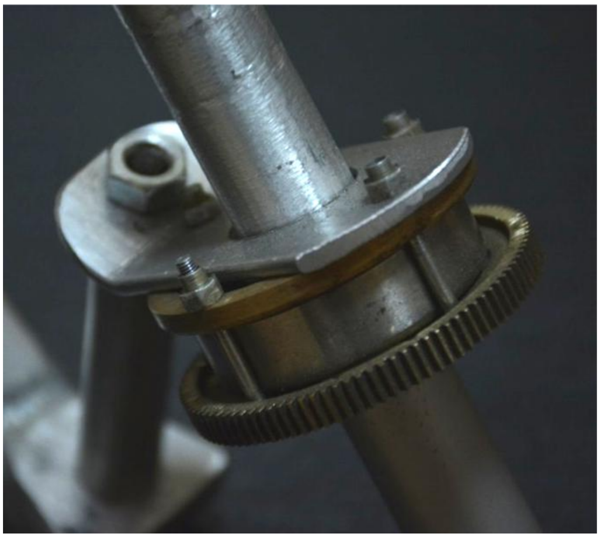


Рисунок 5.4.

Рисунок 5.5.

Подвижная платформа сопрягается с кинематическими цепями посредством стержней, связанных с подвижными параллелограммами (рисунок 5.6). При этом один из стержней связан с подвижной платформой, имеющей форму кольца, посредством вращательной кинематической пары, соосно с упомянутым стержнем. Это даёт возможность вращения рабочего органа, жёстко связанного со стержнем вокруг его оси (рисунок 5.6).

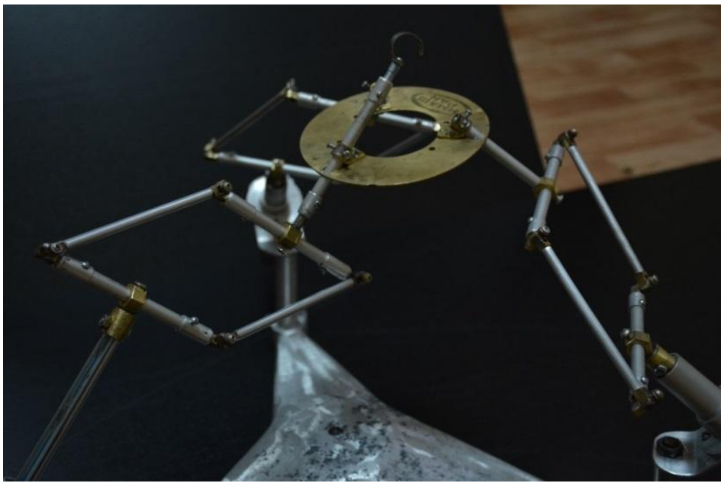


Рисунок 5.6.

Шарнирные параллелограммы соединены со штоками двигателей поступательного перемещения через вращательные кинематические пары, оси которых перпендикулярны одновременно осям двигателей поступательного перемещения и осям кинематических пар соответствующих шарнирных параллелограммов (рисунок 5.7).

Рисунок 5.7.

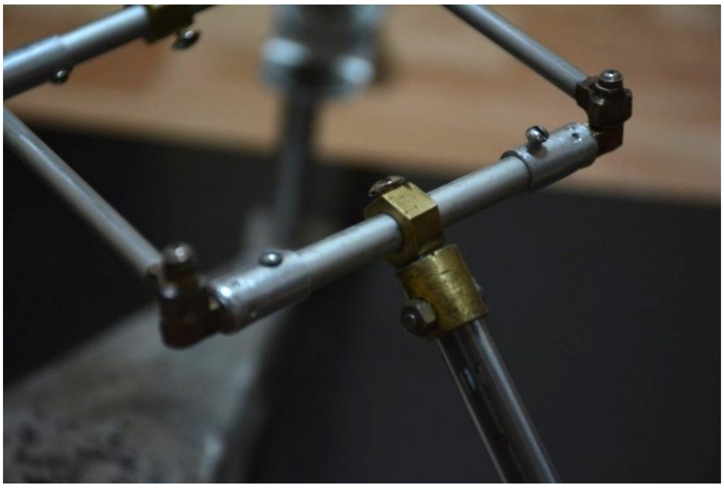


Рисунок 5.8.

Крепление штоков двигателей поступательного перемещения к упомянутым вращательным кинематическим парам осуществляется с помощью шестигранного элемента (рисунок 5.8).

Рабочий орган в данном экспериментальном устройстве выполнен в виде упругой дуги (крюка) (рисунок 5.9) Как отмечалось ранее, он сопряжен с подвижной платформой через вращательную кинематическую пару.

Рисунок 5.9.

Очень важным является вопрос, связанный с уравновешиванием сил веса подвижных частей механизма. Без подобного уравновешивания приводы должны испытывать повышенные нагрузки, поэтому для различных устройств, в том числе для механизмов параллельной структуры, применяют различные способы уравновешивания.

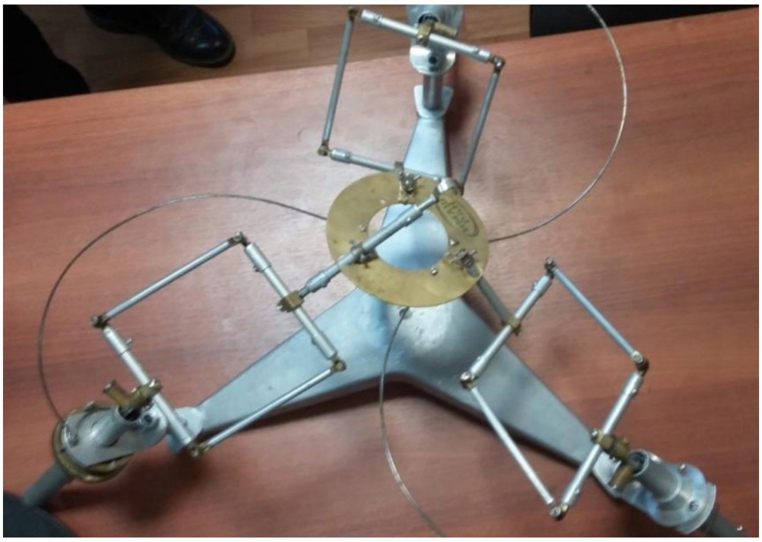


Рисунок 5.10.

В рассматриваемом устройстве экспериментальной модели данная техническая задача решена посредством изгибных упругих элементов (стержней), которые крепятся к началу и концу каждой кинематической цепи. Несмотря на то, что шарнирный параллелограмм может вращаться относительно оси, расположенной в плоскости самого параллелограмма, ориентация подвижной платформы, имеющей кольцеобразную форму, остаётся неизменной относительно основания. Это даёт возможность расположить упругие уравновешивающие элементы так, что они не испытывают нагрузки на кручение, а лишь уравновешивают вес конструкции (рисунки 5.10, 5.11).

Рисунок 5.11.

Таким образом, в работе получена конструктивная схема действующей модели эксперимен-тальной установки соответствующей развитию принципов робота Orthoglide.

5.2. Иследование функциональных возможностей действующей модели механизма параллельной структуры с четырьмя степенями свободы

Рассмотрим функциональные возможности действующей модели механизма параллельной структуры с четырьмя степенями свободы, в которой вращение на рабочий орган передаётся с помощью шарнирного параллелограмма. Представим механизм без уравновешивающих эле-ментов для того, чтобы определить крайние положения выходного звена в рабочей зоне. Исходя из конструктивных ограничений видно, что смещение подвижной платформы вдоль одной из горизонтальных осей равен радиусу самой подвижной платформы, а также предельному ходу двигателя поступательного перемещения (рисунок 5.12).

Рисунок 5.12.

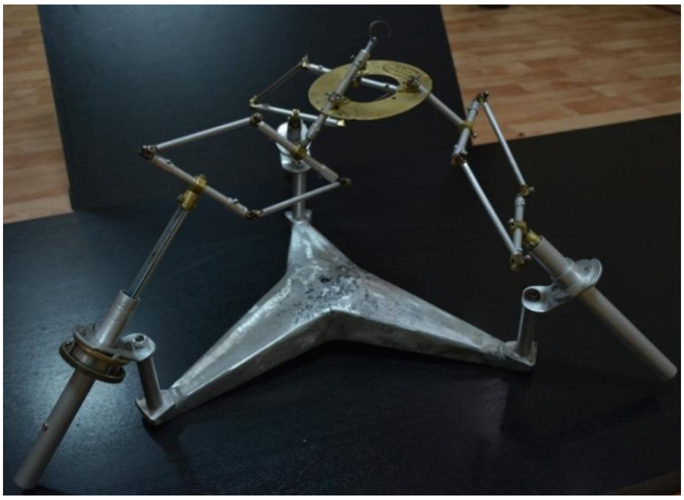


Рисунок 5.13.

Максимальное смещение подвижной платформы вверх и при выдвижении одного из штоков приводит к одновременному смещению по горизонтальным осям координат (рисунок 5.13).

Одновременное выдвижение всех штоков двигателей поступательного перемещения может приветсти с подъёму подвижной плотформы на расстояние, сопоставимое с предельным ходом указанных штоков (рисунок 5.14).

В том случае, если штоки всех двигателей поступательного перемещения максимально «утоплены» вниз, то подвижная плотформа, не меняя своей ориентации, опускается вниз примерно на 2/3 хода штоков, сохраняя при этом свою ориентацию (рисунок 5.15).

Рисунок 5.14.

Рисунок 5.15.

Как отмечалось выше, одна из кинематических цепей, содержащая шарнирный параллелограмм, имеет кроме двигателя поступательного перемещения ещё и двигатель вращательного перемещения, передавая вращение на рабочий орган. При этом, как и было предсказано теорией, рабочая платформа не меняет своей ориентации, несмотря на изменение положения плоскости параллелограмма (рисунок 5.16).

Рисунок 5.16.

Рисунок 5.17.

Одним из важнейших вопросов, связанных с определением функциональных особенностей манипуляционных механизмов параллельной структуры, является проблема особых положений. Для рассматриваемой экспериментальной модели с теоретической точки зрения возможно два вида особых положений. Один из них связан с потерей одной или нескольких степеней свободы – при этом в одной кинематической цепи должно произойти вырождение кинематических винтов, описывающих все движения.

Другой вид особых положений может быть связан с потерей управляемости или наличие неуправляемой подвижности. При этом должна выразиться система силовых винтов, передаваемых с кинематических цепей на подвижную платформу.

Для конкретной экспериментальной модели удаётся избежать указанных вырожденных ситуаций в силу её конструктивных особенностей. В частности, для достижения особого положения, связанного с потерей степени свободы (сингулярность первого рода) необходимо, чтобы хотя бы один шарнирный параллелограмм «сложился» так, чтобы звенья вытянулись в одну линию. В разработанной экспериментальной модели такого положения не существует. Можно, приложив внешнее усилие, лишь приблизиться к указанным положениям (рисунок 5.17).

При снятии внешней нагрузки механизм несколько отдаляется от достигнутого ранее положения, близкого к особому (рисунок 5.18).

Рисунок 5.18.

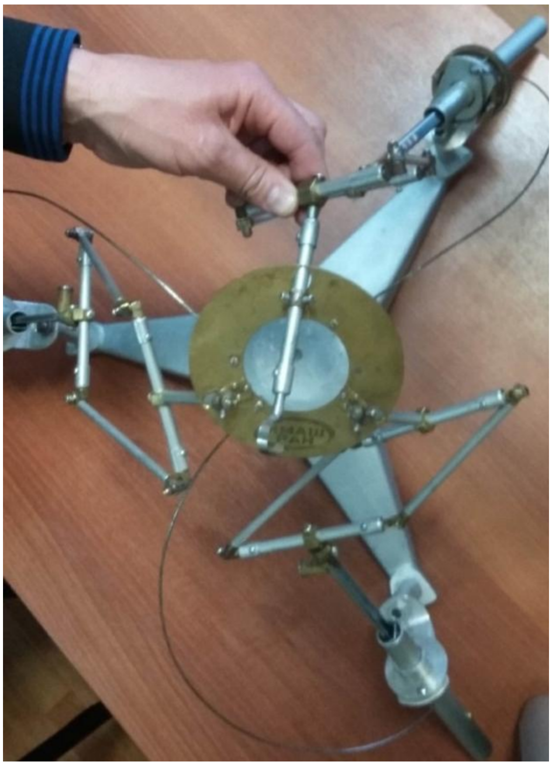


Рисунок 5.19.

Подобная ситуация может иметь место при рассмотрении различных кинематических цепей, при этом следует отметить, что приложение внешней нагрузки, связанной с приближением к особым положениям, может деформировать шарнирные параллелограммы (и в плоскости изменяют свою форму – рисунки 5.17,5.18, 5.19).

Конструктивной особенностью полученной экспериментальной модели механизма, кроме изложенного, обуславливает также отсутствие особых положений, связанных с потерей управляемости (сингулярности второго рода).

Таким образом, в данной главе представленна экспериментальная модель механизма параллельной структуры с четырьмя степенями свободы и тремя кинематическими цепями, причём одна кинематическая цепь передаёт вращение на рабочий орган. Экспериментальное исследование подтвердило теоретические выводы о том, что кинематические цепи, содержащие шарнирные параллелограммы, а также четыре вращательные кинематические пары с попарно параллельными осями, способны передавать поступательные и вращательные движения с приводов, установленных на основании.

5.3. Исследование и моделирование рабочей зона механизма с четырьмя степенями свободы

Одной из основных характеристик механизма параллельной структуры является его рабочая зона – пространство, определяемое множеством точек, которые достигает рабочий инструмент выходного звена механизма при изменении входных переменных (параметров) [109, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118], [119, 120]. Можно создать довольно сложные механизмы как последовательной, так и параллельной структуры, но, если рабочая зона данного механизма будет небольшой, то их область применения значительно сокращается. Поэтому при создании нового механизма особое внимание уделяется такому важному фактору, как объём рабочей зоны.

Объём зоны определяется аналитически после составления уравнений кинематики механизма, что в некоторых случаях является достаточно сложной задачей, либо экспериментально. Для механизмов последовательной структуры прямая задача решается достаточно просто, а для механизмов параллельной структуры мы имеем, как правило, сложную систему нелинейных алгебраических, либо тригонометрических уравнений, которые в аналитическом виде не решаются, только числено. При этом стоит отметить, что при попадании механизма в особое положение получить численные решения также составляют трудности. При численном решении, находясь в зоне особого положения, можем попасть на вырожденный случай, когда определитель матрицы Якоби системы уравнений связи обращается в нуль. В нашем случае мы имеем механизм параллельной структуры, который включает в себя шарнирные параллелограммы. Данные механизмы имеют некоторую особенность при составлении уравнений кинематики, заключающиеся в том, что часть уравнений имеют линейный вид. Это упрощает систему уравнений связи в целом. Определить размер и форму рабочей зоны можно путём решения прямой и обратной задач о положении.

Построим рабочую зону механизма с четырьмя степенями свободы, описание экспериментальной модели которого представлено выше. Данный механизм состоит из трёх кинематических цепей. Каждая цепь содержит двигатель поступательного перемещения (4, 4’, 4’’), шарнирный параллелограмм (7, 7’, 7’’), начальные вращательные кинематические пары (5, 5’, 5’’) и конечные вращательные кинематические пары (8, 8’, 8’’), оси которых расположены перпендикулярно осям шарнирного параллелограмма, что обеспечивает три поступательных степени свободы механизма (рисунок 5.20). Одна из кинематических цепей содержит двигатель вращательного перемещения (11), при этом вращение с привода на рабочий орган (3) передаётся за счёт механизма шарнирного параллелограмма (7) и вращательной кинематической пары (12), жёстко связанной с выходным звеном (подробное описание механизма см. глава 2, рисунок 2.1). Поскольку положение выходной платформы (2) определяется входными переменными, обеспечивающими три степени свободы в поступательном движении, а за ориентацию (вращение) рабочего инструмента (3) – отвечают входные переменные, обеспечивающие одну степень свободы вращательное движения, (при фиксированном положении платформы), то в дальнейших расчётах входными переменными, отвечающими за вращение (ориентацию) можно пренебречь.

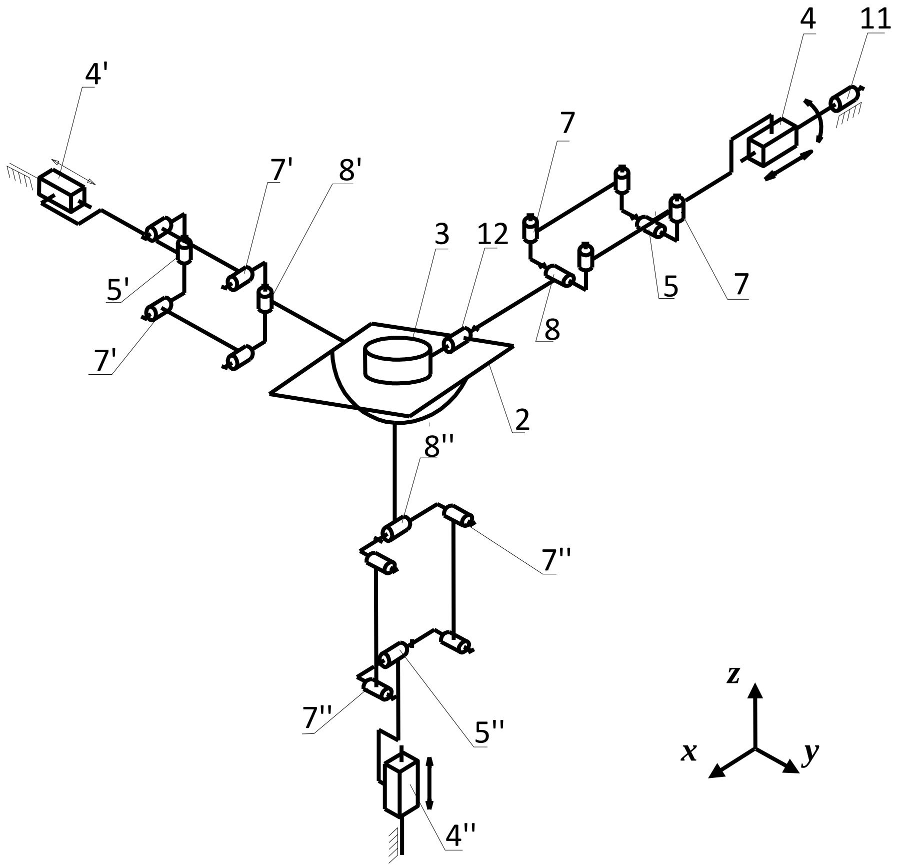


Рисунок 5.20. Структурная схема механизма с четырьмя степенями свободы.

Прямая задача кинематики заключается в определении положения выходного звена по входным переменным (параметрам) механизма параллельной структуры с двигателями поступательного перемещения, расположенными по осям декартовой системы координат *Oxyz* (рисунок 5.21). Поступательные движения обусловлены тем, что в каждой цепи имеется шарнирный параллелограмм, две вращательные кинематические пары и двигатель поступательного перемещения. Расположим систему координат таким образом, что оси *Ox*, *Oy*, *Oz* проходят через пару точек (A_1, B_1), (A_2, B_2), (A_3, B_3), соответственно. Оси вращения начальных вращательных кинематических пар B_1, B_2, B_3 перпендикулярны осям *Ox*, *Oy*, *Oz*, соответственно, и параллельны векторам:

$$\mathbf{e}_1(\mathbf{e}_x) = (0,1,-1),$$

$$\mathbf{e}_2(\mathbf{e}_y) = (-1,0,1),$$

$$\mathbf{e}_3(\mathbf{e}_z) = (1,-1,0).$$

Эти вектора лежат в плоскости *Ozy*, *Oxz*, *Oxy*, соответственно (рисунок 5.22).

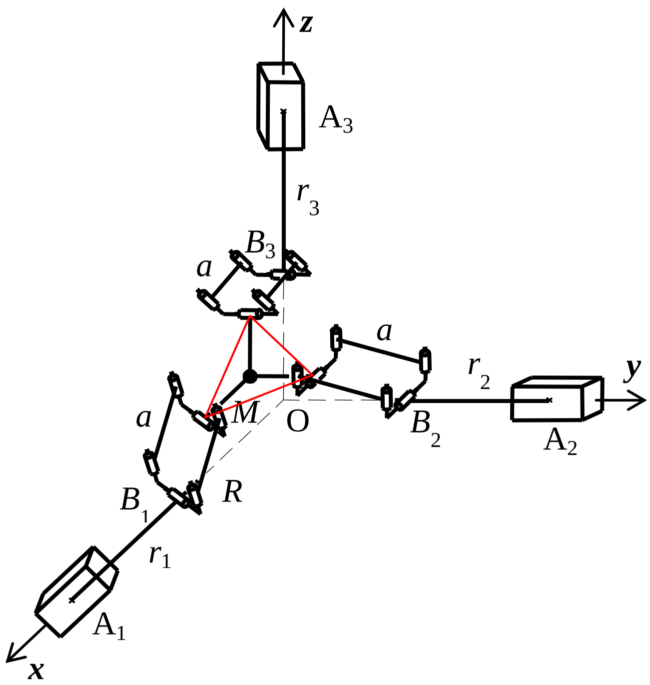


Рисунок 5.21. Поступательно-направляющий механизм

с тремя степенями свободы.

Примем расстояние от точек A, B и C до O равное R. Выпишем координаты точек:

A_1 $(R, 0, 0)$,	B_1 $(R\text{-}r_1, 0, 0)$,
A_2 $(0, R, 0)$,	B_2 $(0, R\text{-}r_2, 0)$,
A_3 $(0, 0, R)$.	B_3 $(0, 0, R\text{-}r_3)$.

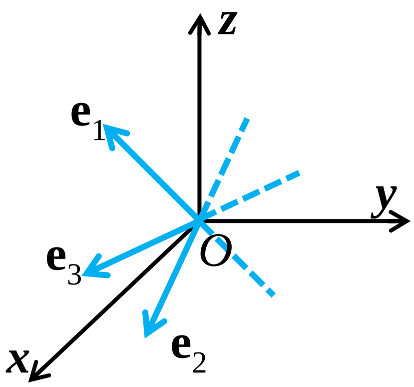


Рисунок 5.22.

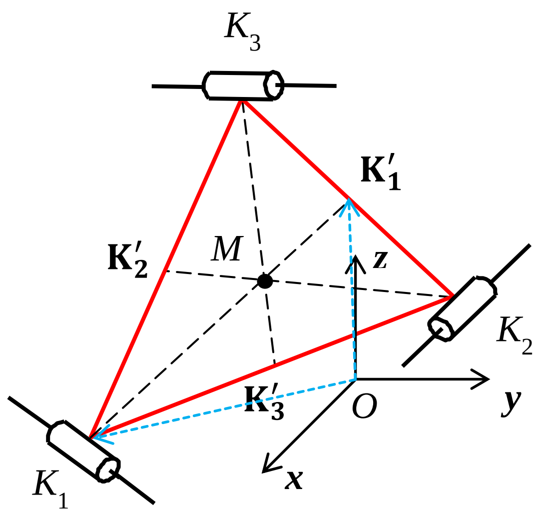


Рисунок 5.23

Для упрощения выражений зададим $R\text{-}r_i = P_i$, где $i = 1, 2, 3$ – номер кинематической цепи, r_i – переменная величина. Координаты точек K_1, K_2, K_3:

$$K_1\ (x_1, y_1, z_1);$$

$$K_2\ (x_2, y_2, z_2);$$

K_3 (x_3, y_3 , z_3).

Соединяем точки K_1, K_2, K_3 между собой и получаем треугольник (рисунок 5.23). Положение точки M однозначно определяется треугольником и в данном случае не рассматривается. Для записи кинематических уравнений воспользуемся алгебраическим методом, который основан на неизменности длин звеньев. Неизменность для звеньев B_1K_1, B_2K_2 и B_3K_3 выражается следующими уравнениями:

$$\begin{aligned}
&(P_1 - x_1)^2 + (y_1)^2 + (z_1)^2 = a^2,\\
&(x_2)^2 + (P_2 - y_2)^2 + (z_2)^2 = a^2,\\
&(x_3)^2 + (y_3)^2 + (P_3 - z_3)^2 = a^2.
\end{aligned} \tag{5.1}$$

Для упрощения решения ось вращения начальной кинематической пары – B_1 перпендикулярна оси Ox и лежит в плоскости Oxy. Выпишем соотношения неизменности длин K_1K_2, K_2K_3, K_3K_1:

$$\begin{aligned}
&(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = l^2,\\
&(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 + (z_1 - z_3)^2 = l^2,\\
&(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 + (z_3 - z_2)^2 = l^2.
\end{aligned} \tag{5.2}$$

Рассмотрим треугольник $K_1K_2K_3$ (рисунок 6.4). Биссектриса угла $K_3K_1K_2$ перпендикулярна оси вращения конечной вращательной кинематической паре – K_1, а, следовательно, и оси вращения начальной кинематической паре – B_1, либо единичному вектору $\mathbf{e_1}$. Запишем это в виде трёх уравнений. Координаты точки K_1’ равны:

$$K_1' = \begin{pmatrix} \frac{x_3+x_2}{2} \\ \frac{y_3+y_2}{2} \\ \frac{z_3+z_2}{2} \end{pmatrix}; \qquad \text{вектор } \mathbf{K_1K_1'} \text{ равен: } \mathbf{K_1K_1'} = \begin{pmatrix} x_1 - \frac{x_3+x_2}{2} \\ y_1 - \frac{y_3+y_2}{2} \\ z_1 - \frac{z_3+z_2}{2} \end{pmatrix};$$

Перемножая скалярно вектора $\mathbf{e_1}$ и $\mathbf{K_1K_1'}$,получим выражение:

$$\mathbf{e_1} \cdot \mathbf{K_1K_1'} = \left(y_1 - \frac{y_2+y_3}{2}\right) - \left(z_1 - \frac{z_2+z_3}{2}\right) = 0. \tag{5.3}$$

Аналогичным образом выпишем остальные уравнения и получим, соответственно:

$$\mathbf{e_2} \cdot \mathbf{K_2K_2'} = \left(x_2 - \frac{x_1+x_3}{2}\right) - \left(z_2 - \frac{z_1+z_3}{2}\right) = 0, \tag{5.4}$$

$$\mathbf{e_3} \cdot \mathbf{K_3K_3'} = \left(x_3 - \frac{x_1+x_2}{2}\right) - \left(y_3 - \frac{y_1+y_2}{2}\right) = 0. \tag{5.5}$$

Таким образом, мы получили дополнительно три линейных уравнения.

Выпишем общую систему, состоящую из девяти уравнений с девятью неизвестными:

$$
\begin{cases}
(P_1 - x_1)^2 + (y_1)^2 + (z_1)^2 = a^2, \\
(x_2)^2 + (P_2 - y_2)^2 + (z_2)^2 = a^2, \\
(x_3)^2 + (y_3)^2 + (P_3 - z_3)^2 = a^2, \\
(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = l^2, \\
(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 + (z_1 - z_3)^2 = l^2, \\
(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 + (z_3 - z_2)^2 = l^2, \\
\left(y_1 - \frac{y_2 + y_3}{2}\right) - \left(z_1 - \frac{z_2 + z_3}{2}\right) = 0, \\
\left(x_2 - \frac{x_1 + x_3}{2}\right) - \left(z_2 - \frac{z_1 + z_3}{2}\right) = 0, \\
\left(x_3 - \frac{x_1 + x_2}{2}\right) - \left(y_3 - \frac{y_1 + y_2}{2}\right) = 0.
\end{cases}
\tag{5.6}
$$

В общем случае система уравнений (5.6) является системой 32 порядка. При приведении системы к одному уравнению получаем биквадратные уравнения, которые в общем случае понижают степень системы. В конечном случае данная система (5.6) имеет два мнимых корня и два вещественных. Два вещественных корня соответствуют двум различным сборкам конструкции (рисунок 5.24).

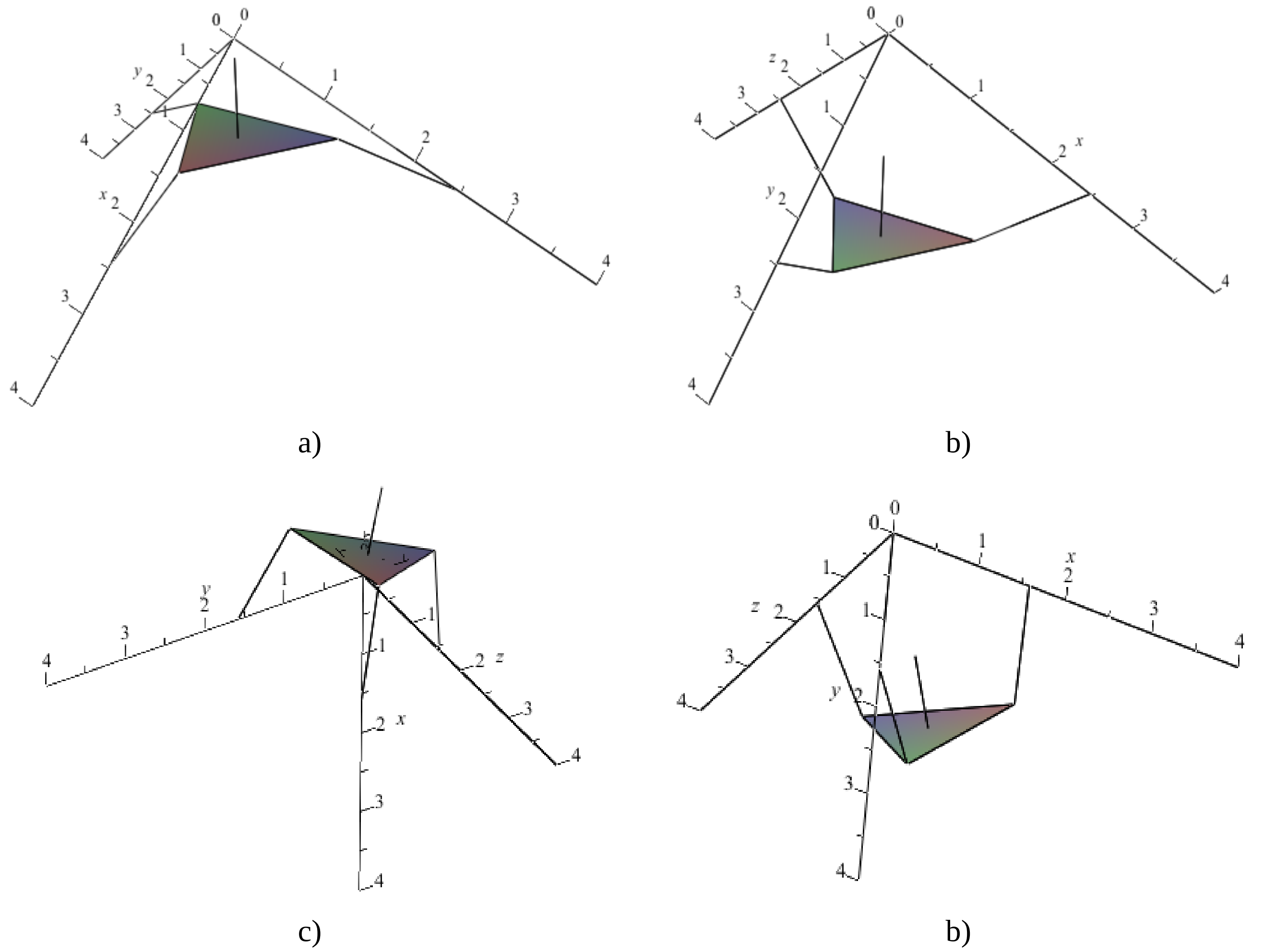


Рисунок 5.24. Две сборки механизма. Входные переменные равны нулю: a) первая сборка; b) вторая сборка. Входные переменные имеют максимальные значения: c) первая сборка; d) вторая сборка.

Выбираем первый вариант сборки.

На основании решения системы уравнений (5.6) была построена рабочая зона механизма при начальных условиях, соответствующих реальным размерам экспериментальной модели (глава 5, рисунок 5.1):

R = 2.55 *м* – общая длина звена;

r_i = 0.975 *м* – переменная величина;

a = 1.2 – длина стороны шарнирного параллелограмма;

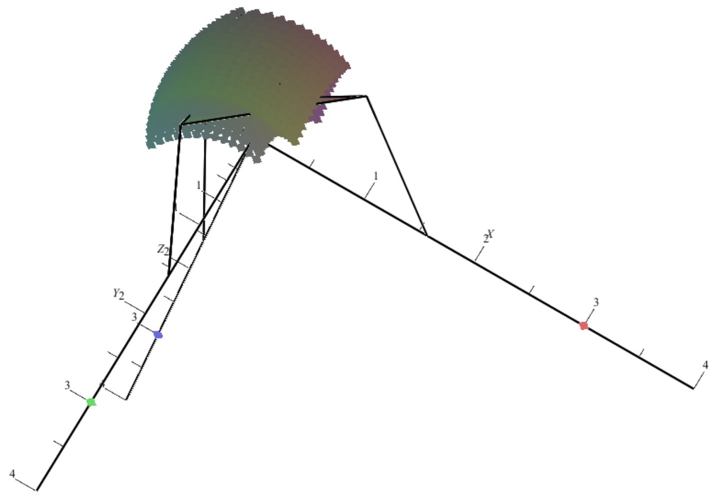
l = 1.6 *м* – стороны треугольника $K_1K_2 = K_2K_3 = K_3K_2$;

km = 0.76 *м* – высота рабочего инструмента от центра M треугольника $K_1K_2K_3$;

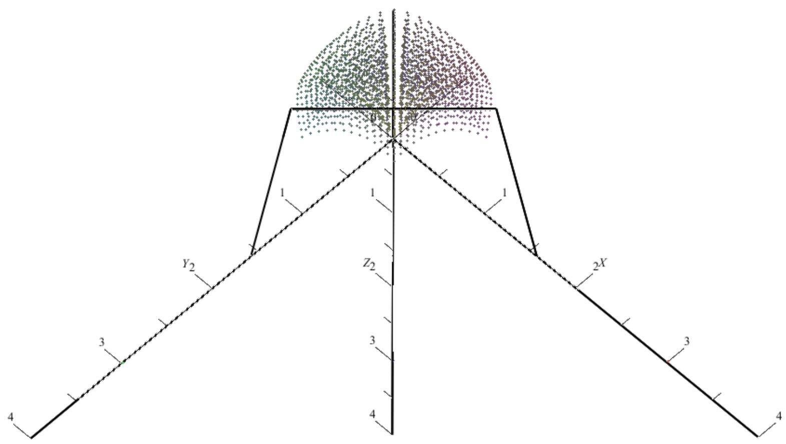
h = 0.075 – шаг счёта.

Моделирование работы механизма и определение рабочей зоны произведено в среде Maple 14, текст программы приведён в приложении 1.

Как видно на рисунке 5.25. a), b), рабочая зона механизма имеет достаточно большой объём, что даёт большие перспективы для использования исследуемой конструкции в различных областях робототехники.

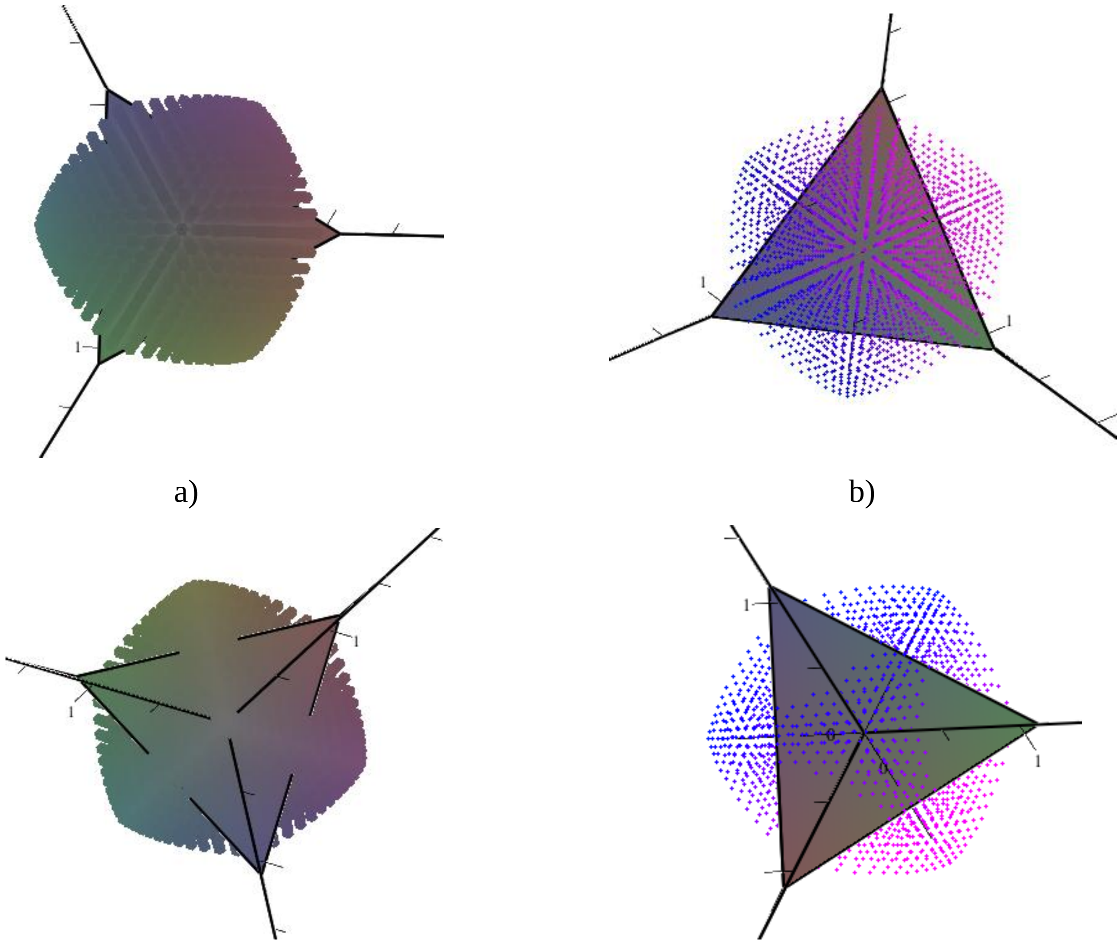


a)



b)

Рисунок 5.25. a), b) Вид сбоку.



a) b)

c) d)

Рисунок 5.26 a), b) вид сверху; c), d) вид снизу.

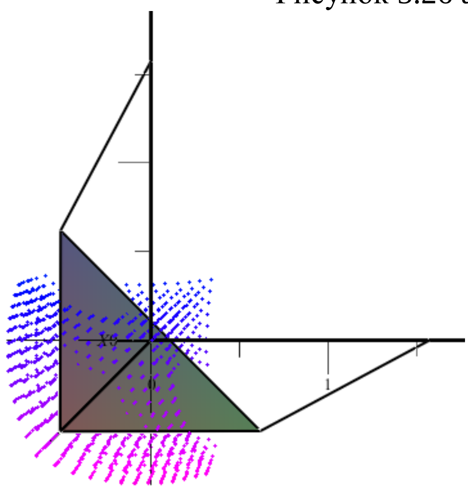


Рисунок 5.27. Вид со стороны оси Ох.

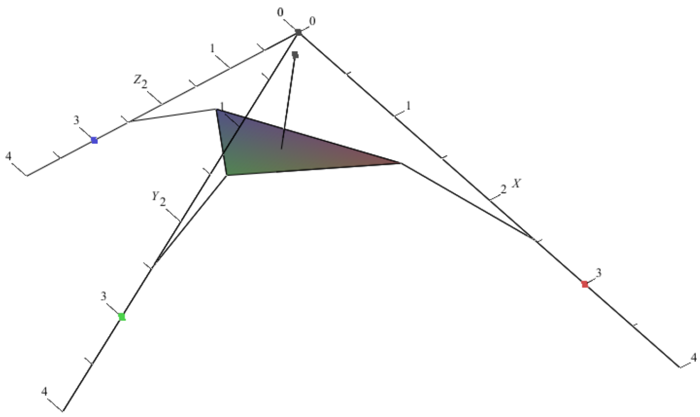


Рисунок 5.28. Первая точка построения рабочей зоны механизма.

Выводы по главе

1. Экспериментальная модель соответствует механизму, предложенному в главе 2. Он состоит из трёх кинематических цепей, содержащих двигатель поступательного перемещения, механизм шарнирного параллелограмма. В одной из кинематических цепей имеется дополни-

тельная конечная вращательная кинематическая пара и двигатель вращательного перемещения , обуславливающие вращение выходного звена.

2. Эксперименты показали, что:

- в данной конструкции механизма особые положения отсутствуют;
- кинематические цепи, содержащие шарнирные параллелограммы способны передавать поступательные и вращательные движения.

3. Для рассматриваемого механизма с четырьмя степенями свободы экспериментально определен объём рабочей зоны механизма.

4. Наличие большой рабочей зоны позволяет рекомендовать данный механизм для использования в различных отраслях робототехники, медицине, тренажёрах и др.

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

В результате выполнения диссертационного исследования достигнута *поставленная цель*: разработка и исследование пространственных механизмов параллельной структуры с шарнирными параллелограммами с различным числом степеней свободы, обладающих свойствами кинематической и динамической развязки за счёт наличия шарнирных параллелограммов в каждой кинематической цепи.

По результатам исследования *опубликованы*: 21 научная статья, из которых 5 статей в журналах из перечня ВАК [77, 81, 100, 101, 106], 7 статей, входящие в базы Scopus и Web of Science [71, 77, 81, 83, 102, 103, 106], 2 главы в монографиях с соавторами [103, 104], тезисы докладов на различных международных и всероссийских научно-технических конференциях (см. список публикаций по теме диссертации), 2 патента РФ на изобретения [74, 76] и 1 патент РФ на полезную модель [75].

Результаты и *выводы* по диссертационной работе:

1. Установлена принципиальная возможность модификации механизма типа Orthoglide для одновременной передачи шарнирным параллелограммом поступательных и вращательных движений.

2. Разработан ряд механизмов параллельной структуры с четырьмя, пятью и шестью степенями свободы, которые подтвердили возможность установки двигателей вращательного перемещения на одну ось с двигателями поступательного перемещения вместо карданных валов, как в прототипе. Данная замена позволяет упростить конструкция и повысить её жёсткость.

3. Для разработанных схем механизмов созданы методики кинематического анализа для поступательной и для сферической частей механизма с шестью степенями свободы.

4. Созданы методики динамического анализа, с помощью которых проведены теоретические исследования и численный эксперимент с определением динамических параметров новых механизмов с кинематической развязкой.

5. Разработана конструкция и определены технические характеристики натурной модели механизма параллельной структуры с четырьмя степенями свободы, что экспериментально подтвердило способность шарнирных параллелограммов передавать как поступательные, так и вращательные движения. Для разработанной конструкции определена рабочая зона механизма с учётом особых положений.

6. Показано, что наличие упругих изгибных элементов в конструкции разработанной натурной модели обеспечивает уравновешивание собственного веса механизма, незначительно уменьшает объём рабочей зоны, но при этом исключается наличие особых положений.

7. Установлено, что разработанный механизм с шестью степенями свободы имеет кинематическую развязку по положению и ориентации выходного звена, что делает возможным условное разделение его на два простых механизма – поступательный и сферический механизм с тремя степенями свободы каждый. Анализ полученных простых механизмов можно проводить независимо друг от друга, что существенно упрощает решение задач кинематики.

8. Установлено, что разработанный механизм с шестью степенями свободы, кроме кинематической, обладает и динамической развязкой, поскольку поступательные движения связаны с большими амплитудами перемещений и скоростей, в то время как вращательные движения не обусловливают больших динамических нагрузок.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Merlet J.P. Parallel Robots. 2nd edn. – Springer, 2006.
2. Gogu G. Structural Synthesis of Parallel Robots. Part 2: Translational Topologies with Two and Three Degrees of Freedom. Springer, 2009.
3. Bonev A. The true origins of parallel robots. – 2003 [Электронный ресурс].URL: www.parallemic.org [сайт].
4. Craig J.J. Introduction to Robotics: Mechanics and Control. 3nd edn. – Pearson Education International, 2005.
5. Глазунов В.А., Колискор А.Ш., Крайнев А.Ф. Пространственные механизмы параллельной структуры. Москва: Наука, 1991.
6. Диментбер Ф.М. Винтовое исчисление и его приложение в механике. Москва: Наука, 1965.
7. Gwinnett J.E. Amusement devices // US Patent No. 1,789,680, January 20, 1931.
8. Pollard W.L.W. Position-controlling apparatus // US Patent No. 2,286,571, June 16, 1942.
9. Gough V.E. Contribution to Discussion of Papers on Research in Automobile Stability, Control and in Tyre Performance // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers: Auto Division. – 1956. – С. 392-395.
10. Stewart D. A platform with 6 degrees of freedom // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers. – 1965. – С. 371-386.
11. Dasgupta B., Mruthyunjaya T.S. Stewart platform manipulator: A review // Mechanism and Machine Theory. – 2000. – Т. 35, № 1. – С. 15-40.
12. Fichter E.F. A Stewart Platform-Based Manipulator: General Theory and Practical Construction // International Journal of Robotics Research. – 1986. – № 2. – С. 157-181.
13. Liu K., Lewis F., Lebret G., Taylor D. The Singularities and Dynamics of a Stewart Platform Manipulator // Journal of Intelligent & Robotic Systems. – 1993. – Т. 8, № 3. – С. 287-308.
14. Griffins M., Dufiy J. A Forward Displacement Analysis of a Class of a Stewart Platform // Journal of Robotics Systems. – 1989. – № 2. – С. 703-720.
15. Dasgupta B., Mruthyunjaya T.S. Singularity-free path planning for the Stewart platform manipulator // Mechanism and Machine Theory. – 1998. – Т. 33, № 6. – С. 711-725.
16. St-Onge B.M., Gosselin C.M. Singularity Analysis and Representation of the General Gough-Stewart Platform // International Journal of Robotics Research. – 2000. – № 3. – С. 271-288.
17. Ting Y., Chen Y.S., Jar H.C., Kang Y. Modeling and control for a Gough-Stewart platform CNC machine // Proceedings of the 2004 IEEE International Conference on Robotics & Automation.

New Orleans. – 2004. – C. 535–540.

18. Shaw D., Chen Y.S. Cutting path generation of the Stewart-platform-based milling machine using an end-mill // International Journal of Production Research. – 2010. – T. 39, № 7. – C. 1367–83.
19. Wapler M., Urban V., Weisener T., Stallkamp J., Dűrr M., Hiller A. A Stewart platform for precision surgery // Transactions of the Institute of Measurement and Control. – 2003. – T. 25, № 4. – C. 329–334.
20. Girone M., Burdea G., Bouzit M., Popescu V., Deutsch J.E. A Stewart platform-based system for ankle telerehabilitation // Autonomous Robots. – 2001. – T. 10, № 2. – C. 203–212.
21. Saltaren R., Aracil R., Reinoso O., Scarano M.A. Climbing parallel robot: A computational and experimental study of its performance around structural nodes // IEEE Transactions on Robotics. – 2005. – T. 21, № 6. – C. 1056–66.
22. Saltarén R., Aracil R., Alvarez C., Yime E., Sabater J.M. Underwater parallel robot for works on submarine disasters // Symposium on Marine Accidental oil Spills VERTIMAR-2007. – University of Vigo, Galicia, Spain, 2007. – C. 35.
23. Clavel R. Delta: a fast robot with parallel geometry // 18th International Symposium on Industrial Robot. – Lausanne, 1988. – C. 91–100.
24. Clavel R. Device for the Movement and Positioning of an Element in Space // US Patent No. 4,976,582, December 11, 1990.
25. Miller K. Modeling of Dynamics and Model-Based Control of DELTA Direct-Drive Parallel Robot // Journal of Robotics and Mechatronics. – 1995. – T. 17, №. 4. – C. 344-352.
26. Miller K. On Accuracy and Computational Efficiency of DELTA Direct Drive Robot Dynamics Model // International Symposium on Microsystems, Intelligent Materials and Robots. – Sendai, Japan, 1995. – C. 568-571.
27. Miller K., Clavel R. The Lagrange-Based Model of Delta-4 Robot Dynamics // Roboter systeme. – 1992. – T. 8, № 4. – C. 49-54.
28. Carricato M., Parenti-Castell I.V. A family of 3-DOF translational parallel manipulators // Journal of Mechanical Design. – 2003. – T. 125, № 2. – C. 302-307.
29. Innocenti C., Parenti-Castelli V. Direct kinematics of the 6-4 fully parallel manipulator with position and orientation uncoupled // Robotic Systems. – 1992. – № 10. – C. 3-10.
30. Bernier D., Castelain J.M., Li X. A new parallel structure with 6 degrees of freedom // Proceedings of the 9th World Congress on the Theory of Machines and Mechanism. – Milan, Italy, 2005. – C. 8-12.
31. Zabalza I., Ros J., Gil J., Pintor J.M., Jimenez J.M. TRI-SCOTT. A new kinematic structure for a

6-dof decoupled parallel manipulator // Proceedings of the Workshop on fundamental issues and future research directions for parallel mechanisms and manipulator. – Quebec City, Canada, 2002. – С. 12-15.

32. Takeda Y., Kamiyama K., Maki Y., Higuchi M., Sugimoto K. Development of position-orientation decoupled spatial in-parallel actuated mechanisms with six degrees of freedom // Journal of Robotics and Mechatronics. – 2005. – Т. 17, № 1. – С. 59–68.
33. Briot S., Arakelian V., Guégan S. PAMINSA: A new family of partially decoupled parallel manipulators // Mechanism and Machine Theory. – 2009. – Т. 44, № 2. – С. 425–444.
34. Briot S. Analysis and Optimization of a New Family of Parallel Manipulators with Decoupled Motions. – Ph.D. Thesis,France: HAL: archives-ouvertes, 2007. – 263 с.
35. Glazunov V. Design of decoupled parallel manipulators by means of the theory of screws // Mechanism and Machine Theory. – 2010. – Т. 45, № 2. – С. 239–250.
36. Rashoyan G.V. Structural synthesis of parallel structure robots based on the theory of screws and on concepts of reciprocity // Technical sciences. – 2016. – Т. 12, №. 4. – С. 771–776.
37. Rashoyan G.V., Shalyukhin K.A., Gaponenko E.V. Development of structural schemes of parallel structure manipulators using screw calculus // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. – 2018. – Т. 327, № 4. – С. 042090 (9 pages).
38. Корендясев А.И., Саламандра Б.Л., Тывес Л.И. Манипуляционные системы роботов. – М.: Машиностроение, 1989. – 472 с.
39. Тывес Л.И. Синтез нового механизма параллельной структуры 3х2 с полной групповой кинематической развязкой // Мир робототехники и мехатроники: Новые механизмы в современной робототехнике / под ред. В.А. Глазунова. – Москва: Техносфера, 2018. – С. 121-130.
40. Di Gregorio R. Kinematics analysis and singularities of novel decoupled parallel manipulators with simplified architecture // Robotica. – 2017. – Т. 35, № 4. – С. 961–979.
41. Di Gregorio R. A new decoupled parallel manipulator // Proceedings of the 10th International Workshop on Robotics in Alpe-Adria-Danube Region: RAAD 2001. – Vienna, Austria, 2001. – С. 1-9.
42. Lallemand J.P., Goudali A., Zeghloul S. The 6-Dof 2-Delta parallel robot // Robotica. – 1997. – Т. 15, № 4. – С. 407–416.
43. Mianowski K., Zielinska T. Parallel manipulator POLMAN with isotropic properties dedicated for fast manipulation // Proceedings of the 2006 IEEE Conference on Robotics, Automation and Mechatronics. – Bangkok, Thailand, 2006. – С. 1-6 (6 pages).

44. Jacket P., Danescu G., Carvalho J., Dahan M. A spatial Fully-Parallel Manipulator // Intetnational Conference RoManSy'92. – Udine, Italy, 1992.

45. Mianowski K. Singularity analysis of parallel manipulator POLMAN 3×2 with six degrees of freedom // 12th IFToMM World Congress. – Besançon, France, 2007. – C. 1-6.

46. Yime E., Moreno H., Saltaren R. A novel 6 DOF parallel robot with decoupled translation and rotation // 13th World Congress in Mechanism and Machine Science. – Guanajuato, Mexico, 2011. – C. 1-6.

47. Bosscher P., Elbert-Upholf I. A novel mechanism for implementing multiple collocated spherical joints // Proceedings IEEE International Conference on Robotics and Automation. – Taipei, Taiwan, 2003. – C. 336–341.

48. Zanganeh K.E., Angeles J. Instantaneous kinematics and design of a novel redundant parallel manipulator // Proceedings of the 1994 IEEE International Conference on Robotics and Automation. – San Diego, CA, USA, 1994. – C. 3043–48.

49. Song S.K., Kwon D.S., Kim W.S. Spherical joint for coupling three or more links together at one point // Patent US 6,568,871 B2, 2003.

50. Kong X., Gosselin C.M. Type synthesis of input-output decoupled parallel manipulators // Transactions of the Canadian Society for Mechanical Engineering. – 2004. – T. 28, № 2A. – C. 185-196.

51. Jin Y., Chen I.M., Yang G. Kinematic design of a 6-DOF parallel manipulator with decoupled translation and rotation // IEEE Transactions on Robotics. – 2006. – T. 22, № 3. – C. 545–551.

52. Cao Y., Chen H., Qin Y.E.A. Type Synthesis of Fully-decoupled Three-rotational and One-translational Parallel Mechanisms // International Journal of Advanced Robotic Systems. – 2016. – T. 13, № 2. – C. pp. 1-9.

53. Глазунов В.А., Ширинкин М.А., Палочкин С.В. Пространственный механизм с четырьмя степенями свободы, полезная модель // Патент России RU № 8860, 20.11.2009.

54. Ширинкин М.А., Глазунов В.А., Палочкин С.В. Разработка манипуляционного механизма параллельной структуры с четырьмя степенями свободы // Технология текстильной промышленности. – 2010. – № 1 (322). – С. 102 – 107.

55. Tyves L., Glazunov V., Danilin P., Thanh N.M. Decoupled Parallel Manipulator with Universal Joints and Additional Constraints // ROMANSY 18 Robot Design, Dynamics and Control. CISM International Centre for Mechanical Sciences. – Vienna, 2010. – T. 524. – C. 65-72

56. Глазунов В.А., Данилин П.О., Левин С.В., Тывес Л.И., Шалюхин К.А. Разработка механизмов параллельной структуры с кинематической и динамической развязкой //

Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2010. – № 2. – С. 23-32.

57. Данилин П.О., Тывес Л.И., Глазунов В.А. Групповая кинематическая развязка движений в механизмах параллельной структуры // Проблемы машиностроения и надежности машин, № 3, 2010. С. 27-36.

58. Шалюхин К.А., Рашоян Г.В., Алешин А.К. Задачи кинематического анализа и особых положений механизмов роботов параллельной структуры // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2018. – № 4. – С. 11-18.

59. Глазунов В.А., Левин С.В., Шалюхин К.А., Духов А.В., Козырев А.В. Пространственный механизм с шестью степенями свободы // Патент России на полезную модель RU № 164091, Aug 20, 2016.

60. Cama Group 2019 [Электронный ресурс]. URL: http://www.camagroup.com/

61. UniPack.ru О.о. Один контроллёр управляет тремя дельта-роботами // Отраслевой ортал UniPack.ru. – 2011 [Электронный ресурс]. URL: http://company.unipack.ru/179/publications/36755 (дата обращения: 21.09.2015)

62. Stamper R.E. A Three Degree of Freedom Parallel Manipulators with Only Translational Degrees of Freedom. – Ph.D. Thesis, University of Maryland, MD, USA, 1997. – 192 p.

63. Misyurin S.Y., Kreinin G.V., Markov A.A., Sharpanova N.S. Determination of the degree of mobility and solution of the direct kinematic problem for an analogue of a Delta robot // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. – 2016. – Т. 45, № 5. – С. 403-411.

64. Liu X.J., Wang J., Gao F., Wang L.P. On the analysis of a new spatial three-degrees-of-freedom parallel manipulator // IEEE Transactions on Robotics and Automation. – 2011. – Т. 17, № 6. – С. 959-968.

65. Liu X.J., Wang J., Pritschow G. A new family of spatial 3-DoF fully-parallel manipulators with high rotational capability // Mechanism and Machine Theory. – 2005. – Т. 40. – С. 475-494.

66. Pierrot F., Company O. H4: A new family of 4-dofparallel robots // Proceedings of the 1999 IEEWASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics. – Atlanta, USA, 1999. – С. 508-513.

67. Wu J., Yin Z. A Novel 4-DOF Parallel Manipulator H4 // Parallel Manipulators towards New Applications / Huapeng Wu (Ed.). – IntechOpen, 2008. – С. 405-448.

68. Liu X.J., Wang J. Some New Parallel Mechanisms Containing the Planar Four-Bar Parallelogram // The International Journal of Robotics Research. – 2003. – Т. 22, № 9. – С. 717-732.

69. Wenger P., Chablat D. Kinematic analysis of a new parallel machine tool: The Orthoglide // Advances in Robot Kinematics. – 2000. – С. 305–314.

70. Chablat D., Wenger P. Device for the movement and orientation of an object in space and use thereof in rapid machining // United States Patent Application Publication No.: US 2007/006232, Mar 22, 2007.

71. Gosselin C.M., Hamel J.F. The agile eye: a high performance three-degree-of-freedom camera-orienting device // Proceedings of the 1994 IEEE International Conference on Robotics and Automation. – San Diego, CA, USA, 1994. – С. 781-786.

72. Chablat D., Wenger P. A six degree-of-freedom haptic device based on the Orthoglide and a hybrid Agile Eye // Proceeding of 2006 ASME International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference. – Philadelphia, USA, 2006. – Т. 2. – С. 795-802.

73. Nosova N.Y. A Review of the Parallel Structure Mechanisms with Kinematic Decoupling. Moscow // Advanced Technologies in Robotics and Intelligent Systems. – 2020. – Т. 80. – С. 247-255.

74. Носова Н.Ю. Эволюция методов кинематической развязки механизмов параллельной структуры // Сборник трудов 4-го московского международного симпозиума «Приводная техника и компоненты машин». – Москва, 2018. – С. 109-116.

75. Ларюшкин П.А., Рашоян Г.В., Эрастова К.Г. Об особенностях применения винтового исчисления для оценки близости к особым положениям механизмов параллельной структуры // Проблемы машиностроения и надёжности машин. – 2017. – № 4. – С. 39-45.

76. Носова Н.Ю., Глазунов В.А., Палочкин С.В., Хейло С.В. Пространственный механизм с четырьмя степенями свободы // Патент России на изобретение RU № 2534706., Oct 06, 2014.

77. Носова Н.Ю., Глазунов В.А., Палочкин С.В., Хейло С.В. Пространственный механизм с пятью степенями свободы // Патент России на полезную модель RU № 135283, Dec 10, 2013.

78. Носова Н.Ю., Глазунов В.А., Палочкин С.В., Хейло С.В., Комисарук Л.В. Пространственный механизм с шестью степенями свободы // Патент России на изобретение RU № 253635, Oct 28, 2014.

79. Nosova N.Y., Glazunov V.A., Palochkin S.V., Terekhova A.N. Synthesis of mechanisms of parallel structure with kinematic interchange // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. – 2014. – Т. 43, № 5. – С. 378–383.

80. Gosselin C. Kinematic analysis optimization and programming of parallel robotic manipulators. – Ph.D. Thesis, Monreal: McGill University, 1985. – 235 с.

81. Ларюшкин П.А. Оценка близости к особым положениям механизмов параллельной структуры путем дифференцирования уравнений связи // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия Машиностроение. – 2019. – № 1. – С. 71-83.

82. Ceccarelli M. Fundamentals of Mechanics of Robotic Manipulations. – Kluwer Academic Publishers, 2004. – 324 p.

83. Nosova N.Y., Glazunov V.A., Misyurin S.Y., Filippov D.N. Synthesis and the kinematic analysis of mechanisms of parallel structure with the outcome of progress // Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii, Seriya Teknologiya Tekstil'noi Promyshlennosti. – 2015. – № 2. – С. 109-113.

84. Kong X., Gosselin C.M. Type Synthesis of Parallel Mechanisms. – Springer, 2007. – 272 с.

85. Glazunov V., Nosova N., Ceccarelli M. Kinematics of a 6 DOFs manipulator with interchangeable translation and rotation motions // Recent Advances in Mechanism Design for Robotics: Proceedings of the 3rd IFToMM Symposium on Mechanism Design for Robotics.Mechanism and Machine Science. – Aalborg, Denmark, 2015. – Т. 33. – С. 407-416.

86. Крутько П.Д. Обратные задачи динамики управляемых систем. Нелинейные модели. – М.: Наука, 1988. – 328 с.

87. Зенкевич С.Л., Ющенко А.С. Основы управления манипуляционными роботами: учеб. для вузов. – 2-е изд., исправ. и доп / под ред. С.Л. Зенкевича, А.С. Ющенко. – Москва: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 480 с.: ил.

88. Попов Е.П., Верещагин А.Ф., Зенкевич С.П. Манипуляционные роботы. Динамика и алгоритмы. – М.: Наука, 1978. – 400 с.

89. Хейло С.В., Глазунов В.А., Палочкин С.В. Манипуляционные механизмы параллельной структуры. Динамический анализ и управление. – Москва: ФГБОУ ВПО «МГУДТ», 2014. – 87 с.

90. Глазунов В.А., Хейло С.В. Некоторые актуальные проблемы развития теории механизмов и машин. – LAP LAMBERT, Academic Publishing, 2013. – 62 с.

91. Fujimoto K. et al. Derivation and Analysis of Equations of Motion for a 6 d.o.f. Direct Drive Wrist Joint // IEEE International Workshop on Intelligent Robots and Systems (IROS), 1991. – С. 779-784.

92. Geng Z., Haynes L.S. On the Dynamic Model and Kinematic Analysis of a class of Stewart Platforms // Robotics and Autonomous Systems. – 1992. – Т. 9. – С. 237-254.

93. Gosselin C.M. Parallel Computational Algorithms for the Kinematics and Dynamics of Planar and Spatial Parallel Manipulators // ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and

Control. – 1996. – Т. 118, № 1. – С. 22-28.

94. Ma O., Angeles J. Direct Kinematics and Dynamics of a Planar Three-DOF Parallel Manipulator // ASME Design and Automation Conference. – Montréal, Canada, 1989. – Т. 3. – С. 313-320.

95. Хейло С.В., Глазунов В.А., Палочкин С.В., Выборнов А.П. Решение задачи управления плоским механизмом параллельной структуры // Машиностроение и инженерное образование. – 2014. – № 3. – С. 2-7.

96. Хейло С.В., Глазунов В.А., Палочкин С.В. Манипуляционные механизмы параллельной структуры. Структурный синтез. Кинематический и силовой анализ. – Москва: ФГБОУВПО «МГТУ им. А.Н. Косыгина», 2011. – 153 с.

97. Glazunov V., Laryushkin P., Kheylo S. 3-DOF Translational and Rotational Parallel Manipulators // New Trends in Mechanism and Machine Science: Theory and Applications in Engineering, 2013. – С. 199-207.

98. Laryushkin P., Glazunov V. A New 3-DOF Translational Parallel Manipulator: Kinematics, Dynamics and Workspace Analysis // Romansy 19 – Robot Design, Dynamics and Control: Proceedings of the 19th CISM-IFToMM Symposium. – Paris, France, 2012. – С. 11-18.

99. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического регулирования. – М.: Наука, 1975. – 768 с.

100. Яблонский А.А. Курс теоретической механики. Часть II. Динамика. – М.: Высшая школа, 1966. – 412 с.

101. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики: учеб. для втозов. 10-е изд., перераб. и доп. – М.: Высшая школа, 1986. – 416 с.

102. Носова Н.Ю., Глазунов В.А., Палочкин С.В. Динамический анализ манипулятора параллельной структуры // Дизайн и технологии. – 2015. – № 47. – С. 83-94.

103. Носова Н.Ю., Глазунов В.А., Палочкин С.В. Динамика манипулятора параллельной структуры с учётом закона управления // Машиностроение и инженерное образование. – 2015. – № 4. – С. 13-20.

104. Nosova N.Y., Glazunov V.A., Thanh. N.M. Task of Control of Parallel Mechanism for Given Law of Motion // 14th International Federation for the Promotion of Mechanism and Machine Science World Congress, IFToMM 2015. – Taipei, Taiwan, 2015. – С. 159-163.

105. Glazunov V., Nosova N., Kheylo S., Tsarkov A. Design and Analysis of the 6-DOF Decoupled Parallel Kinematics Mechanism // Dynamic Decoupling of Robot Manipulators. Mechanisms and Machine Science. / V. Arakelian (ed.). –Springer, 2018. – С. 125-170.

106. Носова Н.Ю., Глазунов В.А. Синтез, анализ и управление механизмами с тремя

кинематическими цепями для аддитивных технологий // Мир робототехники и мехатроники: Новые механизмы в современной робототехнике / под ред. В.А. Глазунова. – М.: Техносфера, 2018. – С. 89-120.

107. Хейло С.В., Глазунов В.А., Во Динь Тунг. Решение задачи о скоростях и особых положениях сферического манипулятора параллельной структуры // Машиностроение и инженерное образование. – 2011. – № 1. – С. 2–9.

108. Nosova N.Y., Kheilo S.V., Glazunov V.A., Tsar'kov A.V. Dynamic Analysis of the Spherical Part of the Parallel Manipulator Taking into Account the Control Law // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. – 2018. – Т. 47, № 3. – С. 205-212.

109. Ларюшкин П.А., Палочкин С.В. Рабочая зона манипулятора параллельной структуры с тремя степенями свободы // Известия высших учебных заведений. Технология текстильной промышленности. – 2012. – № 3. – С. 92-96.

110. Merlet J.P. Workspace-oriented methodology for designing a parallel manipulator // Proceedings of the 1996 international conference on robotics and automation. – 1996. – С. 3726–3731.

111. Хейло С.В., Ларюшкин П.А. Определение рабочей зоны манипуляторов параллельной структуры // Справочник. Инженерный журнал с приложением. – 2013. – № 2. – С. 27-31.

112. Gosselin C.M., Angeles J. Singularity analysis of closed-loop kinematic chains // IEEE Transactions on Robotics and Automatics. – 1990. – Т. 6, № 3. – С. 281-290.

113. Chablat D., Kong X., Zhang C. Kinematics, workspace and singularity analysis of a multi-mode parallel robot // ASME 2017 International Design Engineering Technical Conferences & Computers and Information in Engineering Conference. – Cleveland, USA, 2017. – С. 1-10.

114. Эрастова К.Г., Ларюшкин П.А. Рабочие зоны механизмов параллельной структуры и способы определения их формы и размеров // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. – 2017. – № 8(689). – С. 78-87.

115. Pashkevich A., Chablat D., Wenger P. Kinematics and workspace analysis of a three-axis parallel manipulator: the Orthoglide // Robotica. – 2006. – Т. 24, № 1. – С. 39-49.

116. Chablat D., Kong X., Zhang C. Kinematics, Workspace, and Singularity Analysis of a Parallel Robot With Five Operation Modes // Journal of Mechanisms and Robotics. – 2018. – Т. 10, № 3. – С. 035001.

117. Эрастова К.Г., Ларюшкин П.А., Глазунов В.А. Рабочая зона и оптимальные геометрические параметры сферического манипулятора параллельной структуры // XXVIII Международная инновационно-ориентированная конференция молодых ученых и студентов. МИКМУС-2016. – Москва, 2017. – С. 310-313.

118. Rashoyan G., Shalyukhin K., Antonov A., Aleshin A., Skvortsov S. Analysis of the Structure and Workspace of the Isoglide-Type Robot for Rehabilitation Tasks // Advances in Intelligent Systems and Computing. – 2020. – Т. 1126. – С. 186-194.

119 Пащенко В.Н. Построение рабочей зоны шестистепенного манипулятора параллельной структуры на базе кривошипно-шатунного механизма // Интернет-журнал «Науковедение». – 2016. – Т. 8, № 3.

120 Wang Y., Fan S., Zhang X., Lu G., Zhao G. Kinematics and singularity analysis of a 3-RPS parallel mechanism // IEEE International Conference on Robotics and Biomimetics, ROBIO 2017. – 2018. – С. 1-6.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Алгоритм программы для анализа рабочей зоны механизма в MAPLE 14.0

```
> restart;
> with(RealDomain) : # --   выделение вещественных корней
> #[x1, y1, z1, x2, y2, z2, x3, y3, z3] assuming real;
>
> P1 := R - r1 :
> P2 := R - r2 :
> P3 := R - r3 :
>
> # -- начальные условия
> l := 1.6 : R := 2.55 : a := 1.2 : km := 0.76 : n := 12 : h := 0.075 :
>
> r1 := 0 :
> r2 := 0 :
> r3 := 0 :
> ii := 0 :

> for i from 0 to n do  i :
  r1 := r1 + h : r2 := 0 :
        for j from 0 to n do j :
         r2 := r2 + h : r3 := 0 :
             for k from 0 to n do k :
             r3 := r3 + h :

  ii := ii + 1 :
  u1 := expand( (P1 - x1)^2 + (y1)^2 + (z1)^2 - a^2) :
  u2 := expand( (x2)^2 + (P2-y2)^2 + (z2)^2 - a^2) :
  u3 := expand( (x3)^2 + (y3)^2 + (P3 - z3)^2 - a^2) :
  w1 := expand( (x1 - x2)^2 + (y1 - y2)^2 + (z1 - z2)^2-l^2) :
  w2 := expand( (x1 - x3)^2 + (y1 - y3)^2 + (z1 - z3)^2-l^2) :
  w3 := expand( (x2 - x3)^2 + (y2 - y3)^2 + (z2 - z3)^2-l^2) :
  v1 := expand( (y1 - (y2 + y3)/2) - (z1 - (z2 + z3)/2) ) :
  v2 := expand( (x2 - (x1 + x3)/2) - (z2 - (z1 + z3)/2) ) :
  v3 := expand( (x3 - (x1 + x2)/2) - (y3 - (y1 + y2)/2) ) :

  S := solve( {u1, u2, u3, w1, w2, w3, v1, v2, v3}, {x1, y1, z1, x2, y2, z2, x3, y3, z3}) :
  x11 := subs(S[1], x1) : x12 := subs(S[1], x2) : x13 := subs(S[1], x3) :
  y11 := subs(S[1], y1) : y12 := subs(S[1], y2) : y13 := subs(S[1], y3) :
  z11 := subs(S[1], z1) : z12 := subs(S[1], z2) : z13 := subs(S[1], z3) :

   #-------------------------------- нормаль ------------------------------------------------
```

$Nx := \frac{1}{3} \cdot (x11 + x12 + x13) : Ny := \frac{1}{3} (y11 + y12 + y13) : Nz := \frac{1}{3} (z11 + z12 + z13) :$

 # -- центр треугольника --

$ex := ((y12 - y11) \cdot (z13 - z11) - (y13 - y11) \cdot (z12 - z11)) :$
$ey := ((x13 - x11) \cdot (z12 - z11) - (x12 - x11) \cdot (z13 - z11)) :$
$ez := ((x12 - x11) \cdot (y13 - y11) - (y12 - y11) \cdot (x13 - x11)) :$

$nn := \sqrt{ex^2 + ey^2 + ez^2} : ex := \frac{ex}{nn} : ey := \frac{ey}{nn} : ez := \frac{ez}{nn} :$

$Nx1 := Nx - km \cdot ex : Ny1 := Ny - km \cdot ey : Nz1 := Nz - km \cdot ez :$

$Mx[ii] := Nx1 :$
$My[ii] := Ny1 :$
$Mz[ii] := Nz1 :$

$Mxx[ii] := Nx1 + 0.1 :$
$Myy[ii] := Ny1 + 0.1 :$
$Mzz[ii] := Nz1 + 0.1 :$

od: **od**: **od**:

> $ii;$

$$2197 \tag{1}$$

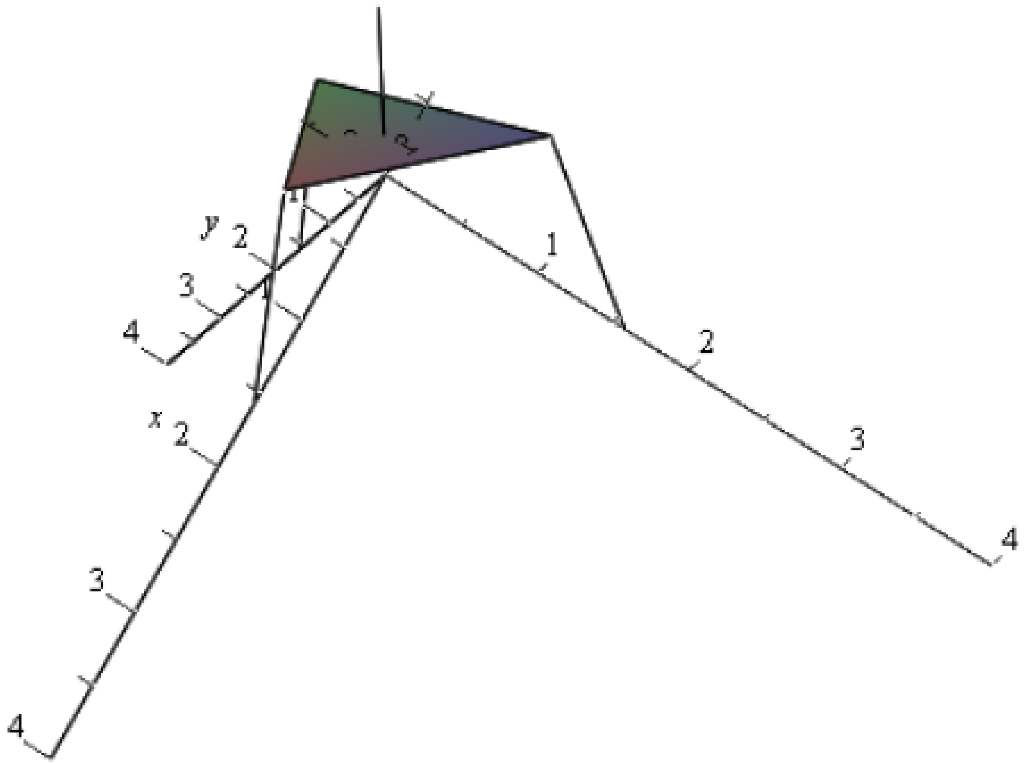
> $Mx[1] : My[1] : Mz[1] :$
> $Mx[2] : My[2] : Mz[2] :$
> $Mx[3] : My[3] : Mz[3] :$
> $Mx[4] : My[4] : Mz[4] :$
> $Mx[5] : My[5] : Mz[5] :$
> $Mx[6] : My[6] : Mz[6] :$
> $Mx[7] : My[7] : Mz[7] :$
> $Mx[8] : My[8] : Mz[8] :$
>
> $r1; r2; r3;$

$$0.975$$
$$0.975$$
$$0.975 \tag{2}$$

>
> #--
> #n:=10: m:=10:
>
> $\#x11 := x11[n] : x12 := x12[n] : x13 := x13[n] :$
> $\#y11 := y11[m] : y12 := y12[m] : y13 := y13[m] :$
> #--
>
> $w := 40 :$
> $\#f1 := Nx1(t) = 0.1 \cdot \sin(w \cdot t);$
> $\#f2 := Ny1(t) = 0.1 \cdot \sin(w \cdot t);$
> $\# f3 := Nz1(t) = 0.1 \cdot \sin(w \cdot t);$

```
> #plot3d(0.1·sin(w·t) + 0.15·sin(w·t) + 0.2·sin(w·t), t=−3..3);
>
> GO := [[0, 0, 0], [4, 0, 0, ]], [[0, 0, 0], [0, 4, 0]], [[0, 0, 0], [0, 0, 4]],
  [[P1, 0, 0], [x11, y11, z11]], [[0, P2, 0], [x12, y12, z12]], [[0, 0, P3], [x13, y13, z13]],
  [[x11, y11, z11], [x12, y12, z12], [x13, y13, z13]], [[Nx, Ny, Nz], [Nx1, Ny1, Nz1]], [[Mx,
     My, Mz], [Mxx, Myy, Mzz]] :

> with(plots) :
> PLOT3D(POLYGONS(GO));
```

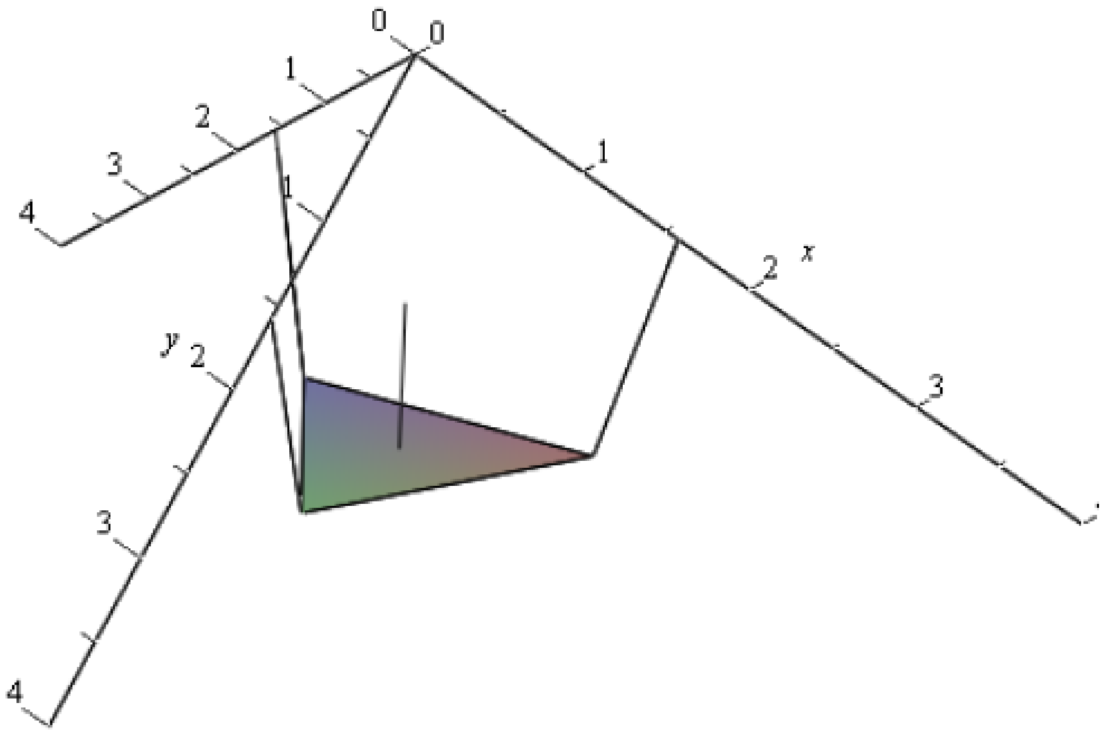



```
> A := PLOT3D(POLYGONS(GO));
                              A := PLOT3D(...)                                    (3)
> #plots[pointplot3d]({seq([Mz[n], My[n], Mx[n]], n = 1..(nn + 4))}),
     display(POLYGONS(GO));
>
> x11 := subs(S[2], x1) : x12 := subs(S[2], x2) : x13 := subs(S[2], x3) :
> y11 := subs(S[2], y1) : y12 := subs(S[2], y2) : y13 := subs(S[2], y3) :
> z11 := subs(S[2], z1) : z12 := subs(S[2], z2) : z13 := subs(S[2], z3) :
> #------------------------------ нормаль ---------------------------------------------
```

```
> Nx := 1/3·(x11 + x12 + x13) : Ny := 1/3(y11 + y12 + y13) : Nz := 1/3(z11 + z12 + z13) :
      # -- центр треугольника --
> ex := ((y12 - y11)·(z13 - z11) - (y13 - y11)·(z12 - z11)) :
> ey := ((x13 - x11)·(z12 - z11) - (x12 - x11)·(z13 - z11)) :
> ez := ((x12 - x11)·(y13 - y11) - (y12 - y11)·(x13 - x11)) :
```

$$nn := \sqrt{ex^2 + ey^2 + ez^2} : ex := \frac{ex}{nn} : ey := \frac{ey}{nn} : ez := \frac{ez}{nn} :$$

```
>
> Nx1 := Nx - km·ex : Ny1 := Ny - km·ey : Nz1 := Nz - km·ez :
> #------------------------------------------------------------------------------------------------
>
> GO := [[0, 0, 0], [4, 0, 0, ]], [[0, 0, 0], [0, 4, 0]], [[0, 0, 0], [0, 0, 4]],
  [[P1, 0, 0], [x11, y11, z11]], [[0, P2, 0], [x12, y12, z12]], [[0, 0, P3], [x13, y13, z13]],
  [[x11, y11, z11], [x12, y12, z12], [x13, y13, z13]], [[Nx, Ny, Nz], [Nx1, Ny1, Nz1]] :
> PLOT3D(POLYGONS(GO));
```



$$nn := (n+1)^3 :$$

```
> Mx[nn + 1] := 0 : My[nn + 1] := 0 : Mz[nn + 1] := 0 :
```

> $Mx[nn+2] := 0 : My[nn+2] := 0 : Mz[nn+2] := 3 :$

> $Mx[nn+3] := 0 : My[nn+3] := 3 : Mz[nn+3] := 0 :$

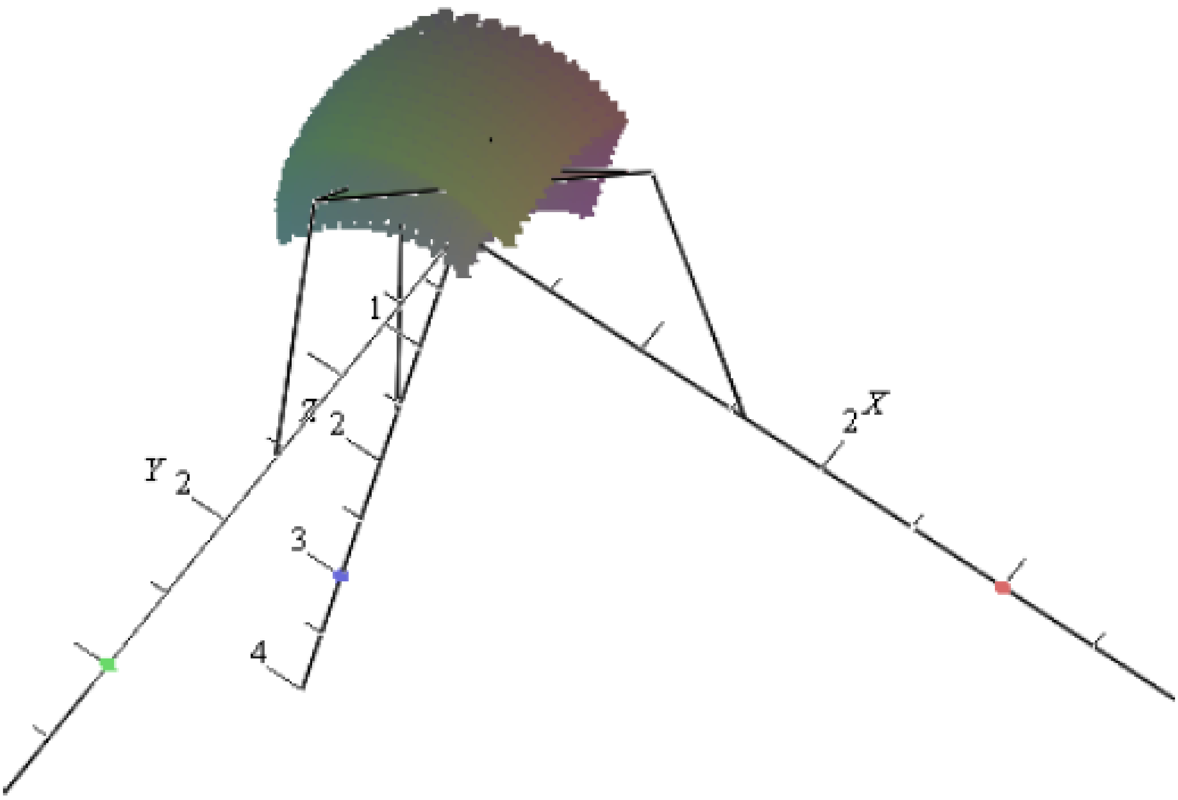
> $Mx[nn+4] := 3 : My[nn+4] := 0 : Mz[nn+4] := 0 :$

>

> $H := plots[pointplot3d](\{seq([Mz[n], My[n], Mx[n]], n = 1..(nn+4))\});$

$$H := PLOT3D(...) \quad \textbf{(4)}$$

> $display(\{A, H\}, labels = [X, Y, Z]);$



>

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Публикации в научных изданиях

1. **Носова Н.Ю.**, Глазунов В.А., Палочкин С.В., Терехова А.Н. Синтез механизмов параллельной структуры с кинематической развязкой // Проблемы машиностроения и надёжности машин. – 2014. – №5. – С. 34-40.

Перевод: **Nosova N.Y.,** Glazunov V.A., Palochkin S.V., Terekhova A.N. Synthesis of mechanisms of parallel structure with kinematic interchange // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. – 2014. – Т. 43, № 5. – С. 378–383. **DOI:** 10.3103/S1052618814050136.

2. **Носова Н.Ю.**, Глазунов В.А., Мисюрин С.Ю., Филиппов Д.Н. Синтез и кинематический анализ механизмов параллельной структуры с развязкой поступательных движений // Известия высших учебных заведений. Технология текстильной промышленности. – 2015. – №2. – С. 109-113.

Перевод: **Nosova N.Yu.**, Glazunov V.A., Misyurin S.Yu., Filippov D.N. Synthesis and the kinematic analysis of mechanisms of parallel structure with the outcome of progress // Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii, Seriya Teknologiya Tekstil'noi Promyshlennosti. – 2015. – № 2. – P. 109-113.

3. Glazunov V., **Nosova N.**, Ceccarelli M. Kinematics of a 6 DOFs manipulator with interchangeable translation and rotation motions // Recent Advances in Mechanism Design for Robotics. Proceedings of the 3rd IFToMM Symposium on Mechanism Design for Robotics. Mechanisms and Machine Science. – Springer, Switzerland, 2015. – Т. 33. – С. 407-416. **DOI:** 10.1007/978-3-319-18126-4_39.

4. **Носова Н.Ю.**, Глазунов В.А., Палочкин С.В. Динамический анализ манипулятора параллельной структуры // Дизайн и технологии. – 2015. – №47. – С. 83-94.

5. **Nosova N.Yu**., Glazunov V.A., Nguyen Minh Thanh. Task of Control of Parallel Mechanism for Given Law of Motion // 14th International Federation for the Promotion of Mechanism and Machine Science World Congress, IFToMM 2015. – National Taiwan University, Taipei, Taiwan. – 2015. – С. 159-163. **DOI:** 10.6567/IFToMM.14TH.WC.OS12.010.

6. **Носова Н.Ю**., Глазунов В.А., Палочкин С.В. Динамика манипулятора параллельной структуры с учётом закона управления // Машиностроение и инженерное образование. – 2015. – № 4. – С. 13-20.

7. Glazunov V.A., **Nosova N.Yu.**, Kheilo S.V., Tsar'kov A.V. Design and Analysis of the 6-DOF Decoupled Parallel Kinematics Mechanism (Book Chapter) // Mechanisms and Machine Science. – 2018. – Т. 56. – С. 125-170. **DOI:** 10.1007/978-3-319-74363-9_6.

8. **Носова Н.Ю.**, Хейло С.В., Глазунов В.А., Царьков А.В. Динамический анализ сферической части манипулятора параллельной структуры с учетом закона управления // Проблемы машиностроения и надежности машин. – 2018. – №3. – С. 3-11.

DOI: 10.7868/S023571191803001X

Перевод: **Nosova N.Yu.**, Kheilo S.V., Glazunov V.A., Tsar'kov A.V. Dynamic Analysis of the Spherical Part of the Parallel Manipulator Taking into Account the Control Law // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. – 2018. – Т. 47, № 3. – С. 205-212.

DOI: 10.3103/S1052618818030111

9. **Носова Н.Ю.**, Глазунов В.А. Синтез, анализ и управление механизмами с тремя кинематическими цепями для аддитивных технологий // Мир робототехники и мехатроники: Новые механизмы в современной робототехнике / под ред. В.А. Глазунова. – М.: Техносфера, 2018. – С. 89 – 120.

10. **Nosova N.Yu**. A Review of the Parallel Structure Mechanisms with Kinematic Decoupling // Advanced Technologies in Robotics and Intelligent Systems: Proceeding of ITR 2019. Mechanisms and Machine Science. – 2020. – Т. 80. – С. 247 – 255. **DOI**: 10.1007/978-3-030-33491-8_30

Патент на полезную модель и изобретение

Носова Н.Ю., Глазунов В.А., Палочкин С.В., Хейло С.В. Пространственный механизм с пятью степенями свободы // Патент на полезную модель RU № 135283, регистрация в Государственном реестре РФ 10 декабря 2013 г.

Носова Н.Ю., Глазунов В.А., Палочкин С.В., Хейло С.В. Пространственный механизм с четырьмя степенями свободы // Патент на изобретение Ru № 2534706, регистрация в Государственном реестре РФ 06 октября 2014 г.

Носова Н.Ю., Глазунов В.А., Палочкин С.В., Хейло С.В., Комисарук Л.В. Пространственный механизм с шестью степенями свободы // Патент на изобретения RU № 253635, регистрация в Государственном реестре РФ 28 октября 2014 г.

Тезисы докладов в сборниках научных трудов конференций

1. **Носова Н.Ю.** Структурный синтез пространственного манипулятора параллельной структуры с четырьмя степенями свободы // Сб. Тезисы докладов на 65-ю межвузовская научно-техническую конференцию «Студенты и молодые учёные КГТУ – производству» – Кострома, 2013. – С. 146.

2. **Носова Н.Ю.**, Палочкин С.В. Пространственный манипулятор параллельной структуры с пятью степенями свободы (тезисы) // Сб. Молодые учёные – развитию текстильной и лёгкой промышленности (ПОИСК-2013): материалы международной научно-технической конференции аспирантов и студентов. Ч.2 – Иваново, 2013. – С. 160-161.

3. **Носова Н.Ю.**, Палочкин С.В.. Задача о положениях механизма параллельной структуры с развязкой поступательных движений // Сб. Дизайн, технологии и инновации в текстильной и

лёгкой промышленности (Инновации-2013): материалы международной научно-технической конференции. – Москва, 2013. – С. 45.

4. **Носова Н.Ю.**, Глазунов В.А.. Пространственный манипулятор параллельной структуры с пятью степенями свободы // Машины, технологии и материалы для современного машиностроения, посвященная 75-летию Института машиноведения им. А.А. Благонравова РАН: Материалы международной научной конференции. – Москва, 2013. – С. 77.

5. **Носова Н.Ю.**, Палочкин С.В.. Определение работоспособности механизма параллельной структуры с четырьмя степенями свободы методом винтов // Новое в технике и технологии текстильной и лёгкой промышленности: материалы докладов международной научно-технической конференции. – Витебск, 2013. – С. 338-340.

6. **Носова Н.Ю.** Особенности конструктивных решений пространственного манипулятора параллельной структуры с кинематической развязкой // 2-й международный симпозиум «Современные проблемы создания и производства механических передач». – Москва, 2013.

7. **Носова Н.Ю.** Определение скоростей и особых положений сферического манипулятора // Сб. Тезисы докладов на 66-й межвузовской научно-технической конференции молодых учёных и студентов «Студенты и молодые учёные КГТУ – производству». – Кострома, 2014. – С.70-71.

8. **Носова Н.Ю.**, Палочкин С.В. Расчёт скоростей поступательно-направляющего манипулятора методом дифференцирования уравнений связи с применением матрицы Якоби // Инновационные технологии в текстильной и лёгкой промышленности: Материалы докладов международной научно-технической конференции. – Витебск, 2014. – С. 286-288.

9. **Носова Н.Ю.**, Палочкин С.В. Определение работоспособности механизма параллельной структуры с пятью степенями свободы методом винтов // Сб. Дизайн, технологии и инновации в текстильной и лёгкой промышленности (Инновации-2014): материалы международной научно-технической конференции. – Москва, 2014. – С. 165-168.

10. **Носова Н.Ю.**, Палочкин С.В. Анализ колебательных процессов механизма параллельной структуры на основе уравнения Даламбера–Лагранжа II рода // Сб. Дизайн, технологии и инновации в текстильной и лёгкой промышленности (Инновации-2013): материалы международной научно-технической конференции. Часть 3. – Москва, 2015. – С. 12-16.

11. **Носова Н.Ю.** Эволюция методов кинематической развязки механизмов параллельной структуры // Сборник трудов 4-го московского международного симпозиума «Приводная техника и компоненты машин». – Москва, 2018. – С. 109-116.