

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана (национальный исследовательский университет)»

На правах рукописи



Ларюшкин Павел Андреевич

**СИНТЕЗ И АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ С
ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТЕХНИЧЕСКИ ОБОСНОВАННЫХ УСЛОВИЙ
БЛИЗОСТИ К ОСОБЫМ ПОЛОЖЕНИЯМ**

Специальность 2.5.2. Машиноведение

диссертация на соискание ученой степени

доктора технических наук

Научный консультант:

доктор технических наук, профессор

Захаров Михаил Николаевич

Москва 2023

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	5
Глава 1. Механизмы параллельной структуры и их особые положения	16
1.1. Общие сведения о механизмах параллельной структуры.....	16
1.2. Применение механизмов параллельной структуры	20
1.3. Определение понятия «особое положение» для механизмов последовательной и параллельной структуры.....	46
1.4. История и основные результаты исследования особых положений механизмов параллельной структуры.....	49
1.5. Проблемы, связанные с особыми положениями, и пути их решения	57
1.6. Результаты и выводы по главе.....	68
Глава 2. Классификация особых положений механизмов параллельной структуры и критерии оценки близости к ним	70
2.1. Основные понятия винтового исчисления, используемые в работе.....	70
2.2. Классификация особых положений.....	73
2.3. Критерии близости к особым положениям и их расчет с применением винтового исчисления	80
2.4. Особенности расчета критериев близости к особым положениям типов «ПУ» и «ВС» с учетом взаимного влияния силовых винтов	92
2.5. Расчет критериев близости к особым положениям с помощью матрицы Якоби механизма.....	95
2.6. Особенности анализа особых положений и расчета критерии близости к ним в механизмах с избыточностью	103
2.7. Практические алгоритмы анализа особых положений и близости к ним и их особенности	108

2.8. Результаты и выводы по главе.....	117
Глава 3. Анализ механизмов типа Delta с линейными приводами с шестью и четырьмя степенями свободы.....	120
3.1. Структура, анализ подвижности, уравнения связи и решение обратной задачи о положениях механизма с шестью степенями свободы	120
3.2. Анализ рабочей зоны, особых положений и близости к особым положениям механизма с шестью степенями свободы	126
3.3. Структура, кинематика и анализ подвижности механизма с четырьмя степенями свободы.....	135
3.4. Анализ рабочей зоны, особых положений и близости к особым положениям механизма с четырьмя степенями свободы	141
3.5. Результаты и выводы по главе.....	147
Глава 4. Анализ поступательно-направляющего 3-RRRRR механизма.....	148
4.1. Структура, анализ подвижности, уравнения связи и решение обратной задачи о положениях	148
4.2. Анализ рабочей зоны, особых положений и близости к особым положениям механизма	157
4.3. Результаты и выводы по главе.....	171
Глава 5. Анализ сферических механизмов с круговой направляющей.....	172
5.1. Структура, анализ подвижности, уравнения связи и решение обратной задачи о положениях	172
5.2. Анализ рабочей зоны, особых положений и близости к особым положениям сферического механизма с четырьмя степенями свободы.....	191
5.3. Результаты и выводы по главе.....	205
Глава 6. Анализ плоских механизмов с вращательными шарнирами.....	206
6.1. Структура, анализ подвижности, уравнения связи и решение обратной задачи о положениях	206

6.2. Анализ рабочей зоны, особых положений и близости к особым положениям механизмов	214
6.3. Результаты и выводы по главе.....	222
Глава 7. Экспериментальное исследование механизма типа Delta с четырьмя степенями свободы.....	224
7.1. Общая характеристика исследуемого механизма и его конструкции, вспомогательное оборудование.....	224
7.2. Экспериментальное исследование критической внешней силы, приводящей к срыву кареток	231
7.3. Экспериментальное исследование влияния изменения жесткости на отклонение значения усилия в приводе от расчетного при приближении к особому положению.....	237
7.4. Результаты и выводы по главе.....	246
Глава 8. Разработка конструкции устройства для 3D-печати электроники на базе механизма типа Delta с четырьмя степенями свободы	247
8.1. Техническое задание и основные задачи синтеза и анализа механизма, решаемые при разработке конструкции.....	247
8.2. Параметрический синтез механизма с учетом конструктивных ограничений и обеспечения отсутствия особых положений в рабочей зоне	248
8.3. Решение задач конструирования устройства с применением технически обоснованных условий близости к особым положениям	257
8.4. Результаты и выводы по главе.....	271
Заключение	272
Список литературы	276

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования

Технологическое развитие различных отраслей народного хозяйства невозможно без существенного прогресса в области машиностроения и, в частности, автоматизации производства. Одним из основных трендов последних десятилетий является повсеместное внедрение робототехнических комплексов и систем в различных технологических процессах. Данный тренд актуален как в условиях свободного рынка и международной конкуренции, поскольку высокая эффективность производства позволяет привлекать дополнительные инвестиции в экономику страны, так и в условиях необходимости развития локального производства и импортозамещения.

Значительное удешевление электронных и относительная доступность механических компонентов позволили за последние годы существенно расширить применение различных мехатронных и робототехнических устройств. Так, например, устройства для быстрого прототипирования, использующие аддитивные технологии (3D-принтеры), или станки с ЧПУ для фрезерной обработки изделий доступны даже на любительском уровне и, благодаря совершенствованию программного обеспечения, не требуют наличия у пользователя специальной подготовки. Это позволяет применять такое оборудование не только на крупных производствах, но и на небольших индивидуальных предприятиях. Совершенствование робототехники, однако, невозможно без развития фундаментальных знаний как в области систем управления, так и в области теории синтеза и анализа механизмов роботов.

Начиная с восьмидесятых годов XX века активно развиваются исследования механизмов параллельной структуры, состоящих из замкнутых кинематических цепей. Такие механизмы обладают определенными преимуществами над традиционными роботами последовательной структуры. Так, расположение приводных устройств на неподвижном основании позволяет существенно снизить

массу подвижных частей, а значит снизить динамические нагрузки на элементы механизма и повысить скорость манипулирования. Наличие нескольких кинематических цепей, соединяющих основание с выходным звеном, позволяет повысить жесткость механизма за счет распределения нагрузки между цепями. Следствием этого также является более высокая грузоподъемность механизмов данного типа относительно собственного веса подвижных частей по сравнению с механизмами последовательной структуры. Отмеченные достоинства обусловили широкое распространение механизмов параллельной структуры в различных отраслях производства, начиная от сортировочно-упаковочных роботов и заканчивая механизмами ориентации телескопов.

Стоит, однако, заметить, что указанные механизмы имеют также и ряд недостатков. В первую очередь – ограниченное рабочее пространство и наличие так называемых особых положений, оказывающих влияние на функциональные характеристики механизмов. Управление механизмами параллельной структуры также представляет собой достаточно сложную задачу ввиду нелинейной связи между параметрами движения приводов и перемещений выходного звена с рабочим органом.

Существенный вклад в развитие теории механизмов данного класса и их практическое применение внесли такие ученые, как Э. Гоф, К. Хант, К. Сугимото, К. Госслен, Х. Анджелес, В. Аракелян, С. Брио, С. Кун, Ж.-П. Мерле, Р. Клавель, М. Карригато, М. Чеккарелли, И. Бонев, Д. Златанов, М.-А. Лариби, Ф. Венгер, Ю. Такеда, И.-М. Чэнь, Л. Цай, Ж. Эрве, Г. Гогу, Н.С. Давиташвили, Д. Карбоне, Дж. Даффи, В. Паренти-Кастелли, Д. Стюарт, Ф.М. Диментберг, А.Ф. Крайнев, В.А. Глазунов, А.Ш. Колискор, А.И. Корендясев, Л.И. Тывес, Г.В. Рашоян, Г.С. Филиппов, А.С. Фомин, А.В. Антонов, А.К. Алешин, К.А. Шалюхин, С.В. Хейло, Л.А. Рыбак, В.Н. Пащенко, И.А. Несмиянов, П.Г. Мудров.

Несмотря на большое число научных трудов, посвященных анализу механизмов параллельной структуры, в данной области знаний по-прежнему остаются нерешенные или частично решенные задачи. Это объясняется тем, что исследователями зачастую рассматриваются частные случаи многих задач, а

обобщение предлагаемых в работах подходов и методов на более широкий спектр механизмов представляет значительные трудности. Так, например, в обобщении методов анализа особых положений механизмов данного типа трудами отечественных и зарубежных ученых за последние десятилетия достигнуты значительные успехи, но, в то же время, некоторого «золотого стандарта» оценки близости к ним не выработано. Многие из предложенных критериев близости к особым положениям, представляют собой удобные для вычисления математические величины или индексы, которые, однако, зачастую не могут быть явным образом связаны с характеристиками реальных устройств, а их значение не может быть измерено или проверено экспериментально. В то же время практическая задача определения близости к особым положениям имеет большое значение для параметрического синтеза механизмов, планирования траектории и эксплуатации, поскольку ее решение позволяет повысить точность и достоверность инженерных расчетов реальных устройств и совершенствовать методы их конструирования.

Таким образом, данная работа, посвященная выработке физически измеримых и технически обоснованных критериев близости к особым положениям, явным образом связанных с характеристиками механизмов, а также методов их расчета представляется актуальной с точки зрения научной и практической значимости.

Цель работы

Целью работы является повышение точности и достоверности расчетов характеристик устройств, создаваемых на базе механизмов параллельной структуры, и расширение их функциональных возможностей за счет совершенствования методов анализа особых положений и близости к ним.

Задачи, решаемые в работе

Для достижения поставленной цели решаются следующие задачи:

- разработка классификации особых положений, характеризующей изменение подвижности механизма, и формализация условий их возникновения с помощью математического аппарата винтового исчисления;

- теоретическое обоснование обобщенных подходов к оценке близости к особым положениям, основанных на анализе матрицы Якоби механизма и аппарате винтового исчисления, с использованием физически измеримых критериев, напрямую связанных с характеристиками механизмов;
- разработка общих практических алгоритмов расчета критериев близости к особым положениям с учетом различных особенностей структуры механизмов, а также программная реализация данных алгоритмов;
- создание математических моделей различных механизмов параллельной структуры, позволяющих проводить их анализ с использованием предлагаемых методов и алгоритмов, а также разработка прикладных программ, реализующих расчеты с использованием указанных моделей;
- проверка применимости предложенных методов расчета критериев близости к особым положениям на примере механизмов параллельной структуры с различными типами степеней свободы выходного звена;
- верификация разработанных методов расчета критериев близости к особым положениям путем проведения экспериментальных исследований на физическом прототипе механизма параллельной структуры;
- применение предложенных методов и алгоритмов в процессе выбора геометрических параметров (параметрического синтеза), анализа и решения практических инженерных задач конструирования реального устройства согласно требованиям технического задания.

Научная новизна

- предложена классификация особых положений механизмов параллельной структуры, включающая четыре их типа, характеризующих конкретные случаи изменения подвижности механизма, при этом условия их возникновения формализованы с применением винтового исчисления, что позволяет использовать его математический аппарат при итерационном анализе рабочей зоны;
- разработаны оригинальные методы оценки близости к особым положениям различных типов, где в качестве критериев предлагается использовать

значения скоростей в приводах, приводные усилия или обобщенные реакции, рассчитанные для наихудших возможных направлений скорости выходного звена или внешней нагрузки, что позволяет при анализе учитывать требования к техническим характеристикам механизмов;

- впервые теоретически обоснована возможность трактовки кинематических и силовых винтов в качестве элементов шестимерного векторного пространства при проведении промежуточных расчетов, что позволяет при работе с винтами в качестве альтернативы традиционному геометрическому подходу использовать методы линейной алгебры, и, как следствие, унифицировать алгоритмы анализа для различных механизмов;
- созданы универсальные математические модели механизмов параллельной структуры с различным числом и типами степеней свободы, позволяющие проводить анализ данных механизмов как с использованием матрицы Якоби, так и с применением винтового исчисления, что, в свою очередь, дает возможность взаимной проверки результатов расчетов, проведенных разными методами;
- синтезированы новые схемы механизмов параллельной структуры: семейства сферических механизмов с круговой направляющей, поступательно направляющего механизма и механизма семейства Delta с четырьмя степенями свободы.

Практическая значимость

- созданы прикладные программы, использующие разработанные математические модели механизмов параллельной структуры с различным числом степеней свободы и позволяющие проводить их анализ с применением предложенных методов;
- разработаны и реализованы в виде прикладных программ практические алгоритмы определения особых положений различных типов и вычисления значений критериев близости к ним с использованием матрицы Якоби и винтового исчисления;

- создана действующая модель нового механизма семейства Delta с четырьмя степенями свободы, позволяющая проводить экспериментальные исследования изменения его характеристик при приближении к особым положениям;
- предложена и отработана методика экспериментальной проверки теоретических расчетов усилий в приводах для механизмов параллельной структуры с шаговыми двигателями, с помощью которой подтверждены результаты теоретических расчетов, проведенных для механизма семейства Delta с четырьмя степенями свободы;
- впервые получены экспериментальные данные, свидетельствующие об обратной корреляции погрешности вычисления усилий в приводах и изменения жесткости механизма при приближении к особым положениям;
- с использованием предложенных в работе методов по требованиям технического задания разработано и изготовлено реальное устройство, предназначенное для использования в качестве механизма перемещения печатных головок установки для 3D-печати микроэлектроники.

Реализация результатов работы

Научные результаты, полученные в работе, были использованы при выполнении следующих научно-исследовательских работ, в которых автор принимал участие в качестве исполнителя или руководителя:

- проект 9.5309.2017/БЧ «Разработка методов структурного синтеза и анализа манипуляторов параллельной структуры с учетом влияния близости к особым положениям на их кинематические и прочностные характеристики» в рамках базовой части государственного задания Министерства образования и науки РФ в сфере научной деятельности на 2017-2019 гг. (МГТУ им. Н. Э. Баумана);
- проект 21-79-10409 «Разработка методов проектирования и алгоритмов анализа пространственных механизмов, образованных кинематическими цепями с разным типом наложенных связей» в рамках гранта Российского научного фонда на 2021-2024 гг. (ИМАШ РАН);

- проект 23-29-00789 «Разработка методов синтеза и анализа механизмов параллельной структуры, имеющих кинематическую и приводную избыточность» в рамках гранта Российского научного фонда на 2023-2024 гг. (ИМАШ РАН).

Получено 3 патента РФ на изобретение (RU 2785706, RU 2466013, RU 2466014), 2 патента РФ на полезную модель (RU 174484, RU 113193), а также 1 свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ (RU 2020613897).

Результаты, полученные в диссертации, приняты к использованию в научно-исследовательских и опытно-конструкторских работах профильных организаций, а также в учебном процессе кафедры основ конструирования машин МГТУ им. Н.Э. Баумана.

Методы исследования

В работе использованы методы теоретической механики, теории механизмов и машин, линейной алгебры и математического анализа, численные методы (включающие, в том числе, компьютерное моделирование), а также винтовое исчисление.

Основные положения, выносимые на защиту

- классификация особых положений механизмов параллельной структуры и математическое описание условий их возникновения с использованием винтового исчисления;
- оригинальные методы анализа близости к особым положениям различных типов, с использованием матрицы Якоби механизма и винтового исчисления;
- практические алгоритмы анализа особых положений различных типов и близости к ним, в том числе использующие методы линейной алгебры при операциях с кинематическими и силовыми винтами;
- новые схемы механизмов параллельной структуры: семейства сферических механизмов с круговой направляющей, поступательно направляющего механизма и механизма Delta с четырьмя степенями свободы;

- результаты теоретических и экспериментальных исследований, подтверждающие применимость предлагаемых методов и алгоритмов для анализа механизмов параллельной структуры с различным числом степеней свободы.

Достоверность полученных результатов

Достоверность результатов подтверждается использованием общепринятых расчетных методик и допущений, характерных для работ в области теоретической механики и теории механизмов и машин, применением современного программного обеспечения, а также проверкой теоретических результатов в натуральных экспериментах.

Апробация работы

Основные результаты, полученные в работе, были представлены на следующих конференциях:

- XXIII, XXVIII, XXIX, XXX Международные инновационные конференции молодых ученых и студентов (МИКМУС). Москва, 2011, 2016 – 2018 гг.;
- 19th, 20th, 23rd, 24th CISM-IFTOMM Symposium on Robot Design, Dynamics and Control (ROMANSY). Париж, Франция, 2012 г., Москва, 2014 г., Саппоро, Япония, 2020 г., Удине, Италия, 2022 г.;
- 4th European Conference on Mechanism Science (EuCoMeS), Сантандер, Испания, 2012 г.;
- 14th IFTOMM World Congress. Тайвань, 2015 г.;
- International Conference on Artificial Intelligence, Robotics and Control (AIRC). Каир, Египет, 2019 г.;
- 2nd International Conference of Artificial Intelligence, Medical Engineering, Education (AIMEE). Москва, 2018 г.;
- 15th International Conference “Intelligent Systems” (INTELS). Москва, 2022 г.

Личный вклад

Лично автором разработана классификация особых положений, характеризующая изменение подвижности механизма, предложены методы оценки близости к ним, созданы математические модели механизмов (в том числе новых)

с различным числом степеней свободы, а также разработаны практические алгоритмы и прикладные программы, с использованием которых проведены расчеты согласно предложенным методам. Кроме того, лично автором разработана конструкция и проведены сборка и отладка реальных устройств, предназначенных для экспериментальных исследований и использования в установке для 3D печати микроэлектроники. Проведение экспериментов, включая обработку и интерпретацию результатов, также осуществлено лично автором.

Публикации

По теме проведенных исследований опубликовано 47 работ, в том числе: 10 статей в периодических изданиях, включенных в Перечень ВАК РФ; 12 статей в российских периодических изданиях, индексируемых в международных библиографических базах Web of Science и Scopus; 13 статей в зарубежных изданиях, индексируемых в базах Web of Science и Scopus. Дополнительно получено 3 патента РФ на изобретение, 2 патента РФ на полезную модель и 1 свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ.

Объем и структура работы

Диссертационная работа состоит из введения, 8 глав, заключения, списка литературы из 278 наименований. Объем диссертации составляет 304 страницы, включая 121 рисунок и 6 таблиц.

В первой главе рассматриваются общие сведения о механизмах параллельной структуры и приводятся примеры устройств с разным количеством степеней свободы и указанием областей их применения. Кроме того, в данной главе приводятся общие сведения об особых положениях, а также история и основные результаты их исследования различными учеными. Далее рассматриваются основные проблемы, связанные с особыми положениями и пути их решения.

Во второй главе приводятся общие сведения о винтовом исчислении и формулируется классификация особых положений, основанная на изменении подвижности механизма. При этом используется формализм винтового исчисления и линейной алгебры. Далее представляются критерии близости к различным типам особых положений, основанные на вычислении максимизации значений скоростей

в кинематических парах и реакций в кинематических цепях или усилий в приводах. Приводятся методики вычисления значений указанных критериев как с использованием свойств матрицы Якоби механизма, так и на основе винтового исчисления, а также предлагаются практические расчетные алгоритмы. Результаты, представленные в главе, отражены в работах [9, 23, 25, 26, 28, 29, 32, 40, 116, 159, 166, 167, 173, 204].

В третьей главе проводится анализ механизмов типа Delta с шестью и четырьмя степенями свободы с линейными приводами. Механизм с шестью степенями свободы представляет собой общий случай, для которого процесс расчета значений критериев близости к особым положениям, связанным с потерей выходным звеном степени свободы или приобретением им неуправляемой подвижности, является наиболее простым. В то же время, для механизма с четырьмя степенями свободы проведение подобного анализа с помощью винтового исчисления требует предварительного вычисления силовых винтов связей. Результаты, представленные в главе, отражены в работах [22, 30, 42, 43, 59].

В четвертой главе рассматривается анализ поступательно-направляющего механизма с тремя степенями свободы. Особенность данного механизма заключается в возможности возникновения особых положений, связанных с вырождением связей. При этом выходное звено приобретает новую степень свободы. Особые положения данного типа могут быть проанализированы только с помощью винтового исчисления. В главе наглядно демонстрируются особенности вырождения матриц Плюккерových координат силовых винтов механизма, а также возможное влияние приводных силовых винтов на значение критериев близости к особым положениям указанного типа. Результаты, представленные в главе, отражены в работах [24, 31, 37–39, 41, 125, 171, 172].

В пятой главе исследуется семейство сферических механизмов с круговой направляющей. Показано, что для механизмов с вращательными степенями свободы при определении точек особых положений с помощью матрицы Якоби необходимо учитывать способ задания ориентации выходного звена. При использовании углов поворота (углов Эйлера) возможно вырождение матрицы

Якоби в точках, в которых механизм не находится в особом положении. Для устранения указанной проблемы требуется использование матрицы перехода от производных углов поворота к угловым скоростям выходного звена. Результаты, представленные в главе, отражены в работах [33, 35, 60, 168, 169].

В шестой главе рассматриваются плоские механизмы с вращательными кинематическими парами: шарнирный пятизвенник и механизм 3-RRR. В данных механизмах при определенных условиях возможно появление в рабочей зоне точек, соответствующих особым положениям сразу двух типов. В связи с указанной особенностью проведен анализ поведения предлагаемых в работе критериев близости в окрестности данных точек. Результаты, представленные в главе, отражены в работах [16, 17, 34, 36, 52, 55, 57, 58].

В седьмой главе представлено экспериментальное исследование механизма Delta с четырьмя степенями свободы с линейными приводами, рассмотренного ранее в третьей главе. В процессе эксперимента подтверждена адекватность расчетов критических усилий в приводах механизма, проводимых по предложенным методикам, а также показано, что погрешность расчета указанных значений прямо коррелирует с изменением жесткости механизма при приближении к особым положениям. Результаты, представленные в главе, отражены в работах [15, 27, 174].

В восьмой главе проводится параметрический синтез, анализ и разработка конструкции реального устройства на базе механизма Delta с четырьмя степенями свободы. В процессе проработки устройства применяются предложенные в работе методы и алгоритмы оценки близости к особым положениям на основе практических критериев. Разработка производится согласно требованиям технического задания. Устройство используется в качестве механизма перемещения печатных головок установки для отработки процесса 3D-печати электроники. Результаты, представленные в главе, отражены в работах [56, 61, 170].

ГЛАВА 1. МЕХАНИЗМЫ ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ И ИХ ОСОБЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

1.1. Общие сведения о механизмах параллельной структуры

Кинематическая структура механизма определяется тем, каким образом соединены между собой его подвижные и неподвижные части. Как правило, если некоторый (рычажный) механизм состоит из одной открытой кинематической цепи, то его структуру называют последовательной, а если из одной и более замкнутых цепей – параллельной. В последнем случае в русскоязычной литературе обычно используется термин «параллельный механизм» или «механизм параллельной структуры». Вместо слова «механизм» также встречаются слова «манипулятор» и «робот». Более точные определения могут несколько отличаться в зависимости от источника, но, по сути, имеют одинаковый смысл. Так, согласно В.А. Глазунову [6], механизм параллельной структуры характеризуется тем, что его «выходное звено связано с основанием кинематическими цепями». При этом уточняется, что такие механизмы имеют замкнутые кинематические цепи. Такое определение является весьма общим и включает в себя практически все широко применяемые кинематические схемы. Ж.-П. Мерле в своей книге [189] дает аналогичное определение, которое затем заменяется более узким: «Параллельный робот состоит из выходного звена с n степенями свободы и неподвижного основания, соединенных между собой как минимум двумя независимыми кинематическими цепями. Приведение механизма в движение осуществляется с помощью n простых приводов». Ограничение на количество приводов объясняется стремлением к минимизации их числа, что упрощает изложение теоретических основ многих методов анализа таких механизмов, но не всегда целесообразно на практике. Стоит также отметить, что некоторыми исследователями предпринимались попытки

формализации определения «параллельный механизм» путем введения специальных «индексов параллельности» [113, 215].

В числе основных преимуществ параллельной кинематической структуры над последовательной, как правило, называют лучшие характеристики жесткости, точности позиционирования и грузоподъемности относительно собственного веса подвижных частей механизма [63]. Указанные свойства обусловлены распределением внешней нагрузки по независимым кинематическим цепям и меньшим количеством массивных звеньев, последовательно соединенных приводными устройствами. Среди недостатков такой структуры обычно выделяют меньший размер рабочего пространства и более высокие требования к точности изготовления и монтажа деталей устройства [1–3]. Последнее особо актуально для механизмов с менее чем шестью степенями свободы, поскольку в таком случае соответствие реальной подвижности выходного звена заданным степенями свободы обеспечивается, как правило, за счет определенного взаимного расположения звеньев и шарниров механизма. Поэтому несоответствие между реальными и теоретическими параметрами, определяющими структуру и геометрию механизма, вызванное наличием погрешностей изготовления и монтажа его элементов, приводит не только к уменьшению точности позиционирования, но и к появлению «паразитной» подвижности выходного звена [189, 203].

Также одним из недостатков, оказывающих негативное влияние на работоспособность механизмов как последовательной, так и параллельной структуры, является наличие так называемых особых положений. При этом именно при параллельной кинематической структуре нежелательные эффекты, связанные с данным явлением, проявляются наиболее сильно. Поэтому данный недостаток зачастую связывают именно с параллельной кинематикой. Особые положения в механизмах параллельной структуры и вопросы, связанные с ними, являются основной темой данной работы. Более подробная информация, касающаяся данной проблемы, представлена в соответствующей части данной главы.

Основным параметром механизма является количество его степеней свободы. При этом в разных работах речь может идти как о степенях свободы только

выходного звена механизма, так и обо всех возможных независимых перемещениях механизма. В первом случае число степеней свободы не может быть больше шести, во втором – не ограничено. Также существует неоднозначность в определении понятия «обобщенные координаты» применительно к механизмам параллельной структуры: одни авторы понимают под этим термином перемещения в приводных кинематических парах, а другие – координаты, описывающие положение выходного звена или же конфигурацию механизма как единого целого. При этом зачастую возникает противоречие с общепринятой терминологией. Так, согласно словарю-справочнику А.Ф. Крайнева [19] и официальной терминологии Международной федерации по теории механизмов и машин (IFToMM), под обобщенными координатами понимают независимые параметры, которые при наименьшем их числе однозначно определяют положение механической системы. Для системы с голономными (геометрическими) связями число обобщенных координат должно быть равно числу степеней свободы системы. Применительно к какому-либо механизму это означает, что его конфигурация (положение и ориентация всех его звеньев в пространстве) должна быть полностью определена этими координатами. Из-за того, что одному и тому же положению выходного звена механизма параллельной структуры может соответствовать несколько возможных конфигураций этого механизма, становится невозможным соблюдение условия однозначности определения конфигурации без введения дополнительных параметров, характеризующих взаимное расположение промежуточных звеньев. Появление дополнительных параметров приводит в свою очередь к тому, что число обобщенных координат становится больше числа степеней свободы рассматриваемой механической системы – механизма в целом. Аналогичная проблема возникает и при использовании перемещений во входных кинематических парах в качестве обобщенных координат. Таким образом, термин «обобщенные координаты» применительно к механизмам параллельной структуры может вносить определенную путаницу и по этой причине в данной работе не используется.

С учетом представленных в данном параграфе сведений, в настоящей работе используются следующие основные определения и обозначения:

- механизм параллельной структуры – это механизм, состоящий из выходного звена и неподвижного основания, соединенных между собой как минимум двумя независимыми кинематическими цепями;
- выходное звено – звено механизма, параметры движения которого задаются требованиями технологического процесса, в котором используется механизм. Выходное звено может представлять из себя материальную точку;
- число степеней свободы механизма (n) – число независимых координат, необходимых для описания положения и ориентации его выходного звена. Выходное звено рассматривается как твердое тело, поэтому для любого механизма $n \leq 6$;
- число степеней свободы цепи (n_i) – число степеней свободы, которое будет иметь выходное звено, если его соединить с основанием только посредством одной i -й кинематической цепи;
- конфигурация механизма – положение и ориентация в пространстве всех его звеньев;
- подвижность – возможное перемещение (или совокупность перемещений) механизма или его части (звена, цепи);
- степень подвижности механизма (m) – общее число независимых между собой конечных или бесконечно малых возможных перемещений всех звеньев механизма;
- степень подвижности элемента – число возможных независимых конечных или бесконечно малых перемещений какой-либо части (звена, цепи) механизма. Степень подвижности i -й кинематической цепи обозначается как m_i ;
- входные координаты – независимые параметры, характеризующие перемещения в приводимых в движение (активных) кинематических парах механизма. Вектор входных координат (перемещений в активных парах)

обозначается как \mathbf{q}_a и вместе с вектором перемещений в пассивных парах \mathbf{q}_p входит в вектор \mathbf{q} .

- выходные координаты – независимые параметры, с помощью которых можно задать конечное число конфигураций механизма. Конфигурации, соответствующие одному и тому же набору таких параметров, называются «рабочими сборками». Вектор выходных координат обозначается \mathbf{x} , и его размерность, равна числу степеней свободы механизма ($\dim(\mathbf{x}) = n$) или степени его подвижности: $\dim(\mathbf{x}) = m$;

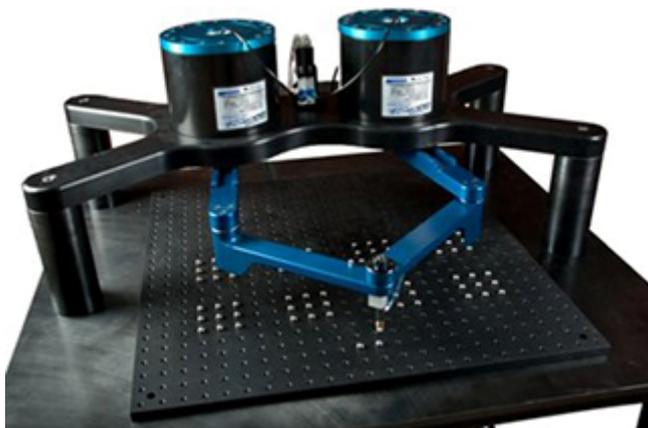
Стоит отметить, что термин «подвижность» подразумевает, собственно, возможные перемещения какого-либо элемента или механизма в целом, а термин «степень подвижности» – количество таких перемещений при условии, что они являются независимыми.

В следующем параграфе представлены примеры применения механизмов параллельной структуры в порядке возрастания количества их степеней свободы, начиная с двух.

1.2. Применение механизмов параллельной структуры

Механизмы параллельной структуры с двумя степенями свободы являются самыми простыми представителями механизмов данного типа. Наиболее известная схема – плоский пятизвенник с приводными парами, расположенными на неподвижном звене (основании). Несмотря на свою простоту, подобный механизм широко используется в различных областях техники. В качестве примера можно привести устройства для реабилитации конечностей и механизмы бионических протезов [108, 221, 266, 272], механизмы поворота колесных машин [273], тактильные интерфейсы [90, 220, 241]. Однако наиболее часто данный механизм используется в устройствах для манипулирования небольшими объектами. В

качестве примера подобного применения рассмотрим устройства DexTAR (рисунок 1.1.а) и Mitsubishi RP-5ADH (рисунок 1.1.б).



а.



б.

Рисунок 1.1. Примеры параллельных манипуляторов, основанных на плоском пятизвенном механизме: DexTAR (а) и Mitsubishi RP-5ADH (б).

Робот DexTAR представляет собой классический плоский пятизвенный механизм, снабженный пневматическим захватом, основной особенностью которого является возможность динамического изменения рабочей сборки в процессе работы при переходе через особые положения [91]. Данное устройство используется в обучающих и научных целях [80, 185, 194].

Манипулятор Mitsubishi RP-5ADH – коммерческий промышленный робот, предназначенный для высокоскоростного манипулирования объектов массой до 5 кг. Устройство имеет четыре степени свободы (поворот и подъем рабочего органа), две из которых реализованы независимо за счет конструкции схвата. В качестве примера области применения производителем упоминается установка компонентов на печатные платы. Условным выходным звеном обоих манипуляторов является место соединения шатунов пятизвенного механизма, т.е. точка, характеризующая положение среднего шарнира и рабочего органа.

Роботы Mitsubishi серии RP, по сути, представляют собой использующую параллельную кинематику интерпретацию широко известной схемы SCARA, имеющей последовательную структуру. В связи с этим определенным интерес

представляет сравнение основных характеристик параллельного манипулятора данного семейства и робота классической SCARA-компоновки того же производителя (таблица 1.1).

Таблица 1.1. Сравнительные характеристики манипуляторов Mitsubishi типа SCARA с последовательной и параллельной кинематической структурой.

Параметр	Классическая компоновка с последовательной структурой (RH-3FH5515-D1-S15)	Компоновка с параллельной структурой (RP-3ADH)
Максимальная грузоподъемность, кг	3	3
Вес, кг	32	24
Габариты, мм	550 × 210 × 773	550 × 400 × 280
Угловая скорость приводов перемещения в плоскости, °/с	400, 720	432
Рабочая зона в плоскости, м ²	≈ 0,321	0,031 (0,210 × 0,148)
Повторяемость в горизонтальной плоскости, мм	± 0,012	± 0,008

Данные, представленные в таблице, демонстрируют основные достоинства (меньший вес и габариты, большая точность) и недостатки (меньшая рабочая зона) параллельной кинематической структуры по сравнению с последовательной при сравнении роботов с одинаковой грузоподъемностью.

Двухстепенные механизмы на базе плоского пятизвенника или подобных ему плоских механизмов с двумя степенями свободы также применяются в качестве составных элементов механизмов с большим числом степеней свободы [50, 123, 162]. Примером такого применения может служить робот с шестью степенями свободы MedRUE [274, 275] (рисунок 1.2). В данном манипуляторе, разработанном для автоматизации ультразвукового исследования сосудов человека, два

пятизвенных механизма с общим основанием, установленном на линейной направляющей, соединены с телескопическим выходным звеном посредством шарниров Гука. Каждый пятизвенный механизм имеет два собственных привода, а за счет возможности изменения расстояния между плоскостями данных механизмов, робот MedRUE имеет шесть степеней свободы.



Рисунок 1.2. Робот для ультразвукового исследования сосудов MedRUE

Механизмы параллельной структуры, обладающие двумя вращательными степенями свободы, распространены реже. В большинстве случаев подобные механизмы упоминаются в теоретических работах [109, 111, 122, 219, 223, 227, 267], хотя известны и примеры их практического применения, например в устройствах ориентации различных антенн [154, 228]. Отдельного упоминания заслуживает разработанный М. Росхаймом механизм Omni-Wrist (рисунок 1.3), обеспечивающий наклон выходного звена в пределах $\pm 90^\circ$ без возникновения особых положений. Модификация III, предназначенная для ориентации датчиков, зеркал и других устройств лазерных систем, обладает погрешностью в 3,6 угловых минуты при грузоподъемности более двух килограмм и скорости поворота выходного звена, достигающей 60 %/с [217].



Рисунок 1.3. Механизм ориентации Omni-Wrist

Среди механизмов с тремя степенями свободы можно выделить три основных типа, соответствующих определенным сочетаниям степеней свободы выходного звена: плоские, поступательно-направляющие и сферические механизмы. Механизмы с двумя вращательными и одной поступательной степенями свободы в научной литературе встречаются реже, а в качестве потенциальной области их применения чаще всего указывается малоинвазивная хирургия [177, 213, 260, 263].

Выходное звено плоских механизмов параллельной структуры имеет две поступательные степени свободы, позволяющие ему перемещаться в некоторой плоскости, а также одну вращательную степень свободы, реализующую поворот вокруг оси, перпендикулярной указанной плоскости. Такие механизмы в большинстве случаев имеют три одинаковых кинематических цепи, в каждой из которых имеется три неподвижные кинематических пары. Обычно используются вращательные (обозначается «R») или поступательные призматические (обозначается «P») пары. Существует множество возможных комбинаций данных шарниров внутри одной цепи, позволяющих реализовать необходимое движение выходного звена. Значительный вклад в развитие теории

механизмов параллельной структуры подобного типа внесли К. Хант [149, 150], Дж. Даффи [112], К. Госслен [128, 135, 138], В.А. Глазунов [8, 11, 21, 85] и другие [105, 119, 144, 152, 157, 163, 195, 216, 225].

Наиболее распространенными и всесторонне изученными схемами плоских механизмов параллельной структуры являются $3\text{-}\underline{R}RR$, $3\text{-}R\underline{P}R$, $3\text{-}P\underline{R}R$ (рисунок 1.4). Здесь цифра показывает количество цепей, буквы – последовательность пар от основания к выходному звену, а подчеркивание – приводную пару.

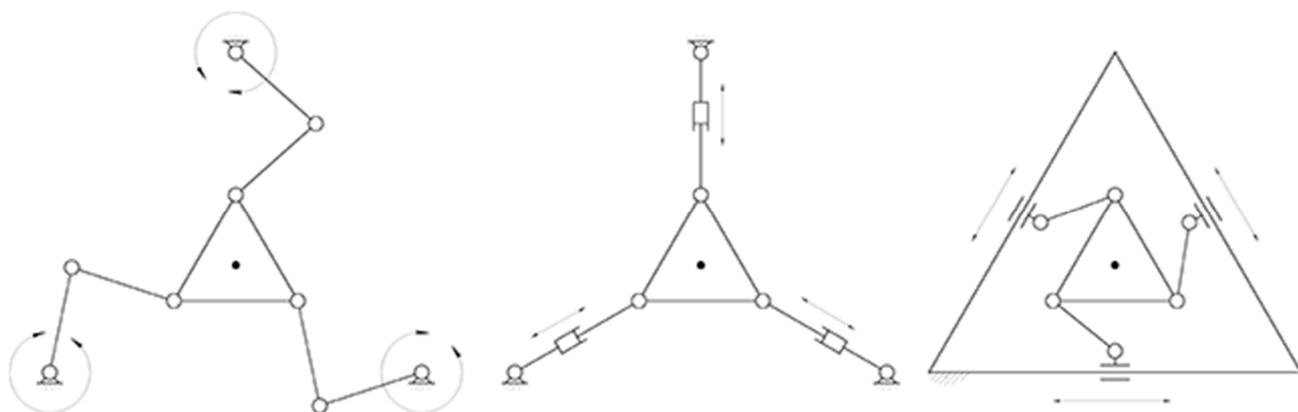
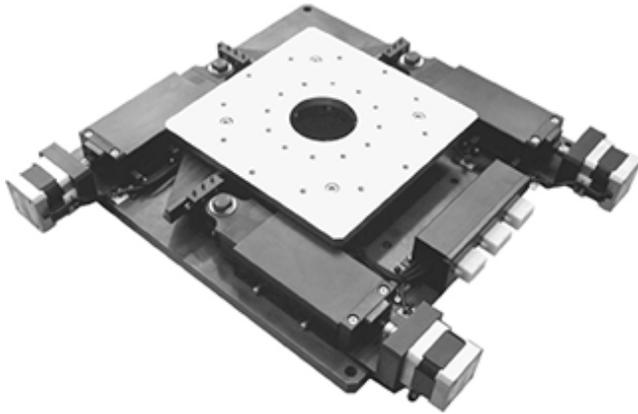


Рисунок 1.4. Распространенные схемы плоских механизмов (слева направо):

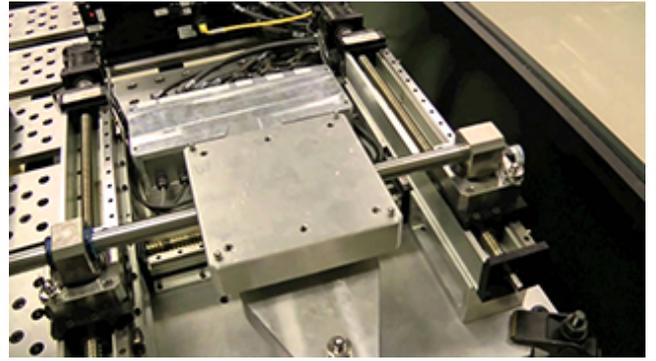
$3\text{-}\underline{R}RR$, $3\text{-}R\underline{P}R$, $3\text{-}P\underline{R}R$

Несмотря на то, что указанные механизмы рассматривались в большом количестве работ различными исследователями, реальные прототипы и устройства, построенные на основе данных схем, чаще всего используются в исследовательских и учебных целях, представляя больше академический, нежели практический интерес.

Из плоских механизмов, имеющих структуру, отличную от указанных, заслуживает упоминания ассиметричный $3\text{-}P\underline{R}P$ манипулятор Nephast Seiko NAF3 (рисунок 1.5.а) представляющий собой стол для точного позиционирования (шаг 2,8 мкм для модели NAF3C-40). В качестве альтернативы данному роботу исследователями из Высшей технологической школы университета Квебека во главе с И. Боневым был предложен механизм PreXYT [155], состоящий из двух цепей $\underline{P}R\underline{P}$ и одной $\underline{P}R\underline{P}$, а также обладающий заметно большим рабочим пространством (рисунок 1.5.б).



а.



б.

Рисунок 1.5. Плоские параллельные механизмы-столы для позиционирования:
Nephaist Seiko NAF3 (а) и PreXYT (б).

Стоит отметить, что в плоских механизмах, используемых для микроперемещений, вместо классических шарниров могут применяться гибкие. Примером подобного устройства может служить механизм 3-PRR, разработанный в ИМАШ РАН [124], приводимый в движение пьезоактуаторами (рисунок 1.6).

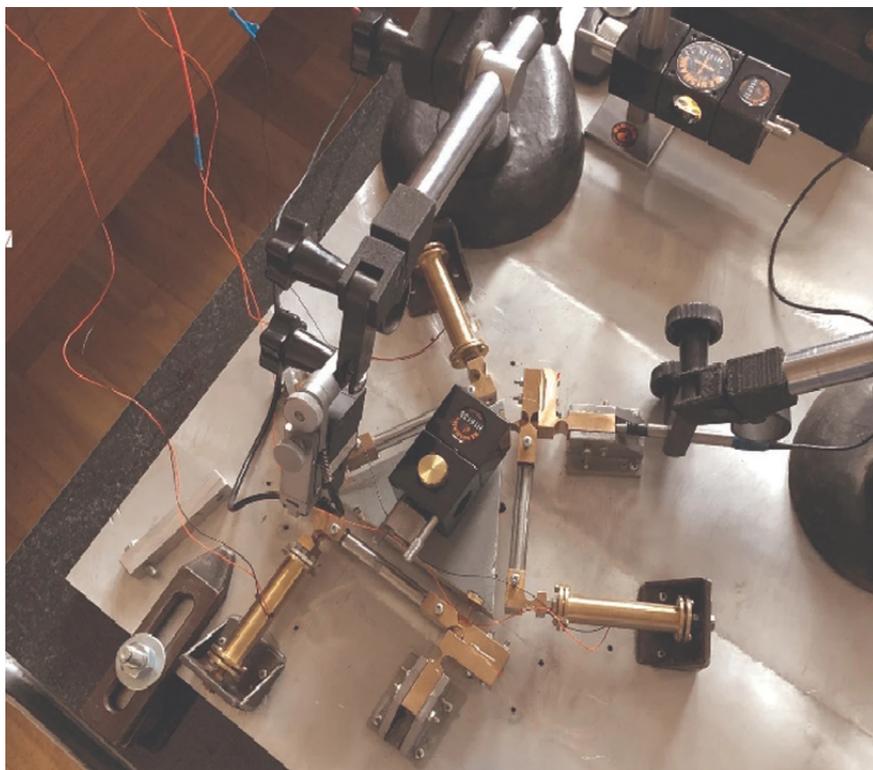


Рисунок 1.6. Механизм 3-PRR с гибкими шарнирами

Рассмотрим теперь поступательно-направляющие механизмы, т.е. механизмы с тремя степенями свободы, входное звено которых имеет возможность

перемещения в пространстве в любом направлении, но без изменения своей ориентации.

Самым известным и хорошо изученными механизмом данного типа является робот Delta (рисунок 1.7), предложенный Р. Клавелем в 80-х годах XX века.

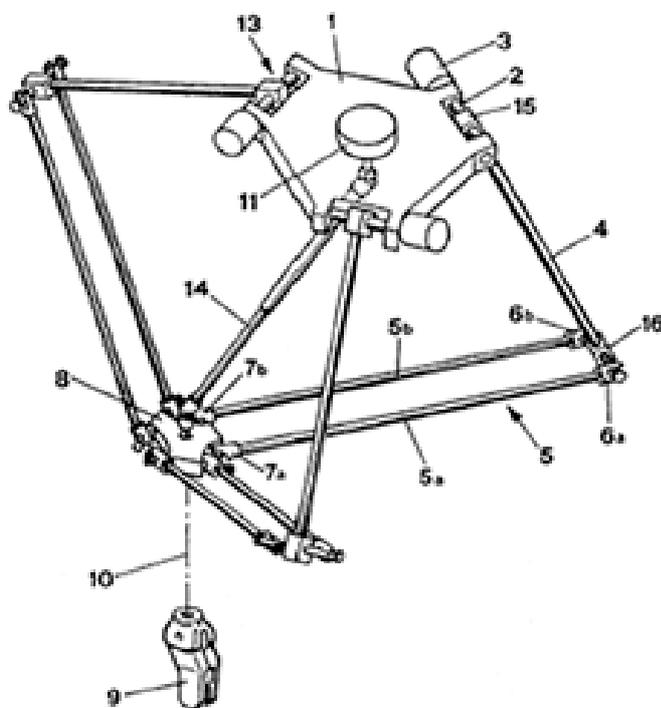


Рисунок 1.7. Схема механизма Delta из патента Р. Клавеля

Данный механизм был изначально разработан для применения в технологических процессах, характеризующихся высокими скоростями и ускорениями выходного звена при относительно небольшой нагрузке [104]. При этом, согласно патенту [103], данное устройство имеет четыре степени свободы: три поступательных и одну вращательную. Последняя, однако, обеспечивается за счет отдельного привода, соединенного с рабочим органом механизма (схватом) посредством телескопической штанги, т.е. является кинематически развязанной относительно остальных степеней свободы. В связи с этим, данный механизм в научной литературе, как правило, относят к классу поступательно-направляющих.

Области применения Delta-робота разнообразны, однако, наиболее широкое распространение данная схема получила в качестве исполнительной механической части манипуляторов в составе роботизированных сортировочных и упаковочных

комплексов. Коммерческие исполнения механизма Delta в различных модификациях, предназначенные для использования на указанных операциях, производятся большим числом компаний, в частности: ABB (серия IRB FlexPicker (рисунок 1.8.а)), FANUC (серии M-1, M-2, M-3), Omron Adept (модель Hornet s650H и серия Quattro с дополнительной кинематической цепью), BOSCH (упаковочные линии Paloma, Presto, Sigpack LDF) и другие.

В области медицинской техники механизм нашел применение в качестве устройства позиционирования хирургического микроскопа SurgiScore, который производился фирмой DeeMed Electa (рисунок 1.8.б).

Также заслуживает внимания разработанный и успешно реализуемый компанией Novint манипулятор Falcon (рисунок 1.8.в), предназначенный для использования в индустрии компьютерных игр и развлечений в качестве контроллера с обратной тактильной связью.

Вариант механизма Delta с линейными приводами применяется в металлообрабатывающих станках, например, Index V100 (рисунок 1.8.г). Также подобная компоновка широко используется в устройствах, реализующих аддитивные технологии (3D-принтерах), как любительского, так и профессионального уровня. В качестве примера можно привести профессиональные FDM-принтеры TRILAB серий AzteQ и DeltiQ производства компании Prusa Research (рисунок 1.8.д).

Одной из главных причин популярности данного робота является малый вес его подвижных частей, что позволяет увеличить допустимые скорости и ускорения. Так, в одной из работ заявляется [191], что группой Р. Клавеля в лаборатории Федеральной политехнической школы Лозанны проводились испытания, в которых ускорение выходного звена достигало 500 мм/с^2 . При этом в самой указанной работе экспериментально подтверждена адекватность модели динамики механизма без нагрузки при ускорениях свыше 170 м/с^2 . Что касается реальных эксплуатационных условий, то робот-сортировщик ABB IRB 360 FlexPicker по данным производителя способен выполнить около 150 циклов (два вертикальных

перемещения по 25 мм и одно горизонтальное движение на 305 мм) за одну минуту с полезной нагрузкой 1 кг.



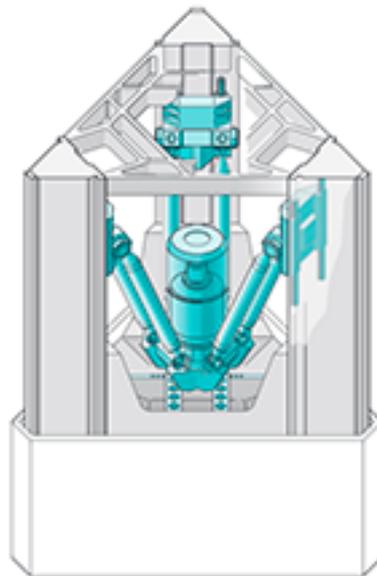
а.



б.



в.



г.



д.

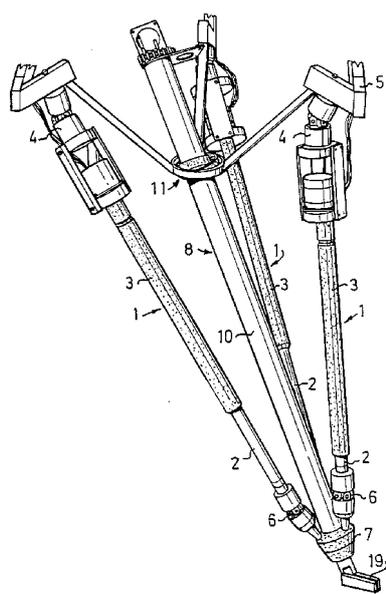
Рисунок 1.8. Устройства на базе механизма Delta: ABB IRB 340 FlexPicker (а), DeeMed SurgiScope (б), Novint Falcon (в), Index V100 (г), Prusa TRILAB AzteQ Dynamic (д)

Помимо широкого практического применения, робот Delta в различных вариациях является одним из самых популярных объектов научных исследований в области теории механизмов параллельной структуры [46, 95, 165, 181, 182, 186,

233, 244], а также служит отправной точкой для создания разнообразных механизмов с похожей топологией, но потенциально более широкими возможностями [83, 156, 231].

Еще одним примером успешного с коммерческой точки зрения и широко используемого на практике поступательно-направляющего механизма параллельной структуры, может служить Tricept, запатентованный К-Э. Нойманом в 1988 году [198] (рисунок 1.9.а) и в дальнейшем подробно исследованный академическим сообществом [89, 141, 201, 202, 226, 251]. Данный манипулятор включает в себя три кинематические цепи RRPS («S» обозначает сферический шарнир), а также дополнительную пассивную телескопическую штангу, жестко соединенную с выходным звеном и закрепленную на основании посредством шарнира Гука (обозначается «U»). Таким образом, структура Tricept может быть обозначена как 3-RRPS.UP или 3-UPS.UP, если вращательные шарниры основных кинематических цепей заменить на шарниры Гука, как это сделано на некоторых коммерческих реализациях данного механизма (в частности, моделях T9000 и T805 одноименной фирмы PKMtricept SL). Основной областью, в которой применяются роботы данного типа и для которой они разрабатывались, является механообработка и станкостроение.

Легко заметить, что плоскость, на которой расположены центры сферических шарниров кинематических цепей, будучи жестко связанной центральной штангой, изменяет свою ориентацию в пространстве в процессе перемещения звеньев механизма. Поэтому условным выходным звеном, имеющим три степени свободы, является точка, в которой пересекаются оси всех штанг механизма. Все реализуемые на рынке роботы, основанные на схеме Tricept, имеют дополнительный сферический механизм с последовательной кинематической структурой, закрепленный на пассивной штанге и обеспечивающий правильную ориентацию инструмента. Примером такого робота может служить, например, модель Tricept T605 (рисунок 1.9.б).



а.



б.

Рисунок 1.9. Механизм Tricept: оригинальная схема из патента (а), пятикоординатный робот Tricept T605 на основе схемы 3-RRPS.UP производства PKMtricept SL(б)

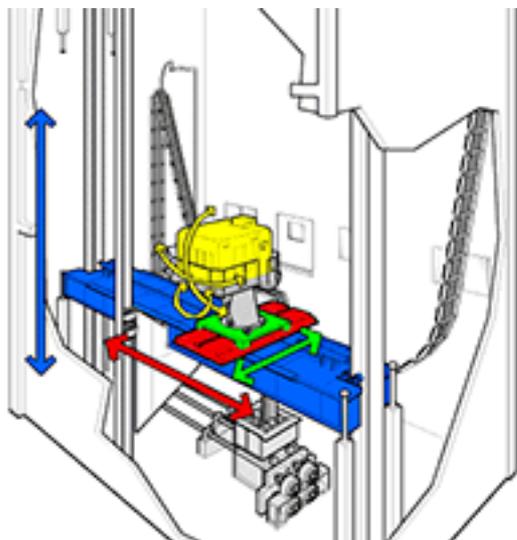
В 2008 году К-Э. Нойманом был разработан механизм Echeson (рисунок 1.10), состоящий из трех кинематических цепей. Каждая цепь состоит из приводной телескопической штанги, соединенной с основанием с помощью шарнира Гука и с подвижной платформой посредством вращательного шарнира [75]. При этом две цепи расположены таким образом, что их входные шарниры имеют одну общую ось. Вращательные шарниры этих цепей также лежат на одной оси. В третьей цепи одна из осей входного шарнира параллельна общей оси входных шарниров первых двух цепей, а ось вращательного шарнира перпендикулярна общей оси вращательных шарниров этих цепей. Последняя цепь также имеет возможность поворота вокруг оси штанги, т.е. с точки зрения теории механизмов соединение третьей цепи с основанием можно считать сферическим шарниром. Пассивная штанга в рассматриваемом механизме отсутствует. На выходном звене, как и в случае с Tricept, располагается устройство ориентации инструмента в виде манипулятора с последовательной структурой. Суммарно исполнительный орган имеет пять степеней свободы. Данный робот производится одноименной компанией Echeson, являющейся дочерней структурой Lockheed Martin, а также по лицензии турецкой компанией Teknodrom.



Рисунок 1.10. Модель робота Ezechon

Сферические механизмы параллельной структуры обладают тремя вращательными степенями свободы. При этом выходное звено поворачивается вокруг некоторой точки в пространстве, называемой центром вращения. Для таких механизмов, как правило, предлагается использование в качестве устройств ориентации [53, 71, 77, 98, 115, 230] и медицинских (в том числе реабилитационных) приспособлений [97, 110, 184, 243]. Рассмотрение примеров практического использования подобных механизмов можно начать с системы VMS (англ. *vertical motion simulator*), разработанной NASA и представляющую из себя имитатор полетов (летный тренажер). Данная машина расположена в отдельно стоящем здании и состоит из платформы с направляющими, на которых расположена кабина тренажера (рисунок 1.11.а). Платформа имеет возможность движения вверх и вниз по вертикальным направляющим, а основание тренажера – возможность движения в плоскости платформы. Кабина тренажера связана со своим основанием посредством трех RRPS (UPS) кинематических цепей (т.н. «трипод») и центральной штанги (мачты), присоединенной неподвижно к основанию и через сферический шарнир к самой кабине (рисунок 1.11.б). Таким

образом, структура данного механизма параллельной структуры может быть обозначена как 3-UPS.S.



а.



б.

Рисунок 1.11. Система VMS (NASA): схема (а), кабина тренажера (б)

Согласно данным NASA, данная тренажерная система использовалась при подготовке астронавтов к полетам на пилотируемых космических кораблях типа Space Shuttle, а также для подготовки пилотов вертолетов Chinook CH47D и конвертопланов.

Другим сферическим механизмом, заслуживающим упоминания, является Agile Eye (рисунок 1.12), который был разработан и изучен в Университете Лавалья группой К. Госслена [133, 137, 139]. Данный механизм имеет структуру 3-RRR. При этом оси всех вращательных кинематических пар пересекаются в одной точке, относительно которой вращается выходное звено. Согласно экспериментальным данным, полученным группой К. Госслена, механизм способен развивать угловую скорость более 1000 °/с и угловое ускорение более 20000 °/с². Ориентация выходного звена может изменяться в пределах $\pm 70^\circ$ при возможном повороте вокруг собственной оси симметрии в пределах в $\pm 30^\circ$. Основное назначение механизма – быстрое позиционирование (ориентация) оптических устройств, например, малогабаритных камер.

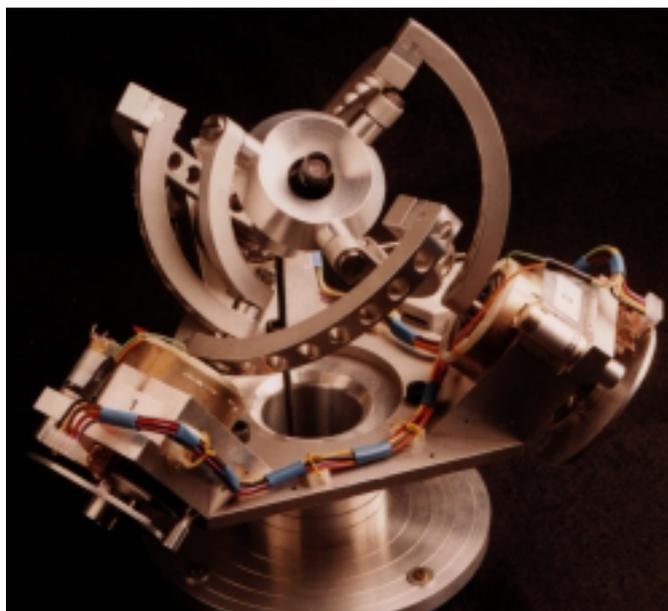


Рисунок 1.12. Механизм Agile Eye

Как уже было отмечено, механизмы с тремя смешанными степенями свободы (не считая плоских) распространены реже. Из подобных механизмов заслуживает внимания микроманипулятор Mips с двумя вращательными (углы прецессии и нутации) и одной поступательной степенью свободы (перемещением вдоль оси, перпендикулярной основанию), предложенный Ж.-П. Мерле [188] (рисунок 1.13)

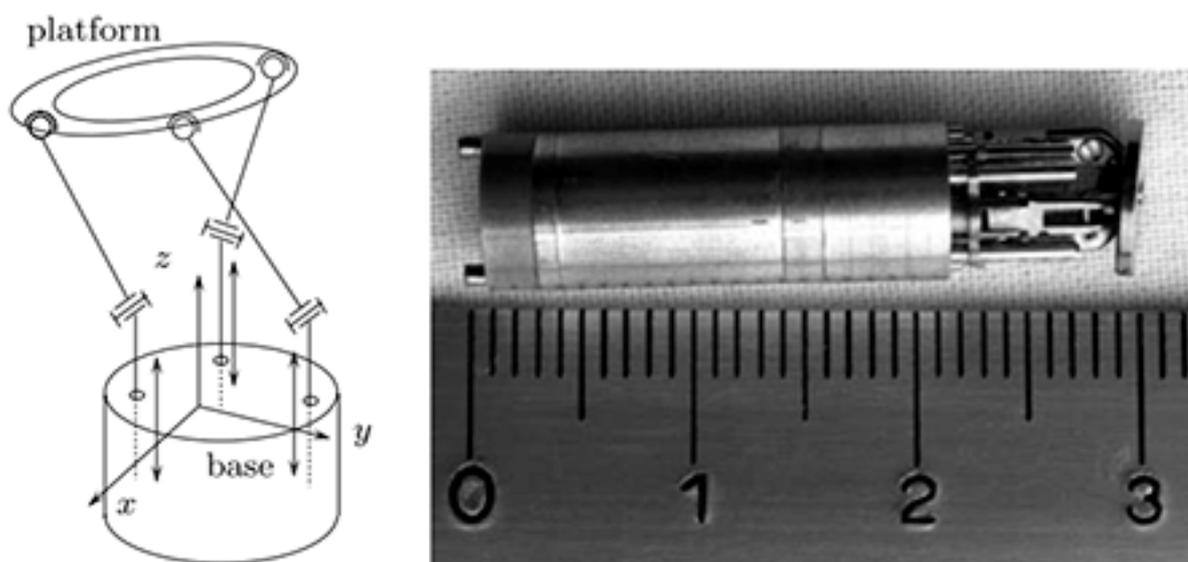


Рисунок 1.13. Кинематическая схема и внешний вид микроманипулятора Mips

Данный механизм имеет схему 3-PRS и диаметр 7 мм, а областью его применения является эндоскопическая хирургия.

Другим примером применяемого на практике устройства с тем же сочетанием степеней свободы является платформа фирмы InMotion Simulation, предназначенная для использования в симуляторах движения (рисунок 1.14).

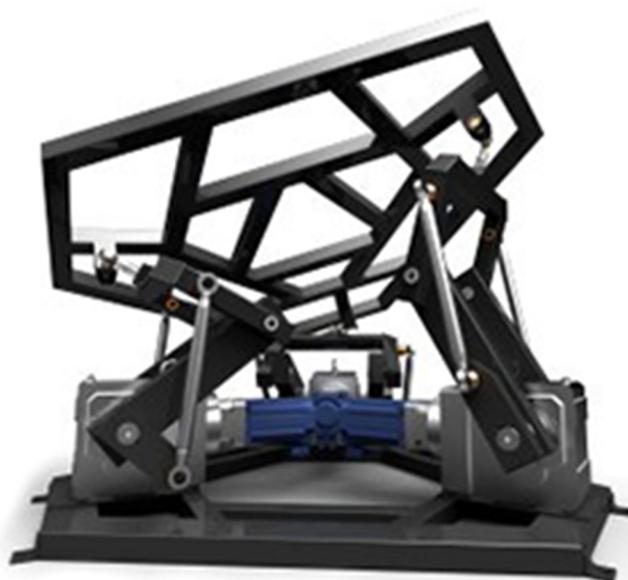


Рисунок 1.14. Трехстепенная платформа фирмы InMotion Simulation

Основное отличие данного устройства от многих, подобных ему, заключается в том, что в качестве приводов используются электродвигатели, передающие движение на вращательные входные кинематические пары, а не приводы линейного перемещения в виде телескопических штанг, реализованные с помощью гидравлических цилиндров. По данным производителя максимальные угловые (симуляция тангажа и крена) перемещения составляют $\pm 30^\circ$, а подъем платформы – 8 дюймов (чуть больше 20 см). Грузоподъемность устройства заявлена равной 680 кг при угловых ускорениях $650 \text{ }^\circ/\text{с}^2$ и максимальном вертикальном ускорении $9,8 \text{ м}/\text{с}^2$ (1 g).

Механизмы параллельной структуры с четырьмя и пятью степенями свободы выходного звена применяются значительно реже механизмов с другим числом степеней свободы. Более того, можно показать, что синтез таких механизмов с использованием четырех или пяти идентичных кинематических цепей при некоторых условиях является невозможным. Для определения числа степеней свободы выходного звена применим формулу Чебышева – Граблера – Кутцбаха.

Данная формула для механизма параллельной структуры с n степенями свободы имеет следующий вид [66]:

$$n = 6(Z - N - 1) + \sum_{i=1}^N \eta_i,$$

где Z – число всех звеньев механизма, включая неподвижное основание, N – число кинематических пар механизма, η_i – число степеней свободы каждой i -й пары.

Любой шарнир, имеющий несколько степеней свободы, теоретически можно рассматривать как совокупность одноподвижных шарниров, расположенных в одной точке. Так, например, шарнир Гука представляется собой два вращательных шарнира с перпендикулярными осями. Тогда без потери общности можно считать, что в данном примере все кинематические пары являются одноподвижными, а значит

$$n = 6(Z - N - 1) + N = 6Z - 5N - 6.$$

Также в этом случае в каждой цепи количество кинематических пар N_i будет на единицу больше количества подвижных промежуточных звеньев этой цепи Z_i .

Согласно К. Госслену [129] у «полностью параллельного» (англ. *fully parallel*) механизма количество кинематических цепей равно количеству степеней свободы выходного звена, значит

$$n = 6Z - 5N - 6 = 6(nZ_i + 2) - 5n(Z_i + 1) - 6 = nZ_i - 5n + 6.$$

Разделив на n и перераспределив слагаемые по разным частям уравнения, получим:

$$Z_i = 6 - \frac{6}{n}.$$

Очевидно, что в таком случае при $n = 4$ или $n = 5$ число подвижных звеньев в каждой кинематической цепи должно быть дробным, что является невозможным. Если же предположить, что четырехстепенной механизм имеет две кинематических цепи, каждая из которых содержит две приводные пары, то значение Z_i будет равно нулю, что тоже физически невозможно. Стоит отметить,

что формула Чебышева – Граблера – Кутцбаха не учитывает тип и расположение кинематических пар. Поэтому, принципиально, создание механизмов с четырьмя и пятью степенями свободы и идентичными кинематическими цепями является решаемой задачей [4, 161, 176, 187, 207, 268], которая, однако, представляет больше теоретический, нежели практический интерес.

Наиболее распространенным способом создания устройств с четырьмя степенями свободы на основе механизмов параллельной структуры является использование дополнительных манипуляторов или приводов, не связанных кинематически с основным механизмом. Так, примерами могут служить упомянутые ранее роботы Mitsubishi RP-5ADH и ABB IRB 340 FlexPicker. Первый робот имеет отдельные приводы для вертикального перемещения и поворота исполнительного органа вокруг вертикальной оси, второй – только привод поворота. Оба устройства реализуют так называемое движение Шёнфлиса (англ. *Schöenflies motion*), т.е. перемещение в пространстве по трем координатам и вращение вокруг заданной оси. Данный тип движения выходного звена является самым востребованным из всех вариантов, характеризующихся четырьмя степенями свободы.

Другим примером реализации кинематической развязки для получения четырех степеней свободы является робот PAMINSA (рисунок 1.15), разработанный в Национальном институте прикладных исследований (г. Ренн, Франция) С. Брио и В. Аракеляном [84]. Механизм имеет три основных кинематических цепи, использующих вращательные кинематические пары и пантограф, соединенные таким образом, что подвижная платформа имеет три степени в плоскости. По сути, выбранная схема некотором смысле является эквивалентной схеме плоского 3-RPR механизма. Вертикальное перемещение осуществляется с помощью отдельного привода, присоединенного к пантографам основных цепей с помощью вращательного шарнира. Несмотря на то, что в рамках исследовательской программы было создано целое семейство похожих манипуляторов, продемонстрировавших хорошие эксплуатационные характеристики [68, 82], все они так и остались на стадии прототипов.

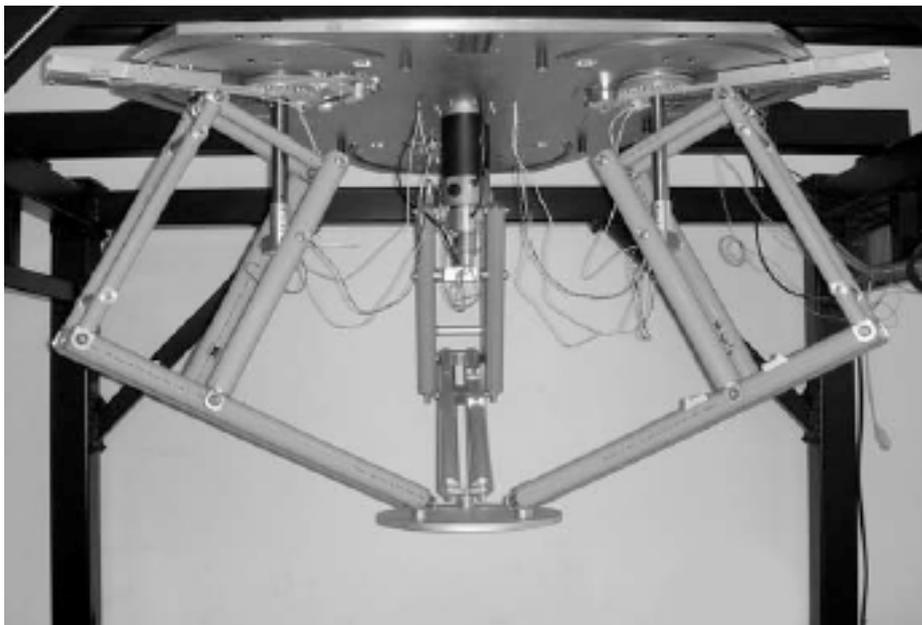


Рисунок 1.15. Манипулятор PAMINSA с четырьмя степенями свободы

Что касается механизмов с пятью степенями свободы, то наиболее интересной является возможность их применения в различного рода многокоординатных обрабатывающих станках и комплексах [48, 120, 142, 178, 229, 249, 259]. Это обусловлено тем, что недостающая шестая степень свободы обеспечивается вращением шпинделя. Однако, как уже было отмечено, создание полностью параллельных механизмов с пятью степенями возможно только при соблюдении определенных условий, реализация которых на практике сопряжена со значительными трудностями, обусловленными различными производственными погрешностями. Поэтому подход к созданию таких механизмов, предназначенных для практического применения, схож с описанным выше для механизмов с четырьмя степенями свободы.

Хорошим примером, демонстрирующим возможный подход к созданию механизмов параллельной структуры с пятью степенями свободы выходного звена, может служить робот Penta-WH (рисунок 1.16), разработанный группой под руководством Х. У в Технологическом университете Лаппеэнранта [257, 258]. Данный робот состоит, по сути, из двух механизмов параллельной структуры. Механизм 3-UPS осуществляет позиционирование промежуточной подвижной платформы. Ориентация данной платформы не играет роли. Вращение (относительно двух осей) выходного звена, связанного с промежуточной

подвижной платформой, обеспечивается механизмом 2-UPS. Назначение робота – обработка внутренних поверхностей вакуумной камеры экспериментального термоядерного реактора ITER. Для этого подразумевается установка устройства на подвижном основании, перемещающемся внутри камеры по специальным рельсовым направляющим.

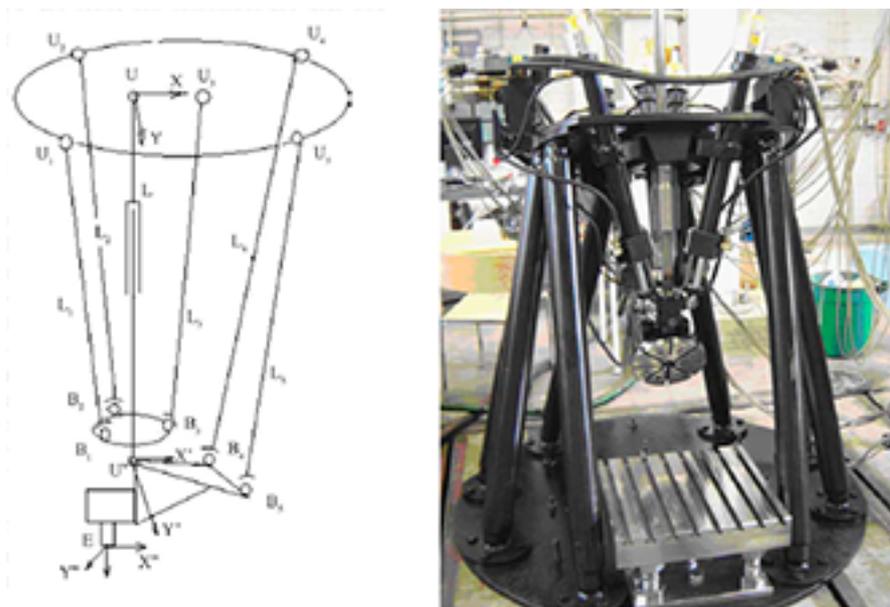


Рисунок 1.16. Кинематическая схема и прототип механизма Penta-WH

Также заслуживает внимания устройство, разработанное группой В.А. Глазунова в ИМАШ РАН и предназначенное для позиционирования лазерной головки в процессе селективного лазерного плавления [49, 67] (рисунок 1.17). Основной частью данного устройства является плоский механизм со структурой 4-RPR. Наличие четырех кинематических цепей вместо трех в данном случае продиктовано необходимостью повышения жесткости и устойчивости механизма при его работе. Первые вращательные шарниры цепей расположены попарно на суппортах линейного перемещения, движение которых осуществляется синхронно в направлении, перпендикулярном плоскости основного механизма. Наконец, лазерная головка имеет возможность поворота вокруг оси, лежащей в плоскости основного механизма, и приводится отдельным приводом, расположенным на выходном звене. Данный механизм таким образом имеет пять степеней свободы: три поступательных и две вращательных.

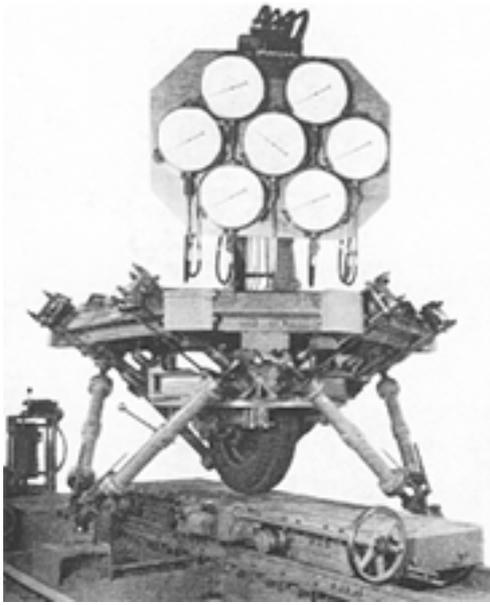


Рисунок 1.17. Прототип устройства для позиционирования лазерной головки

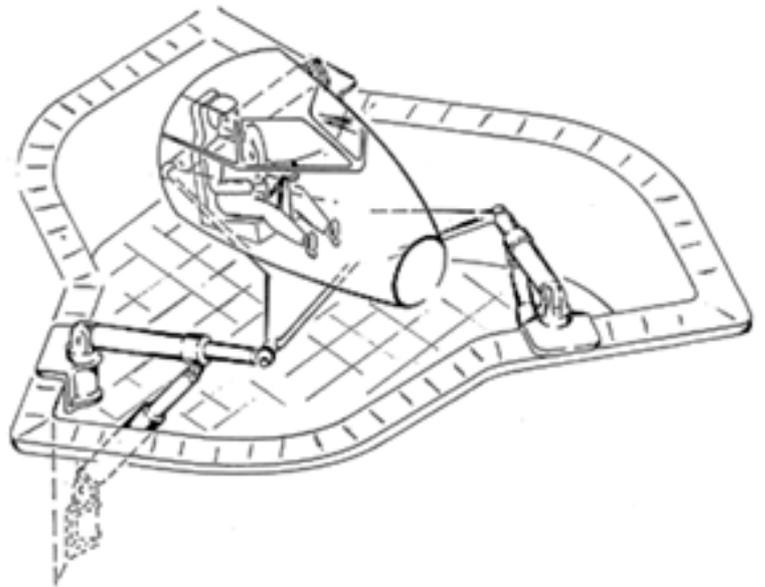
Рассмотрение механизмов с шестью степенями свободы целесообразно начать со схемы 6-UPS, являющейся, возможно, самой известной среди механизмов параллельной структуры и имеющей несколько устоявшихся в научной литературе названий: «платформа Стюарта», «платформа Гофа – Стюарта», «гексапод». В подобных механизмах основание соединено с выходным звеном посредством шести штанг изменяемой длины с использованием шарниров Гука и сферических шарниров, места крепления которых, как правило, располагаются около вершин правильного треугольника или шестиугольника.

Принято считать, что впервые работоспособное и примененное на практике устройство данного типа было спроектировано работником компании Dunlop Э. Гофом для испытаний автомобильных покрышек (рисунок 1.18.а). Несмотря на то, что данная машина функционировала с 1954 года, впервые ее описание в периодической научной литературе было опубликовано только в 1962 году [140]. В 1965 году Д. Стюарт предложил [232] похожий механизм (рисунок 1.18.б) для использования в авиационном тренажере. Одним из рецензентов работы Д. Стюарта был Э. Гоф, который указал на тот факт, что подобный механизм уже

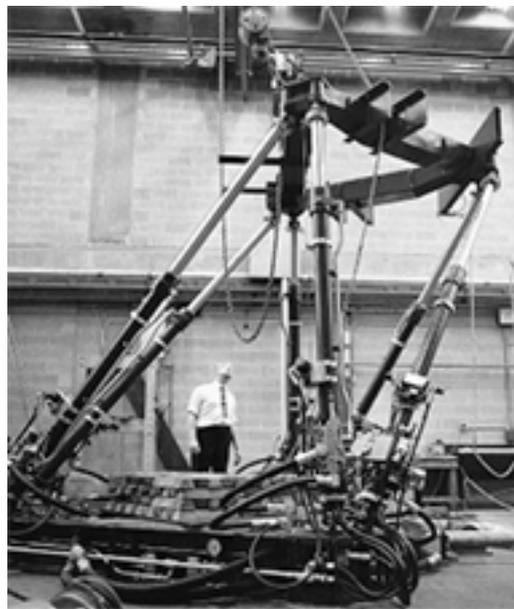
существует. Несмотря на то, что Э. Гоф разработал свое устройство раньше, чем Д. Стюарт, данный механизм чаще называют «платформой Стюарта». При этом вариант, предложенный В. Стюартом, отличался по своей структуре и в итоге так и не был реализован на практике. Таким образом, название «платформа Стюарта» закрепилось за механизмом, разработанным именно Э. Гофом, а не Д. Стюартом.



а.



б.



в.

Рисунок 1.18. Механизмы параллельной структуры 60-х годов XX века с шестью степенями свободы: машина для тестирования покрышек Э. Гофа (а), механизмы для авиатренажеров Д. Стюарта (б) и К. Каппеля (в)

Стоит также отметить, что в 1964 году в США К. Каппель подал заявку в патентное бюро на механизм (рисунок 1.18.в), аналогичный созданному Э. Гофом, которая была удовлетворена в 1967 году [92]. Данный механизм, как и разработка Д. Стюарта, предназначался для применения в авиационных тренажерах. Различные авто- и авиатренажеры остаются одной из основных областей применения подобных механизмов [62, 74, 210, 211, 269, 271]. Примером может служить авиасимулятор фирмы Lockheed-Martin, предназначенный для обучения и тренировки пилотов самолета Boeing 777 (рисунок 1.19). Кроме того, в настоящее время механизмы типа «гексапод» в различных вариациях успешно применяются:

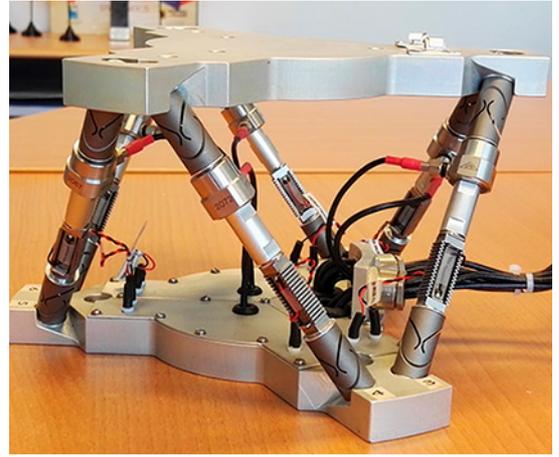
- в устройствах ориентации антенн и телескопов (как наземных, так и космических) [102, 127, 238, 253, 264, 270] (рисунок 1.20.а);
- в качестве конструкций, обеспечивающих активную виброизоляцию и демпфирование колебаний [64, 100, 145, 197, 218] (рисунок 1.20.б);
- в позиционирующих и направляющих устройствах для хирургических вмешательств [81, 193, 224, 239, 252] (рисунок 1.20.в);
- в многокоординатных металлообрабатывающих станках и станочных приспособлениях [73, 205, 209, 212, 242, 254] (рисунок 1.20.г);
- в устройствах точного позиционирования [88, 106, 121, 143] (рисунок 1.20.д);
- в измерительном оборудовании [45, 158, 199] (рисунок 1.20.е).



Рисунок 1.19. Авиасимулятор фирмы Lockheed-Martin



а.



б.



в.



г.



д.



е.

Рисунок 1.20. Примеры применения «гексаподов»: радиотелескоп АМiBA (а), система активного демпфирования колебаний фирмы MicroMega (б), вспомогательное устройство для хирургии позвоночника фирмы MPS Microsystems (в), многокоординатный станок OKUMA PM-600 (г), устройство точного позиционирования фирмы ALIO (д), координатно-измерительная машина КИМ-1000 производства ООО «Лапик» (е)

Стоит отметить, что практическое применение платформы Гофа – Стюарта, безусловно, не ограничивается приведенными выше примерами.

Кинематическая схемы 6-PUS (или 6-PSU, 6-PSS), в которой линейный привод каждой цепи расположен непосредственно на основании, также заслуживает упоминания. Самым известным примером является металлообрабатывающий станок Hexaglide (рисунок 1.21), разработанный в Швейцарской высшей технической школе Цюриха [146].

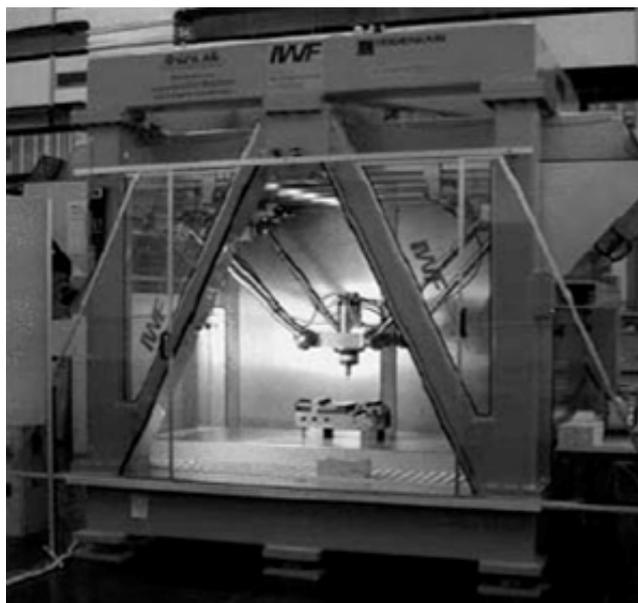


Рисунок 1.21. Металлообрабатывающий станок Hexaglide

Механизм параллельной структуры, лежащий в основе данного станка, имеет три линейных направляющих, параллельных друг другу, на каждой из которых находится по две каретки.

Также заслуживают внимания схемы с вращательными приводными парами (6-RUS, 6-RSU, 6-RSS). В этом случае телескопическая штанга с линейным приводом заменяется кривошипом, расположенным на основании. Впервые такое решение было предложено К. Хантом в 1983 году [150]. Спустя почти десять лет Ф. Пьеро и М. Утияма предложили [208] похожий механизм Неха (рисунок 1.22.а), являющийся во многом обобщением идей, заложенных в механизме Delta. Робот на основе данного механизма был изготовлен фирмой Toyota Machine Works. Также распространение имеют механизмы данной схемы, кинематические цепи которых

расположены аналогично цепям в классическом варианте «гексапода». В качестве примера устройства на базе такого механизма можно назвать шестистепенную подвижную платформу серии «W» фирмы SKAS (рисунок 1.22.б). Основная область применения данной платформы – различные симуляторы движения.



а.



б.

Рисунок 1.22. Примеры роботов, основанных на 6-RUS механизме: Неха фирмы Toyota Machine Works (а), шестистепенная подвижная платформа серии «W» фирмы SKAS (б)

Еще одним примером механизма с шестью степенями свободы является трипод, разработанный в ИМАШ РАН Л.И. Тывесом и П.О. Данилиным [5, 47]. В данном механизме реализован принцип кинематической развязки между поступательным и вращательным движением выходного звена (рисунок 1.23). Так, для осуществления поступательного перемещения в каждой кинематической цепи имеется линейный привод, соединенный с выходным звеном посредством параллелограмма. При этом условным выходным звеном данного поступательно-направляющего механизма с параллелограммами является сферический механизм, который, в свою очередь, приводится в движение посредством вращательных приводов, установленных на основании. Вращение приводов передается сферическому механизму через дополнительную штангу, закрепленную на соответствующем параллелограмме и имеющую возможность поворота вокруг собственной оси. Таким образом достигается независимость движения сферической и поступательной частей манипулятора.

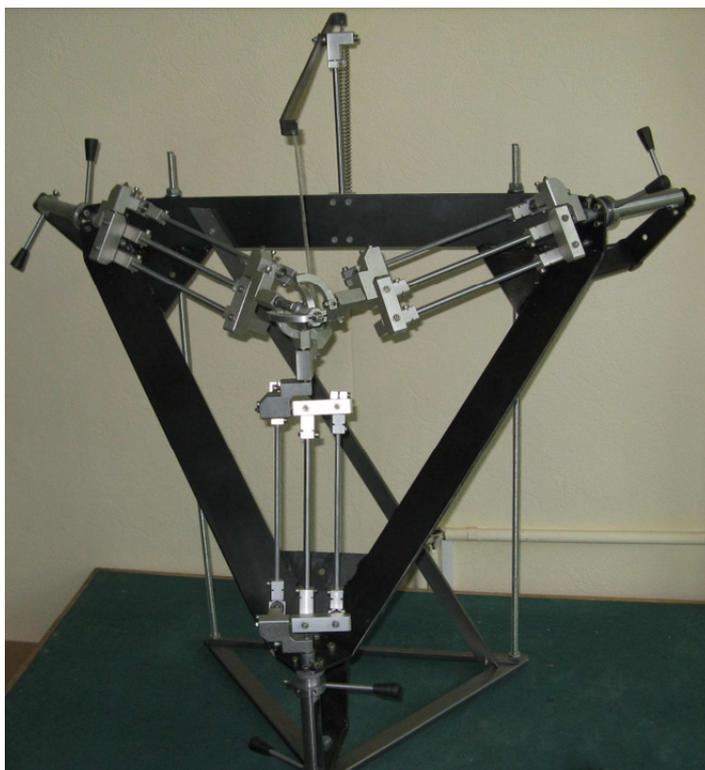


Рисунок 1.23. Манипулятор-трипод ИМАШ РАН с шестью степенями свободы

Подводя итог, можно с уверенностью констатировать, что в настоящее время механизмы параллельной структуры активно применяются в самых разных областях техники. Приведенный в данном параграфе обзор, безусловно, не является полным и не охватывает все множество разработанных и исследованных структурных схем таких механизмов, а также не демонстрирует всех возможных вариантов их применения. Основное внимание в данном случае было уделено устройствам, представляющим наибольший практический интерес и реализованным в виде коммерческих продуктов, а также некоторым заслуживающим упоминания прототипам.

1.3. Определение понятия «особое положение» для механизмов последовательной и параллельной структуры

Как уже было отмечено, наличие так называемых особых положений (сингулярностей) принято считать одним из главных недостатков параллельной

кинематики. В широком смысле под этим термином можно понимать такие положения рабочего органа и промежуточных звеньев механизма, в которых происходит мгновенное изменение его определенных свойств. При этом чаще всего подразумевается изменение подвижности выходного звена: потеря степени свободы или его неконтролируемое перемещение [20, 189].

Для механизмов с последовательной структурой положение называется особым, если выходное звено теряет одну или несколько степеней свободы. При этом существует некоторая функция, характеризующая переход от скоростей в приводных кинематических парах к скоростям выходного звена. Поскольку упомянутые скорости представляют собой производные от входных (\mathbf{q}_a) и выходных (\mathbf{x}) координат, то данная функция имеет вид

$$\dot{\mathbf{x}} = F(\dot{\mathbf{q}}_a),$$

где $\dot{\mathbf{q}}_a$ и $\dot{\mathbf{x}}$ – векторы скоростей в приводных парах и выходных скоростей соответственно (здесь и далее все векторы считаются векторами-столбцами, если не указано иное).

Иначе данное выражение можно записать как

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J} \cdot \dot{\mathbf{q}}_a. \quad (1.1)$$

Матрица \mathbf{J} называется матрицей Якоби механизма.

При рассмотрении механизма с последовательной структурой необходимым и достаточным условием того, что он находится в особом положении, является вырождение матрицы \mathbf{J} , т.е. уменьшение ее ранга ниже максимально возможного значения [151, 164, 179, 247, 250].

Для механизмов с параллельной структурой условие (1.1) также соответствует возникновению особого положения. Однако для таких механизмов возможна не только потеря степени свободы выходным звеном, но и его неуправляемое движение, т.е. своего рода «приобретение» им степени свободы. В этом случае необходимо рассматривать обратную функцию и вырождение

соответствующей ей матрицы $\mathbf{J}_{об}$, называемой обратной матрицей Якоби механизма, такой что:

$$\dot{\mathbf{q}}_a = \mathbf{J}_{об} \cdot \dot{\mathbf{x}}. \quad (1.2)$$

Здесь важно заметить, что в общем случае матрица \mathbf{J} не является квадратной, поэтому, строго говоря, термин «обратная матрица Якоби», применяемый к $\mathbf{J}_{об}$ в выражении (1.2), не соответствует математическому определению обратной матрицы, хотя и является общеупотребимым в литературе теории механизмов параллельной структуры. По этой причине в данной работе для этой матрицы в общем случае не используется обозначение « \mathbf{J}^{-1} ». Однако, если число активных пар механизма равно числу его степеней свободы ($N_a = n$), то в этом случае матрица \mathbf{J} является квадратной и $\mathbf{J}_{об} = \mathbf{J}^{-1}$.

Также для данного класса механизмов является возможным движение в пассивных кинематических парах при неподвижном выходном звене и отсутствии движения в приводах, что делает необходимым учет скоростей в этих парах.

Таким образом, условие (1.1) не является достаточным для механизмов с параллельной кинематической структурой. Согласно Ж-П. Мерле [189], для таких механизмов целесообразно рассмотреть неявную функцию, в которой используется вектор перемещений во всех кинематических парах механизма \mathbf{q} :

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{q}) = 0, \quad (1.3)$$

Данная функция для механизма с n степенями свободы и общим числом кинематических пар N представляет собой систему из N линейных уравнений с $N + n$ неизвестными. Тогда особое положение механизма соответствует случаю, когда в указанной системе число линейно независимых уравнений меньше N .

Стоит заметить, что в своей книге Ж-П. Мерле использует уточняющий термин «кинематическая сингулярность» (англ. *kinematic singularity*), поскольку «особыми» или «сингулярными» в некоторых случаях могут называть конфигурации механизма, не связанные напрямую с изменением подвижности его звеньев. Так, Г. Лю и Ю. Лоу [180], а также К. Волхарт [256] изучали «особые

положения» второго порядка, рассматривая вторые производные по времени от неявных функций входных и выходных координат механизма. Все тот же Ж-П. Мерле, однако, отмечает [189], что данное исследование практически не имеет прикладного значения. Другим примером использования данного термина может служить работа И-М. Чэня и Х. Анджелеса [240], в которой рассматривается «сингулярность управления» (англ. *control singularity*), когда один привод передает движение на две кинематические пары. Кроме того, сам Ж-П. Мерле указывает, что «особым» можно так же называть положение механизма параллельной структуры с тросовыми приводами, в котором исчезает натяжение хотя бы в одном из тросов.

Тем не менее, в большинстве случаев под термином «особое положение» для механизмов параллельной структуры понимают такую конфигурацию его звеньев, при которой происходит хотя бы одно из следующих событий:

- потеря одной или нескольких степеней свободы выходным звеном механизма;
- возникновение неконтролируемой подвижности выходного звена механизма;
- возникновение неконтролируемой подвижности промежуточных звеньев механизма.

В дальнейшем в данной работе при отсутствии в тексте каких-либо иных определений или уточнений под «особыми» будут подразумеваться именно такие положения.

1.4. История и основные результаты исследования особых положений механизмов параллельной структуры

Принято считать, что исследование особых положений в механизмах, имеющих замкнутые кинематические цепи, берет свое начало в 70-х годах XX века. Так, в 1978 году К. Хант [148], рассматривая пространственный механизм, состоящий из одной замкнутой кинематической цепи (рисунок 1.24.а), ввел

понятие «конфигурации неопределенности» (англ. *uncertainty-configuration*) для такого положения, в котором возникает дополнительная подвижность звеньев этого механизма. При этом им была отмечена одна важная особенность: механизм нельзя вывести из указанного положения, если в движение приводится любая, но только одна, кинематическая пара. Таким образом, исчезает возможность передачи движения с привода на выходное звено. В 1982 году К. Сугимото совместно с Дж. Даффи и К. Хантом сформулировал критерий «особой конфигурации» (англ. *special configuration*) для механизмов, состоящих из одной замкнутой кинематической цепи [234]: если кинематические винты пар цепей взаимны какому-либо винту (или нескольким винтам), то выходное звено не может двигаться параллельно оси этого винта. Работы К. Ханта и К. Сугимото, как правило, признаются зарубежными учеными в качестве первых трудов, положивших начало исследованию особых положений механизмов параллельной структуры, несмотря на то, что они посвящены механизмам с одной замкнутой цепью, т.е. не являющимся «параллельными» согласно устоявшейся к настоящему времени терминологии.

В отечественной литературе данный вопрос впервые освещен в книге Ф.М. Диментберга [14], вышедшей в 1978 году, т.е. в один год с работой К. Ханта. Он, как и его зарубежные коллеги, рассматривает механизм, состоящий из одной замкнутой кинематической цепи с вращательными кинематическими парами и имеющий одну степень свободы (рисунок 1.24.б). При этом он называет «особенным» такое положение механизма, в котором возникает локальная мгновенная подвижность некоторой группы звеньев, входящих в цепь. Используя методы, развитые в своих более ранних работах [12, 13], Ф.М. Диментберг формулирует условие, согласно которому «мертвое» положение звена, соединенного с ведущей кинематической парой, соответствует такому «особенному» расположению других звеньев и пар цепи, в которых вектора угловых скоростей группы из нескольких ведомых пар образуют систему векторов эквивалентную нулю.

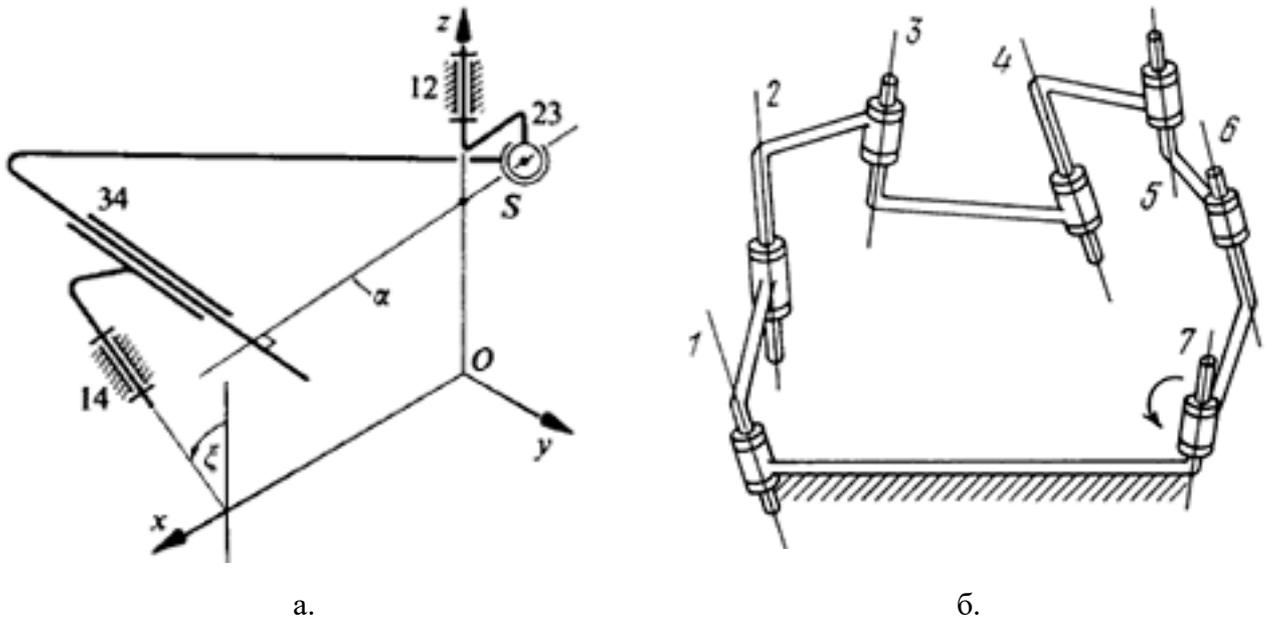


Рисунок 1.24. Пространственные механизмы с одной замкнутой кинематической цепью: рисунки из книг К. Ханта (а) и Ф.М. Диментберга (б)

В работах К. Ханта и Ф.М. Диментберга речь идет только об особых положениях, связанных с увеличением степени подвижности одноконтурного механизма, имеющего одну степень свободы. Поэтому сформулированных ими условий возникновения таких положений, очевидно, недостаточно для описания всех возможных типов изменения мгновенной подвижности механизмов параллельной структурой.

Следующим важным шагом в исследовании особых положений стала работа К. Госслена и Х. Анджелеса [131], в которой, в отличие от предшествующих исследований по данной теме, для математического описания условий возникновения особых положений и их классификации применяется не винтовое исчисление, а дифференцирование уравнений связи механизма. Суть метода заключается в том, что для механизма с n степенями свободы указанные уравнения записываются в виде n неявных функций от входных q_{ai} ($i = 1 \dots n$) и выходных x_j ($j = 1 \dots n$) координат:

$$F_i(x_1, \dots, x_n, q_{ai}) = 0.$$

При дифференцировании данных функций по времени получается система линейных уравнений

$$\mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} + \mathbf{B} \cdot \begin{pmatrix} \dot{q}_{a1} \\ \vdots \\ \dot{q}_{an} \end{pmatrix} = 0,$$

где \dot{q}_{ai} – скорость в i -й приводной паре, \dot{x}_i – скорость, соответствующая j -й выходной координате, а матрицы \mathbf{A} и \mathbf{B} имеют следующий вид:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial q_{a1}} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial F_n}{\partial q_{an}} \end{pmatrix}.$$

Данные матрицы используются для классификации особых положений на три типа:

- «Тип 1», при котором механизм теряет как минимум одну степень свободы, что соответствует условию $\det(\mathbf{B}) = 0$;
- «Тип 2», при котором выходное звено обладает возможностью перемещения даже при зафиксированных ($\dot{\mathbf{q}}_a = 0$) приводных парах, и соответствующий условию $\det(\mathbf{A}) = 0$;
- «Тип 3», объединяющий свойства 1-го и 2-го типов и соответствующий случаю одновременного вырождения матриц \mathbf{A} и \mathbf{B} .

Таким образом, с одной стороны, такой подход позволяет разделить различные типы особых положений, связав каждый из них с определенным критерием, с другой – предложить универсальный способ, позволяющую исследовать особые положения различных по своей структуре механизмов.

Данный метод, однако, имеет весьма существенные недостатки. Во-первых, он применим только к механизмам, у которых число степеней свободы равно числу приводных кинематических пар, поскольку матрицы \mathbf{A} и \mathbf{B} должны быть квадратными. Во-вторых, полностью игнорируются пассивные пары механизма и

скорости в них. Это приводит к тому, что второй тип особых положений связан с появлением только такой неуправляемой подвижности выходного звена, которая ограничена n изначально имеющимися степенями свободы, что было позже отмечено Д. Златановым совместно с самим К. Госсленом [276]. Таким образом, становится невозможным анализ ситуации, описанной К. Хантом и Ф.М. Диментбергом.

Не смотря на указанные недостатки, метод К. Госслена и Х. Анджелеса отличается относительной простотой. Данная особенность вместе с тем фактом, что значительная часть механизмов удовлетворяет условию применимости данного метода, позволило ему получить широкое распространение в анализе особых положений механизмов параллельной структуры.

В один год с работой К. Госслена и Х. Анджелеса была опубликована монография В.А. Глазунова [6], в нескольких главах которой также рассматриваются вопросы, связанные с анализом особых положений. В частности, описываются следующие возможные типы изменения подвижности механизма: потеря степени свободы выходным звеном, неконтролируемое перемещение выходного звена, а также возникновение мгновенной подвижности звеньев, обусловленной движением в пассивных парах при отсутствии движения в приводных парах. Для указанных типов особых положений рассматриваются условия их возникновения, описываемые при помощи математического аппарата винтового исчисления. Такой подход не игнорирует пассивные пары механизма, а значит обладает определенным преимуществом по сравнению с методикой К. Госслена и Х. Анджелеса.

Существенным недостатком метода, предложенного В.А. Глазуновым, является то, что в монографии при анализе особых положений рассматривается механизм с шестью степенями свободы. Несмотря на некоторую контринтуитивность, математические выражения, получаемые при использовании методов винтового исчисления для описания условия возникновения особых положений в механизмах с шестью степенями свободы, являются частным случаем условий, описывающих данный феномен в механизмах с меньшим числом

степеней свободы. Данное обстоятельство приводит к тому, что обозначенные в работе условия возникновения особых положений не всегда являются справедливыми для механизмов с меньшим количеством степеней свободы. Так, в качестве условия возникновения особого положения, приводящего к потере степени свободы, указывается вырождение матрицы Плюккеровых координат кинематических винтов хотя бы одной цепи. Такое условие применимо для механизмов, в которых число степеней свободы каждой i -й кинематической цепи (n_i) равно числу степеней свободы выходного звена: $n_i = n$, но не является достаточным, если $n_i \geq n$. Условием возникновения особого положения, связанного с возможностью неуправляемого движения выходного звена, является вырождение матрицы силовых винтов, взаимных кинематическим винтам пассивных пар цепей. Такая формулировка позволяет выявлять особые положения, относящиеся ко второму типу по классификации К. Госслена и Х. Анджелеса, равно как и особые положения, описанные К. Хантом и Ф.М. Диментебргом, в рамках одного условия. Разделение указанных видов особых положений при этом невозможно, несмотря на принципиальное различие в характере степеней свободы выходного звена механизма, находящегося в таком положении.

Наиболее полная классификация особых положений для механизмов как последовательной, так и параллельной структуры была представлена Д. Златановым в 1995 году [277]. В данном исследовании рассматривается записанная в матричной форме система уравнений, называемая автором «уравнением скоростей» (англ. *velocity equation*), и включающая в себя скорости активных и пассивных кинематических пар механизма, а также выходные скорости:

$$\Lambda \cdot \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{q}}_a \\ \dot{\mathbf{q}}_p \end{pmatrix} = 0, \quad (1.4)$$

Матрица Λ имеет размер $N \times (N + n)$. Можно заметить, что выражение (1.4) по сути идентично выражению (1.3). Это обусловлено тем, что Ж-П. Мерле для

определения термина «особое положение» использовал классификацию Д. Златанова.

В рассматриваемой работе выделено шесть типов особых положений:

- RI (англ. *redundant input*). Характеризуется существованием ненулевых векторов скоростей в парах $\dot{\mathbf{q}}_a \neq 0$ и $\dot{\mathbf{q}}_n \neq 0$, являющихся решением системы (1.4) при нулевом векторе выходных скоростей $\dot{\mathbf{x}} = 0$. Данный тип особых положений по своему физическому смыслу соответствует «Типу 1» по классификации К. Госслена и Х. Анджелеса, т.е. потере степени свободы выходным звеном;
- RO (англ. *redundant output*). Соответствует ситуации, в которой существуют ненулевые вектора выходных скоростей $\dot{\mathbf{x}} \neq 0$ и скоростей в пассивных парах $\dot{\mathbf{q}}_n \neq 0$, являющиеся решением системы (1.4) при нулевом векторе скоростей в приводных парах $\dot{\mathbf{q}}_a = 0$. Это означает, что при зафиксированных активных парах возможно неконтролируемое (в теории – бесконечно малое) перемещение частей механизма, включая выходное звено. Такой тип особых положений по своему физическому смыслу близок к «Типу 2» по классификации К. Госслена и Х. Анджелеса;
- П (англ. *impossible input*). Определяется существованием ненулевого вектора скоростей в приводных парах $\dot{\mathbf{q}}_a \neq 0$, при котором система (1.4) не имеет решений;
- IO (англ. *impossible output*). Характеризуется наличием ненулевого вектора выходных скоростей $\dot{\mathbf{x}} \neq 0$, при котором система (1.4) не имеет решений;
- ПМ (англ. *increased instantaneous mobility*). Соответствует ситуации, когда ранг матрицы Λ из системы (1.4) становится меньше, чем N , что проявляется возникновением дополнительной мгновенной подвижности механизма. Особые положения данного типа соответствуют конфигурациям, рассмотренным К. Хантом и Ф.М. Диментбергом в своих работах, а также включают в себя вырождение связей, описанное Д. Златановым и К. Госсленом в работе [276]. Отличие от указанной работы заключается в том,

что в данном случае рассматривается изменение мгновенной подвижности механизма в целом, а не только его выходного звена;

- RPM (англ. *redundant passive motion*). Определяется существованием ненулевого вектора скоростей в пассивных парах $\dot{\mathbf{q}}_п \neq 0$, являющегося решением системы (1.4) при нулевом векторе выходных скоростей $\dot{\mathbf{x}} = 0$ и нулевом векторе скоростей в активных парах $\dot{\mathbf{q}}_а = 0$. В данном случае при зафиксированных приводах и неподвижном выходном звене возможно движение в пассивных кинематических парах механизма.

Помимо классификации особых положений и математического описания критериев их возникновения в работе отмечена одна важная особенность: любое реально возникающее в механизме особое положение обязательно принадлежит как минимум одному из R-типов (RI, RO, RPM) и I-типов (II, IO, IIM) одновременно. При этом показано, что всего существует 21 возможная комбинация, если число активных кинематических пар N_a равно числу степеней свободы механизма n , или 27, если $N_a \geq n$ [278]. В последнем случае, а также при $m > n$ математическая формулировка критериев возникновения особых положений несколько изменяется.

Несмотря на обширность и полноту данного исследования, предложенный Д. Златановым подход не лишен недостатков, являющихся, по сути, обратной стороной его достоинств. Так, например, обобщенность рассматриваемой классификации особых положений зачастую может оказаться избыточной при практическом применении. В частности, при $N_a = n$ особые положения типов II и IO возникают только совместно с типами RO и RI, соответственно, или оба одновременно с типом RPM. При этом особое положение типа RI подразумевает, как было отмечено, потерю степени свободы выходным звеном. Очевидно, что в таком случае движение, соответствующее этой степени свободы, невозможно, т.е. существует ненулевой вектор выходных скоростей $\dot{\mathbf{x}} \neq 0$, при котором система (1.4) не будет иметь решений. Таким образом, определение особого положение типа RI уже подразумевает возникновение особого положения типа IO. Иными словами, положения типов II и IO сами по себе не характеризуют изменение подвижности механизма. Кроме того, вычисление компонентов матрицы Λ является заметно

более сложной задачей, нежели вычисление компонентов матриц **A** и **B**, необходимых для использования метода К. Госслена и Х. Анджелеса. Еще больше усложняет задачу то, что при расчетах по данному методу исследуется подвижность всех элементов механизма, а не только его выходного звена, даже в тех случаях, когда в этом нет необходимости.

Таким образом, к настоящему времени различными учеными проделана большая работа и получены значимые результаты в области классификации особых положений механизмов параллельной структуры. Однако в то же время все предложенные методы имеют свои недостатки, и не один из них не принят научным сообществом в качестве единого и универсального.

1.5. Проблемы, связанные с особыми положениями, и пути их решения

Описанные в предыдущих параграфах типы особых положений и соответствующие каждому из них изменения в подвижности выходного звена или механизма в целом наглядно демонстрируют почему существование таких положений принято считать одним из главных недостатков механизмов параллельной структуры. Очевидно, что наличие данного недостатка не могло не побудить исследователей искать различные пути его устранения или уменьшения его влияния на характеристики различных манипуляционных и робототехнических устройств. При этом, наиболее радикальным и действенным решением данного вопроса могло бы быть создание механизмов, у которых особые положения отсутствуют вообще. Пользуясь классификацией Д. Златанова, рассмотрим такую возможность для разных типов особых положений.

Самыми простыми для рассмотрения в таком ключе являются особые положения типов ПМ и РРМ. Ясно, что в любом механизме, у которого максимально возможная степень подвижности каждой кинематической цепи равна числу степеней свободы механизма, особые положения данных типов возникнуть

не могут. Такому условию удовлетворяют, например, все гексаподы, кинематические цепи которых включают по одному шарниру типов U и S, в то время как для схем с двумя S-шарнирами любая конфигурация механизма представляет собой особое положение типа RPM, поскольку вращение звена, соединяющего эти шарниры вокруг своей оси никак не ограничено.

Рассмотрим теперь особые положения типа RI (и, соответственно, IO). Очевидно, что если выходное звено находится на границе рабочей зоны механизма, количество его степеней свободы уменьшается как минимум на одну, т.к. дальнейшее движение выходного звена за пределы рабочей зоны невозможно при эксплуатации в штатном режиме. Для любого механизма, у которого между первой и последней парами каждой цепи имеются вращательные пары, все точки, расположенные на границе рабочей зоны, соответствуют особым положениям типа RI [189]. В подавляющем большинстве случаев внутри рабочей зоны точки особых положений данного типа отсутствуют. Контрпример плоского 3-PRP был представлен И. Боневым совместно Д. Златановым и К. Госсленом [79], однако подобные механизмы на практике не применяются. Если же в каждой цепи между ее первой и последней парами расположены только призматические пары, то математически рабочая зона механизма ограничивается неравенствами, характеризующими конструктивные ограничения данных пар. Поскольку указанные неравенства не входят в систему уравнений связи механизма, формально точки особых положений рассматриваемого типа на границе рабочей зоны отсутствуют, т.к. сами уравнения связи в данном случае теоретически допускают ее бесконечный размер. Физически, однако, ограничение на перемещение выходного звена существует. Таким образом, создание механизмов параллельной структуры, у которых отсутствуют особые положения типа RI, является возможным. При этом на практике граница рабочей зоны все равно состоит из точек, при попадании в которые выходное звено, по сути, теряет степень свободы. Примером подобных механизмов может служить все тот же гексапод, выполненный по схеме 6-UPS.

Самым «проблемным» типом особых положений является RO (и, соответственно, II). Наиболее подробно вопрос структурного синтеза механизмов, у которых особые положения любого, в том числе и рассматриваемого, типа отсутствуют внутри рабочей зоны, изучен в работах М. Карригато [93, 94], посвященных поступательно-направляющим механизмам параллельной структуры. В данных работах представлена классификация возможных кинематических цепей таких механизмов и приведены соответствующие примеры. Отсутствие особых положений объясняется тем, что у всех предлагаемых автором механизмов, их матрица Якоби неизменна и ортогональна в любой точке рабочего пространства. Поскольку определитель ортогональной матрицы всегда равен ± 1 особые положения типов RI и RO в таком механизме невозможны, не считая точек, лежащих на границе рабочей зоны. Кроме того, подобный механизм будет также полностью изотропным, т.е. имеющим одинаковые кинематические характеристики (например, передаточное отношение) для всех направлений движения выходного звена в любой точке рабочей зоны. Ортогональность матрицы **J** обеспечивается кинематической развязкой движений выходного звена механизма. Такой вариант позволяет также легко решать задачи кинематики механизма, а значит серьезно упростить управление им [7, 175, 262]. Однако наличие кинематической развязки, т.е. возможности независимого управления некоторыми (частичная развязка) или всеми (полная развязка) степенями свободы выходного звена по отдельности (каждая степень свободы приводится в движение своим приводом), имеет и свои недостатки, основным из которых является то, что внешняя нагрузка не перераспределяется между кинематическими цепями и приводами механизма. Это приводит к тому, что такие механизмы имеют меньшую жесткость и испытывают большую нагрузку на приводы, чем полностью параллельные механизмы, что существенно ограничивает практическую применимость такого подхода для борьбы с особыми положениями типа RO. Так, например, ни один из промышленно производимых роботов, представленных в п. 1.2, не имеет полной кинематической развязки. Примером механизма, рабочая зона которого (кроме ее границы) свободна от особых положений может служить

3-PRRR манипулятор Tripteron, и его вариации, разработанные в Университете Лавалья под руководством К. Госслена [130, 136, 214, 222] (рисунок 1.25).

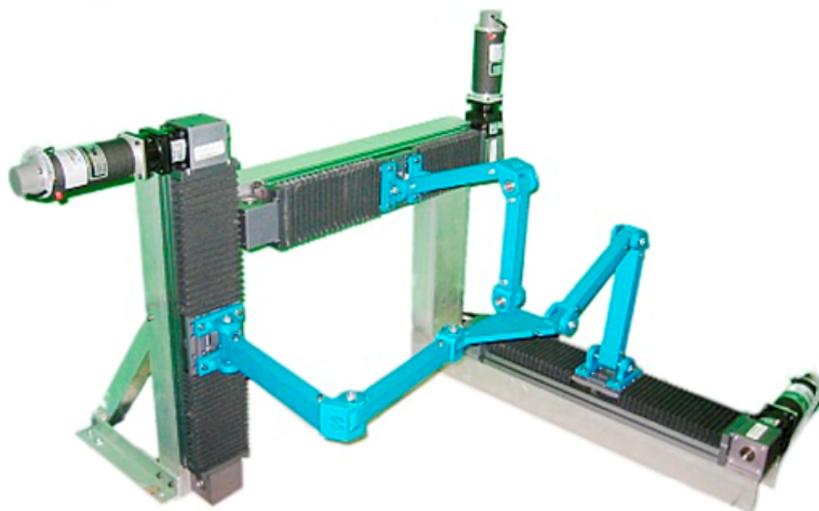


Рисунок 1.25. Tripteron – пример механизма с рабочей зоной, свободной от особых положений

Таким образом, создание механизмов параллельной структуры, у которых фундаментально отсутствуют особые положения, является возможным. Однако в зависимости от типа особых положений решение данной задачи так или иначе ограничено механизмами, отвечающими определенным условиям. На настоящий момент обобщенный метод структурного синтеза, гарантирующий отсутствие особых положений внутри рабочего пространства, разработан только для поступательно-направляющих механизмов. При этом решение данной задачи путем введения кинематической развязки, реализуемой за счет использования дополнительных приводов, не входящих непосредственно в структурную схему механизма, в данном случае не рассматривается.

Другой способ борьбы с особыми положениями заключается в изменении структуры механизма путем введения разных видов «избыточности», или «резервирования» (англ. *redundancy*), которую в механизмах параллельной структуры принято разделять на три типа [206]:

- кинематическая избыточность (англ. *kinematic redundancy*). В этом случае хотя бы одна из кинематических цепей имеет контролируемую подвижность больше необходимой, что позволяет при неподвижном выходном звене

изменять относительную ориентацию промежуточных звеньев. При этом степень (контролируемой) подвижности механизма в целом больше количества его степеней свободы ($m > n$);

– приводная избыточность (англ. *actuation redundancy*). Характеризуется наличием как минимум одной избыточной связи, наложенной на выходное звено, контролируемой дополнительным приводом. В этом случае число активных пар механизма больше, чем необходимо для его управления, т.е. $N_a > n$;

– сенсорная (измерительная) избыточность (англ. *measurment redundancy*). Данный тип избыточности подразумевает, что количество датчиков, измеряющих различные геометрические параметры, изменяющиеся в процессе работы механизма (углы между звеньями, длины телескопических штанг и т.д.), больше количества приводных кинематических пар механизма.

Для борьбы с особыми положениями чаще всего используется приводная избыточность [101, 107, 117, 153, 200, 236], и, чуть реже, кинематическая [96, 114, 134, 248]. Очевидным недостатком такого подхода в первом случае является усложнение системы управления и статическая неопределимость механизма, а во втором – увеличение количества звеньев, шарниров и приводов устройства, что увеличивает его стоимость, а также усложняет процесс конструирования. Можно заметить, что среди примеров реально используемых для различных задач механизмов, рассмотренных ранее в п. 1.2, отсутствуют манипуляторы с приводной или кинематической избыточностью.

Задачу исключения точек, соответствующих особым положениям, или уменьшения областей рабочей зоны, отделенных данными точками, можно также решать путем параметрического синтеза без изменения структуры механизма. Иными словами, можно подбирать геометрические размеры и накладывать конструктивные ограничения таким образом, чтобы реальная рабочая зона устройства имела, по возможности, наименьшее количество указанных точек. Так, например, группа И. Бонева показала [91], что размеры звеньев робота Mitsubishi RP-5ADH подобраны таким образом, что точки, соответствующие особым

положениям типов RI и RO, расположены вблизи границы теоретической рабочей зоны механизма (рисунок 1.26). Дополнительное ограничение рабочего пространства до прямоугольника размером 297×210 мм позволило полностью исключить особые положения из рабочего пространства.

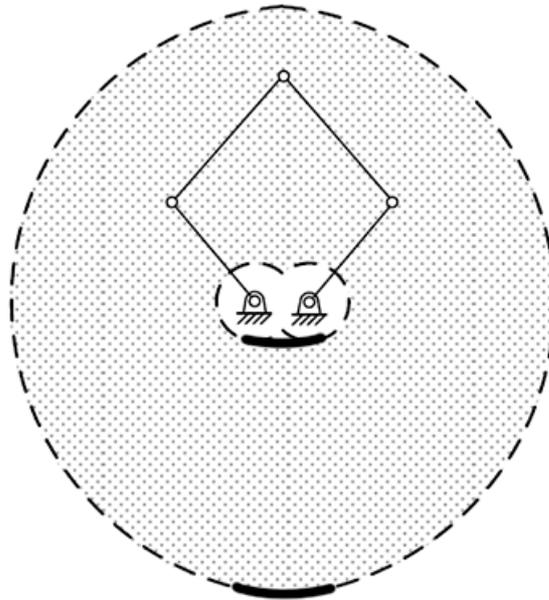


Рисунок 1.26. Теоретическая рабочая зона работы Mitsubishi RP-5ADH: штриховая линия – точки особых положений типа RI, жирная сплошная линия – типа RO

Подход, связанный с использованием параметрического синтеза для борьбы с особыми положениями, очевидно, также имеет свои недостатки. Так, любые ограничения, накладываемые на геометрию механизма, скорее всего приведут к уменьшению максимально возможной с точки зрения теории рабочей зоны. Однако поскольку любой применяемый на практике механизм все равно будет иметь те или иные конструктивные ограничения, всегда имеет смысл рассмотрение возможности использования этих ограничений для частичного или полного исключения точек особых положений из рабочей зоны проектировании конечного устройства.

Задача оптимального с точки зрения уменьшения влияния особых положений на работоспособность механизма параметрического синтеза осложняется тем, что негативные эффекты проявляются не только непосредственно в этих положениях, но и в определенной близости к ним. Так, например, хорошо известно [189], что

вблизи особых положений «Типа 1» по классификации К. Госслена и Х. Анхелеса существенно возрастают скорости в приводных парах, а вблизи «Типа 2» увеличиваются нагрузки на шарниры и звенья. Таким образом, выработка различных критериев и условий, позволяющих оценить близость к особым положениям, представляет собой важную задачу.

Само понятие близости к особым положениям можно определить двумя различными способами:

- собственно расстоянием от исследуемой точки рабочей зоны до ближайшей точки, соответствующей особому положению, измеренное в единицах длины или величины угла;
- значением некоторого индекса, характеризующего изменение каких-либо физических характеристик механизма или свойств расчетной математической модели.

Первый способ подходит только для механизмов, у которых все степени свободы имеют один тип (только поступательные или только вращательные). Однако даже в таком случае рассмотрение разного рода индексов и критериев близости к особым положениям, не связанных с расстоянием до них, все равно имеет смысл, поскольку не исключены ситуации, когда в двух точках, находящихся на одном расстоянии от точки особого положения, какие-либо характеристики механизма могут значительно отличаться.

За последние десятилетия, исследователями были предложены различные способы, позволяющие характеризовать близость к особым положениям механизмов параллельной структуры [65, 72, 87, 99, 132, 190, 235].

Одним из наиболее известных критериев близости к особым положениям является «индекс манипулируемости» (англ. *manipulability index*), введенный Т. Ёсикавой и определяемый, следующим образом [265]:

$$w = \sqrt{\det(\mathbf{J}\mathbf{J}^T)}.$$

Для квадратной матрицы \mathbf{J} данный индекс представляет собой абсолютное значение ее определителя. Чем ближе механизм к особому положению, тем меньше

будет значение данного параметра. Также близким по своей сути является использование обратного числа обусловленности матрицы Якоби механизма. Однако данные индексы, хотя и могут быть применены для оценки близости к особым положениям, не имеют ясного физического смысла, особенно в том случае, если механизм реализует разные по своей природе степени свободы выходного звена. Также данные индексы не дают возможности определить конкретный тип особых положений, для которого оценивается близость. Кроме того, Ж.-П. Мерле для 6-UPS робота INRIA Left Hand описан случай [189] увеличения значения индекса манипулируемости в непосредственной близости от особого положения.

Другим параметром, который достаточно часто используется для оценки близости к особым положениям является наименьший угол давления. Так, например, Ю. Такеда и Х. Фунабаси использовали [118, 237] «передаточный индекс» (англ. *transmission index*), следующего вида:

$$TI = \min(\cos \alpha_1, \cos \alpha_2, \dots, \cos \alpha_U),$$

где α_i – угол давления между вектором скорости выходного звена в точке его соединения с i -й кинематической цепью (при условии, что в i -й цепи $\dot{q}_{ai} \neq 0$, а во всех остальных цепях $\dot{q}_{ai} = 0$) и вектором силы, передаваемой этой цепью. В особом положении хотя бы один из углов α_i должен быть равен 90° , а индекс, соответственно, нулю. Задаваясь некоторым минимальным критическим значением индекса, авторы в рамках указанных работ строили эффективное рабочее пространство механизмов параллельной структуры. Похожим образом углы давления были использованы В.А. Глазуновым с соавторами для анализа особых положений и близости к ним [10], а также обоснования применения изменяемой структуры цепей механизмов с целью увеличения их эффективного рабочего пространства [69, 70]. Несмотря на то, что углы давления характеризуют передачу усилия с приводов на выходное звено, их применение также имеет свои недостатки. Главным минусом при этом является сложность определения минимально допустимых значений углов давления, при которых механизм находится «слишком близко» к особому положению. При этом реальное движение

выходного звена и внешняя нагрузка могут быть любыми, а значит при одном и том же значении угла давления соответствовать разным по величине нагрузкам на цепи. Кроме того, для механизмов со смешанными степенями свободы эта задача дополнительно усложняется необходимостью одновременного рассмотрения различных по своей природе скоростей или усилий. Так, например, Ю. Такеда и Х. Фунабаси для каждого из шести видов единичного нагружения (три единичных силы и три единичных момента) моделировали по 10000 случайных кинематических параметров, из которых затем выбирали соответствующее минимально допустимое значение угла давления. Также не была проверена работоспособность данного подхода на механизмах, в которых возможны особые положения типа ПМ по классификации Д. Златанова.

Как уже было отмечено, близость к особым положениям «Типа 2» по классификации К. Госслена и Х. Анджелеса характеризуется увеличением нагрузки на кинематические цепи, а значит и на приводы механизма. Следовательно, значение реакции цепи или усилия в приводе представляют собой естественные критерии близости к особым положениям указанного типа. Преимуществом подобного критерия над упомянутыми ранее заключается в более широких возможностях практического применения. Действительно, зная нагрузки, действующие на цепи, можно рассчитать напряжения в звеньях цепи, реакции в шарнирах или требуемые характеристики привода. В этом случае допустимое значение критерия близости может быть определено исходя из того, что в процессе эксплуатации указанные выше величины не должны превышать некоторых пороговых значений, определяемых конструкцией элементов механизма. Использование подобного критерия близости к особому положению рассматриваемого типа было продемонстрировано Ж. Юбером и Ж-П. Мерле [147]. В своей работе авторы исследовали плоский 3-RPR механизм, нагруженный заданной внешней силой, задаваясь при этом пороговым значением усилия в приводе. Это позволило построить такую рабочую зону механизма, что при нахождении выходного звена в любой ее точке, усилия в активных парах гарантированно не превысят максимальных допустимых значений. Серьезным

недостатком данного подхода, однако, является то, что внешняя сила, действующая на выходное звено, принималась известной как по величине, так и по направлению. Если ориентировочное значение нагрузки на практике может быть определено, то ее направление зачастую неизвестно. Таким образом, при использовании в данном подходе той же по величине, но отличающейся по направлению нагрузки, получаемые рабочие зоны будут иметь разную форму и размеры. Стоит также заметить, что С. Брио, В.А. Глазунов и В. Аракелян продемонстрировали [86], что отсутствие возможности рассмотрения пассивных пар также является потенциальным недостатком данного подхода, т.к. при допустимых значениях критериев близости (как усилия в приводе, так и угла давления) возможна ситуация, при которой реакции в пассивных парах будут слишком большими.

Наиболее общий на сегодняшний день теоретический подход к оценке близости к особым положениям был предложен Ф. Воглвидом и И. Эберт-Упхофф [245, 246]. Задача поиска меры, характеризующей близость к особым положениям, формулируется авторами в виде оптимизационной задачи с ограничениями. Так, при использовании вектора входных $\dot{\mathbf{q}}_a$ и выходных $\dot{\mathbf{x}}$ скоростей механизма необходимо найти минимум функции

$$F(\dot{\mathbf{q}}_a) = \dot{\mathbf{q}}_a^T \mathbf{S} \dot{\mathbf{q}}_a$$

при выполнении следующих условий:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}}_a - \mathbf{J}_{об} \dot{\mathbf{x}} = 0, \\ \dot{\mathbf{x}}^T \mathbf{T} \dot{\mathbf{x}} - 1 = 0. \end{cases}$$

Применяя метод множителей Лагранжа, авторы демонстрируют, что данная задача эквивалентна обобщенной задаче по поиску собственных значений:

$$(\mathbf{J}_{об}^T \mathbf{S} \mathbf{J}_{об} - \mu_\nu \mathbf{T}) \dot{\mathbf{x}} = 0,$$

а значение искомой меры равно минимальному собственному числу μ_ν .

Выбор матриц \mathbf{S} и \mathbf{T} определяет физический смысл меры. Непосредственно в статье приводятся как возможные варианты самих матриц (единичная матрица, жесткость, податливость или инерция соответствующие приводам или цепей), так

и их комбинации. По мнению авторов оптимальным вариантом является тот, при котором \mathbf{S} – диагональная матрица, элементы которой представляют собой жесткость кинематических цепей механизма, а \mathbf{T} – матрица инерции выходного звена. В этом случае значение предложенной меры представляет собой наименьшую собственную частоту механизма (аналогичный критерий был позднее независимо предложен С.В. Хейло [51]). Авторы, однако, отмечают, что перечень приведенных в статье вариантов выбора матриц \mathbf{S} и \mathbf{T} не является полным, и практически любой из известных критериев близости к особым положениям можно считать частным случаем данного подхода. Рассматриваемый подход также не лишен определенных недостатков. Так, для механизмов, обладающих одновременно и поступательными и вращательными степенями свободы, выбор матриц \mathbf{S} и \mathbf{T} во многих вариантах приводит к проблеме нормализации векторов, содержащих разные по своему физическому смыслу компоненты. Рассмотрение же собственной частоты означает переход к рассмотрению динамики механизма, в то время как существенный интерес представляет оценка близости к особым положениям на более фундаментальном уровне рассмотрения только структуры механизмов без учета особенностей их конструкции.

Таким образом, наличие особых положений в механизмах параллельной структуры представляет собой серьезную проблему, зачастую ограничивающую применение подобных механизмов. К настоящему моменту исследователями данного вопроса проведена большая фундаментальная и прикладная работа по уменьшению влияния особых положений на работоспособность механизмов различными способами, а также по определению близости к таким положениям. Однако какие-либо универсальные общепринятые решения данной задачи не найдены, а каждый из предложенных подходов к тому или иному аспекту указанной проблемы обладает своими недостатками и имеет различные ограничения в части практической применимости.

1.6. Результаты и выводы по главе

- проведен обзор научно-технической литературы и коммерческих предложений производителей робототехники, который показал, что механизмы параллельной структуры находят широкое применение в различных областях науки, техники и производства, однако обладают рядом недостатков, зачастую ограничивающих возможности их использования. Один из главных недостатков является наличие особых положений, в которых изменяется подвижность механизма;
- существуют различные способы описания и классификации особых положений. Классификация К. Госслена и Х. Анджелеса имеет ограниченную применимость в зависимости от особенностей структуры механизма, а также не учитывает пассивные кинематические пары и не позволяет описать неуправляемую подвижность, не связанную с исходными степенями свободы механизма. Классификация Д. Златанова не всегда удобна для практического применения, т.к. относит к разным типам сингулярности однотипные изменения в подвижности выходного звена, а также требует относительно сложных вычислений. Ввиду того, что винтовое исчисление представляет собой мощный математический инструмент анализа механизмов, целесообразной является выработка классификации особых положений, использующей аппарат данной теории и характеризующей различные виды изменения подвижности механизма;
- для снижения негативного влияния особых положений на работоспособность механизмов могут применяться различные подходы: оптимизация геометрии механизма, введение различного рода избыточности, а также изучение возможности синтеза механизмов с рабочей зоной, принципиально свободной от особых положений. Каждый из подходов имеет свои ограничения;

- определение близости к особым положениям является важной задачей, поскольку негативные явления наблюдаются не только при попадании в особые положения, но и при приближении к ним. На настоящий момент существует множество различных индексов, позволяющих оценить близость к особым положениям. Основными недостатками большинства таких индексов являются отсутствие ясного физического смысла, сложность выбора допустимых значений, необходимость нормализации векторов, содержащих одновременно линейные и угловые компоненты, а также ограниченная применимость. Наиболее общий подход, разработанный Ф. Воглвидом и И. Эберт Упхофф, также не лишен части данных недостатков, а в наиболее оптимальном варианте требует перехода к рассмотрению динамики механизма. В связи с этим актуальной является задача разработки физически ясных и простых в трактовке критериев близости к различным видам особых положений, связанных с реальными характеристиками механизмов, и методов расчета их значений.

ГЛАВА 2. КЛАССИФИКАЦИЯ ОСОБЫХ ПОЛОЖЕНИЙ МЕХАНИЗМОВ ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ И КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ БЛИЗОСТИ К НИМ

2.1. Основные понятия винтового исчисления, используемые в работе

Для решения различных задач в данной работе будет применяться математический аппарат, основанный на винтовом исчислении, поэтому целесообразно кратко изложить его основы.

В общем виде некоторый абстрактный винт \mathbf{s} представляет собой упорядоченную пару двух коллинеарных трехмерных векторов \mathbf{s}_{vec} и \mathbf{s}_{mom} , называемых векторной (вектором) и моментной частью (моментом) винта соответственно:

$$\mathbf{s} = (\mathbf{s}_{vec}, \mathbf{s}_{mom}).$$

Соотношение между евклидовой нормой векторной и моментной частей винта определяется его так называемым параметром p :

$$p = \frac{\langle \mathbf{s}_{vec}, \mathbf{s}_{mom} \rangle}{\|\mathbf{s}_{vec}\|^2},$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает скалярное произведение двух векторов.

Частными случаями являются винт нулевого параметра (чистый вектор) и винт бесконечного параметра (чистый момент).

Винты естественным образом возникают при рассмотрении кинематики и статики твердого тела. Так, согласно теореме Шаля, любое мгновенное движение твердого тела может быть представлено как композиция вращения вокруг некоторой оси перемещения вдоль нее, т.е. может быть представлено некоторым винтом \mathbf{t} (от англ. *twist*). Такой винт называется кинематическим. Его векторная

часть представляет собой вектор угловой скорости вращения тела вокруг оси винта \mathbf{t}_ω , а моментная – вектор линейной скорости перемещения вдоль этой оси \mathbf{t}_v :

$$\mathbf{t} = (\mathbf{t}_\omega, \mathbf{t}_v).$$

Похожим образом система сил и моментов, действующих на твердое тело, может быть представлена винтом \mathbf{w} (от англ. *wrench*), называемым силовым. Его векторная и моментная части представляют собой главный вектор (силу) \mathbf{w}_f и главный момент \mathbf{w}_m системы сил, соответственно:

$$\mathbf{w} = (\mathbf{w}_f, \mathbf{w}_m).$$

Основные действия над винтами включают: умножение винта на скаляр, сложение двух однотипных (кинематических или силовых) винтов, нахождение относительного момента двух винтов разного типа. Первые две операции аналогичны одноименным действиям над обычными векторами:

$$a \cdot \mathbf{s} = (a \cdot \mathbf{s}_{vec}, a \cdot \mathbf{s}_{mom}) \quad \forall a \in \mathbb{R},$$

$$\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2 = (\mathbf{s}_{vec1} + \mathbf{s}_{vec2}, \mathbf{s}_{mom1} + \mathbf{s}_{mom2}).$$

Относительный момент кинематического и силового винта записывается с помощью символа « \circ » и определяется как сумма скалярных произведений векторных и моментных частей этих винтов:

$$\mathbf{t} \circ \mathbf{w} = \langle \mathbf{t}_\omega, \mathbf{w}_m \rangle + \langle \mathbf{t}_v, \mathbf{w}_f \rangle.$$

Физический смысл относительного момента – мгновенная мощность, ассоциируемая с движением твердого тела, описываемым кинематическим винтом \mathbf{t} при действии силовых факторов, составляющих силовой винт \mathbf{w} . Кинематический и силовой винт называются «взаимными», если их относительный момент равен нулю. В этом случае винт \mathbf{w} не совершает работы на перемещении, определяемом скоростями – компонентами винта \mathbf{t} .

Можно заметить, что некоторое непустое множество винтов одного типа, вместе с операциями сложения и умножения на скаляр имеет структуру векторного (линейного) пространства над полем действительных чисел \mathbb{R} . Такое пространство

называется группой винтов. Число линейно независимых винтов группы винтов определяет ее размерность (порядок). Группу винтов, имеющую размерность k , также называют k -членной. Максимально возможная размерность группы винтов любого типа равна шести. Стоит заметить, что рассмотрение такой группы в качестве подпространства векторного пространства \mathbb{R}^6 является в определенной мере спорным вопросом. Это связано с тем, что евклидова норма не имеет физического смысла применительно к винту любого типа с конечным ненулевым параметром, поскольку в нем содержатся разные по своему физическому смыслу компоненты. Поэтому в таком случае требуется либо сознательный отказ от физического смысла евклидовой нормы винта, либо введение условия, что пространство \mathbb{R}^6 не является нормированным, т.е. не определена норма винта и скалярное произведение двух одностипных винтов. В некоторых случаях для практического применения в промежуточных расчетах отказ от физического смысла нормы винта является приемлемым допущением, что будет показано в дальнейшем.

Наиболее удобный для расчетов способ представления винтов заключается в использовании Плюккеровых координат. Выберем в пространстве некоторую точку O , являющуюся началом некоторой декартовой системы координат $Oxyz$. Приведением винта \mathbf{s} в точку O называется его замена на эквивалентный винт \mathbf{s}_O с началом в указанной точке по следующему правилу:

$$\mathbf{s}_O = (\mathbf{s}_{Ovec}, \mathbf{s}_{Omom}) = (\mathbf{s}_{vec}, \mathbf{p} \times \mathbf{s}_{vec} + \mathbf{s}_{mom})$$

где \mathbf{p} – вектор с началом в точке O и концом, лежащим на оси винта \mathbf{s} . Полученный геометрический объект также представляет собой упорядоченную пару векторов, которые, однако, уже не являются коллинеарными. Такой объект называют «мотором» (от слов «момент» и «вектор»). Параметр p при этом является инвариантным, т.е. имеет одинаковое значение независимо от точки приведения винта. Плюккеровыми координатами винта \mathbf{s} в точке O называются скалярные компоненты векторов \mathbf{s}_{Ovec} и \mathbf{s}_{Omom} , т.е. евклидовы нормы проекций этих векторов на оси Ox , Oy и Oz . Обозначив единичные вектора указанных осей как \bar{x} , \bar{y} , \bar{z}

соответственно, можно получить формальное выражение для представления винта \mathbf{s} в Плюккеровых координатах в точке O :

$$\mathbf{s}_O = (\langle \mathbf{s}_{Ovec}, \bar{x} \rangle, \langle \mathbf{s}_{Ovec}, \bar{y} \rangle, \langle \mathbf{s}_{Ovec}, \bar{z} \rangle, \langle \mathbf{s}_{Omom}, \bar{x} \rangle, \langle \mathbf{s}_{Omom}, \bar{y} \rangle, \langle \mathbf{s}_{Omom}, \bar{z} \rangle).$$

В дальнейшем для представления кинематических и силовых винтов в Плюккеровых координатах в общем виде будут, соответственно, использоваться следующие обозначения:

$$\mathbf{t} = (t^x, t^y, t^z, t^{ox}, t^{oy}, t^{oz})^T,$$

$$\mathbf{w} = (w^x, w^y, w^z, w^{ox}, w^{oy}, w^{oz})^T.$$

Точкой приведения, для которой рассчитываются значения координат, по умолчанию будет являться точка, характеризующая положение выходного звена в лабораторной системе отсчета, если не указано иное. При этом большая часть действий будет проводиться, строго говоря, над моторами. Однако поскольку для любого мотора существует эквивалентный ему винт, в дальнейшем будет использоваться только термин «винт».

2.2. Классификация особых положений

Как уже было отмечено в первой главе, к настоящему времени имеется несколько различных подходов к классификации особых положений, каждый из которых имеет свои достоинства и недостатки. Так, применимость метода К. Госслена и Х. Анджелеса, а также оригинального подхода В.А. Глазунова ограничена механизмами определенных типов, а метод Д. Златанова сложен в практических расчетах и содержит два «побочных» типа особых положений: II и IO. Эти недостатки не позволяют использовать в данной работе представленные ранее подходы без необходимости уточнений и оговорок. Таким образом,

необходимо разработать более подходящую для решаемых в работе задач классификацию особых положений.

Рассмотрим в общем виде механизм параллельной структуры (рисунок 2.1) с n степенями свободы и U кинематическими цепями. Здесь и далее без потери общности будем считать, что все кинематические пары механизма являются одноподвижными.

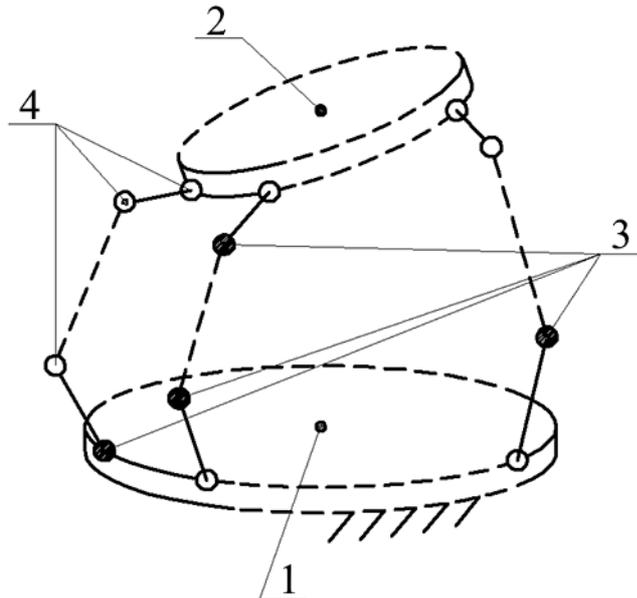


Рисунок 2.1. Механизм параллельной структуры в общем виде: 1 – основание, 2 – выходное звено, 3 – активные кинематические пары, 4 – пассивные кинематические пары

Каждой кинематической паре можно поставить в соответствие некоторый единичный кинематический винт, характеризующий ее степень свободы. Стоит отметить, что поскольку рассматриваются только одноподвижные пары, то каждый такой винт будет иметь или нулевой (вращательная пара) или бесконечный (призматическая пара) параметр. Одноподвижные винтовые кинематические пары, которые могли бы быть охарактеризованы винтом с ненулевым конечным параметром, на практике практически не встречаются и в данной работе не рассматриваются. Принимая во внимание тот факт, что в i -й кинематической цепи имеется N_{ai} активных и N_{pi} пассивных пар, обозначим их кинематические винты как $\mathbf{t}_{ai,j}$ ($i = 1 \dots U, j = 1 \dots N_{ai}$) и $\mathbf{t}_{pi,k}$ ($k = 1 \dots N_{pi}$) соответственно (рисунок 2.2).

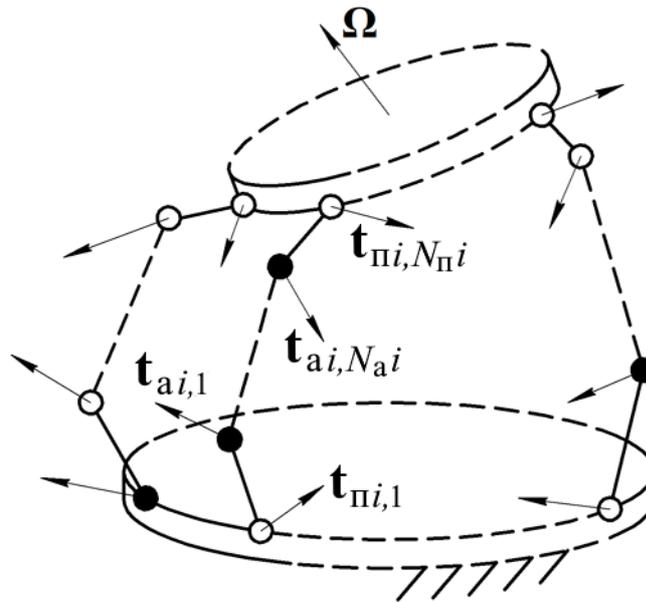


Рисунок 2.2. Кинематические винты цепи механизма параллельной структуры

Для каждой цепи линейная комбинация кинематических винтов входящих в нее пар равна кинематическому винту выходного звена Ω [192]:

$$\sum_{j=1}^{N_{ai}} \dot{q}_{ai,j} \mathbf{t}_{ai,j} + \sum_{k=1}^{N_{\pi i}} \dot{q}_{\pi i,k} \mathbf{t}_{\pi i,k} = \Omega. \quad (2.1)$$

Здесь $\dot{q}_{ai,j}$ и $\dot{q}_{\pi i,k}$ – скорости в активных и пассивных парах i -й цепи.

Выражение (2.1) означает, что кинематический винт выходного звена должен одновременно входить в группы кинематических винтов пар всех цепей. С точки зрения линейной алгебры каждая такая группа (обозначим ее как \mathbf{T}_i) представляет собой линейную оболочку этих винтов:

$$\mathbf{T}_i = \text{span}(\mathbf{t}_{ai,1}, \dots, \mathbf{t}_{ai,N_{ai}}, \mathbf{t}_{\pi i,1}, \dots, \mathbf{t}_{\pi i,N_{\pi i}}).$$

Таким образом, \mathbf{T}_i содержит в себе все возможные кинематические винты выходного звена, «разрешенные» i -й кинематической цепью. При этом $\dim(\mathbf{T}_i) = n_i$, если механизм не находится в особом положении. Очевидно, что для всего механизма в целом группа возможных кинематических винтов выходного звена Φ представляет собой пересечение групп кинематических винтов пар цепей:

$$\Phi = \bigcap_{i=1}^U \mathbf{T}_i.$$

В любом положении, не являющимся особым, размерность группы винтов Φ равна числу степеней свободы механизма: $\dim(\Phi) = n$. Тогда возникновение особого положения, соответствующего потере выходным звеном механизма одной или нескольких степеней свободы, характеризуется выполнением неравенства

$$\dim(\Phi) < n. \quad (2.2)$$

Такое особое положение соответствует «Типу 1» по классификации К. Госслена и Х. Анджелеса или типу RI по классификации Д. Златанова.

Рассмотрим теперь для каждой цепи группу силовых винтов $\mathbf{W}_{сви}$, взаимных винтам группы \mathbf{T}_i , то есть:

$$\mathbf{W}_{сви} = \{ \mathbf{w}_{сви} \mid \mathbf{w}_{сви} \circ \mathbf{t}_i = 0 \quad \forall \mathbf{t}_i \in \mathbf{T}_i \}.$$

Физически группа силовых винтов $\mathbf{W}_{сви}$ представляет собой связи, накладываемые i -й цепью на выходное звено. Размерность данной группы винтов в неособом положении равна:

$$\dim(\mathbf{W}_{сви}) = 6 - \dim(\mathbf{T}_i) = 6 - n_i.$$

Тогда для описания всех связей, накладываемых кинематическими цепями механизма на его выходное звено, можно использовать группу силовых винтов \mathbf{C} (от англ. *constraint*), представляющую собой объединение групп винтов $\mathbf{W}_{сви}$:

$$\mathbf{C} = \bigcup_{i=1}^U \mathbf{W}_{сви}.$$

В любом неособом положении размерности группы кинематических винтов Φ и группы силовых винтов \mathbf{C} связаны следующим образом:

$$\dim(\Phi) + \dim(\mathbf{C}) = 6.$$

Рассмотрим также группу кинематических винтов только пассивных пар i -й цепи, обозначив ее $\mathbf{T}_{пi}$:

$$\mathbf{T}_{пi} = \text{span}(\mathbf{t}_{пi,1}, \dots, \mathbf{t}_{пi,N_{пi}}).$$

Для нормального функционирования механизма необходимо, чтобы подвижность выходного звена была управляемой, т.е. при отсутствии движения в приводах число степеней свободы механизма равнялось нулю. Используя группу кинематических винтов \mathbf{T}_{pi} , данное условие можно записать следующим образом:

$$\bigcap_{i=1}^U \mathbf{T}_{pi} = 0.$$

Нарушение этого условия приводит к появлению возможности или бесконечно малого, или некоторого конечного неконтролируемого перемещения выходного звена. Если при этом размерность группы винтов \mathbf{C} не изменяется и остается равной $6 - n$, то такая ситуация означает нахождение механизма в особом положении, соответствующим «Типу 2» по классификации К. Госслена и Х. Анджелеса или типу RO по классификации Д. Златанова. Формально, такое особое положение может быть описано следующим условием:

$$\begin{cases} \bigcap_{i=1}^U \mathbf{T}_{pi} \neq 0, \\ \dim(\mathbf{C}) = 6 - n. \end{cases} \quad (2.3)$$

Для механизмов, в которых число степеней свободы цепей больше числа степеней свободы самого механизма ($n_i > n$), возможно уменьшение размерности группы силовых винтов \mathbf{C} :

$$\dim(\mathbf{C}) < 6 - n. \quad (2.4)$$

Условие (2.4) является необходимым и достаточным для того, чтобы утверждать, что механизм находится в особом положении, обусловленным вырождением связей и описанном Д. Златановым совместно с И. Боневым и К. Госсленом [276]. Такой тип особых положений также подпадает под описание типа ПМ по классификации Д. Златанова, являясь составной частью последнего. Принципиальное отличие от особых положений, связанных с неконтролируемой подвижностью выходного звена и описываемых условием (2.3), заключается в том, что в данном случае выходное звено приобретает подвижность вне рамок своих

изначальных степеней свободы, т.е. имеет место увеличение размерности группы кинематических винтов Φ .

Условия (2.2), (2.3) и (2.4) характеризуют возможные варианты изменения подвижности только выходного звена. Для рассмотрения условия возможности движения в пассивных парах при неподвижном выходном звене и отсутствии перемещений в приводах вернемся к выражению (2.1). Приняв нулевыми винты активных пар цепи и выходного звена, получим:

$$\sum_{k=1}^{N_{\pi i}} \dot{q}_{\pi i, k} \mathbf{t}_{\pi i, k} = 0. \quad (2.5)$$

Данное выражение представляет собой систему из шести (по количеству Плюккерových координат) линейных уравнений с $N_{\pi i}$ неизвестными. Если существует нетривиальное решение данной системы, то в таком случае механизм находится в особом положении, соответствующем типу RPM по классификации Д. Златанова.

Ранг матрицы Плюккерových координат кинематических винтов пассивных пар i -й цепи равен размерности группы этих винтов:

$$\text{rank} \left(\begin{pmatrix} t_{\pi i, 1}^x & t_{\pi i, 2}^x & \vdots & t_{\pi i, N_{\pi i}}^x \\ t_{\pi i, 1}^y & t_{\pi i, 2}^y & \vdots & t_{\pi i, N_{\pi i}}^y \\ t_{\pi i, 1}^z & t_{\pi i, 2}^z & \vdots & t_{\pi i, N_{\pi i}}^z \\ t_{\pi i, 1}^{ox} & t_{\pi i, 2}^{ox} & \vdots & t_{\pi i, N_{\pi i}}^{ox} \\ t_{\pi i, 1}^{oy} & t_{\pi i, 2}^{oy} & \vdots & t_{\pi i, N_{\pi i}}^{oy} \\ t_{\pi i, 1}^{oz} & t_{\pi i, 2}^{oz} & \vdots & t_{\pi i, N_{\pi i}}^{oz} \end{pmatrix} \right) = \dim(\mathbf{T}_{\pi i}).$$

При этом каждый винт соответствует какой-либо паре, т.е. число пассивных пар цепи не может быть меньше числа линейно независимых винтов этих пар. Иными словами

$$N_{\pi i} \geq \dim(\mathbf{T}_{\pi i}).$$

Поскольку система (2.5) является однородной, ранг расширенной матрицы системы не может быть больше ранга указанной матрицы Плюккеровых координат, т.е. согласно теореме Кронекера – Капелли данная система будет всегда совместна. Если $N_{pi} = \dim(\mathbf{T}_{pi})$, то число неизвестных системы равно рангу ее основной и расширенной матрицы. В этом случае, согласно той же теореме, решение системы единственно и, очевидно, тривиально. Если же $N_{pi} > \dim(\mathbf{T}_{pi})$, то система (2.5) будет иметь бесконечное множество решений. Тогда окончательно условие того, что механизм находится в особом положении указанного выше типа можно записать в следующем виде:

$$\dim(\mathbf{T}_{pi}) < N_{pi}. \quad (2.6)$$

Таким образом, путем применения винтового исчисления и линейной алгебры были получены математические выражения для записи условий, характеризующих особые положения механизмов параллельной структуры разных типов. Стоит отметить, что несмотря на то, что изложенные рассуждения во многом основаны на более ранних работах В.А. Глазунова в рамках данного направления, полученный результат является более общим, а также содержит важные уточнения, позволяющие расширить его применимость.

В дальнейшем для рассмотренных типов особых положений будут использованы следующие краткие обозначения:

- Тип «ПС» – потеря одной или нескольких степеней свободы выходным звеном. Определяется условием (2.2);
- Тип «ПУ» – появление возможности неконтролируемого движения выходного звена при отсутствии движения в приводных кинематических парах. Определяется условием (2.3);
- Тип «ВС» – вырождение связей, накладываемых кинематическими цепями на выходное звено, приводящее к приобретению последним дополнительной подвижности, не связанной с его изначальными степенями свободы. Определяется условием (2.4);

- Тип «ПП» – появление возможности движения в пассивных кинематических парах при неподвижном выходном звене и отсутствии движения в активных кинематических парах. Определяется условием (2.6).

Возможность возникновения последнего типа особых положений, как правило, обуславливается конструкцией механизма, а не свойствами его топологии, а также не оказывает существенного влияния на работоспособность устройства в рамках того технологического процесса, для которого оно разрабатывалось. Так, например, в большинстве 3D-принтеров, выполненных по схеме Delta, используются сферические шарниры. Это приводит к тому, что в любой точке рабочей зоны механизм находится в особом положении типа «ПП», поскольку штанги кинематических цепей имеют возможность конечного поворота относительно своей собственной оси. В то же время данная возможность может быть легко устранена заменой хотя бы одного сферического шарнира на шарнир Гука.

Принимая во внимание вышеизложенное, особые положения типа «ПП» в настоящей работе в дальнейшем подробно рассматриваться не будут. Также, будет показано, что вывести удобный и физически обоснованный в использовании критерий близости к особому положению данного типа невозможно.

2.3. Критерии близости к особым положениям и их расчет с применением винтового исчисления

Как уже было отмечено, при приближении выходного звена механизма параллельной структуры к точке, соответствующей особому положению типа «ПС», возрастают скорости в активных парах, что позволяет использовать значения данных скоростей в качестве наиболее естественного критерия близости к особым положениям данного типа.

Вернемся к уравнению (2.1). Пусть $\mathbf{w}_{ai,j}$ – силовой винт, взаимный всем кинематическим винтам пар i -й цепи кроме j -й активной пары, то есть:

$$\mathbf{w}_{ai,j} \circ \mathbf{t}_i = 0 \quad \forall \mathbf{t}_i \in \mathbf{T}_i \mid \mathbf{t}_i \neq \mathbf{t}_{ai,j}. \quad (2.7)$$

Данный винт характеризует связь, возникающую при остановке (фиксации) соответствующей приводной пары, и далее будет называться приводным силовым винтом. Взяв относительный момент данного винта с левой и правой частью уравнения (2.1), получим

$$\dot{q}_{ai,j} \mathbf{t}_{ai,j} \circ \mathbf{w}_{ai,j} = \mathbf{\Omega} \circ \mathbf{w}_{ai,j}. \quad (2.8)$$

Из уравнения (2.8) видно, что максимальное значение скорости в j -й активной паре i -й цепи соответствует такому направлению кинематического винта $\mathbf{\Omega}$, при котором его относительный момент с приводным силовым винтом $\mathbf{w}_{ai,j}$ имеет наибольшее абсолютное значение. Это условие выполняется, если векторная часть винта $\mathbf{\Omega}$ пропорциональна моментной части винта $\mathbf{w}_{ai,j}$, и при этом коэффициенты пропорциональности одинаковы, то есть

$$\mathbf{\Omega} \propto \begin{pmatrix} \mathbf{0}_3 & \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_3 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{w}_{ai,j}, \quad (2.9)$$

где $\mathbf{0}_3$ и \mathbf{I}_3 – нулевая и единичная матрицы размера 3×3 соответственно.

Для кинематической цепи с шестью степенями свободы условие (2.7) определяет единственный с точностью до множителя винт $\mathbf{w}_{ai,j}$. Если же число степеней свободы меньше шести, то указанному условию удовлетворяет бесконечное число силовых винтов.

Очевидно, что приводной силовой винт $\mathbf{w}_{ai,j}$ не может принадлежать группе винтов $\mathbf{W}_{сви}$, поскольку в таком случае он должен быть взаимен кинематическому винту $\mathbf{t}_{ai,j}$, и выражение (2.7) теряет свой смысл. Однако условие $\mathbf{w}_{ai,j} \notin \mathbf{W}_{сви}$ все равно не позволяет определить рассматриваемый силовой винт единственным образом с точностью до множителя. С другой стороны, целью является вычисление некоторого «наихудшего» кинематического винта $\mathbf{\Omega} = \mathbf{\Omega}_{ai,j}^{\max}$, а не собственно силового винта $\mathbf{w}_{ai,j}$. Указанный кинематический винт должен принадлежать группе

кинематических винтов Φ , т.к. в противном случае он будет описывать невозможное движение выходного звена. Из этого следует, что винт $\Omega_{ai,j}^{\max}$ должен быть частью группы кинематических винтов пар цепи ($\Omega_{ai,j}^{\max} \in \mathbf{T}_i$), что в свою очередь означает взаимность данного винта любому силовому винту, принадлежащему группе \mathbf{W}_{cvi} то есть

$$\Omega_{ai,j}^{\max} \circ \mathbf{w}_{cvi} = 0 \quad \forall \mathbf{w}_{cvi} \in \mathbf{W}_{cvi}.$$

Данное условие является более сильным, чем условие $\mathbf{w}_{ai,j} \notin \mathbf{W}_{cvi}$ и позволяет вместе с условиями (2.7) и (2.9) определить «наихудший» кинематический винт $\Omega_{ai,j}^{\max}$ с точностью до множителя. Однако указанный винт все равно может описывать нереализуемое движение выходного звена, поскольку данное условие само по себе не гарантирует его принадлежность группе винтов Φ .

Для того, чтобы определить кинематический винт выходного звена постоянной нормы, который соответствует максимальной скорости в j -й активной паре i -й цепи механизма и при этом описывает только разрешенные перемещения выходного звена, удобно рассматривать кинематические винты пар этой цепи в качестве элементов векторного пространства \mathbf{T}_i , являющегося подпространством пространства \mathbb{R}^6 . В этом случае условие, позволяющее определить винт $\Omega_{ai,j}^{\max}$ с точностью до множителя, будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} \Omega_{ai,j}^{\max} \in \mathbf{T}_i, \\ \langle \Omega_{ai,j}^{\max}, \mathbf{t}_i \rangle = 0 \quad \forall \mathbf{t}_i \in \mathbf{T}_i \mid \mathbf{t}_i \neq \mathbf{t}_{ai,j}. \end{cases} \quad (2.10)$$

Пусть $\dot{q}_{ai,j}^{\max}$ – искомая максимально возможная по значению положительная скорость в j -й активной паре i -й цепи механизма, а $\Omega_{ai,j}^{\Phi \max}$ – соответствующий ей кинематический винт выходного звена, который при этом описывает некоторое разрешенное движение выходного звена. Очевидно, что такой винт должен быть наиболее «близким» к винту $\Omega_{ai,j}^{\max}$, определяемому условием (2.10), т.е. представлять собой ортогональную проекцию на векторное пространство Φ :

$$\Omega_{ai,j}^{\Phi \max} = \text{proj}_{\Phi}(\Omega_{ai,j}^{\max}) = \sum_{p=1}^n \langle \Omega_{ai,j}^{\max}, \Phi_p \rangle \cdot \Phi_p. \quad (2.11)$$

Здесь $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$ – ортонормированный базис векторного пространства Φ .

С учетом написанного выше, а также принимая во внимание, что $\dot{q}_{ai,j} = \dot{q}_{ai,j}^{\max}$ при $\Omega = \Omega_{ai,j}^{\Phi \max}$, выражение (2.8) можно записать в следующем виде:

$$\dot{q}_{ai,j}^{\max} = \frac{\langle \Omega_{ai,j}^{\Phi \max}, \Omega_{ai,j}^{\max} \rangle}{\langle \mathbf{t}_{ai,j}, \Omega_{ai,j}^{\max} \rangle}. \quad (2.12)$$

Важно отметить, что понятие «максимально возможной» скорости в активной паре неразрывно связано с необходимостью нормирования кинематического винта выходного звена. При этом применение евклидовой нормы к указанному винту, как уже было отмечено ранее, порождает некоторую неоднозначность, если выходное звено механизма имеет и вращательные и поступательные степени свободы. Для устранения этой неоднозначности целесообразно использовать концепцию, отраженную в формуле (2.11). Пусть Φ_{ω} – векторное пространство (группа кинематических винтов), включающее в себя винты выходного звена, содержащие только угловые скорости, $\Phi_{\mathbf{v}}$ – только линейные скорости, а $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ и $\mathbf{v}_x, \mathbf{v}_y, \mathbf{v}_z$ – ортонормированные базисы этих пространств:

$$\begin{aligned} \omega_x &= (1, 0, 0, 0, 0, 0), & \omega_y &= (0, 1, 0, 0, 0, 0), & \omega_z &= (0, 0, 1, 0, 0, 0), \\ \mathbf{v}_x &= (0, 0, 0, 1, 0, 0), & \mathbf{v}_y &= (0, 0, 0, 0, 1, 0), & \mathbf{v}_z &= (0, 0, 0, 0, 0, 1). \end{aligned}$$

По аналогии с (2.11), проекция винта $\Omega_{ai,j}^{\Phi \max}$ на пространства Φ_{ω} и $\Phi_{\mathbf{v}}$ будет соответствовать максимально возможной скорости в j -й активной паре i -й цепи механизма только при вращательном ($\dot{q}_{ai,j}^{\omega \max}$) или только при поступательном ($\dot{q}_{ai,j}^{\mathbf{v} \max}$) движении выходного звена соответственно. Указанные проекции определяются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} \Omega_{ai,j}^{\omega \max} &= \text{proj}_{\Phi_{\omega}} \left(\Omega_{ai,j}^{\Phi \max} \right) = \sum_{p=1}^3 \langle \Omega_{ai,j}^{\Phi \max}, \omega_p \rangle \cdot \omega_p, \\ \Omega_{ai,j}^{\mathbf{v} \max} &= \text{proj}_{\Phi_{\mathbf{v}}} \left(\Omega_{ai,j}^{\Phi \max} \right) = \sum_{p=1}^3 \langle \Omega_{ai,j}^{\Phi \max}, \mathbf{v}_p \rangle \cdot \mathbf{v}_p. \end{aligned} \quad (2.13)$$

При этом $\omega_1 = \omega_x, \omega_2 = \omega_y, \omega_3 = \omega_z, \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_x, \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_y, \mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_z$.

Важным обстоятельством является то, что евклидова норма винтов $\Omega_{ai,j}^{\omega \max}$ и $\Omega_{ai,j}^{v \max}$, определяемых согласно (2.13), имеет физический смысл модуля угловой или линейной скорости выходного звена соответственно и может быть разной для каждого из этих винтов. Тогда независимо от того, какие именно степени свободы имеет выходное звено механизма, максимальная скорость в j -й активной паре i -й цепи может быть определена отдельно для вращательного или поступательного движения выходного звена:

$$\dot{q}_{ai,j}^{\max} = \dot{q}_{ai,j}^{\omega \max} + \dot{q}_{ai,j}^{v \max} = \frac{\left| \langle \Omega_{ai,j}^{\omega \max}, \Omega_{ai,j}^{\max} \rangle \right|}{\left| \langle \mathbf{t}_{ai,j}, \Omega_{ai,j}^{\max} \rangle \right|} + \frac{\left| \langle \Omega_{ai,j}^{v \max}, \Omega_{ai,j}^{\max} \rangle \right|}{\left| \langle \mathbf{t}_{ai,j}, \Omega_{ai,j}^{\max} \rangle \right|}. \quad (2.14)$$

Необходимо заметить, что нормы винтов $\Omega_{ai,j}^{\omega \max}$ и $\Omega_{ai,j}^{v \max}$ на практике могут определяться согласно требованиям технологического процесса, поэтому выражение (2.13) не подразумевает, что данные нормы должны быть строго равны величинам соответствующих проекций. Иными словами, (2.13) задает только направление указанных винтов, т.е. определяет их с точностью до некоторого ненулевого множителя. При этом, если

$$\left\| \Omega_{ai,j}^{\omega \max} \right\|^2 + \left\| \Omega_{ai,j}^{v \max} \right\|^2 = \left\| \Omega_{ai,j}^{\Phi \max} \right\|^2,$$

то вне зависимости от того, какие степени свободы имеет выходное звено, выражение (2.14) становится эквивалентно выражению (2.12).

Таким образом, для механизма с менее чем шестью степенями свободы близость к особому положению типа «ПС» может быть оценена путем вычисления для некоторой заданной нормы кинематического винта выходного звена скорости $\dot{q}_{ai,j}^{\max}$ согласно (2.12), если механизм имеет только вращательные или только поступательные степени свободы, или согласно (2.14), если его степени свободы смешанные. Рассчитанное значение скорости затем необходимо сравнить с некоторым допустимым значением: если хотя бы для одной активной пары оно оказывается больше, то тогда механизм находится «слишком близко» к особому положению. Преимуществом такого подхода является его ясный физический смысл и относительная простота определения допустимого значения скорости, т.к.

последнее определяется возможностями привода механизма. При этом, однако, стоит отметить, что скалярные произведения в формулах выше физического смысла не имеют. Тем не менее, представленные выкладки демонстрируют, что, как было отмечено ранее, отказ от сохранения физического смысла в промежуточных преобразованиях позволяет формализовать и унифицировать итоговые расчетные формулы и сделать их более удобными для применения.

Перейдем к рассмотрению близости к особым положениям типа «ПУ». Для этого предположим, что все активные пары механизма неподвижны. В этом случае в каждой цепи существует группа силовых винтов связей $\mathbf{W}_{\text{сви}}$ размерности $6 - n_i$ и группа винтов \mathbf{W}_{ai} размерности N_{ai} , состоящая из приводных силовых винтов \mathbf{w}_{ai} , определяемых для всех активных пар цепи согласно (2.7). Пусть \mathbf{L} – силовой винт внешней нагрузки, действующей на выходное звено механизма. Данный винт должен быть уравновешен винтами групп $\mathbf{W}_{\text{сви}}$ и \mathbf{W}_{ai} :

$$\sum_{i=1}^U \left(\sum_{j=1}^{N_{ai}} r_{ai,j} \cdot \mathbf{w}_{ai,j} + \sum_{k=1}^{6-n_i} r_{\text{сви},k} \cdot \mathbf{w}_{\text{сви},k} \right) = \mathbf{L}, \quad (2.15)$$

где $r_{ai,j}$ и $r_{\text{сви},k}$ – обобщенные реакции (коэффициенты линейной комбинации), соответствующие винтам $\mathbf{w}_{ai,j}$ и $\mathbf{w}_{\text{сви},k}$.

Пусть $\boldsymbol{\tau}_{ai,j}$ – кинематический винт, взаимный всем силовым винтам, входящим в (2.15), кроме одного винта $\mathbf{w}_{ai,j}$:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\tau}_{ai,j} \circ \mathbf{w}_{\text{сви}} = 0 & \forall \mathbf{w}_{\text{сви}} \in \mathbf{C}, \\ \boldsymbol{\tau}_{ai,j} \circ \mathbf{w}_{ai} = 0 & \forall \mathbf{w}_{ai} \in \bigcup_{i=1}^U \mathbf{W}_{ai} \mid \mathbf{w}_{ai} \neq \mathbf{w}_{ai,j}. \end{cases} \quad (2.16)$$

Аналогично подходу, примененному при рассмотрении близости к особым положениям типа «ПС», если взять относительный момент данного кинематического винта с левой и правой частями уравнения (2.15), то оно будет иметь следующий вид:

$$r_{ai,j} \cdot \mathbf{w}_{ai,j} \circ \boldsymbol{\tau}_{ai,j} = \mathbf{L} \circ \boldsymbol{\tau}_{ai,j}. \quad (2.17)$$

При приближении к особому положению типа «ПУ» значение обобщенной реакции $r_{ai,j}$ будет возрастать. Из выражения (2.17) видно, что при постоянном винте $\tau_{ai,j}$ данная реакция достигает максимального значения, если винт внешней нагрузки \mathbf{L} пропорционален винту $\tau_{ai,j}$ следующим образом:

$$\mathbf{L} \propto \begin{pmatrix} \mathbf{0}_3 & \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_3 \end{pmatrix} \cdot \tau_{ai,j}. \quad (2.18)$$

В отличие от предыдущего случая, условие (2.18) определяет винт \mathbf{L} единственным с точностью до множителя образом. Это обусловлено тем, что если в свою очередь кинематический винт $\tau_{ai,j}$ не единственен, то при одном работающем приводе механизм имеет больше одной степени свободы, т.е. находится в особом положении типа «ПУ».

Пусть $r_{ai,j}^{\max}$ – максимально возможная положительная обобщенная реакция, воспринимаемая i -й цепью только при зафиксированной j -й активной паре этой цепи, а $\mathbf{L} = \mathbf{L}_{ai,j}^{\max}$ – соответствующий ей силовой винт внешней нагрузки, определяемый условием (2.18). Поскольку, как и в случае с кинематическим винтом выходного звена $\Omega_{ai,j}^{\Phi \max}$, нормализация данного силового винта с использованием евклидовой нормы сопряжена с физической неопределенностью, логично рассмотреть проекции $\mathbf{L}_{ai,j}^{\max}$ на векторные пространства \mathbf{F} и \mathbf{M} , включающие только силы или моменты соответственно. Пусть ортонормированные базисы данных пространств будут следующими:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_x &= (1, 0, 0, 0, 0, 0), & \mathbf{f}_y &= (0, 1, 0, 0, 0, 0), & \mathbf{f}_z &= (0, 0, 1, 0, 0, 0), \\ \mathbf{m}_x &= (0, 0, 0, 1, 0, 0), & \mathbf{m}_y &= (0, 0, 0, 0, 1, 0), & \mathbf{m}_z &= (0, 0, 0, 0, 0, 1), \end{aligned}$$

тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{ai,j}^{\mathbf{f} \max} &= \text{proj}_{\mathbf{F}}(\mathbf{L}_{ai,j}^{\max}) = \sum_{p=1}^3 \langle \mathbf{L}_{ai,j}^{\max}, \mathbf{f}_p \rangle \cdot \mathbf{f}_p, \\ \mathbf{L}_{ai,j}^{\mathbf{m} \max} &= \text{proj}_{\mathbf{M}}(\mathbf{L}_{ai,j}^{\max}) = \sum_{p=1}^3 \langle \mathbf{L}_{ai,j}^{\max}, \mathbf{m}_p \rangle \cdot \mathbf{m}_p, \end{aligned} \quad (2.19)$$

где $\mathbf{f}_1 = \mathbf{f}_x$, $\mathbf{f}_2 = \mathbf{f}_y$, $\mathbf{f}_3 = \mathbf{f}_z$, $\mathbf{m}_1 = \mathbf{m}_x$, $\mathbf{m}_2 = \mathbf{m}_y$, $\mathbf{m}_3 = \mathbf{m}_z$.

Евклидовы нормы силовых винтов $\mathbf{L}_{ai,j}^{f \max}$ и $\mathbf{L}_{ai,j}^{m \max}$ из выражения (2.19) обладают, соответственно, физическим смыслом модуля силы или момента, действующих на выходное звено.

Окончательно максимально возможную обобщенную реакцию $r_{ai,j}^{\max}$ можно рассчитать следующим образом:

$$r_{ai,j}^{\max} = r_{ai,j}^{f \max} + r_{ai,j}^{m \max} = \left| \frac{\mathbf{L}_{ai,j}^{f \max} \circ \boldsymbol{\tau}_{ai,j}}{\mathbf{W}_{ai,j} \circ \boldsymbol{\tau}_{ai,j}} \right| + \left| \frac{\mathbf{L}_{ai,j}^{m \max} \circ \boldsymbol{\tau}_{ai,j}}{\mathbf{W}_{ai,j} \circ \boldsymbol{\tau}_{ai,j}} \right|. \quad (2.20)$$

Таким образом, для оценки близости к особому положению типа «ПУ» можно рассчитать для известной нормы силового винта внешней нагрузки величину $r_{ai,j}^{\max}$ по формуле (2.20), а затем сравнить ее с некоторым допустимым значением. Как и в случае со скоростями, используемыми при оценке близости к особым положениям типа «ПС», если рассчитанное значение хотя бы одной (из N_a) обобщенной реакции больше допустимого, то механизм находится «слишком близко» к особому положению указанного типа. Значение обобщенной реакции $r_{ai,j}^{\max}$ может быть пересчитано в необходимое усилие в приводе, которое затем может быть сопоставлено со значением, соответствующим его номинальным (паспортным) характеристикам. Также по значению обобщенной реакции могут быть определены нагрузки на конструктивные элементы и шарниры цепи. Таким образом, допустимое значение для $r_{ai,j}^{\max}$ может быть рассчитано исходя из конкретных характеристик (номинальный или максимальный момент двигателя, грузоподъемность подшипников и т.д.) разрабатываемого на базе механизма параллельной структуры устройства.

Для анализа близости к особым положениям типа «ВС» может быть применен точно такой же подход. При этом вместо кинематического винта $\boldsymbol{\tau}_{ai,j}$ необходимо использовать винт $\boldsymbol{\tau}_{сви,k}$, взаимный всем винтам, входящим в (2.15), кроме одного силового винта связи $\mathbf{W}_{сви,k}$:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\tau}_{сви,k} \circ \mathbf{w}_{сви} = 0 & \forall \mathbf{w}_{сви} \in \mathbf{C} \mid \mathbf{w}_{сви} \neq \mathbf{W}_{сви,k}, \\ \boldsymbol{\tau}_{сви,k} \circ \mathbf{w}_{ai} = 0 & \forall \mathbf{w}_{ai} \in \bigcup_{i=1}^U \mathbf{W}_{ai}. \end{cases} \quad (2.21)$$

Тогда максимально возможная обобщенная реакция $r_{сви,k}^{\max}$, соответствующая некоторому силовому винту $\mathbf{L}_{сви,k}^{\max}$, равна

$$r_{сви,k}^{\max} = r_{сви,k}^{\mathbf{f}\max} + r_{сви,k}^{\mathbf{m}\max} = \left| \frac{\mathbf{L}_{сви,k}^{\mathbf{f}\max} \circ \boldsymbol{\tau}_{сви,k}}{\mathbf{w}_{сви,k} \circ \boldsymbol{\tau}_{сви,k}} \right| + \left| \frac{\mathbf{L}_{сви,k}^{\mathbf{m}\max} \circ \boldsymbol{\tau}_{сви,k}}{\mathbf{w}_{сви,k} \circ \boldsymbol{\tau}_{сви,k}} \right|, \quad (2.22)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_{сви,k}^{\mathbf{f}\max} &= \text{proj}_{\mathbf{F}}(\mathbf{L}_{сви,k}^{\max}) = \sum_{p=1}^3 \langle \mathbf{L}_{сви,k}^{\max}, \mathbf{f}_p \rangle \cdot \mathbf{f}_p, \\ \mathbf{L}_{сви,k}^{\mathbf{m}\max} &= \text{proj}_{\mathbf{M}}(\mathbf{L}_{сви,k}^{\max}) = \sum_{p=1}^3 \langle \mathbf{L}_{сви,k}^{\max}, \mathbf{m}_p \rangle \cdot \mathbf{m}_p, \end{aligned} \quad (2.23)$$

При этом сам винт $\mathbf{L} = \mathbf{L}_{сви,k}^{\max}$ определяется выражением, аналогичным (2.18):

$$\mathbf{L} \propto \begin{pmatrix} \mathbf{0}_3 & \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_3 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{\tau}_{сви,k}. \quad (2.24)$$

Однако в отличие от $\mathbf{w}_{ai,j}$ (при отсутствии приводной избыточности) линейная независимость силовых винтов $\mathbf{w}_{сви,k}$ разных цепей не всегда гарантирована. В этом случае кинематического винта, взаимного всем, кроме некоторого одного винта $\mathbf{w}_{сви,k}$, не существует. Поэтому для оценки близости к особому положению типа «ВС» в общем случае необходимо модифицировать описанный выше подход.

Пусть суммарное количество силовых винтов связей механизма в целом $\mathbf{w}_{свk}$ равно K ($k = 1, \dots, K$), причем $K > \dim(\mathbf{C})$, т.е. данные винты не являются линейно независимыми. Без потери общности предположим, что при исключении $K - \dim(\mathbf{C}) + 1$ винтов размерность группы силовых винтов \mathbf{C} уменьшится на единицу. Обозначим группу силовых винтов связей, исключаемых из \mathbf{C} , как $\mathbf{W}_{св}^-$ а, собственно, группу \mathbf{C} после исключения из нее указанных винтов, как \mathbf{C}^- . Формально, с учетом того, что в любом неособом положении $\dim(\mathbf{C}) = 6 - n$, данные группы можно определить следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{св}^- &= \left\{ \mathbf{w}_{св}^- \mid \mathbf{w}_{св}^- \in \text{span}(\mathbf{w}_{св1}, \dots, \mathbf{w}_{свK+n-5}) \right\}, \\ \mathbf{C}^- &= \left\{ \mathbf{c}^- \mid \mathbf{c}^- \in \text{span}(\mathbf{w}_{свK+n-4}, \dots, \mathbf{w}_{свK}) \right\}. \end{aligned}$$

Тогда становится возможным единственным образом определить с точностью до множителя кинематический винт τ_{cb}^- такой, что

$$\begin{cases} \tau_{cb}^- \circ c^- = 0 & \forall c^- \in C^-, \\ \tau_{cb}^- \circ w_{ai}^- = 0 & \forall w_{ai}^- \in \bigcup_{i=1}^U W_{ai}^-. \end{cases}$$

Взяв относительный момент данного кинематического винта с обоими частями уравнения (2.15), получим

$$\sum_{k=1}^{K+n-5} r_{cbk}^- \cdot w_{cbk}^- \circ \tau_{cb}^- = L \circ \tau_{cb}^-. \quad (2.25)$$

Без потери общности заменим линейную комбинацию в левой части уравнения (2.25) некоторым винтом $w_{\Sigma cb}^-$. Тогда данное уравнение можно записать в следующем виде:

$$r_{\Sigma cb}^- \cdot w_{\Sigma cb}^- \circ \tau_{cb}^- = L \circ \tau_{cb}^-. \quad (2.26)$$

Из (2.26) видно, что для получения максимально возможного значения обобщенной реакции $r_{\Sigma cb}^- = r_{\Sigma cb}^{-\max}$ силовой винт внешней нагрузки $L = L_{cb}^{-\max}$ должен быть пропорционален кинематическому винту τ_{cb}^- аналогичным указанному в условии (2.24) для винта $L = L_{cbi,k}^{\max}$ образом:

$$L \propto \begin{pmatrix} \mathbf{0}_3 & \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_3 \end{pmatrix} \cdot \tau_{cb}^-. \quad (2.27)$$

В левой части уравнения (2.26) силовой винт $w_{\Sigma cb}^-$, по факту, не определен и может быть любым. Единственным условием является его принадлежность группе силовых винтов W_{cb}^- . При этом, в предположении, что силовой винт L удовлетворяет условию (2.27), возможны два «крайних» случая: винт $w_{\Sigma cb}^-$ «перпендикулярен» винтам группы C^- и винт $w_{\Sigma cb}^-$ «максимально близок» винтам этой же группы. Для первого варианта значение обобщенной реакции $r_{\Sigma cb}^-$ будет минимально возможным, поскольку компоненты винта $w_{\Sigma cb}^-$ будут пропорциональны компонентам винта τ_{cb}^- . Во втором же случае значение $r_{\Sigma cb}^-$

будет максимально возможным. Без потери общности предположим, что евклидова норма τ_{CB}^- винта равна единице. Тогда минимально возможный относительный момент данных винтов будет равен евклидовой норме винта $\mathbf{w}_{\Sigma_{CB}}^-$, умноженной на косинус угла между этим винтом и пространством C^- , или же, что эквивалентно, между пространствами \mathbf{W}_{CB}^- и C^- , являющихся подпространствами \mathbb{R}^6 . Методика расчета значения данного угла известна [76, 255] и реализована, например, в MATLAB. Независимо от выбора винтов, порождающих группу \mathbf{W}_{CB}^- , при приближении к особому положению типа «BC» угол между пространствами \mathbf{W}_{CB}^- и C^- будет уменьшаться, а значение обобщенной реакции $r_{\Sigma_{CB}}^-$ увеличиваться. Силовой винт внешней нагрузки при этом можно, как и раньше, заменить винтами-проекциями на пространства сил и моментов $\mathbf{L}_{CB}^{-f \max}$ и $\mathbf{L}_{CB}^{-m \max}$ соответственно. Таким образом, значение упомянутого угла или реакции $r_{\Sigma_{CB}}^{-\max}$ можно использовать в качестве критерия близости к особому положению указанного типа. Однако при этом необходимо помнить, что в отличие от предыдущих случаев, значение обобщенной реакции $r_{\Sigma_{CB}}^{-\max}$, по сути, представляет собой некоторый математический коэффициент, физическая трактовка которого затруднена. Во всех ранее описанных случаях скорость выходного звена или внешняя нагрузка, имеющие «наихудшее» направление могут быть относительно легко, хоть и с определенной погрешностью, контролируемо воспроизведены в эксперименте на практике. Что же касается винта $\mathbf{w}_{\Sigma_{CB}}^-$, то его «направление», характеризующее по сути распределение соответствующей нагрузки по нескольким цепям или элементам механизма, может быть любым и по факту зависит от большого количества параметров: материала звеньев механизма, их жесткости, погрешностей монтажа, зазоров в шарнирах и т.д. Допущение, что данный винт «наиболее близок» к C^- является наихудшим возможным вариантом. Кроме того, необходимо отметить, что норма винта $\mathbf{w}_{\Sigma_{CB}}^-$ может быть выбрана произвольной, поэтому, показательным критерием является не само значение обобщенной реакции $r_{\Sigma_{CB}}^{-\max}$, порядок которого напрямую зависит от $\|\mathbf{w}_{\Sigma_{CB}}^-\|$, а его изменение. Поэтому без потери общности евклидову норму винта $\mathbf{w}_{\Sigma_{CB}}^-$ можно принять равной единице.

Стоит отметить, что для статически определимых пространственных механизмов возможно составить систему из $6(Z-1)$ (или $3(Z-1)$ для плоских) уравнений равновесия с таким же числом неизвестных, включающих внешние силы и моменты, реакции во всех парах и приводные усилия. Относительно большое число уравнений при этом не является существенным недостатком, если расчеты проводятся с помощью достаточно мощного компьютера, т.к. современный уровень развития вычислительной техники и систем компьютерной алгебры позволяет быстро решать подобные системы уравнений. Однако, если решение задачи требуется осуществлять в реальном времени на встраиваемом оборудовании, то данный недостаток становится куда более весомым. Кроме того, при таком подходе для большинства механизмов становится невозможным отдельно рассматривать реакции, соответствующие особым положениям разных типов.

Для особых положений типа «ПП» не представляется возможным получить физически обоснованный критерий близости. В качестве альтернативы можно использовать подход, близкий по смыслу описанному выше для типа «ВС» при линейной зависимости винтов связей. В этом случае для каждой цепи можно рассмотреть пространство $T_{\pi i}$, порождаемое винтами ее пассивных кинематических пар. Поскольку, как уже было отмечено, число пассивных пар в цепи не может быть меньше числа линейно независимых винтов ее пассивных пар, снижение размерности данного пространства всегда будет означать возникновение особого положения типа «ПП». Тогда, рассматривая по очереди каждый кинематический винт $t_{\pi i, k}$ ($k = 1, \dots, N_{\pi i}$) и угол между ним и пространством $T_{\pi i}$, можно по изменению минимального (из $N_{\pi i}$) значения этого угла судить о приближении механизма к особому положению данного типа. Стоит также отметить, что особые положения типа «ПП» в определенном смысле менее важны, чем особые положения других типов, поскольку теоретически не оказывают влияния на подвижность выходного звена, а значит не влияют на возможность позиционирования рабочего органа согласно требованиям технологического процесса, в котором используется механизм.

2.4. Особенности расчета критериев близости к особым положениям типов «ПУ» и «ВС» с учетом взаимного влияния силовых винтов

Значения обобщенных реакций, рассчитываемых из уравнения (2.15) и так или иначе используемых для расчета критериев близости к особым положениям типов «ПУ» и «ВС», напрямую зависят от того, каким образом были вычислены Плюккерovy координаты силовых винтов, входящих в это уравнение.

Связи, накладываемые какой-либо одной кинематической цепью, физически не зависят от связей, накладываемых остальными цепями механизма. Поэтому выбор базиса группы винтов связей $\mathbf{W}_{сви}$ одной i -й цепи не оказывает никакого влияния на винты связей других цепей. Исключение составляет рассмотренный ранее случай линейной зависимости винтов связей разных кинематических цепей.

Что касается приводного силового винта $\mathbf{w}_{ai,j}$, то условие (2.7), указывающее на необходимость взаимности данного винта кинематическим винтам пассивных пар рассматриваемой цепи, может быть ослаблено, поскольку в изначальной формулировке оно не учитывало наличие других кинематических цепей и соответствующих им силовых винтов. Так, если винт $\mathbf{w}_{ai,j}$ оказывается линейно зависим с группой аналогичных силовых винтов остальных цепей, а механизм при этом не находится в особом положении (приводная избыточность), то нагрузка, соответствующая $r_{ai,j} \cdot \mathbf{w}_{ai,j}$, может полностью быть воспринята другими цепями, и нарушение условия (2.7) никак не отразилось бы на работоспособности механизма.

Кроме того, если при рассмотрении кинематического винта $\Omega_{ai,j}^{\max}$ условие его взаимности любому винту из группы винтов связей цепи $\mathbf{W}_{сви}$ является необходимым с точки зрения физического смысла и работоспособности механизма, то для приводного силового винта $\mathbf{w}_{ai,j}$ аналогичное по своему алгебраическому смыслу условие

$$\langle \mathbf{w}_{ai,j}, \mathbf{w}_{сви} \rangle = 0 \quad \forall \mathbf{w}_{сви} \in \mathbf{W}_{сви} \quad (2.28)$$

необходимым не является.

Таким образом, при рассмотрении механизма как единого целого обязательными условиями для силового винта $\mathbf{w}_{ai,j}$ являются его линейная независимость с группой винтов связи i -й цепи ($\mathbf{w}_{ai,j} \notin \mathbf{W}_{свi}$) и взаимность пересечению групп кинематических винтов пассивных пар всех цепей:

$$\mathbf{w}_{ai,j} \circ \mathbf{t}_{pi} = 0 \quad \forall \mathbf{t}_{pi} \in \bigcup_{i=1}^U \mathbf{T}_{pi}. \quad (2.29)$$

Очевидно, что данных условий недостаточно для однозначного задания винта $\mathbf{w}_{ai,j}$.

Несмотря на свою необязательность, условие (2.28) представляется наиболее естественным при рассмотрении выражения, находящегося в скобках в уравнении равновесия (2.15). Действительно, логично и удобно получать базис группы приводных силовых винтов ортонормированным (или, как минимум, ортогональным). Поэтому для расчетов целесообразно оставить условие (2.28) в силе.

Основная проблема определения Плюккеровых координат винта $\mathbf{w}_{ai,j}$ в рамках рассмотрения только одной цепи заключается в том, что такой винт, оставаясь линейно независимым винтам связей других цепей может содержать координаты, описывающие запрещенные движения выходного звена. Например, если кинематические цепи накладывают связь на любой поворот выходного звена, а при расчете приводной силовой винт $\mathbf{w}_{ai,j}$ имеет ненулевые компоненты в моментной части. В этом случае в реальности внешний момент будет полностью воспринят винтами связей, но в расчете ненулевое значение обобщенной реакции $r_{ai,j}$ будет указывать на то, что часть нагрузки воспринимается также и винтом $\mathbf{w}_{ai,j}$. При этом важно отметить, что если в качестве критерия близости к особому положению типа «ПУ» используется не сама обобщенная реакция $r_{ai,j}$, а усилие в соответствующей приводной паре, то расчетное значение критерия не изменится, поскольку любая внешняя нагрузка, соответствующая запрещенным перемещениям выходного звена будет восприниматься без усилий в приводных парах.

Указанная проблема имеет значение при анализе близости к особым положениям типа «ВС». Если приводной силовой винт $\mathbf{w}_{ai,j}$ имеет компоненты, соответствующие перемещениям, на которые наложены связи другими цепями, то при расчете обобщенной реакции $r_{cvi,k}$, соответствующей винту $\mathbf{w}_{cvi,k}$, возможна ситуация при которой значение указанной реакции будет возрастать не только при приближении к особым положениям типа «ВС», но также и особым положениям типа «ПУ». При этом пространство, порождаемое винтами $\mathbf{w}_{ai,j}$ не будет являться ортогональным дополнением пространства связей \mathbf{C} . Иными словами, при возникновении особого положения типа «ВС» будет вырождаться группа винтов \mathbf{C} , а при возникновении особого положения типа «ПУ» – объединенное пространство всех силовых винтов механизма. Таким образом, выделить отдельно особое положение типа «ВС» при анализе близости к нему будет невозможно.

Для решения данной проблемы необходимо, чтобы винты $\mathbf{w}_{ai,j}$ порождали пространство, ортогональное пространству связей \mathbf{C} . Этого можно добиться способом, аналогичным использованному ранее при получении кинематического винта $\Omega_{ai,j}^{\Phi \max}$ из винта $\Omega_{ai,j}^{\max}$, соблюдая при этом условия (2.28) и (2.29):

$$\mathbf{w}_{ai,j}^{\Phi} = \text{proj}_{\Phi}(\mathbf{w}_{ai,j}) = \sum_{p=1}^n \langle \mathbf{w}_{ai,j}, \Phi_{wp} \rangle \cdot \Phi_{wp}, \quad (2.30)$$

где $\Phi_{w1}, \Phi_{w2}, \dots, \Phi_{wn}$ – ортонормированный базис некоторого векторного пространства силовых винтов, аналогичного в некотором смысле пространству кинематических винтов Φ . Для любого p справедливо

$$\Phi_{wp} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_3 & \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_3 \end{pmatrix} \Phi_p.$$

Тогда уравнение (2.15) примет следующий вид:

$$\sum_{i=1}^U \left(\sum_{j=1}^{N_{ai}} r_{ai,j}^{\Phi} \cdot \mathbf{w}_{ai,j}^{\Phi} + \sum_{k=1}^{6-n_i} r_{cvi,k} \cdot \mathbf{w}_{cvi,k} \right) = \mathbf{L}. \quad (2.31)$$

Таким образом, если для некоторого анализируемого механизма требуется рассмотрение критериев близости к особым положениям типа «ВС», то для

обеспечения адекватности расчета обобщенной реакции $r_{сви,k}$ необходимо использовать методику, описанную ранее, но для вывода расчетных зависимостей использовать уравнение (2.31) вместо (2.15). Соответственно, приводные силовые винты необходимо рассчитывать по формуле (2.30).

2.5. Расчет критериев близости к особым положениям с помощью матрицы Якоби механизма

Рассмотрим подробно процесс и результаты дифференцирования уравнений связи механизма параллельной структуры, используя принятые в первой главе обозначения. Как уже было отмечено, практически для любого механизма параллельной структуры с n степенями свободы можно получить аналитические уравнения связи в виде n неявных функций $F_i(x_1, \dots, x_n, q_{ai})$ ($i = 1 \dots n$) от координат выходного звена x_1, \dots, x_n и перемещений в активных парах q_{a1}, \dots, q_{an} . Тогда, дифференцируя по времени указанные функции, получим систему линейных уравнений вида

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial F_i}{\partial x_2} \dot{x}_2 \dots + \frac{\partial F_i}{\partial x_n} \dot{x}_n + \frac{\partial F_i}{\partial q_{ai}} \dot{q}_{ai} = 0,$$

связывающих между собой входные (\dot{q}_{ai}) и выходные (\dot{x}_j) скорости. Количество уравнений при этом равно количеству активных пар механизма N_a и числу степеней свободы механизма n (при условии отсутствия приводной избыточности).

Переноса \dot{q}_{ai} в правую часть, можно записать в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} -\frac{\partial F_1}{\partial x_1} / \frac{\partial F_1}{\partial q_{a1}} & \dots & -\frac{\partial F_1}{\partial x_n} / \frac{\partial F_1}{\partial q_{a1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{\partial F_{N_a}}{\partial x_1} / \frac{\partial F_{N_a}}{\partial q_{aN_a}} & \dots & -\frac{\partial F_{N_a}}{\partial x_n} / \frac{\partial F_{N_a}}{\partial q_{aN_a}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{q}_{a1} \\ \vdots \\ \dot{q}_{aN_a} \end{pmatrix}.$$

Или иначе

$$\dot{\mathbf{q}}_a = \mathbf{J}_{об} \cdot \dot{\mathbf{x}},$$

что представляет собой выражение (1.2). Матрица $\mathbf{J}_{об}$ в данном случае имеет размер $n \times n$.

Пусть $\mathbf{j}_{обi}$ – вектор, состоящий из элементов i -й строки матрицы $\mathbf{J}_{об}$:

$$\mathbf{j}_{обi} = \left(-\frac{\partial F_i}{\partial x_1} / \frac{\partial F_i}{\partial q_{ai}}, -\frac{\partial F_i}{\partial x_2} / \frac{\partial F_i}{\partial q_{ai}}, \dots, -\frac{\partial F_i}{\partial x_n} / \frac{\partial F_i}{\partial q_{ai}} \right).$$

Стоит заметить, что вектор $\mathbf{j}_{обi}$ по сути представляет собой градиент некоторой функции $q_{ai} = f(x_1, \dots, x_n)$, взятый со знаком минус.

Из выражения выше видно, что значение скорости в i -й активной паре представляет собой скалярное произведение векторов $\mathbf{j}_{обi}$ и $\dot{\mathbf{x}}$. Это означает, что если два данных вектора коллинеарны, то абсолютное значение соответствующей скорости в активной паре будет максимально возможным и равно произведению евклидовых норм данных векторов. Компоненты обратной матрицы Якоби $\mathbf{J}_{об}$ определяются положением (конфигурацией) механизма, поэтому норма вектора $\mathbf{j}_{обi}$ для каждой конфигурации является неизменной величиной.

Как и в случае с подходом, основанном на винтовом исчислении, вращательные и поступательные степени свободы могут быть рассмотрены отдельно. Пусть

$$\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{x}}_{\omega} + \dot{\mathbf{x}}_v,$$

причем вектор $\dot{\mathbf{x}}_{\omega}$ содержит только угловые выходные скорости, а вектор $\dot{\mathbf{x}}_v$ – только линейные. Пусть $\mathbf{j}_{обi}^{\omega}$ и $\mathbf{j}_{обi}^v$ – векторы, которые содержат элементы i -й строки матрицы $\mathbf{J}_{об}$ на позициях, определяемых векторами $\dot{\mathbf{x}}_{\omega}$ и $\dot{\mathbf{x}}_v$ соответственно, а все их остальные компоненты равны нулю. Тогда максимальные абсолютные значения скорости в i -й активной паре, соответствующие различным движениям механизма, равны соответственно:

$$\dot{q}_{ai}^{\max} = \dot{q}_{ai}^{\omega \max} + \dot{q}_{ai}^{v \max} = \|\dot{\mathbf{x}}_{\omega}\| \cdot \|\mathbf{j}_{обi}^{\omega}\| + \|\dot{\mathbf{x}}_v\| \cdot \|\mathbf{j}_{обi}^v\|. \quad (2.32)$$

Результат расчета \dot{q}_{ai}^{\max} по формуле (2.32) идентичен результату, получаемому в (2.14).

Таким образом, применив выражение (2.32), можно оценить близость к особым положениям типа «ПС», используя в качестве критерия максимальные скорости в активных парах.

При использовании обратной матрицы Якоби необходимо учитывать способ, которым задается положение и ориентация выходного звена. Так, первое почти всегда задается координатами x, y, z в неподвижной Декартовой системе координат, производные которых представляют собой линейные скорости твердого тела (выходного звена). Ориентация выходного звена в механизмах с вращательными степенями свободы может быть задана разными способами: с помощью углов Эйлера, координат оси и угла поворота, кватернионов и т.д. При этом производные по времени от подобных выходных координат не будут представлять собой угловые скорости твердого тела. При расчетах с помощью винтового исчисления векторные части кинематических винтов характеризуют указанные угловые скорости, поэтому, если требуется сравнить результаты расчетов разными методами, необходимо учитывать данную особенность обратной матрицы Якоби.

Для примера рассмотрим некоторый условный механизм, для которого ориентация его выходного звена задается углами поворота (углами Эйлера) $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$. Тогда уравнения связи будут иметь следующий вид:

$$F_i(\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z, \mathbf{x}_v^T, q_{ai}) = 0,$$

где \mathbf{x}_v – вектор-столбец «линейных» выходных координат.

Тогда при дифференцировании уравнений связи получим:

$$\dot{\mathbf{q}}_a = \mathbf{J}_{\text{фоб}} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\varphi}_x \\ \dot{\varphi}_y \\ \dot{\varphi}_z \\ \dot{\mathbf{x}}_v \end{pmatrix}, \quad (2.33)$$

где $\dot{\varphi}_x, \dot{\varphi}_y, \dot{\varphi}_z$ – производные по времени от углов поворота, $\mathbf{J}_{\text{фоб}}$ – соответствующая обратная матрица Якоби.

Известно [183], что с учетом ортогональности матрицы поворота \mathbf{R} угловая скорость выходного звена (твердого тела) в неподвижной системе отсчета связана с указанной матрицей следующим образом:

$$[\boldsymbol{\omega}]_x = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^{-1} = \dot{\mathbf{R}}\mathbf{R}^T, \quad (2.34)$$

где $[\boldsymbol{\omega}]_x$ – кососимметричное представление вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)^T$ в следующем виде:

$$[\boldsymbol{\omega}]_x = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix},$$

Матрица поворота \mathbf{R} , как и ее производная $\dot{\mathbf{R}}$ являются функциями углов и зависят от $\dot{\varphi}_x$, $\dot{\varphi}_y$, $\dot{\varphi}_z$ принятой последовательности вращений. Так, для последовательности поворотов «x», «y», «z» данная матрица определяется следующим образом:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_z \mathbf{R}_y \mathbf{R}_x, \quad (2.35)$$

где

$$\mathbf{R}_x = \begin{pmatrix} \cos(\varphi_x) & -\sin(\varphi_x) & 0 \\ \sin(\varphi_x) & \cos(\varphi_x) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{R}_y = \begin{pmatrix} \cos(\varphi_y) & 0 & \sin(\varphi_y) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\varphi_y) & 0 & \cos(\varphi_y) \end{pmatrix}, \mathbf{R}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi_z) & -\sin(\varphi_z) \\ 0 & \sin(\varphi_z) & \cos(\varphi_z) \end{pmatrix}.$$

Если $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ представляют собой функции от времени, то из (2.35) следует:

$$\dot{\mathbf{R}} = \frac{d\mathbf{R}_z}{d\varphi_z} \dot{\varphi}_z \mathbf{R}_y \mathbf{R}_x + \mathbf{R}_z \frac{d\mathbf{R}_y}{d\varphi_y} \dot{\varphi}_y \mathbf{R}_x + \mathbf{R}_z \mathbf{R}_y \frac{d\mathbf{R}_x}{d\varphi_x} \dot{\varphi}_x.$$

Тогда, подставив в (2.34), после всех преобразований получим следующие выражения для определения угловых скоростей:

$$\begin{aligned} \omega_x &= \dot{\varphi}_x \cos \varphi_y \cos \varphi_z - \dot{\varphi}_y \sin \varphi_z, \\ \omega_y &= \dot{\varphi}_x \cos \varphi_y \sin \varphi_z + \dot{\varphi}_y \cos \varphi_z, \\ \omega_z &= \dot{\varphi}_z - \dot{\varphi}_x \sin \varphi_y, \end{aligned}$$

или в матричной форме

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{M}_\varphi \dot{\boldsymbol{\phi}} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_y \cos \varphi_z & -\sin \varphi_z & 0 \\ \cos \varphi_y \sin \varphi_z & \cos \varphi_z & 0 \\ -\sin \varphi_y & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\phi}_x \\ \dot{\phi}_y \\ \dot{\phi}_z \end{pmatrix}. \quad (2.36)$$

Используя матрицу перехода от производных углов поворота к угловым скоростям \mathbf{M}_φ и зависимость (2.36), можно записать (2.33) следующим образом:

$$\dot{\mathbf{q}}_a = \mathbf{J}_{\text{фоб}} \begin{pmatrix} \mathbf{M}_\varphi^{-1} & \mathbf{0}_{3 \times n_v} \\ \mathbf{0}_{n_v \times 3} & \mathbf{I}_{n_v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ \dot{\mathbf{x}}_v \end{pmatrix}, \quad (2.37)$$

где $\mathbf{0}_{3 \times n_v}$ и $\mathbf{0}_{n_v \times 3}$ – нулевые матрицы размера $3 \times n_v$ и $n_v \times 3$ соответственно, \mathbf{I}_{n_v} – единичная матрица размера $n_v \times n_v$, n_v – количество поступательных степеней свободы механизма.

Из (2.37) можно легко видеть, что обратная матрица Якоби, связывающая скорости выходного звена со скоростями во приводных кинематических парах, равна:

$$\mathbf{J}_{\text{об}} = \mathbf{J}_{\text{фоб}} \begin{pmatrix} \mathbf{M}_\varphi^{-1} & \mathbf{0}_{3 \times n_v} \\ \mathbf{0}_{n_v \times 3} & \mathbf{I}_{n_v} \end{pmatrix}, \quad (2.38)$$

Таким образом, при анализе близости к особым положениям типа «ПС» целесообразно вычислять матрицу $\mathbf{J}_{\text{об}}$ с учетом перехода от производных параметров, задающих ориентацию выходного звена, к его угловым скоростям. При этом матрица перехода, очевидно, будет зависеть от способа задания указанной ориентации. Выражения (2.36) и (2.38) справедливы только при использовании углов поворота (углов Эйлера) с последовательностью вращений «x», «y», «z».

Важно отметить, что как матрица $\mathbf{J}_{\text{фоб}}$, получаемая путем дифференцирования уравнений связи, так и матрица перехода \mathbf{M}_φ , могут, в общем случае, вырождаться и вне особых положений исследуемого механизма. Например, при использовании углов поворота вырождение указанной матрицы может наблюдаться при так называемом «складывании рамок», которое будет

представлять собой чисто математическую сингулярность, в то время как сам механизм в особом положении типа «ПС» находиться не будет. В связи с этим, при анализе особых положений с помощью матрицы Якоби необходимо принимать указанную особенность во внимание. При этом параллельное применение винтового исчисления с последующим сравнением результатов может позволить выявить «ложные» особые положения.

Рассмотрим теперь статику механизма. Для этого применим принцип возможных перемещений, согласно которому работа, совершаемая на каждом виртуальном (возможном) перемещении выходного звена δx_p ($p = 1 \dots n$), должна быть равна нулю. Таким образом, могут быть получены n уравнений следующего вида:

$$e_{a1} \cdot \delta q_{a1}^{x_p} + e_{a2} \cdot \delta q_{a2}^{x_p} + \dots + e_{a_{N_a}} \cdot \delta q_{a_{N_a}}^{x_p} + L_{x_p} \cdot \delta x_p = 0, \quad (2.39)$$

где e_{ai} – усилие в i -й приводной паре, $\delta q_{ai}^{x_p}$ – возможное перемещение в i -й активной паре, вызываемое перемещением выходного звена δx_p , L_{x_p} – компонента внешней нагрузки, соответствующая направлению перемещения δx_p .

Учитывая, что в данном случае рассматриваются бесконечно малые перемещения, а также согласно правилу определения производной неявной функции, можно записать:

$$\delta q_{ai}^{x_p} = \frac{dq_{ai}}{dx_p} \delta x_p = - \frac{\partial F_i}{\partial x_p} / \frac{\partial F_i}{\partial q_{ai}} \delta x_p.$$

Тогда, перенеся для каждого возможного перемещения выходного звена слагаемое, соответствующее внешней нагрузке, в правую часть уравнения (2.39), и разделив обе части на δx_p , получим следующую систему уравнений:

$$\begin{pmatrix} -\frac{\partial F_1}{\partial x_1} / \frac{\partial F_1}{\partial q_{a1}} & \dots & -\frac{\partial F_{N_a}}{\partial x_1} / \frac{\partial F_{N_a}}{\partial q_{a_{N_a}}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -\frac{\partial F_1}{\partial x_n} / \frac{\partial F_1}{\partial q_{a1}} & \dots & -\frac{\partial F_{N_a}}{\partial x_n} / \frac{\partial F_{N_a}}{\partial q_{a_{N_a}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{a1} \\ \vdots \\ e_{a_{N_a}} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} L_{x_1} \\ \vdots \\ L_{x_n} \end{pmatrix}.$$

или иначе

$$\mathbf{L} = -\mathbf{J}_{o6}^T \cdot \mathbf{e}_a, \quad (2.40)$$

где $\mathbf{e}_a = (e_{a1}, e_{a2}, \dots, e_{aN_a})^T$ – вектор усилий в приводных парах.

Из выражения (2.40) видно, что если $N_a = n$ (соответственно, матрица \mathbf{J}_{o6}^T будет квадратной), то

$$\mathbf{e}_a = -\mathbf{J}^T \cdot \mathbf{L}, \quad (2.41)$$

где транспонированная матрица Якоби механизма \mathbf{J}^T равна

$$\mathbf{J}^T = (\mathbf{J}_{o6}^T)^{-1}.$$

Пусть

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_f + \mathbf{L}_m,$$

где \mathbf{L}_f – вектор, содержащий только силовые, а \mathbf{L}_m – только моментные составляющие внешней нагрузки, соответствующие перемещениям, связанным с дополнительной подвижностью механизма. Пусть также $\mathbf{j}_{Ti}^f, \mathbf{j}_{Ti}^m$ – векторы, которые содержат элементы i -й строки матрицы \mathbf{J}^T на позициях, определяемых векторами \mathbf{L}_f и \mathbf{L}_m соответственно, причем все их остальные компоненты равны нулю. В этом случае из (2.41) следует, что максимальные абсолютные значения усилия в i -й активной паре, соответствующие разным типам внешней нагрузки, могут быть определены следующим образом:

$$e_{ai}^{\max} = e_{ai}^{f \max} + e_{ai}^{m \max} = \|\mathbf{L}_f\| \cdot \|\mathbf{j}_{Ti}^f\| + \|\mathbf{L}_m\| \cdot \|\mathbf{j}_{Ti}^m\|. \quad (2.42)$$

С помощью выражения (2.42) можно произвести оценку близости к особым положениям типа «ПУ». При этом сам критерий близости практически идентичен тому, который был описан в п. 2.3, поскольку используемая в данном случае максимальная величина усилия в приводной паре может быть однозначно рассчитана из обобщенной реакции, получаемой при использовании винтового исчисления.

В том случае, если механизм обладает вращательными степенями свободы, влияние способа, которым задается ориентация выходного звена, на результаты расчетов может быть учтено за счет вычисления матрицы \mathbf{J}^T путем обращения и транспонирования матрицы $\mathbf{J}_{об}$ рассчитанной, в свою очередь, по некоторой формуле, аналогичной выражению (2.38). Действительно, согласно закону сохранения энергии (мощности) в идеальном механизме должно выполняться следующее условие:

$$\mathbf{e}_a^T \cdot \dot{\mathbf{q}}_a = \mathbf{L}^T \cdot \dot{\mathbf{x}}. \quad (2.43)$$

Если вектор $\dot{\mathbf{x}}$ содержит угловые скорости выходного звена, а матрица $\mathbf{J}_{об}$ рассчитана с учетом перехода от производных параметров, задающих ориентацию выходного звена, к указанным скоростям, то вне зависимости от способа расчета (2.43) можно переписать следующим образом:

$$\mathbf{e}_a^T \cdot \mathbf{J}_{об} \cdot \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{L}^T \cdot \dot{\mathbf{x}},$$

откуда следует, что

$$\mathbf{e}_a^T = \mathbf{L}^T (\mathbf{J}_{об})^{-1}. \quad (2.44)$$

Как видно, выражение (2.44) идентично (2.41).

Таким образом, если матрица $\mathbf{J}_{об}$ учитывает переход от производных параметров, задающих ориентацию выходного звена, к его угловым скоростям, то при расчете усилий в приводах каких-либо дополнительных преобразований производить не требуется, и достаточно использовать выражения (2.41) и (2.42). При этом, как и в случае с особыми положениями типа «ПС», вырождение матрицы в общем случае не обязательно соответствует особому положению типа «ПУ», а может быть проявлением некоторой математической сингулярности, порожденной особенностями способа задания ориентации выходного звена.

Как видно из вышеизложенного, матрица Якоби механизма может быть использована для расчета скоростных и силовых критериев близости к особым положениям типов «ПС» и «ПУ». При этом у такого подхода, по сравнению с

основанным на винтовом исчислении, есть как положительные, так и отрицательные стороны, которые целесообразно отметить.

Достоинства:

- дифференцирование уравнений связи, как правило, не представляет большой сложности, в то время как вычисление Плюккеровых координат кинематических винтов пар подразумевает, что для каждой пары известно ее положение и ориентация в пространстве, определить которые может быть затруднительно;
- при анализе близости к особым положениям типа «ПС» нет необходимости определять взаимные винты и решать системы уравнений, что делает процесс вычислительно более устойчивым;

Недостатки:

- необходимо, чтобы перемещения в активных парах были независимы друг от друга, т.е. попарно не входили одновременно в одно уравнение связи;
- при наличии вращательных степеней свободы возможно возникновение «ложных» сингулярностей, при которых вырождение матрицы вызвано особенностями способа задания ориентации выходного звена, а не попаданием механизма в особое положение;
- принципиально невозможно оценить близость к особым положениям типов «ВС» и «ПП» или записать условие их возникновения.

2.6. Особенности анализа особых положений и расчета критерии близости к ним в механизмах с избыточностью

Представленная классификация и условия возникновения особых положений, применимы как к механизмам без избыточности, так и с ней.

Этот факт вполне очевиден для приводной избыточности, при которой в механизм либо добавляется еще как минимум одна кинематическая цепь, либо как

минимум одна пассивная пара заменяется активной. При этом выражение (2.1) остается справедливым для каждой цепи и достаточным для описания подвижности механизма.

При наличии в механизме кинематической избыточности указанных уравнений для описания подвижности механизма становится недостаточно, поскольку помимо выходного звена возможно также независимое от него контролируемое движение как минимум одного другого звена. Однако дополнительная избыточная подвижность является вспомогательной по отношению к подвижности выходного звена, поэтому ее потеря не играет существенной роли для технологического процесса, в котором используется механизм, и не входит в определение особого положения типа «ПС», принятого в данной работе. Потеря управляемости, выражающаяся в отсутствии контроля над дополнительной подвижностью, в этом случае соответствует по определению особому положению типа «ПП». Критерии для особых положений типов «ПУ» и «ВС» остаются такими же, как для механизмов без избыточности, поскольку подразумевается, что кинематическая избыточность в данном случае не изменяет физические степени свободы механизма, а значит и связи, налагаемые цепями и возникающие при зафиксированных активных парах, если рассматривать механизм как единое целое.

Стоит отметить, что при необходимости можно дополнительно рассмотреть возможность потери избыточной подвижности. Пусть $m_{избi}$ – степень избыточной подвижности i -й цепи, т.е. количество независимых перемещений ее элементов при неподвижном выходном звене. Тогда полученная из (2.1) система уравнений для этой цепи

$$\sum_{j=1}^{N_{ai}} \dot{q}_{ai,j} \mathbf{t}_{ai,j} + \sum_{k=1}^{N_{pi}} \dot{q}_{pi,k} \mathbf{t}_{pi,k} = 0$$

должна иметь нетривиальные решения. Причем размерность пространства решений системы должна быть равна степени избыточной подвижности цепи. Пусть \mathbf{P}_{Ti} – матрица Плюккерových координат кинематических винтов всех

(активных и пассивных) пар рассматриваемой i -й цепи. Тогда формально условие потери избыточной подвижности можно записать в следующем виде:

$$\dim(\ker(\mathbf{P}_{T_i})) < m_{\text{изб}i}.$$

Данное условие может быть использовано в дополнение к (2.2) при анализе особых положений типа «ПС» в механизмах с кинематической избыточностью, однако представляет больше академический, нежели практический интерес.

Рассмотрим теперь особенности оценки близости к особым положениям в механизмах с избыточностью с помощью винтового исчисления, начав с приводной. Особые положения типов «ПС» и «ПП» являются в некотором смысле «локальными», т.к. для их возникновения достаточно выполнения определенного условия в пределах одной цепи. Так, в условии возникновения типа «ПП», изначально рассматривается только одна цепь. Что касается типа «ПС», то он характеризуется возникновением дополнительной связи, налагаемой на выходное звено хотя бы одной цепью и возникающей при вырождении группы кинематических винтов T_i , при условии, что эта связь запрещает разрешенное в неособом положении перемещение выходного звена. Таким образом, приводная избыточность не оказывает влияния на подход к оценке близости к особым положениям данных типов. Что касается типа «ПУ», то в данном случае при остановке всех приводных пар число линейно независимых приводных силовых винтов $w_{ai,j}$ окажется меньше, чем $6 - \dim(C)$. Это означает, что подобно описанной ранее возможной ситуации с силовыми винтами связей $w_{cbi,k}$, кинематического винта $\tau_{ai,j}$, взаимного одному единственному винту $w_{ai,j}$ не существует. При этом наличие приводной избыточности, по сути, гарантирует линейную зависимость как винтов $w_{ai,j}$, так и винтов $w_{cbi,k}$. В этом случае для анализа близости к особым положениям типов «ПУ» и «ВС» может быть использован подход, описанный ранее для особого положения типа «ВС» при наличии линейной зависимости между силовыми винтами связей $w_{cbi,k}$.

Что касается механизмов с кинематической избыточностью, то ее наличие не влияет на критерии оценки близости к особым положениям типов «ПС», «ПУ»

и «ВС», если потеря дополнительной подвижности механизма не рассматривается как особое положение типа «ПС», а потеря управляемости этой подвижностью рассматривается в качестве особого положения типа «ПП». Поэтому при соблюдении вышеупомянутых условий для подобных механизмов можно использовать тот же самый подход, что и для механизмов без избыточности.

Рассмотрим теперь порядок оценки близости к особым положениям с использованием матрицы Якоби для механизмов с избыточностью, приняв следующее допущение: все перемещения в активных парах механизма являются независимыми в том смысле, что в любое из уравнений связи, составляемых для этого механизма, входит только одно такое перемещение.

Обозначим вектор выходных скоростей, как $\dot{\chi}$. В отличие от вектора \dot{x} , данный вектор включает в себя не только скорости выходного звена, но также и скорости $\dot{\psi}$, связанные с дополнительной управляемой подвижностью механизма:

$$\dot{\chi} = \dot{x} + \dot{\psi} = \dot{x}_o + \dot{x}_v + \dot{\psi},$$

По аналогии с (1.2) можно записать:

$$\dot{q}_a = J_{об} \cdot \dot{\chi}. \quad (2.45)$$

Тогда с учетом того, что потеря избыточной подвижности не является особым положением типа «ПС», для оценки близости к особым положениям этого типа может быть использовано выражение (2.32). При этом наличие в механизме избыточности любого типа не играет никакой роли. Также в данном случае возможно естественным образом учесть увеличение скорости в активных парах, соответствующее ситуации, когда механизм близок к такому положению, в котором теряется дополнительная подвижность. При этом необходимо рассмотреть максимальную скорость в i -й активной паре, соответствующую такому движению механизма, при котором задействуется избыточная подвижность:

$$\dot{q}_{ai}^{\psi \max} = \|\dot{\psi}\| \cdot \|j_{обi}^{\psi}\|.$$

Здесь $\mathbf{j}_{обi}^\Psi$ – вектор, содержащий элементы i -й строки матрицы $\mathbf{J}_{об}$ на позициях, определяемых вектором Ψ , и остальные компонентами, равными нулю.

Стоит заметить, что несмотря на то, что в данной работе потеря механизмом дополнительной подвижности не рассматривается в качестве особого положения типа «ПС», с практической точки зрения причина увеличения скорости в каком-либо приводе не играет существенной роли, поскольку привод, в любом случае, не способен обеспечить скорость в соответствующей активной паре сверх своих физических возможностей. Однако избыточность позволяет реализовывать одно и то же движение выходного звена, по сути, бесконечным числом способов, т.к. для одного положения выходного звена число возможных конфигураций механизма будет бесконечно большим. Это означает, что если механизм не находится вблизи особого положения типа «ПС», то всегда найдется решение системы (2.45) при котором можно будет избежать увеличения скорости в активных парах, вызванного «близостью» к потере дополнительной подвижности.

Оценка близости к особым положениям типа «ПУ» возможна только в случае кинематической избыточности, поскольку при наличии приводной избыточности матрица $\mathbf{J}_{об}$ не является квадратной, а значит не существует обратная ей матрица. Поскольку потеря управляемости избыточной подвижностью, как уже было отмечено, рассматривается как особое положение типа «ПП», а не «ПУ», то критерий близости к последнему для механизмов с кинематической избыточностью может быть рассчитан по формуле (2.42). При этом, по аналогии с особыми положениями типа «ПС» можно дополнительно оценить близость к потере управляемости, рассматривая вектор внешней нагрузки Λ :

$$\Lambda = \mathbf{L} + \lambda = \mathbf{L}_f + \mathbf{L}_m + \lambda,$$

где λ – вектор внешней нагрузки, соответствующей избыточной подвижности.

Аналогично

$$\mathbf{e}_a = -\mathbf{J}^T \cdot \Lambda.$$

Можно видеть, что близость к потере управляемости избыточной подвижности может быть оценена путем рассмотрения максимального усилия в i -й активной паре, соответствующего нагрузке λ :

$$e_{ai}^{\lambda, \max} = \|\lambda\| \cdot \|\mathbf{j}_{Ti}^{\lambda}\|,$$

где $\mathbf{j}_{Ti}^{\lambda}$ – вектор, который содержит элементы i -й строки матрицы \mathbf{J}^T на позициях, определяемых вектором λ , а все его остальные компоненты равны нулю.

Как и в случае близости к потере механизмом дополнительной подвижности, близость к потере управляемости этой подвижностью может приводить к превышению усилием в приводе критического значения. Однако, аналогичным образом, при наличии кинематической избыточности теоретически существует бесконечно большое количество вариантов относительного расположения управляемых звеньев механизма при одних и тех же координатах выходного звена. Поэтому, как и при рассмотрении особых положений типа «ПС», всегда будет существовать конфигурация, позволяющая избежать чрезмерного возрастания критерия близости к особому положению, в данном случае – усилия в приводной паре.

2.7. Практические алгоритмы анализа особых положений и близости к ним и их особенности

Реализация представленных методов требует, во-первых, предварительного решения некоторых других задач, являющихся базовыми (задача о положениях, определение рабочей зоны), во-вторых – разработки и практической реализации расчетных алгоритмов.

Первой задачей для любого механизма, не считая его структурного синтеза и анализа подвижности, является вывод уравнений связи, включающих входные и выходные координаты. Для механизмов параллельной структуры, как правило,

одной кинематической цепи соответствует одно уравнение связи. Далее становится возможным решение обратной задачи о положениях, т.е. определение набора входных координат по заданным выходным координатам. При этом данная задача в большинстве случаев может быть решена отдельно для каждой кинематической цепи. В настоящей работе вывод уравнений связи и решение обратной задачи о положениях для всех механизмов осуществляется аналитически путем анализа их геометрии и структуры. Решение обратной задачи о положениях подразумевает преобразование уравнений связи к такому виду, в котором входные координаты выражены явным образом.

Следующей задачей является определение рабочей зоны механизма, т.е. области, включающей в себя все точки, в которых может находиться выходное звено. Если рассматриваются только ограничения, накладываемые уравнениями связи, то такая рабочая зона называется теоретической, если учитываются конструктивные ограничения (максимально допустимые углы поворотов шарниров, отсутствие коллизий между звеньями и т.д.) – конструктивной. Если в дополнение к ограничениям, налагаемым конструкцией механизма, учитывается также возможность поддержания параметров движения заданных эксплуатационных параметров (скорость движения выходного звена, усилие в приводе, точность позиционирования и т.п.), то рабочая зона называется эффективной [54]. Определение рабочей зоны может быть осуществлено, например, с помощью итерационного подхода. Для этого исследуемый участок пространства (или плоскости) разбивается на заданное число точек (узлов), образующих сетку. После этого в каждой точке проверяется выполнение заданных условий: если условия выполняются, то точка принадлежит рабочей зоне. При анализе теоретической рабочей зоны необходимым и достаточным условием принадлежности точки этой зоне является возможность решения в ней обратной задачи о положениях в действительных числах. При этом если обратная задача о положениях решается аналитически, то это также означает, что для каждой отдельно взятой точки вопрос о ее принадлежности теоретической рабочей зоне также решается аналитически.

Другой важной задачей является определение точек рабочей зоны, соответствующих особым положениям механизма. При этом в большинстве случаев получение аналитических зависимостей, описывающих точки, кривые или поверхности (в том числе в пространствах размерности, большей трех) особых положений, невозможно. Исключением являются особые положения типа «ПС», которые, как уже было отмечено, обычно располагаются на границе теоретической рабочей зоны механизма и при определенных условиях могут быть описаны уравнениями простых поверхностей (чаще всего сферических). Для особых положений типа «ПС» и «ПУ» можно использовать метод Х. Анджелеса и К. Госслена, проверяя вырожденность соответствующих матриц. При этом критерием вырожденности может служить как равенство нулю определителя матрицы, так и уменьшение ее ранга. Применение винтового исчисления является менее удобным, поскольку для всех типов особых положений необходимо рассматривать вырожденность соответствующих матриц Плюккерových координат кинематических или силовых винтов. Данные матрицы в общем случае не являются квадратными, а значит не имеют определителя, то есть могут быть проверены на вырожденность только путем вычисления ранга. Кроме того, например, для особых положений типа «ПС», как уже было отмечено, понижение ранга матрицы кинематических винтов цепи не является достаточным условием. Основным недостатком же заключается в том, что ранг матрицы изменяется мгновенно, поэтому при итерационном анализе рабочей зоны попасть точно в точку, соответствующую особому положению, практически невозможно.

Использование значения определителя какой-либо матрицы для нахождения точек особых положений сопряжено с той же самой проблемой – при итерационном анализе практически невозможно попасть в точку, в которой значение определителя будет строго равно нулю. Ориентироваться на некоторые «достаточно малые» значения определителя также не представляется возможным, так как, во-первых, нет возможности однозначно определить, насколько малым должно быть значение, а во-вторых, даже если определитель близок к нулю, это не гарантирует того, что матрица «близка» к вырождению. Так, например, для любых

двух натуральных чисел a и b определитель матрицы $10^{-a} \cdot \mathbf{I}_b$ будет равен 10^{-ab} , но сама матрица при этом не будет являться плохо определенной (число обусловленности будет равно единице, т.е. «лучшим» из возможных).

При итерационном анализе рабочей зоны механизмов с $N_a = n$ активными парами наиболее удобно использовать не значение, а только знак определителя матриц \mathbf{A} и \mathbf{B} метода Х. Анджелеса и К. Госслена: если знак определителя рассматриваемой матрицы между двумя соседними точками различен, то между двумя этими точками механизм попадает в особое положение соответствующего типа. Стоит заметить, что при использовании описанного подхода имеется вероятность пропуска точек особых положений, если шаг сетки разбиения (перебора) рабочей зоны слишком велик. Аналогично, совпадение знака определителя в двух соседних точках, в теории, не гарантирует, что между ними отсутствует особое положение. Однако, если шаг сетки достаточно мал, то вероятность пропуска особого положения также невелика. Кроме того, наличие или отсутствие особых положений может быть проверено путем расчета значений критериев близости к ним.

Поиск особых положений типа «ВС» представляет собой более сложную задачу. Использование изменения знака определителя матрицы силовых винтов, как это описано выше для матриц \mathbf{A} и \mathbf{B} метода Х. Анджелеса и К. Госслена, сопряжено с определенными сложностями. Для оценки «близости» винтов к линейной зависимости имеет значение абсолютное значение указанного определителя. При этом Плюккеровы координаты любого винта могут быть умножены на ненулевой множитель произвольной величины, в том числе имеющий отрицательный знак, без изменения физического смысла матрицы силовых винтов. Данная манипуляция, однако, приведет к изменению знака определителя матрицы. В результате, при нахождении взаимных винтов выбор их направления задает знак определителя матрицы силовых винтов, не влияя при этом на ее физический смысл. Кроме того, знак определителя зависит и от последовательности, в которой записаны винты в данной матрице. Таким образом, для того чтобы использовать изменение знака определителя для определения

примерного положения точек особых положений типа «ВС» необходимо соблюдение двух условий: выбор направления взаимных винтов при их определении должен подчиняться некоторому правилу, порядок записи винтов в матрице должен быть неизменным. Второе условие легко выполнимо, в то время как реализация первого требует дополнительных действий.

Одним из вариантов является получение аналитических зависимостей для расчета Плюккерových координат, что, однако, может оказаться довольно сложной задачей. Кроме того, если размерность группы взаимных винтов больше единицы, то возможное количество таких зависимостей (без учета умножения не скаляр) бесконечно велико и целиком зависит от субъективного выбора.

Еще одним решением может стать сохранение постоянства ориентации векторного пространства винтов. Пусть \mathbf{I}_n – ортонормированный базис векторного пространства \mathbb{R}^n . Примем, что его ориентация положительна (по аналогии с правой системой координат x, y, z для \mathbb{R}^3). Пусть \mathbf{S} ($\dim(\mathbf{S}) < n$) – матрица Плюккерových координат винтов, для которых необходимо найти взаимные винты, а \mathbf{S}^\perp – ее ортогональное дополнение. Совокупность строк или столбцов (в зависимости от принятой формы записи) этих двух матриц представляют собой базис \mathbb{R}^n . При этом матрицей перехода от данного базиса к базису \mathbf{I}_n будет являться сама совокупная матрица $\mathbf{S}_\Sigma = \mathbf{S} \cup \mathbf{S}^\perp$. Известно [18], что если матрица перехода имеет положительный определитель, то переход от начального базиса к конечному сохраняет ориентацию пространства. Таким образом, если $\det(\mathbf{S}_\Sigma) > 0$, то ориентация пространства винтов сохраняется. Поскольку компоненты матрицы \mathbf{S}^\perp являются Плюккерowymi координатами искомых взаимных винтов, сохранение ориентации упомянутого пространства может быть применено в качестве условия для определения ориентации этих винтов. На практике это может быть реализовано следующим образом: к искомой матрице винтов дописывается ее ядро после чего вычисляется определитель объединенной матрицы. Если этот определитель меньше нуля, то один из векторов ядра умножается на «-1».

Используя данные условия, можно применить комбинированный итерационный подход. Для этого в соседних точках рассматривается знак

определителя матрицы \mathbf{A} метода Х. Анджелеса и К. Госслена и знак определителя матрицы силовых винтов \mathbf{W} . Если знак определителя матрицы силовых винтов отличается, то между двумя точками существует особое положение или типа «ПУ» или типа «ВС». Если при этом знак определителя матрицы \mathbf{A} одинаков, то особое положение типа «ПУ» отсутствует, а значит остается только особое положение типа «ВС». Для практического применения, однако, рассмотрение знака определителя матрицы силовых винтов отдельно в зоне с $\det(\mathbf{A}) > 0$ и зоне с $\det(\mathbf{A}) < 0$ не очень удобно. Поскольку при переходе через особое положение типа «ПУ» изменится как знак определителя матрицы \mathbf{W} , так и знак определителя матрицы \mathbf{A} , а через особое положение типа «ВС» – только знак определителя матрицы \mathbf{W} , можно рассмотреть изменение знака произведения $\det(\mathbf{W})\det(\mathbf{A})$ во всей рабочей зоне сразу: если в двух соседних точках знак произведения разный, то между ними находится особое положение типа «ВС».

Также стоит отметить, что если представляется возможным получить аналитические зависимости для расчета силовых винтов связей, то достаточно рассмотреть только матрицу, составленную из Плюккерových координат этих винтов, не рассматривая матрицу \mathbf{A} .

Что касается особых положений типа «ПП», то, как уже было отмечено, их рассмотрение кроме отдельных редких случаев не имеет смысла.

Наконец, главной задачей является расчет конкретных (в числах) значений критериев близости к особым положениям, описанных ранее. Для этого можно использовать как матрицу Якоби, так и винтовое исчисление.

Алгоритм оценки близости к особым положениям типа «ПС» с использованием матрицы Якоби:

- вычисление по аналитическим зависимостям элементов матрицы \mathbf{J}_{06} ;
- определение для каждой активной пары максимальной скорости в ней отдельно для линейных и угловых скоростей выходного звена с использованием соответствующих элементов строк матрицы \mathbf{J}_{06} ;
- выбор максимального значения из полученных и его сравнение с некоторым критическим значением.

Алгоритм оценки близости к особым положениям типа «ПУ» с использованием матрицы Якоби:

- вычисление по аналитическим зависимостям элементов матрицы $\mathbf{J}_{об}$;
- вычисление матрицы Якоби по формуле $\mathbf{J} = (\mathbf{J}_{об})^{-1}$ и ее транспонирование;
- определение для каждой активной пары максимального приводного усилия в ней отдельно для внешней силы и момента, действующих на выходное звено, и использованием соответствующих элементов строк матрицы \mathbf{J}^T ;
- выбор максимального значения из полученных и его сравнение с некоторым критическим значением.

Алгоритм оценки близости к особым положениям типа «ПС» с использованием винтового исчисления:

- вычисление по аналитическим зависимостям Плюккеровых координат единичных кинематических винтов активных и пассивных пар i -й цепи $\mathbf{t}_{ai,j}$ и $\mathbf{t}_{\pi i,k}$;
- формирование матрицы \mathbf{T}_i из вычисленных координат (построчно):

$$\mathbf{T}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{t}_{ai,1}^T \\ \vdots \\ \mathbf{t}_{ai,N_{ai}}^T \\ \mathbf{t}_{\pi i,1}^T \\ \vdots \\ \mathbf{t}_{\pi i,N_{\pi i}}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{ai,1}^x & t_{ai,1}^y & t_{ai,1}^z & t_{ai,1}^{ox} & t_{ai,1}^{oy} & t_{ai,1}^{oz} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ t_{ai,N_{ai}}^x & t_{ai,N_{ai}}^y & t_{ai,N_{ai}}^z & t_{ai,N_{ai}}^{ox} & t_{ai,N_{ai}}^{oy} & t_{ai,N_{ai}}^{oz} \\ t_{\pi i,1}^x & t_{\pi i,1}^y & t_{\pi i,1}^z & t_{\pi i,1}^{ox} & t_{\pi i,1}^{oy} & t_{\pi i,1}^{oz} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ t_{\pi i,N_{\pi i}}^x & t_{\pi i,N_{\pi i}}^y & t_{\pi i,N_{\pi i}}^z & t_{\pi i,N_{\pi i}}^{ox} & t_{\pi i,N_{\pi i}}^{oy} & t_{\pi i,N_{\pi i}}^{oz} \end{pmatrix};$$

- вычисление матрицы \mathbf{T}_i^\perp , состоящей из Плюккеровых координат базисных единичных кинематических винтов «запрещенных» перемещений цепи (пропорциональны координатам силовых винтов связей этой цепи) путем нахождения ядра матрицы \mathbf{T}_i :

$$(\mathbf{T}_i^\perp)^T = \ker(\mathbf{T}_i);$$

- определение с точностью до множителя «наихудшего» для исследуемой активной пары винта выходного звена $\Omega_{ai,j}^{\max}$ путем замены кинематического

винта этой пары в матрице \mathbf{T}_i матрицей \mathbf{T}_i^\perp и вычисления ядра полученной матрицы (на примере первой активной пары i -й цепи):

$$\boldsymbol{\Omega}_{ai,1}^{\max} = \ker \begin{pmatrix} \mathbf{T}_i^\perp \\ \mathbf{t}_{ai,2}^\top \\ \vdots \\ \mathbf{t}_{ai,N_{ai}}^\top \\ \mathbf{t}_{\pi i,1}^\top \\ \vdots \\ \mathbf{t}_{\pi i,N_{\pi i}}^\top \end{pmatrix}.$$

При необходимости вместо винта $\boldsymbol{\Omega}_{ai,j}^{\max}$ может быть использован винт $\boldsymbol{\Omega}_{ai,j}^{\Phi \max}$, рассчитываемый по формуле (2.11), что на практике может выражаться в отбрасывании (обнулении) Плюккерových координат винта $\boldsymbol{\Omega}_{ai,j}^{\max}$, соответствующих запрещенным перемещениям выходного звена, с последующей нормализацией этого винта;

- определение проекций найденного винта $\boldsymbol{\Omega}_{ai,j}^{\omega \max}$ и $\boldsymbol{\Omega}_{ai,j}^{v \max}$ по формуле (2.13) и вычисление максимальных значений скорости в рассматриваемой кинематической паре отдельно для линейных и угловых скоростей выходного звена;
- повторение алгоритма для других цепей и активных пар, выбор максимального значения критерия из полученных и сравнение с критическим значением.

Алгоритм оценки близости к особым положениям типа «ПУ» с использованием винтового исчисления:

- вычисление Плюккерových координат силовых винтов связи и приводных силовых винтов:

$$\mathbf{w}_{ai,j} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_3 & \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_3 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{\Omega}_{ai,j}^{\max},$$

$$\left(\mathbf{w}_{сви,1}, \dots, \mathbf{w}_{сви,6-n_i} \right) = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_3 & \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{I}_3 & \mathbf{0}_3 \end{pmatrix} \cdot \left(\mathbf{T}_i^\perp \right)^\top;$$

- формирование матрицы \mathbf{W} из Плюккеровых координат этих винтов, найденных для всех цепей и активных пар, с расположением построчно:

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \mathbf{w}_{a1,1}^T \\ \vdots \\ \mathbf{w}_{aU, N_{пU}}^T \\ \mathbf{w}_{св1,1}^T \\ \vdots \\ \mathbf{w}_{свU, 6-n_U}^T \end{pmatrix};$$

- определение с точностью до множителя «наихудшего» для исследуемой активной пары силового винта внешней нагрузки $\mathbf{L}_{ai,j}^{\max}$ путем удаления соответствующей строки матрицы \mathbf{W} и вычисления ядра полученной матрицы (на примере 1-й активной пары 1-й цепи):

$$\mathbf{L}_{a1,1}^{\max} = \ker \begin{pmatrix} \mathbf{w}_{a1,2}^T \\ \vdots \\ \mathbf{w}_{aU, N_{пU}}^T \\ \mathbf{w}_{св1,1}^T \\ \vdots \\ \mathbf{w}_{свU, 6-n_U}^T \end{pmatrix};$$

- определение проекций найденного винта $\mathbf{L}_{ai,j}^{f \max}$ и $\mathbf{L}_{ai,j}^{m \max}$ по формуле (2.19) и вычисление максимальных значений соответствующих обобщенных реакций с последующим пересчетом в усилие в рассматриваемой активной паре отдельно для внешней силы и внешнего момента;
- повторение алгоритма для других активных пар, выбор максимального значения критерия из полученных и его сравнение с критическим значением.

Важно отметить, что если представляется возможным определить \mathbf{T}_i^\perp , $\mathbf{\Omega}_{ai,j}^{\max}$ (и, соответственно, $\mathbf{w}_{ai,j}$ и $\mathbf{w}_{сви,k}$) или $\mathbf{L}_{ai,j}^{\max}$ аналитически путем геометрического анализа винтов, не прибегая к операции нахождения ядра матрицы Плюккеровых координат, то такой способ может являться более предпочтительным. В то же

время способ определения Плюккерových координат винтов не влияет на последовательность операций в представленных алгоритмах.

Оценка близости к особым положениям типа «BC» проводится с использованием винтового исчисления по алгоритму, схожему с используемым для особых положений типа «ПУ». Отличие заключается в том, что из матрицы \mathbf{W} исключаются поочередно силовые винты связей, а не винты $\mathbf{w}_{ai,j}$, а также в том, что значение соответствующей обобщенной реакции само по себе служит критерием близости. Кроме того, для устранения возможной проблемы влияния на обобщенные реакции, соответствующие силовым винтам связи (как указано в п. 2.4), винты $\mathbf{w}_{ai,j}$ будут заменяться винтами $\mathbf{w}_{ai,j}^{\Phi}$, рассчитанными по зависимости (2.30).

В данной работе все вычисления проводятся с использованием системы компьютерной алгебры MATLAB с применением встроенных функций для работы с матрицами. Так, для решения систем линейных уравнений (оператор «\» или функция *mldivide()*), нахождения определителя матрицы (функция *det()*), а также обратной матрицы (функция *inv()*) используется LU-разложение, являющееся разновидностью метода Гаусса. Для нахождения ядра матрицы используется функция *null()*, основанная на сингулярном разложении матрицы.

2.8. Результаты и выводы по главе

- предложена классификация особых положений механизмов параллельной структуры, охватывающая четыре возможных варианта изменения подвижности механизма: потерю степени свободы выходным звеном (тип «ПС»); потерю управляемости выходным звеном (тип «ПУ»); вырождение связей, приводящих к возникновению дополнительной подвижности выходного звена вне рамок изначальных степеней свободы (тип «BC»); неконтролируемую подвижность промежуточных звеньев при

неподвижных активных парах и выходном звене (тип «ПП»). Для предложенной классификации путем использования винтового исчисления и линейной алгебры получена математическая формулировка условий, характеризующих возникновение особых положений каждого из перечисленных типов;

- для особых положений типа «ПС» предложен критерий близости, представляющий собой максимальное значение скорости в приводных парах при заданной норме, но неизвестном направлении кинематического винта выходного звена. Представлены методики расчета значения критерия, основанные на винтовом исчислении и использовании матрицы Якоби механизма;
- для особых положений типа «ПУ» предложен критерий близости, представляющий собой максимальное значение обобщенных реакций кинематических цепей или усилий в приводных парах при заданной норме, но неизвестном направлении силового винта внешней нагрузки. Представлены методики расчета значения критерия, основанные на винтовом исчислении и использовании матрицы Якоби механизма;
- для особых положений типа «ВС» предложен критерий близости, представляющий собой максимальное значение обобщенных реакций, соответствующих винтам связи. Представлена методика расчета критерия, основанная на винтовом исчислении, а также отмечена ограниченная применимость данного критерия в механизмах, у которых винты связей различных цепей не являются линейно независимыми. Рассмотрена возможность влияния приводных силовых винтов на результаты расчета критерия близости к данному типу особых положений, и предложен способ избежать такого влияния;
- отмечено, что для особых положений типа «ПП» невозможно получение удобного в использовании и обладающего ясным физическим смыслом критерия близости;

- предложены практические алгоритмы расчета критериев близости к особым положениям типов «ПС», «ПУ» и «ВС» на основе винтового исчисления. Для первых двух типов особых положений также представлены расчетные алгоритмы, использующие матрицу Якоби механизма;
- при использовании матрицы Якоби для анализа механизмов с вращательными степенями свободы необходимо учитывать особенности способа задания ориентации выходного звена;
- при использовании винтового исчисления кинематические и силовые винты в промежуточных расчетах могут рассматриваться в качестве элементов шестимерного векторного пространства, что позволяет использовать формализм и математический аппарат линейной алгебры;
- с целью исключения необходимости нормализации винтов, содержащих различные по своей природе (линейные и угловые) компоненты, при расчетах возможно рассмотрение поступательных и вращательных степеней свободы по отдельности;
- предложенная классификация и способы расчета критериев близости к различным типам особых положений могут быть использованы для механизмов с избыточностью. С учетом принятых определений и допущений расчетные методики, основанные как на винтовом исчислении, так и на использовании матрицы Якоби, могут быть применены к механизмам с кинематической избыточностью точно таким же образом, как и к механизмам без нее. При наличии приводной избыточности возможно использование подхода, основанного на винтовом исчислении, для расчета критериев близости к любому типу особых положений, однако ясный физический смысл сохраняется только для критерия близости к особым положениям типа «ПС». Также подход, использующий матрицу Якоби механизма, при наличии приводной избыточности может быть применен только для расчета критерия близости к особым положениям типа «ПС».

ГЛАВА 3. АНАЛИЗ МЕХАНИЗМОВ ТИПА DELTA С ЛИНЕЙНЫМИ ПРИВОДАМИ С ШЕСТЬЮ И ЧЕТЫРЬМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

3.1. Структура, анализ подвижности, уравнения связи и решение обратной задачи о положениях механизма с шестью степенями свободы

Применение предложенных методов анализа особых положений и близости к ним с использованием винтового исчисления к механизмам с шестью степенями свободы является, в некотором смысле, наиболее простым. Это связано с отсутствием в таких механизмах силовых винтовых связей, что уменьшает количество операций по вычислению Плюккерových координат различных винтов. В этой связи целесообразно начать исследование возможностей и особенностей применения предложенных методов с подобного механизма.

Начнем рассмотрение с одной отдельной кинематической цепи со структурой \underline{PUS} (рисунок 3.1).

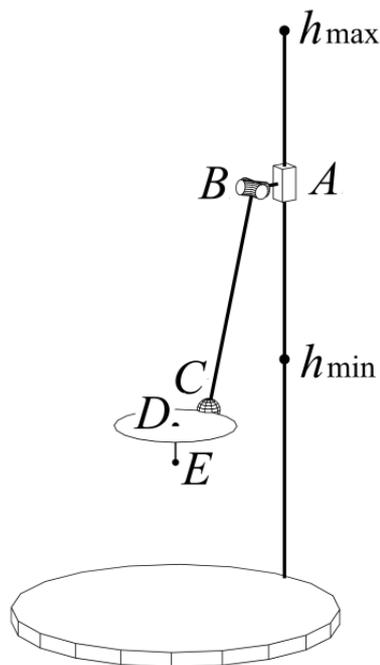


Рисунок 3.1. Кинематическая цепь \underline{PUS}

Данная цепь состоит из вертикально ориентированной стойки, на которой расположена призматическая пара A (перемещается в пределах от h_{\min} до h_{\max}) шарнира Гука B , сферического шарнира C и соединяющих эти шарниры промежуточных звеньев. Выходное звено (точка D) соединено с цепью через шарнир C . На выходном звене присутствует некоторый рабочий орган (точка E).

Рассмотрим единичные кинематические винты цепи (рисунок 3.2). Здесь и далее винты нулевого параметра показаны сплошными стрелками, а винты бесконечного параметра – штриховыми.

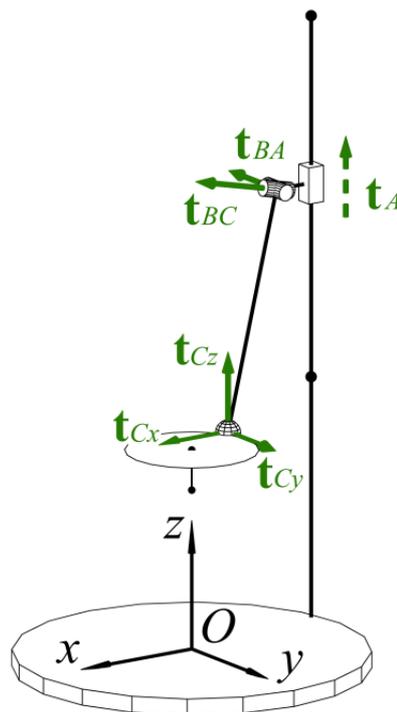


Рисунок 3.2. Единичные кинематические винты цепи \underline{PUS}

Как видно, кинематическим парам цепи \underline{PUS} может быть сопоставлено шесть единичных кинематических винтов: \mathbf{t}_A , \mathbf{t}_{BA} , \mathbf{t}_{BC} , \mathbf{t}_{Cx} , \mathbf{t}_{Cy} , \mathbf{t}_{Cz} .

Винт \mathbf{t}_A имеет бесконечный параметр и характеризует перемещение условной каретки (точка A) по вертикали. Вне зависимости от точки приведения Пюккерovy координаты данного винта всегда равны:

$$\mathbf{t}_A = (0, 0, 0, 0, 0, 1)^T.$$

Винт нулевого параметра \mathbf{t}_{BA} характеризует ось шарнира Гука, неподвижную относительно звена AB . Векторная часть данного винта представляет собой

единичный вектор \mathbf{d}_{BA} , направленный вдоль соответствующей оси указанного шарнира. Координаты этого вектора могут быть записаны следующим образом:

$$\mathbf{d}_{BA} = (\cos \alpha_{AB}, \sin \alpha_{AB}, 0),$$

где α_{AB} – угол между осью Ox и линией, проходящей через точку O и параллельной вектору \mathbf{d}_{BA} . Данный вектор перпендикулярен звену AB , поэтому

$$\alpha_{AB} = \arctan 2(y_A - y_B, x_A - x_B) + \frac{\pi}{2}.$$

Стоит отметить, что координаты x_A, y_A, x_B, y_B постоянны и зависят только от расположения вертикальной стойки относительно системы координат $Oxyz$.

При приведении данного винта в точку E его Плюккеровы координаты могут быть записаны следующим образом:

$$\mathbf{t}_{BA} = (\mathbf{d}_{BA}, \boldsymbol{\rho}_{EB} \times \mathbf{d}_{BA})^T,$$

где $\boldsymbol{\rho}_{EB}$ – вектор с началом в точке E и концом в точке B :

$$\boldsymbol{\rho}_{EB} = (x_B - x_E, y_B - y_E, z_B - z_E).$$

Ось второго кинематического винта шарнира Гука (\mathbf{t}_{BC}) связана со звеном BC и перпендикулярна ему. Кроме того, она также должна быть перпендикулярна оси винта \mathbf{t}_{BA} . Таким образом, вектор, задающий ось \mathbf{t}_{BC} , представляет собой векторное произведение векторов $\boldsymbol{\rho}_{BC}$ и \mathbf{d}_{BA} . Нормирование этого вектора позволяет получить Плюккеровы координаты векторной части единичного кинематического винта:

$$\mathbf{d}_{BC} = \frac{\boldsymbol{\rho}_{BC} \times \mathbf{d}_{BA}}{\|\boldsymbol{\rho}_{BC} \times \mathbf{d}_{BA}\|},$$

где

$$\boldsymbol{\rho}_{BC} = (x_C - x_B, y_C - y_B, z_C - z_B).$$

Тогда Плюккеровы координаты винта \mathbf{t}_{BC} :

$$\mathbf{t}_{BC} = (\mathbf{d}_{BC}, \boldsymbol{\rho}_{EB} \times \mathbf{d}_{BC})^T.$$

Что касается сферического шарнира (точка C), то независимо от ориентации звеньев его степени свободы всегда могут быть описаны тремя взаимно перпендикулярными единичными винтами нулевого параметра \mathbf{t}_{Cx} , \mathbf{t}_{Cy} , \mathbf{t}_{Cz} , оси которых параллельны соответствующим осям системы $Oxyz$, то есть Плюккеровы координаты указанных винтов могут быть записаны следующим образом:

$$\begin{aligned}\mathbf{t}_{Cx} &= (1, 0, 0, \boldsymbol{\rho}_{EC} \times [1, 0, 0])^T, \\ \mathbf{t}_{Cy} &= (0, 1, 0, \boldsymbol{\rho}_{EC} \times [0, 1, 0])^T, \\ \mathbf{t}_{Cz} &= (0, 0, 1, \boldsymbol{\rho}_{EC} \times [0, 0, 1])^T,\end{aligned}$$

где

$$\boldsymbol{\rho}_{EC} = (x_C - x_E, y_C - y_E, z_C - z_E).$$

Все шесть перечисленных кинематических винтов в общем случае являются линейно независимыми. Этот факт достаточно легко продемонстрировать путем изменения точки приведения с E на C . В этом случае винты \mathbf{t}_{Cx} , \mathbf{t}_{Cy} и \mathbf{t}_{Cz} будут иметь нулевую моментную часть, и поскольку данные винты всегда линейно независимы, достаточно показать линейную независимость только моментных частей оставшихся трех винтов \mathbf{t}_A , \mathbf{t}_{BA} и \mathbf{t}_{BC} . Моментные части последних будут представлять собой векторы $(0, 0, 1)$, $\boldsymbol{\rho}_{CB} \times \mathbf{d}_{BA}$ и $\boldsymbol{\rho}_{CB} \times \mathbf{d}_{BC}$ соответственно ($\boldsymbol{\rho}_{CB} = -\boldsymbol{\rho}_{BC}$). При этом, вектор $\boldsymbol{\rho}_{CB} \times \mathbf{d}_{BA}$ коллинеарен вектору \mathbf{d}_{BC} . Линейная зависимость между \mathbf{d}_{BC} и $\boldsymbol{\rho}_{CB} \times \mathbf{d}_{BC}$ невозможна, т.к. \mathbf{d}_{BC} всегда перпендикулярен $\boldsymbol{\rho}_{CB}$. Таким образом, линейная зависимость моментных частей винтов \mathbf{t}_A , \mathbf{t}_{BA} и \mathbf{t}_{CA} возможна только в том случае, если плоскость, образованная векторами \mathbf{d}_{BC} и $\boldsymbol{\rho}_{CB} \times \mathbf{d}_{BC}$, становится параллельна вектору $(0, 0, 1)$, что, в свою очередь, возможно только в том случае, если звено BC будет находиться в горизонтальной плоскости. Данная конфигурация механизма будет соответствовать особому положению типа «ПС». В этом случае моментная часть винта \mathbf{t}_{BA} также будет представлять собой вертикальный вектор, а значит сам винт может быть получен линейной комбинацией винтов \mathbf{t}_A , \mathbf{t}_{Cx} и \mathbf{t}_{Cy} .

Поскольку в общем случае все шесть единичных кинематических винтов рассматриваемой цепи линейно независимы, на выходное звено не накладывается связей, и силовые винты связи у данной цепи отсутствуют. Что касается приводного винта, то, продолжая рассуждения, начатые выше, можно сделать два вывода. Во-первых, моментная часть данного винта должна быть нулевой, чтобы обеспечить взаимность кинематическим винтам t_{Cx} , t_{Cy} , t_{Cz} . Во-вторых, векторная часть винта должна представлять собой вектор, перпендикулярный \mathbf{d}_{BA} и \mathbf{d}_{BC} , т.е. быть коллинеарной звену BC . Тогда Плюккерovy координаты приводного силового винта при приведении в точку E будут равны:

$$\mathbf{w}_a = \left(\frac{\mathbf{p}_{BC}}{\|\mathbf{p}_{BC}\|}, \mathbf{p}_{EC} \times \frac{\mathbf{p}_{BC}}{\|\mathbf{p}_{BC}\|} \right)^T.$$

Известно [6], что в общем случае шесть силовых винтов нулевого параметра линейно независимы и могут накладывать шесть связей на твердое тело, лишая его тем самым возможности любого перемещения. Таким образом, механизм, составленный из шести цепей \underline{PUS} , т.е. механизм со структурой $6-\underline{PUS}$ будет иметь шесть управляемых степеней свободы (рисунок 3.3).

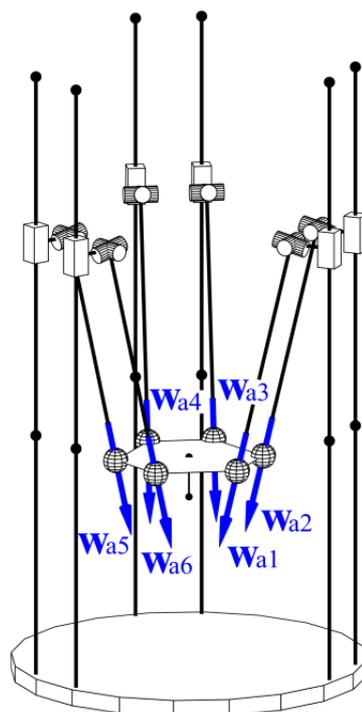


Рисунок 3.3. Механизм $6-\underline{PUS}$ и его силовые винты

Неизвестные координаты точек A_i , B_i , C_i и E_i (i – номер цепи, $i = 1 \dots 6$), зависящие от конфигурации механизма, могут быть вычислены при решении обратной задачи о положениях. При решении данной задачи необходимо для заданных координат выходного звена x , y , z и его ориентации, определяемой, например, углами поворота φ_x , φ_y , φ_z , вычислить высоту расположения кареток механизма $h_i = z_{A_i}$. Для удобства помимо неподвижной системы $Oxyz$, введем также подвижную систему $Ex'y'z'$, связанную с выходным звеном (рисунок 3.4).

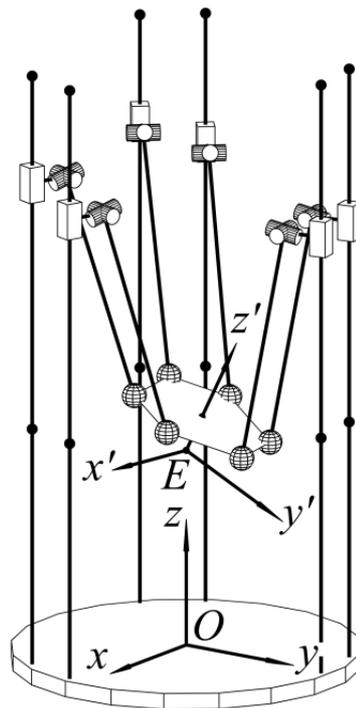


Рисунок 3.4. Подвижная и неподвижная системы координат

При заданных геометрических размерах кинематической цепи координаты x'_{C_i} , y'_{C_i} , z'_{C_i} точки C_i в начальной системе $Ex'y'z'$ известны и постоянны. Координаты x_{C_i} , y_{C_i} , z_{C_i} этой же точки в системе $Oxyz$ при заданных координатах и ориентации выходного звена могут быть определены по следующей формуле:

$$\begin{pmatrix} x_{C_i} \\ y_{C_i} \\ z_{C_i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \mathbf{R} \cdot \begin{pmatrix} x'_{C_i} \\ y'_{C_i} \\ z'_{C_i} \end{pmatrix},$$

где $x = x_E$, $y = y_E$, $z = z_E$ – координаты выходного звена механизма (рабочего органа).

Матрица поворота \mathbf{R} определяет ориентацию подвижной системы координат $Ex'y'z'$ и, соответственно, выходного звена механизма относительно неподвижной системы $Oxyz$, и для последовательности вращений « x », « y », « z » рассчитывается по формуле (2.35).

Уравнение связи для любой i -й \underline{PUS} цепи может быть получено из формулы расстояния между точками B_i и C_i (для известной длины l_{BCi} звена B_iC_i) и имеет следующий вид:

$$(x_{C_i} - x_{B_i})^2 + (y_{C_i} - y_{B_i})^2 + (z_{C_i} - z_{B_i})^2 - l_{BCi}^2 = 0.$$

Звено A_iB_i не может изменять свою ориентацию, поэтому, как уже было отмечено, координаты x_{B_i} и y_{B_i} считаются заданным. Тогда при условии, что звено A_iB_i расположено горизонтально ($z_{A_i} = z_{B_i}$), обратная задача о положениях для данной цепи решается следующим образом:

$$h_i = \pm \sqrt{l_{BCi}^2 - (x_{C_i} - x_{B_i})^2 - (y_{C_i} - y_{B_i})^2} + z_{C_i}.$$

При этом знак « \pm » соответствует конфигурации, в которой платформа находится выше условной каретки (точка A_i), а знак « $+$ » – ниже каретки. Во втором случае промежуточные звенья (штанги) растягиваются, а не сжимаются, а значит отсутствует вероятность потери ими устойчивости, поэтому в дальнейшем будем рассматривать именно его.

3.2. Анализ рабочей зоны, особых положений и близости к особым положениям механизма с шестью степенями свободы

В качестве примера для расчетов рассмотрим механизм 6- \underline{PUS} со следующими геометрическими размерами (м):

- длины звеньев (для всех цепей): $l_{ABi} = 0,05$, $l_{BCi} = 0,3$, $l_{DEi} = 0,05$;
- пределы перемещения каретки (для всех цепей): $h_{\min} = 0,3$, $h_{\max} = 0,75$;

- координаты, определяющие положение и ориентацию вертикальной стойки механизма и звена A_iB_i : $x_{A1} = 0,2$, $y_{A1} = -0,04$, $x_{B1} = 0,15$, $y_{B1} = -0,04$, $x_{A2} = 0,2$, $y_{A2} = 0,04$, $x_{B2} = 0,15$, $y_{B2} = 0,04$, $x_{A3} = -0,0654$, $y_{A3} = 0,1932$, $x_{B3} = -0,0404$, $y_{B3} = 0,1499$, $x_{A4} = -0,1346$, $y_{A4} = 0,1532$, $x_{B4} = -0,1096$, $y_{B4} = 0,1099$, $x_{A5} = -0,1346$, $y_{A5} = -0,1532$, $x_{B5} = -0,1096$, $y_{B5} = -0,1099$, $x_{A6} = 0,0654$, $y_{A6} = -0,1932$, $x_{B6} = 0,0404$, $y_{B6} = -0,1499$;
- координаты точек C_i в системе $Ex'y'z'$: $x'_{C1} = 0,08$, $y'_{C1} = -0,04$, $x'_{C2} = 0,08$, $y'_{C2} = 0,04$, $x'_{C3} = -0,0054$, $y'_{C3} = 0,0893$, $x'_{C4} = -0,0746$, $y'_{C4} = 0,0493$, $x'_{C5} = -0,0746$, $y'_{C5} = -0,0493$, $x'_{C6} = -0,0054$, $y'_{C6} = -0,0893$, для всех цепей $z'_{Ci} = l_{DEi} = 0,05$.

Для определения теоретической рабочей зоны механизма при нулевых углах поворота выходного звена (рисунок 3.5) был проведен итерационный анализ в следующих интервалах координат: $x = [-0,3; 0,3]$, $y = [-0,3; 0,3]$, $z = [-0,025; 0,5]$. Шаг сетки равен 0,01 м по координатам x , y и 0,025 м по координате z . Всего в объеме, ограниченном указанными пределами, проанализировано 81862 точки.

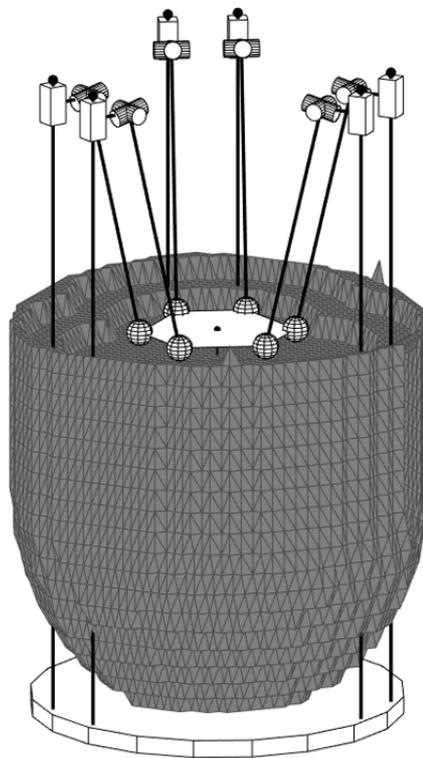


Рисунок 3.5. Теоретическая рабочая зона механизма 6-PUS при горизонтальной ориентации выходного звена (в сравнении с габаритами механизма)

Перейдем к рассмотрению особых положений механизма. Имеет смысл сразу отметить, что поскольку каждая кинематическая цепь обладает шестью степенями свободы, то особые положения типа «ВС» в данном случае невозможны.

Для исследования особых положений типов «ПС» и «ПУ» проводился итерационный анализ с параметрами перебора, указанными выше. При этом помимо горизонтального положения выходного звена было рассмотрено еще четыре примера с разными углами поворота выходного звена вокруг оси, параллельной x : 15° , 30° , 45° и 60° .

Особые положения типа «ПС» в рассматриваемом механизме, как и в большинстве других механизмов параллельной структуры, возникают только на границе теоретической рабочей зоны. Ранее при анализе подвижности одной цепи \underline{PUS} был показан единственно возможный случай возникновения особого положения типа «ПС» для подобной цепи, характеризующийся тем, что звено B_iC_i располагается горизонтально. В этом случае выходное звено будет находиться на теоретической боковой границе рабочего пространства (для заданной постоянной ориентации выходного звена). Данные выводы подтверждаются проведенным итерационным анализом: определитель матрицы \mathbf{B} в каждой из рассмотренных точек рабочей зоны имеет знак «+». При этом, поскольку нижняя и верхняя границы рабочей зоны определяются только ограничениями на перемещение кареток, на указанных границах точек особых положений типа «ПС» не будет.

Результаты анализа особых положений типа «ПУ» следующие (рисунок 3.6):

- угол $\varphi_x = 0^\circ$: 26063 точки в рабочей зоне, 0 точек с $\det(\mathbf{A}) < 0$;
- угол $\varphi_x = 15^\circ$: 24193 точки в рабочей зоне, 42 точки с $\det(\mathbf{A}) < 0$;
- угол $\varphi_x = 30^\circ$: 21419 точек в рабочей зоне, 554 точки с $\det(\mathbf{A}) < 0$;
- угол $\varphi_x = 45^\circ$: 18136 точек в рабочей зоне, 2030 точек с $\det(\mathbf{A}) < 0$;
- угол $\varphi_x = 60^\circ$: 14988 точек в рабочей зоне, 4532 точки с $\det(\mathbf{A}) < 0$.

Как можно видеть по данному примеру, особые положения типа «ПУ» отсутствуют при горизонтальной ориентации платформы, а при угле наклона платформы $\varphi_x = 45^\circ$ больше 11% рабочей зоны отделено от оставшейся ее части особыми положениями указанного типа.

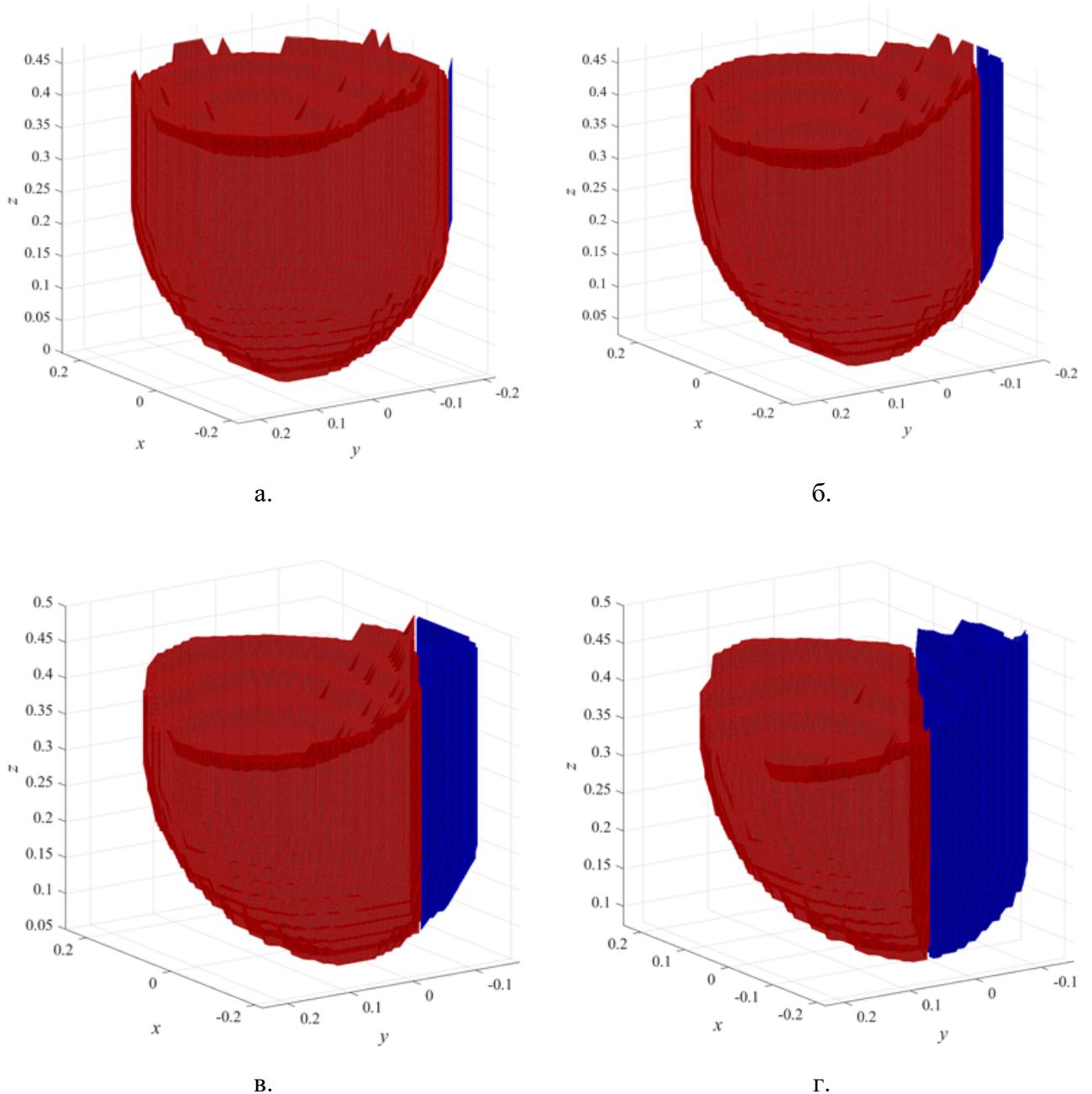


Рисунок 3.6. Знак определителя матрицы A в точках рабочей зоны («+» – красный, «-» – синий) механизма 6-PUS: $\varphi_x = 15^\circ$ (а), $\varphi_x = 30^\circ$ (б), $\varphi_x = 45^\circ$ (в), $\varphi_x = 60^\circ$ (г)

Зная расположение точек, соответствующих особым положениям различных типов, можно перейти к основной задаче – рассмотрению критериев близости к ним. При этом будем вести расчет как с использованием матрицы Якоби, так и при помощи винтового исчисления, что позволит осуществить взаимную проверку достоверности результатов вычислений. В целях повышения наглядности визуализации ограничимся рассмотрением одной плоскости (среза) рабочей зоны при постоянной координате $z = 0,3$ м, что также позволит уменьшить интервал

разбиения до 0,003 м по координатам x и y . В качестве примера рассмотрим случай $\varphi_x = 60^\circ$. Здесь и далее при исследовании критериев близости к особым положениям их значения будут рассчитываться для единичных векторов линейной \mathbf{v} и угловой $\boldsymbol{\omega}$ скоростей выходного звена или внешней силы \mathbf{f} или момента \mathbf{m} , если не указано иное.

Начнем с особых положений типа «ПС» (рисунок 3.7).

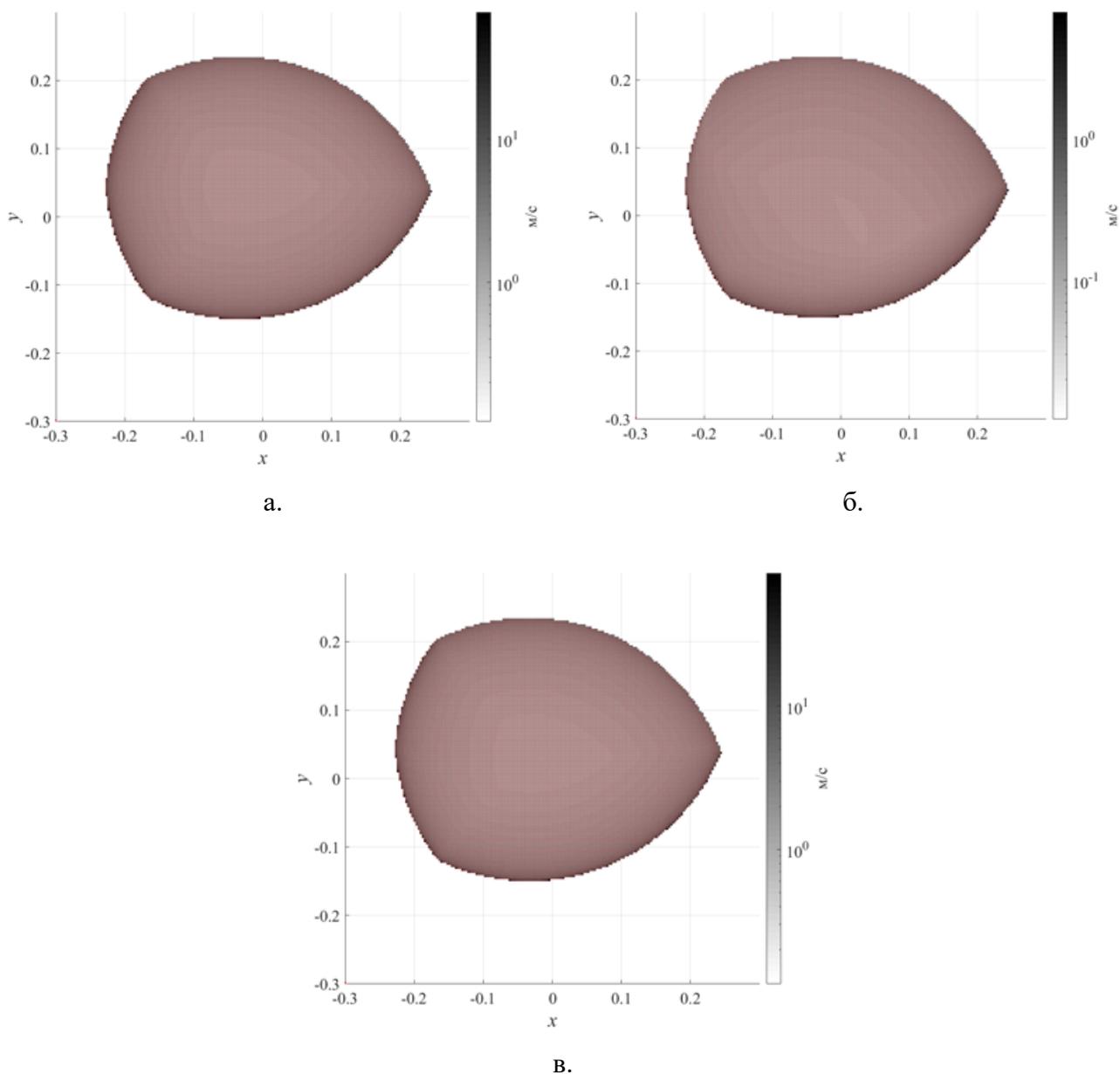


Рисунок 3.7. Распределение значений входных скоростей по срезу рабочей зоны 6-PUS механизма при: $\|\mathbf{v}\| = 1, \|\boldsymbol{\omega}\| = 0$ (а); $\|\mathbf{v}\| = 0, \|\boldsymbol{\omega}\| = 1$ (б); $\|\mathbf{v}\| = 1, \|\boldsymbol{\omega}\| = 1$ (в)

На приведенном рисунке, красным цветом обозначена зона, в которой определитель матрицы \mathbf{B} положителен. Значение же скорости или усилия показано

с помощью оттенков серого (от светлого к темному при увеличении значения). В дальнейшем в работе будет применяться такой же принцип визуализации. Зоны, в которых значение определителя соответствующей матрицы (**A** или **B**) положительно, будут отмечены красным цветом, а зоны отрицательного определителя матрицы – синим. Аналогично, абсолютное значение рассматриваемого критерия (скорости или усилия) будет показано оттенками серого: чем светлее точка, тем меньшее значение имеет критерий, рассчитанный в ней (белый цвет соответствует нулю).

При рассмотрении рисунка можно заметить, что возрастание абсолютных значений входных скоростей наблюдается при приближении к краю исследуемого среза рабочей зоны, что полностью согласуется с выводом о наличии особых положений типа «ПС» только на указанной границе. Данное утверждение справедливо для расчетов, произведенных как для линейного движения выходного звена, так и для его поворота или комбинации двух движений. Также видно, что вращение выходного звена в данном примере соответствует на порядок меньшей входной скорости.

Рассмотрим теперь критерий близости к особым положениям типа «ПУ» (рисунок 3.8). В данном случае, как и для особых положений типа «ПС», результаты расчетов полностью соответствуют ожиданиям: возрастание абсолютных значений усилий в приводах наблюдается при приближении к границе, разделяющей зоны с положительным и отрицательным значениями определителя матрицы **A**. Данный факт служит подтверждением того, что точки особых положений типа «ПУ» расположены, как было отмечено ранее, только на данной границе, и выбранный шаг перебора достаточно мал для того, чтобы при итерационном анализе данные особые положения не были пропущены. Стоит также отметить, что изменение приводных усилий на рассматриваемом срезе снова демонстрирует одинаковое поведение вне зависимости от того, рассчитано ли оно только для внешней силы, только для внешнего момента или для комбинированной нагрузки.

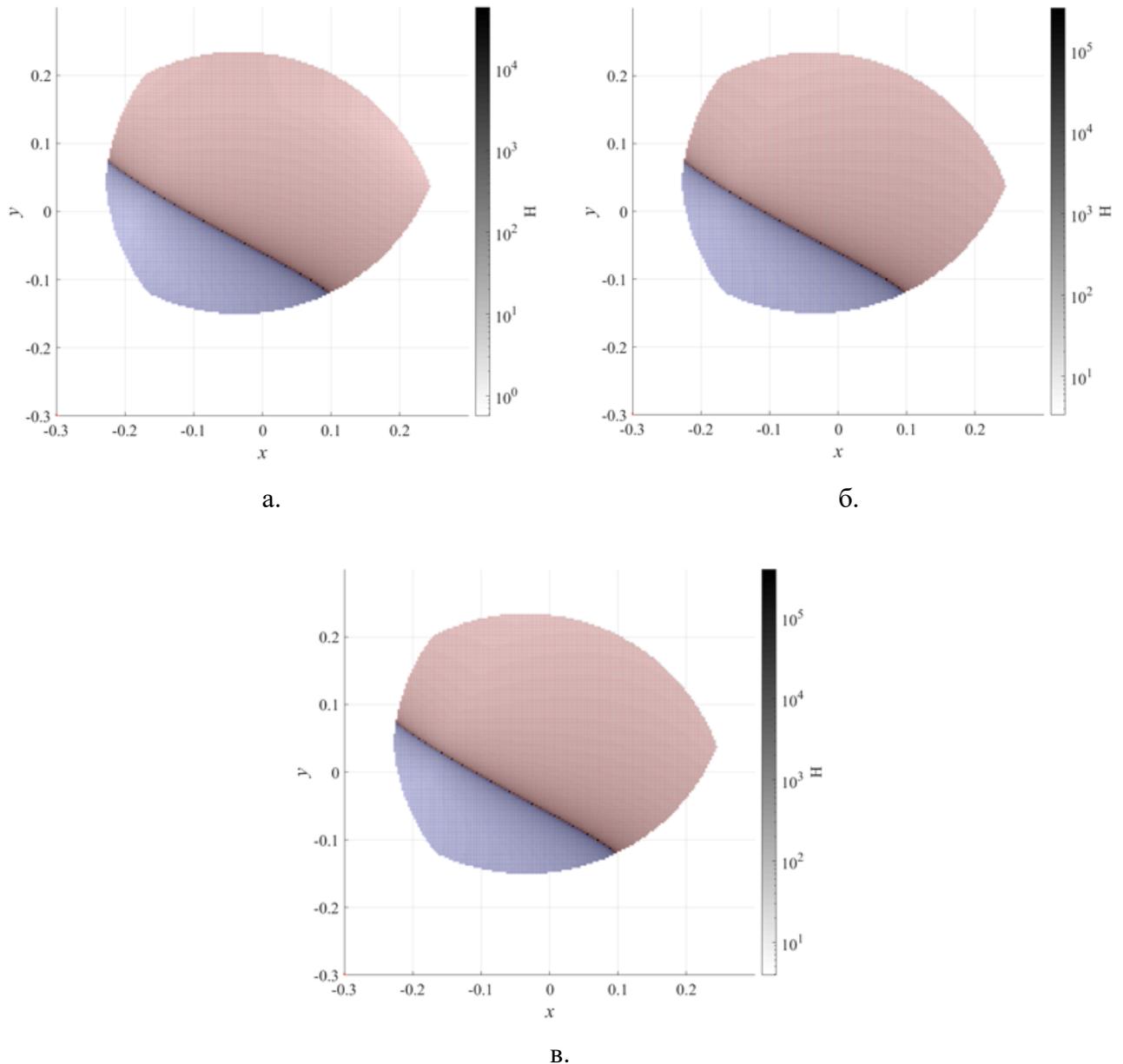


Рисунок 3.8. Распределение значений усилий в приводах по срезу рабочей зоны 6-PUS механизма при: $\|\mathbf{f}\| = 1, \|\mathbf{m}\| = 0$ (а); $\|\mathbf{f}\| = 0, \|\mathbf{m}\| = 1$ (б); $\|\mathbf{f}\| = 1, \|\mathbf{m}\| = 1$ (в)

Как уже было отмечено, расчет критериев близости к особым положениям проводился двумя способами: с использованием матрицы Якоби механизма и с помощью винтового исчисления. При этом во втором случае расчеты велись как с использованием полученных ранее аналитических выражений для Плюккерových координат кинематических и силовых винтов, так и численно с использованием операции определения ядра той или иной матрицы координат винтов. Вне зависимости от того, каким способом определялись Плюккерovy координаты винтов, результаты расчетов показали хороший уровень совпадения с результатами,

полученными путем применения матрицы Якоби. Для демонстрации данного факта целесообразно привести значения относительной погрешности значений расчетных критериев, вычисленных двумя различными методами. В зависимости от того, какой критерий рассматривается, указанная погрешность может быть рассчитана следующим образом:

$$\Delta_{\dot{q}} = \left| \frac{\dot{q}_{aЯ}^{\max} - \dot{q}_{aВ}^{\max}}{\dot{q}_{aЯ}^{\max}} \right| \cdot 100\%, \quad \Delta_e = \left| \frac{e_{aЯ}^{\max} - e_{aВ}^{\max}}{e_{aЯ}^{\max}} \right| \cdot 100\%,$$

где индекс «Я» означает, что значение рассчитано с использованием матрицы Якоби, а индекс «В» – с применением винтового исчисления. При этом вне зависимости от индекса

$$\dot{q}_a^{\max} = \max(\dot{q}_{a1}^{\max}, \dots, \dot{q}_{an}^{\max}), \quad e_a^{\max} = \max(e_{a1}^{\max}, \dots, e_{an}^{\max}).$$

Для наглядности рассмотрим распределение относительной погрешности значений расчетных критериев для среза рабочей зоны механизма (Рисунок 3.9).

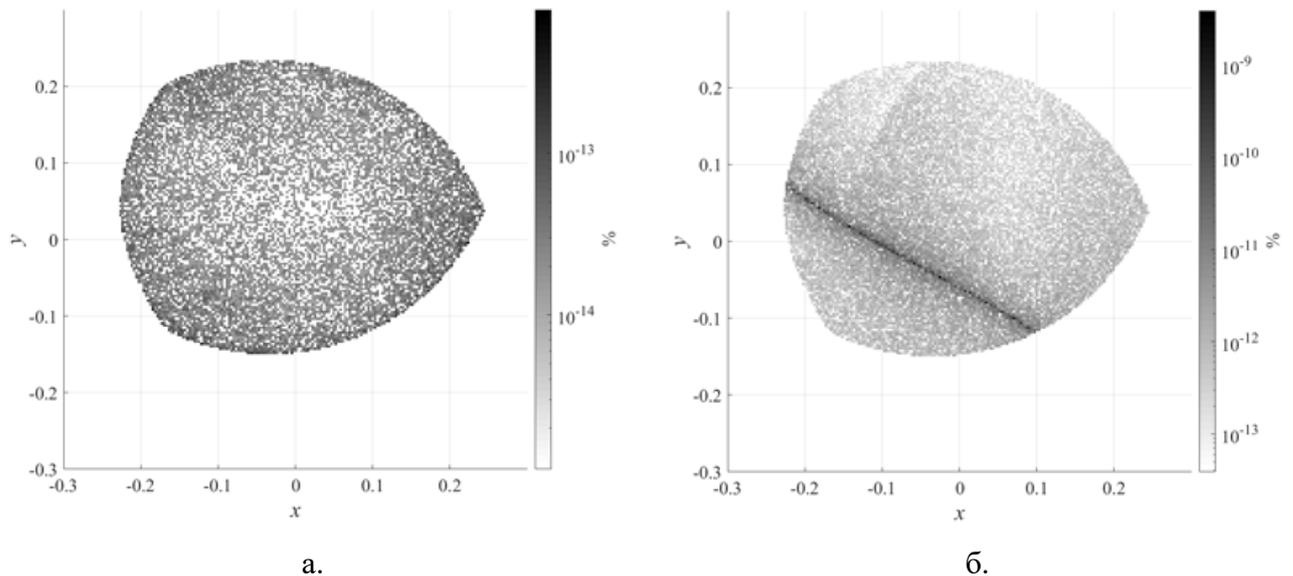


Рисунок 3.9. Распределение относительной погрешности расчетных значений входных скоростей (а) и усилий в приводах (б) для среза рабочей зоны 6-PUS механизма

Указанные отклонения приведены для расчета Плюккерových координат винтов численными методами, поскольку в таком случае погрешность вычислений будет наибольшей. Таким образом, приведенные значения относительной

погрешности представляют своего рода «худший случай». Тем не менее, даже с учетом вышесказанного величина относительной погрешности значений рассчитываемых критериев пренебрежительно мала (порядок не более 10^{-13} % для входных скоростей и не более 10^{-9} % для усилий в приводах), что в свою очередь подтверждает правильность проведенных вычислений.

Можно также видеть, что для входных скоростей величина погрешности хоть и увеличивается при приближении к особым положениям типа «ПС», но не так явно, как для усилий в приводах при приближении к особым положениям типа «ПУ». Увеличение относительной погрешности при приближении к особым положениям можно объяснить большей погрешностью численных вычислений при работе с матрицами. Так, при вычислении наибольших значений входных скоростей с помощью матрицы Якоби используются частные производные уравнений связи, т.е. задача решается аналитически. В то же время для расчета наибольших приводных усилий тем же методом требуется операция нахождения обратной матрицы. При этом погрешность данной операции тем больше, чем хуже обусловлена матрица, т.е. возрастает при приближении к особым положениям типа «ПУ». Что касается вычислений, проводимых и использованием винтового исчисления, то если координаты винтов рассчитываются исключительно численными методами, необходимо проведение нескольких операций численного определения ядра той или иной матрицы. При этом очевидно, что ожидаемый рост погрешности, будет бóльшим при расчете приводных усилий, вне зависимости от того, как именно рассчитываются Плюккерovy координаты тех или иных винтов, поскольку в таком случае необходимо проведение большего количества численных операций.

3.3. Структура, кинематика и анализ подвижности механизма с четырьмя степенями свободы

Как уже было отмечено ранее, применение винтового исчисления в расчетах критериев близости к особым положениям для механизмов, обладающих числом степеней свободы меньшим, чем шесть, представляет несколько более сложную задачу, чем аналогичный расчет для шестистепенного механизма. Поэтому наиболее логичным следующим примером применения предлагаемых в работе методов является расчет механизма, близкого по своей структуре к рассмотренному ранее, но имеющему меньшее количество степеней свободы, в данном случае – четыре.

Рассмотрение механизма с четырьмя степенями свободы также начнем с отдельной кинематической цепи, которая в данном случае имеет структуру $\underline{P}(UU)_2$ (рисунок 3.10).

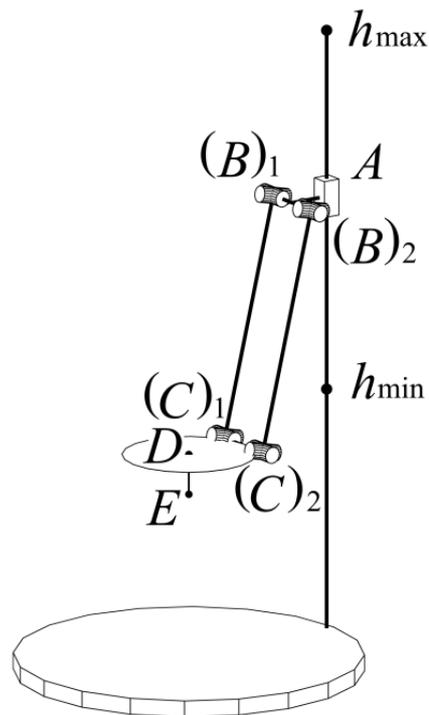


Рисунок 3.10. Кинематическая цепь $\underline{P}(UU)_2$

Как и в случае с цепью \underline{PUS} , в рассматриваемой цепи имеется вертикальная стойка с расположенной на ней кинематической парой A , движение которой

ограничено некоторыми пределами h_{\min} и h_{\max} . В данной цепи, однако, выходное звено D (вместе с рабочим органом E) соединяется с подвижной кареткой не посредством одной штанги с шарниром Гука и сферическим шарниром на концах, а параллелограммом, в котором используются пары шарниров Гука: $(B)_1$, $(B)_2$ и $(C)_1$, $(C)_2$.

Можно видеть, что за счет наличия параллелограмма движения в парных шарнирах Гука должны быть синхронными, т.е. любой поворот в шарнире $(B)_1$ должен сопровождаться таким же поворотом в шарнире $(B)_2$. Ситуация с шарнирами $(C)_1$ и $(C)_2$ аналогична, поэтому анализ подвижности рассматриваемой цепи можно, для удобства, начать с рассмотрения кинематических винтов простой «одинарной» цепи $\underline{P}UU$ (рисунок 3.11)

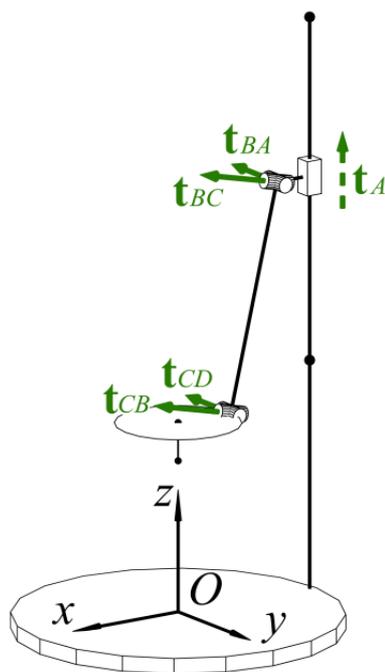


Рисунок 3.11. Единичные кинематические винты цепи $\underline{P}UU$

Кинематическим парам цепи $\underline{P}UU$ может быть сопоставлено пять кинематических винтов: \mathbf{t}_A , \mathbf{t}_{BA} , \mathbf{t}_{BC} , \mathbf{t}_{CB} , \mathbf{t}_{CD} . При этом первые три винта (\mathbf{t}_A , \mathbf{t}_{BA} , \mathbf{t}_{BC}) абсолютно идентичны одноименным винтам цепи $\underline{P}US$, рассмотренным ранее.

Поскольку оси винтов \mathbf{t}_{CB} и \mathbf{t}_{CD} всегда остаются параллельными осям винтов \mathbf{t}_{BC} и \mathbf{t}_{BA} соответственно, векторные части указанных винтов будут попарно равны.

Таким образом, Плюккерovy координаты винтов \mathbf{t}_{CB} и \mathbf{t}_{CD} при приведении в точку E могут быть определены следующим образом:

$$\begin{aligned}\mathbf{t}_{CB} &= (\mathbf{d}_{BC}, \boldsymbol{\rho}_{EC} \times \mathbf{d}_{BC})^T, \\ \mathbf{t}_{CD} &= (\mathbf{d}_{BA}, \boldsymbol{\rho}_{EC} \times \mathbf{d}_{BA})^T.\end{aligned}$$

Кинематические винты цепи $\underline{P}(UU)_2$ будут идентичны винтам цепи $\underline{P}UU$. При этом, однако, в цепи $\underline{P}(UU)_2$ при любом перемещении выходного звена, противоположные стороны параллелограмма остаются параллельными. Это означает, что скорости, соответствующие винтам \mathbf{t}_{BC} и \mathbf{t}_{CB} должны быть одинаковыми по величине и противоположными по знаку. То есть для уравнения

$$\dot{q}_A \mathbf{t}_A + \dot{q}_{BA} \mathbf{t}_{BA} + \dot{q}_{BC} \mathbf{t}_{BC} + \dot{q}_{CB} \mathbf{t}_{CB} + \dot{q}_{CD} \mathbf{t}_{CD} = \boldsymbol{\Omega}$$

всегда выполняется условие $\dot{q}_{BC} = -\dot{q}_{CB}$, откуда следует, что

$$\dot{q}_{BC} \mathbf{t}_{BC} + \dot{q}_{CB} \mathbf{t}_{CB} = \dot{q}_{BC} \mathbf{t}_{BC} - \dot{q}_{BC} \mathbf{t}_{CB} = \dot{q}_{BC} (\mathbf{t}_{BC} - \mathbf{t}_{CB}).$$

Пусть $\mathbf{t}_\Sigma = \mathbf{t}_{BC} - \mathbf{t}_{CB}$. Так как векторные части винтов \mathbf{t}_{BC} и \mathbf{t}_{CB} равны, векторная часть винта \mathbf{t}_Σ будет равна нулю. Плюккерovy координаты моментной части данного винта легко найти, изменив точку приведения на B или C . Так, при приведении в точку C моментная часть винта \mathbf{t}_{CB} будет нулевой, а моментная часть винта \mathbf{t}_{BC} будет равна $\boldsymbol{\rho}_{CB} \times \mathbf{d}_{BC}$. Поскольку разность моментных частей не будет зависеть от точки приведения, то с учетом того, что $\boldsymbol{\rho}_{CB} = -\boldsymbol{\rho}_{BC}$, Плюккерovy координаты \mathbf{t}_Σ могут быть рассчитаны следующим образом:

$$\mathbf{t}_\Sigma = (0, 0, 0, -\boldsymbol{\rho}_{BC} \times \mathbf{d}_{BC})^T.$$

При этом можно считать, что вектор $\boldsymbol{\rho}_{BC}$ проведен из условной точки B в условную точку C , являющихся серединами отрезков $(B)_1(B)_2$ и $(C)_1(C)_2$ соответственно.

Таким образом, кинематические винты цепи $\underline{P}(UU)_2$ могут быть получены из винтов простой цепи $\underline{P}UU$ путем замены единичных винтов \mathbf{t}_{BC} и \mathbf{t}_{CB} нулевого параметра на винт (не единичный) бесконечного параметра \mathbf{t}_Σ . Ось данного винта

Таким образом, становится очевидно, что винты связей для рассматриваемой цепи должны представлять собой два винта бесконечного параметра, моментные части которых располагаются в плоскости, перпендикулярной вектору \mathbf{d}_{BA} . На указанной плоскости можно выбрать два любых вектора, однако для удобства будем считать, что ось одного из винтов перпендикулярна плоскости параллелограмма (т.е. представляется собой вектор \mathbf{d}_{BC}), а ось второго лежит в ней. Это позволяет удобно записать Плюккеровы координаты указанных винтов:

$$\mathbf{w}_{cb1} = (0, 0, 0, \mathbf{d}_{BC})^T,$$

$$\mathbf{w}_{cb2} = (0, 0, 0, \mathbf{d}_{BA} \times \mathbf{d}_{BC})^T.$$

Стоит заметить, что поскольку векторы \mathbf{d}_{BA} и \mathbf{d}_{BC} являются единичными, а также перпендикулярны друг другу независимо от конфигурации механизма, нормализация векторного произведения указанных векторов при расчете Плюккеровых координат силового винта связи \mathbf{w}_{cb2} не требуется.

Возвращаясь к приведению в точку C , можно видеть, что кинематический винт \mathbf{t}_{CD} и силовые винты связей \mathbf{w}_{cb1} и \mathbf{w}_{cb2} относятся только к вращательным степеням свободы, поэтому приводной винт рассматриваемой кинематической цепи должен иметь нулевой параметр. Векторная часть данного винта должна быть перпендикулярна моментным частям винтов \mathbf{t}_{BA} и \mathbf{t}_Σ , а следовательно – векторам \mathbf{d}_{BC} и $\mathbf{p}_{CB} \times \mathbf{d}_{BC}$ соответственно. Это в свою очередь означает, что искомая векторная часть приводного силового винта, как и в случае с цепью \underline{PUS} , равна единичному вектору, коллинеарному \mathbf{p}_{CB} , поэтому

$$\mathbf{w}_a = \left(\frac{\mathbf{p}_{BC}}{\|\mathbf{p}_{BC}\|}, \mathbf{p}_{EC} \times \frac{\mathbf{p}_{BC}}{\|\mathbf{p}_{BC}\|} \right)^T.$$

Если расположить две цепи $\underline{P(UU)}_2$ друг напротив друга, то винты их связей будут одинаковы, т.к. являются винтами бесконечного параметра, а значит на выходное звено будет наложено всего две связи, лишаящие его двух вращательных степеней свободы. Добавив еще две цепи \underline{PUS} , можно получить полноценный механизм с четырьмя степенями свободы, три из которых будут поступательным,

а одна – вращательной (рисунок 3.13). Вращение выходного звена будет возможно вокруг оси, параллельной векторам \mathbf{d}_{BA} кинематических цепей $\underline{P}(UU)_2$ данного механизма.

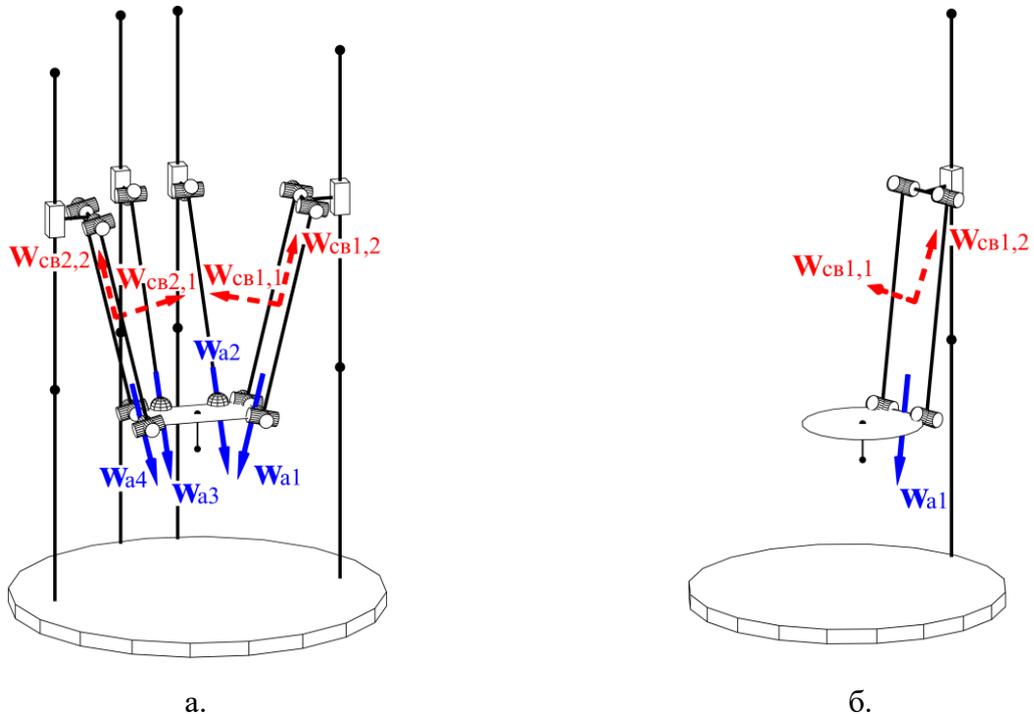


Рисунок 3.13. Механизм 2-PUS.2-P(UU)₂ и его силовые винты: общий вид (а), вид на первую кинематическую цепь (б)

При решении обратной задачи о положениях для цепи $\underline{P}(UU)_2$ можно рассматривать ее как две кинематических цепи \underline{PUS} , в которых оси входных призматических пар совпадают, оси шарниров Гука попарно параллельны и размеры промежуточных звеньев одинаковы. Это позволяет рассматривать кинематику указанных кинематических цепей в рамках одной математической модели, а решение обратной задачи о положениях для цепи $\underline{P}(UU)_2$ будет идентично представленному ранее решению для цепи \underline{PUS} . Единственное дополнительное условие, возникающее при рассмотрении кинематической цепи $\underline{P}(UU)_2$ в качестве двух цепей \underline{PUS} , заключается в том, что после решения обратной задачи о положениях для каждой из условных \underline{PUS} цепей необходимо проверить, чтобы полученное значение h было для них одинаковым. На практике, ввиду наличия погрешностей вычислений, при подобных расчетах необходимо задаться минимально допустимым отклонением значений h .

3.4. Анализ рабочей зоны, особых положений и близости к особым положениям механизма с четырьмя степенями свободы

Рассмотрим механизм 2-PUS.2-P(UU)₂ (рисунок 3.14), имеющий следующие геометрические размеры (м):

- длины звеньев (для всех цепей): $l_{AB} = 0,05$, $l_{BC} = 0,3$, $l_{DE} = 0,05$, для двойных цепей $l_{B_1B_2} = l_{C_1C_2} = 0,08$;
- пределы перемещения каретки (для всех цепей): $h_{\min} = 0,3$, $h_{\max} = 0,75$;
- координаты, определяющие положение и ориентацию вертикальной стойки механизма и звена A_iB_i : $x_{A1} = 0,2$, $y_{A1} = 0$, $x_{B1} = 0,15$, $y_{B1} = 0$, $x_{A2} = 0,04$, $y_{A2} = 0,24$, $x_{B2} = 0,04$, $y_{B2} = 0,19$, $x_{A3} = -0,04$, $y_{A3} = 0,24$, $x_{B3} = -0,04$, $y_{B3} = 0,19$, $x_{A4} = -0,2$, $y_{A4} = 0$, $x_{B4} = -0,15$, $y_{B4} = 0$;
- координаты точек C_i в системе $Ex'y'z'$: $x'_{C1} = 0,08$, $y'_{C1} = 0$, $x'_{C2} = 0,04$, $y'_{C2} = 0,04$, $x'_{C3} = -0,04$, $y'_{C3} = 0,04$, $x'_{C4} = -0,08$, $y'_{C4} = 0$, для всех цепей $z'_C = l_{DE} = 0,05$.

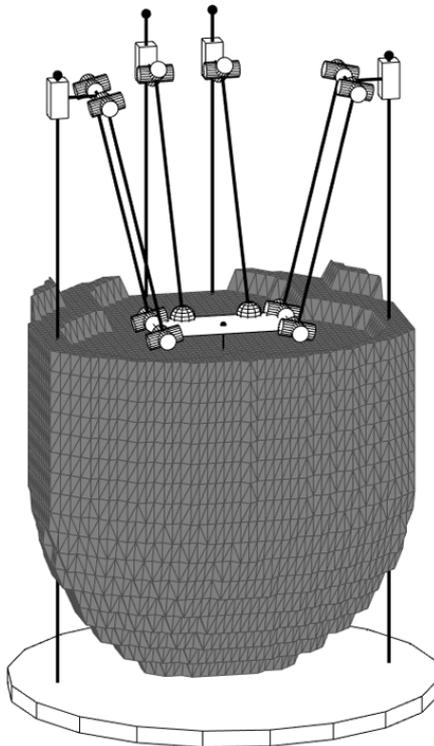


Рисунок 3.14. Теоретическая рабочая зона механизма 2-PUS.2-P(UU)₂ при горизонтальной ориентации выходного звена (в сравнении с габаритами механизма)

Анализ теоретической рабочей зоны механизма проводился итерационным методом в тех же пределах ($x = [-0,3; 0,3]$, $y = [-0,3; 0,3]$, $z = [-0,025; 0,5]$) и с тем же шагом (0,01 м по координатам x , y и 0,025 м по координате z), что и при анализе механизма 6-PUS.

Также стоит отметить, что для данного механизма взаимное расположение неподвижной системы координат и цепей $\underline{P}(UU)_2$ выбрано таким образом, чтобы поворот выходного звена осуществлялся вокруг оси, параллельной оси Oy .

Перейдем к рассмотрению особых положений.

Особые положения типа «BC» у данного механизма отсутствуют. Это объясняется тем, что цепи $\underline{P}(UU)_2$ накладывают одинаковые связи, вырождение которых невозможно ввиду особенностей структуры плоского параллелограмма в составе данных цепей.

Особые положения типов «ПС» и «ПУ» для данного механизма рассмотрим на примере таких же значений углов поворота выходного звена, как и для 6-PUS механизма, но для оси, параллельной Oy : $\varphi_y = 0^\circ$, $\varphi_y = 15^\circ$, $\varphi_y = 30^\circ$, $\varphi_y = 45^\circ$, $\varphi_y = 60^\circ$. При этом особые положения типа «ПС», также, как и у 6-PUS механизма, расположены только на «боковом» краю теоретической рабочей зоны механизма.

Стоит отметить, что поскольку модель кинематики цепи с параллелограммом базируется на модели простой \underline{PUS} цепи, то в матрице \mathbf{A} изначально будут присутствовать частные производные по углам поворота φ_x и φ_z , а сама матрица будет иметь размер 4×6 . Однако поворот механизма на данные углы невозможен, поэтому из указанной матрицы необходимо исключить столбцы 4 и 6, получив таким образом матрицу 4×4 .

Результаты итерационного анализа особых положений типа «ПУ» следующие (рисунок 3.15):

- угол $\varphi_y = 0^\circ$: 21280 точек в рабочей зоне, 0 точек с $\det(\mathbf{A}) < 0$;
- угол $\varphi_y = 15^\circ$: 19986 точек в рабочей зоне, 19900 точек с $\det(\mathbf{A}) < 0$;
- угол $\varphi_y = 30^\circ$: 17882 точки в рабочей зоне, 17473 точки с $\det(\mathbf{A}) < 0$;
- угол $\varphi_y = 45^\circ$: 15453 точки в рабочей зоне, 14364 точки с $\det(\mathbf{A}) < 0$;
- угол $\varphi_y = 60^\circ$: 13025 точек в рабочей зоне, 10835 точек с $\det(\mathbf{A}) < 0$.

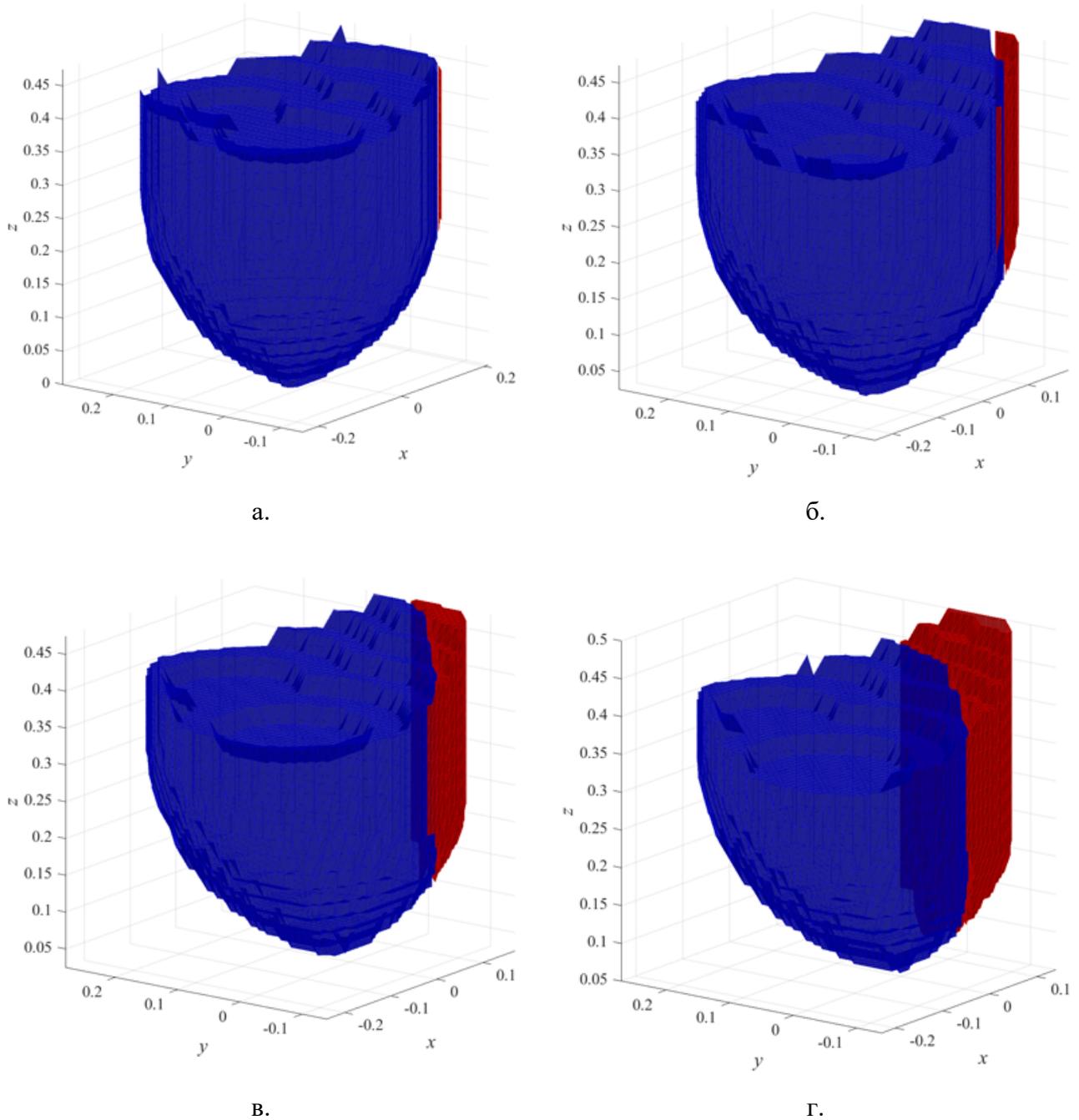


Рисунок 3.15. Знак определителя матрицы \mathbf{A} в точках рабочей зоны («+» – красный, «-» – синий) механизма 2-PUS.2-P(UU)₂: $\varphi_y = 15^\circ$ (а), $\varphi_y = 30^\circ$ (б), $\varphi_y = 45^\circ$ (в), $\varphi_y = 60^\circ$ (г)

Как можно видеть, в рассматриваемом механизме особые положения типа «ПУ» отделяют меньший объем (например, порядка 7% при $\varphi_y = 45^\circ$), чем в механизме 6-PUS.

Перейдем к рассмотрению критериев близости к особым положениям. Аналогично шестистепенному механизму, для примера будем использовать срез

рабочего пространства на высоте 0,3 м и шаг разбиения 0,003 м. Угол поворота платформы примем $\varphi_y = 60^\circ$.

Особые положения типа «ПС» (рисунок 3.16), как и для 6-PUS механизма, располагаются только на границе теоретической рабочей зоны, что подтверждается анализом изменения значений входных скоростей: увеличение абсолютных значений наблюдается при приближении к границе исследуемого среза рабочей зоны.

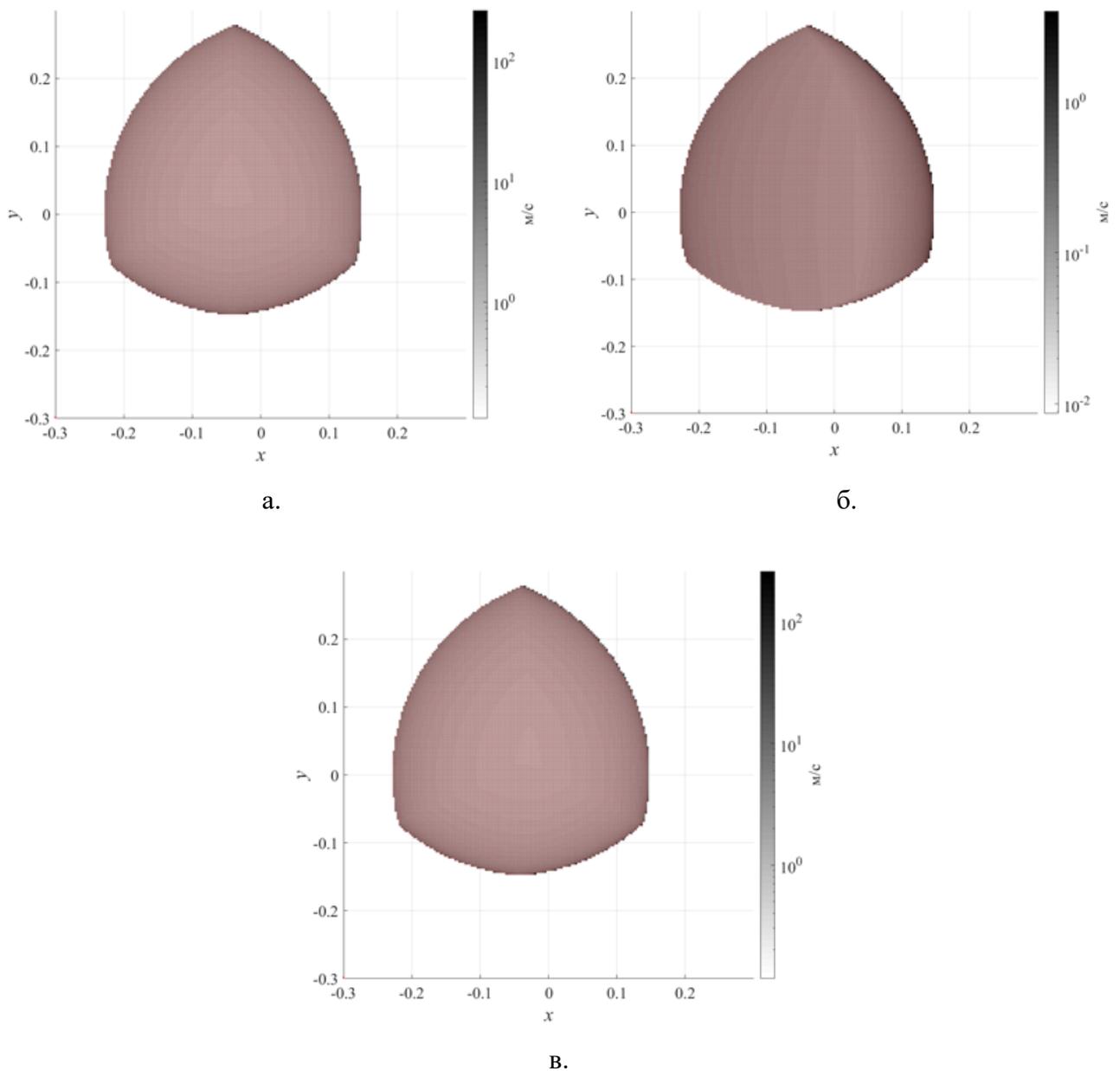


Рисунок 3.16. Распределение значений входных скоростей по срезу рабочей зоны 2-PUS.2-P(UU)₂ механизма при: $\|\mathbf{v}\| = 1, \|\boldsymbol{\omega}\| = 0$ (а); $\|\mathbf{v}\| = 0, \|\boldsymbol{\omega}\| = 1$ (б); $\|\mathbf{v}\| = 1, \|\boldsymbol{\omega}\| = 1$ (в)

Кроме того, аналогичным образом совпадает и характер распределения значений входных скоростей для разных типов движения выходного звена (линейное перемещение, поворот и их комбинация). Также, как и в случае с шестистепенным механизмом, линейная компонента оказывает большее влияние на значение входной скорости – в данном примере на два порядка.

Распределение критерия близости к особым положениям типа «ПУ» также полностью соответствует ожиданиям (рисунок 3.17).

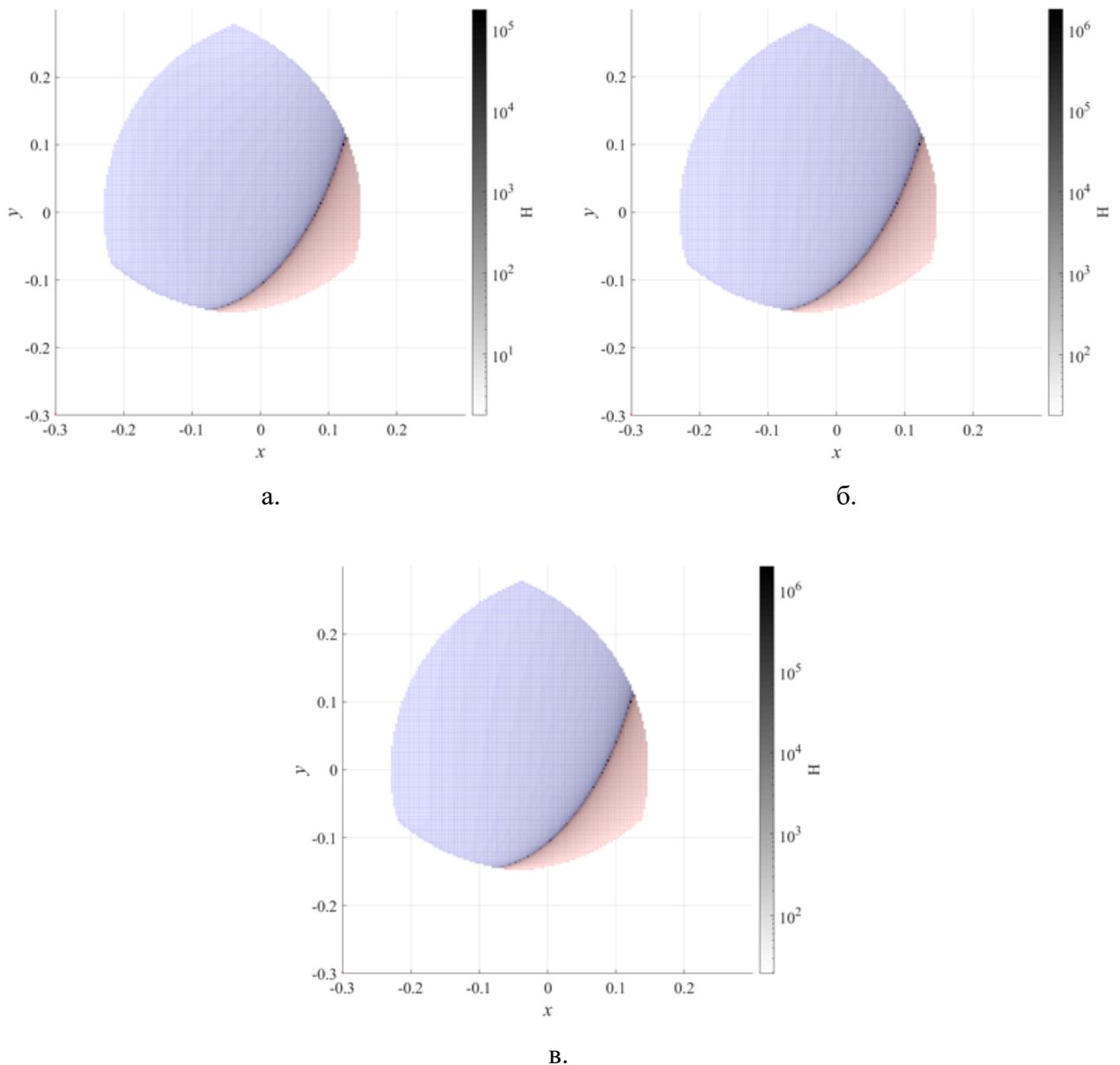


Рисунок 3.17. Распределение значений усилий в приводах по срезу рабочей зоны 2-PUS.2-P(UU)₂ механизма при: $\|\mathbf{f}\| = 1, \|\mathbf{m}\| = 0$ (а); $\|\mathbf{f}\| = 0, \|\mathbf{m}\| = 1$ (б); $\|\mathbf{f}\| = 1, \|\mathbf{m}\| = 1$ (в)

Можно видеть, что возрастание усилий в приводных парах наблюдается при приближении к границе, разделяющей зоны рабочей области, в которых определитель матрицы \mathbf{A} имеет противоположный знак.

Результаты анализа показывают, что для механизма 2-PUS.2-P(UU)_2 , как и для 6-PUS , характер изменения значений критериев близости к особым положениям типов «ПС» или «ПУ» остается неизменным вне зависимости от типа анализируемых компонент кинематического винта выходного звена или силового винта внешней нагрузки. Отличия же наблюдаются в порядке непосредственно численных значений данных критериев. Таким образом, для демонстрации факта приближения к особым положениям указанных типов можно использовать любые компоненты: линейные, угловые или их комбинацию.

В завершение исследования 2-PUS.2-P(UU)_2 механизма рассмотрим изменение относительной погрешности вычисления значений критериев близости к особым положениям, полученных путем использования матрицы Якоби и винтового исчисления (рисунок 3.18).

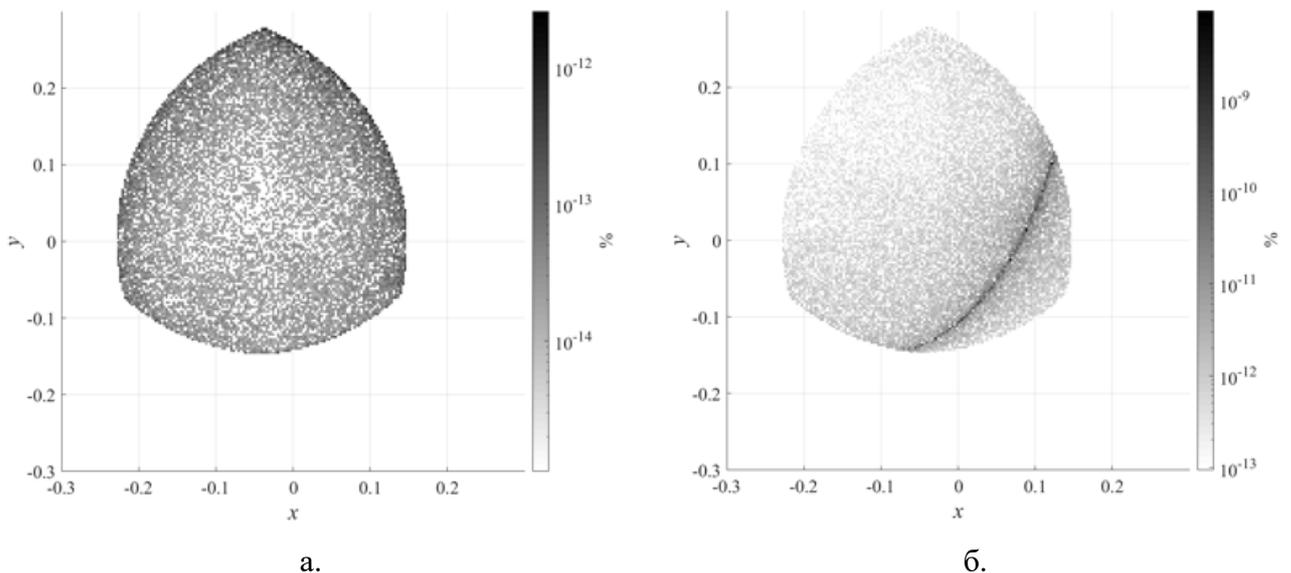


Рисунок 3.18. Распределение относительной погрешности расчетных значений входных скоростей (а) и усилий в приводах (б) для среза рабочей зоны 2-PUS.2-P(UU)_2 механизма

Можно видеть, что для данного механизма полученные результаты характеризуются теми же особенностями, что и результаты, полученные для механизма с шестью степенями свободы. Так, порядок погрешности достаточно

мал для того, что подтверждает правильность полученных результатов. Также наблюдается увеличение значения погрешности при расчете усилий в приводах вблизи особых положений типа «ПУ». Кроме того, как и в предыдущем случае, порядок погрешности при расчете усилий в приводах больше такового при расчете входных скоростей.

3.5. Результаты и выводы по главе

- проведен анализ механизмов типа Delta с линейными приводами с шестью и четырьмя степенями свободы. Для каждого механизма исследовалась структура его кинематических цепей, подвижность, решалась обратная задача о положениях, определялись форма и размеры рабочей зоны, расположение точек особых положений типов «ПС» и «ПУ», а также расчетные значения критериев близости к особым положениям. Расчеты проводились в системе компьютерной алгебры MATLAB;
- для рассматриваемых механизмов показано, что предложенные критерии близости к особым положениям могут быть рассчитаны как с применением матрицы Якоби, так и с помощью винтового исчисления. Проведенные вычисления демонстрируют хорошее совпадение результатов, полученных разными методами;
- разделение кинематического винта выходного звена или силового винта внешней нагрузки на векторную и моментную части, позволяющее избежать необходимости нормализации винтов, содержащих разные по своему физическому смыслу компоненты, не оказывает влияния на характер изменения значения соответствующего критерия близости к особым положениям.

ГЛАВА 4. АНАЛИЗ ПОСТУПАТЕЛЬНО-НАПРАВЛЯЮЩЕГО 3-RRRRR МЕХАНИЗМА

4.1. Структура, анализ подвижности, уравнения связи и решение обратной задачи о положениях

Представленный в предыдущей главе анализ механизмов параллельной структуры с шестью и четырьмя степенями свободы позволяет подтвердить возможность применения предлагаемых в работе методов для оценки близости к особым положениям. Однако для того, чтобы получить наиболее полную картину касательно применимости указанных методов, а также наглядно продемонстрировать особенности их использования, необходимо провести исследование ряда других механизмов с числом степеней свободы, меньшим, чем шесть. В качестве следующего примера рассмотрим поступательно-направляющий механизм с вращательными кинематическими парами.

Рассмотрим кинематическую цепь со структурой RRRRR (рисунок 4.1).

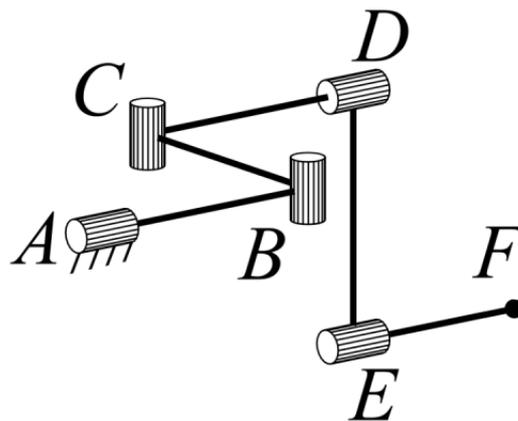


Рисунок 4.1. Кинематическая цепь RRRRR

Данная цепь включает пять вращательных кинематических пар. Входная пара A закреплена на основании. Ось второй пары B перпендикулярна оси пары A , на которой также находится звено AB . Ось следующей пары C параллельна оси пары

B , а звено BC перпендикулярно осям пар A и B . Ось пары D параллельна оси пары A , при этом звенья AB и CD также параллельны друг другу. Ось последней пары E также параллельна оси пар A и D , в то время как звено DE перпендикулярно звену CD . На оси пары E располагается выходное звено цепи (точка F).

Для анализа подвижности данной цепи перейдем к рассмотрению ее единичных кинематических винтов (рисунок 4.2).

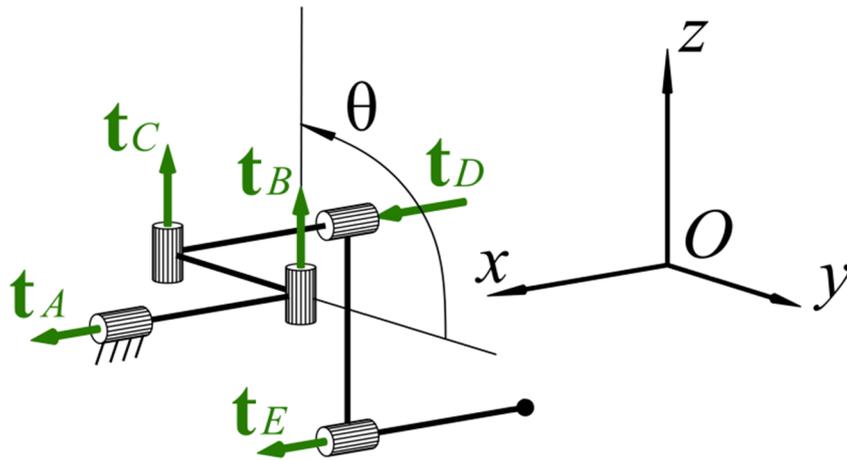


Рисунок 4.2. Единичные кинематические винты цепи \underline{RRRRR}

Кинематическим парам цепи можно сопоставить пять единичных кинематических винтов нулевого параметра: \mathbf{t}_A , \mathbf{t}_B , \mathbf{t}_C , \mathbf{t}_D , \mathbf{t}_E .

Как уже было отмечено, оси кинематических пар A , D и E всегда остаются параллельными друг другу. В этом случае некоторые единичные векторы \mathbf{d}_A , \mathbf{d}_D и \mathbf{d}_E , задающие ориентацию осей указанных пар, будут равны. Для удобства будем считать, что направление данных векторов совпадает с направлением оси Ox неподвижной системы координат $Oxyz$, тогда

$$\mathbf{d}_A = \mathbf{d}_D = \mathbf{d}_E = (1, 0, 0).$$

Оси кинематических винтов \mathbf{t}_B , \mathbf{t}_C также всегда остаются параллельными друг другу, поэтому единичные векторы \mathbf{d}_B и \mathbf{d}_C , задающие оси указанных винтов, будут равны. Координаты данных векторов удобно выразить с использованием угла θ между осью кинематической пары B и прямой, проходящей через точку B и параллельной одной из осей системы координат $Oxyz$, кроме Ox . Считая указанную

прямую параллельной оси Oy , координаты векторов \mathbf{d}_B и \mathbf{d}_C можно записать следующим образом:

$$\mathbf{d}_B = \mathbf{d}_C = (0, \cos\theta, \sin\theta).$$

Пусть точкой приведения кинематических винтов является точка F . Тогда для определения Пюккеровых координат моментных частей винтов необходимо задать векторы из точки F до оси соответствующего винта. Поскольку ось винта \mathbf{t}_A проходит через точку B , ось винта \mathbf{t}_D – через точку C , а ось винта \mathbf{t}_E – через точку F , достаточно задать только два вектора – для точек B и C :

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_{FB} &= (x_B - x_F, y_B - y_F, z_B - z_F), \\ \mathbf{p}_{FC} &= (x_C - x_F, y_C - y_F, z_C - z_F).\end{aligned}$$

При этом координаты x_B , y_B и z_B будут постоянными, поскольку кинематическая пара B может только поворачиваться, не изменяя при этом своего положения в пространстве.

С учетом вышесказанного Пюккеровы координаты кинематических винтов цепи могут быть записаны следующим образом:

$$\begin{aligned}\mathbf{t}_A &= (\mathbf{d}_A, \mathbf{p}_{FB} \times \mathbf{d}_A)^T, \\ \mathbf{t}_B &= (\mathbf{d}_B, \mathbf{p}_{FB} \times \mathbf{d}_B)^T, \\ \mathbf{t}_C &= (\mathbf{d}_B, \mathbf{p}_{FC} \times \mathbf{d}_B)^T, \\ \mathbf{t}_D &= (\mathbf{d}_A, \mathbf{p}_{FC} \times \mathbf{d}_A)^T, \\ \mathbf{t}_E &= (\mathbf{d}_A, 0, 0, 0)^T.\end{aligned}$$

При изучении кинематических винтов цепи можно видеть, что ни один из трех винтов \mathbf{t}_A , \mathbf{t}_D и \mathbf{t}_E , ни их линейная комбинация, не могут быть линейно зависимы с винтами \mathbf{t}_B , \mathbf{t}_C или их линейной комбинацией, поскольку векторные части указанных групп винтов, а именно векторы $(1, 0, 0)$ и $(0, \cos\theta, \sin\theta)$, всегда остаются ортогональными. Таким образом, линейная зависимость может иметь место только либо между винтами \mathbf{t}_A , \mathbf{t}_D и \mathbf{t}_E , либо между винтами \mathbf{t}_B , \mathbf{t}_C . Среди кинематических винтов \mathbf{t}_A , \mathbf{t}_D и \mathbf{t}_E линейная зависимость, теоретически, может

возникать в двух случаях: если моментная часть хотя бы одного из винтов \mathbf{t}_A или \mathbf{t}_D равна нулю, либо если моментные части указанных винтов коллинеарны. При этом ввиду особенностей конструкции механизма ось пары D не может лежать на прямой FE , поэтому моментная часть винта \mathbf{t}_D всегда будет ненулевой. Оба оставшихся возможных условия (моментная часть винта \mathbf{t}_A равна нулю или моментные части винтов \mathbf{t}_A и \mathbf{t}_D коллинеарны) соответствуют случаю, когда оси винтов \mathbf{t}_A , \mathbf{t}_D и \mathbf{t}_E лежат в одной плоскости. При этом механизм будет находиться в особом положении типа «ПС». Что касается линейной зависимости винтов \mathbf{t}_B и \mathbf{t}_C , то для ее возникновения необходимо, чтобы моментные части данных винтов были равны, поскольку векторные части этих винтов равны всегда. Это, в свою очередь, означает равенство векторов \mathbf{p}_{FB} и \mathbf{p}_{FC} , что невозможно ввиду конструкции механизма. Таким образом, в общем случае кинематические винты цепи линейно независимы, а сама цепь имеет пять степеней свободы.

Силовой винт связи, накладываемой цепью, определяется достаточно легко. Можно видеть, что векторные части всех кинематических винтов цепи представлены всего двумя векторами \mathbf{d}_A и \mathbf{d}_B , поэтому силовой винт, взаимный любому кинематическому винту цепи, будет иметь бесконечный параметр, а его ось будет перпендикулярна данным векторам. Подставляя выражения для определения координат указанных векторов, получим Плюккерovy координаты силового винта связи цепи:

$$\mathbf{w}_{cb} = (0, 0, 0, \mathbf{d}_A \times \mathbf{d}_B)^T = (0, 0, 0, [1, 0, 0] \times [0, \cos \theta, \sin \theta])^T = (0, 0, 0, 0, -\sin \theta, \cos \theta)^T.$$

Чтобы найти приводной силовой винт изменим точку приведения винтов на C . При этом Плюккерovy координаты векторных частей кинематических винтов не изменятся. Что касается моментных частей, то у винтов \mathbf{t}_C и \mathbf{t}_D их Плюккерovy координаты станут нулевыми, а у винтов \mathbf{t}_B и \mathbf{t}_E будут равны $\mathbf{p}_{CB} \times \mathbf{d}_B$ и $\mathbf{p}_{CE} \times \mathbf{d}_A$ соответственно. Координаты векторов \mathbf{p}_{CB} и \mathbf{p}_{CE} будут равны:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{CB} &= (x_B - x_C, y_B - y_C, z_B - z_C), \\ \mathbf{p}_{CE} &= (x_E - x_C, y_E - y_C, z_E - z_C). \end{aligned}$$

Поскольку силовой винт связи \mathbf{w}_{CB} имеет бесконечный параметр, его Плюккерovy координаты не зависят от точки приведения. Тогда некоторый силовой винт нулевого параметра, ось которого проходит через точку C , а векторная часть перпендикулярна векторам $\boldsymbol{\rho}_{CB} \times \mathbf{d}_B$ и $\boldsymbol{\rho}_{CE} \times \mathbf{d}_A$, будет взаимен всем кинематическим винтам цепи и ортогонален винту \mathbf{w}_{CB} , т.е. представлять собой приводной силовой винт цепи. Из определения векторного произведения следует, что если какой-либо вектор перпендикулярен вектору $\boldsymbol{\rho}_{CB} \times \mathbf{d}_B$, то он должен лежать в плоскости, порождаемой векторами $\boldsymbol{\rho}_{CB}$ и \mathbf{d}_B . Аналогичные рассуждения можно провести и для плоскости, порождаемой векторами $\boldsymbol{\rho}_{CE}$ и \mathbf{d}_A . Таким образом, векторная часть приводного силового винта должна лежать на пересечении указанных плоскостей. При внимательном рассмотрении структуры кинематической цепи можно видеть, что данные плоскости пересекаются по прямой, параллельной звену DE и проходящей через точку B . Тогда Плюккерovy координаты приводного силового винта при приведении в точку F можно записать следующим образом:

$$\mathbf{w}_a = (\mathbf{d}_{ED}, \boldsymbol{\rho}_{FC} \times \mathbf{d}_{ED})^T,$$

где \mathbf{d}_{ED} – единичный вектор, параллельный звену DE определяемый следующим образом:

$$\mathbf{d}_{ED} = \frac{(x_D - x_E, y_D - y_E, z_D - z_E)}{\sqrt{(x_D - x_E)^2 + (y_D - y_E)^2 + (z_D - z_E)^2}}.$$

Поскольку рассматриваемая кинематическая цепь накладывает одну связь на вращение выходного звена, механизм, состоящий из трех таких цепей, будет являться поступательно-направляющим механизмом с тремя степенями свободы при условии, что связи, накладываемые цепями, не будут вырождены. Наиболее естественным вариантом подобного механизма будет тот, у которого оси кинематических пар A расположены непосредственно на осях неподвижной системы координат $Oxyz$ (рисунок 4.3). Первой цепью будем считать ту, у которой ось пары A расположена на оси Ox , второй – на оси Oy , а третьей – на оси Oz . В

этом случае координаты единичных векторов, задающих оси единичных кинематических винтов цепей будут следующими:

$$\mathbf{d}_{A_1} = (1, 0, 0), \quad \mathbf{d}_{A_2} = (0, 1, 0), \quad \mathbf{d}_{A_3} = (0, 0, 1). \\ \mathbf{d}_{B_1} = (0, \cos \theta_1, \sin \theta_1), \quad \mathbf{d}_{B_2} = (\sin \theta_2, 0, \cos \theta_2), \quad \mathbf{d}_{B_3} = (\cos \theta_3, \sin \theta_3, 0).$$

При этом углы θ_1 , θ_2 , и θ_3 будут отсчитываться от положительного направления осей Oy , Oz и Ox соответственно.

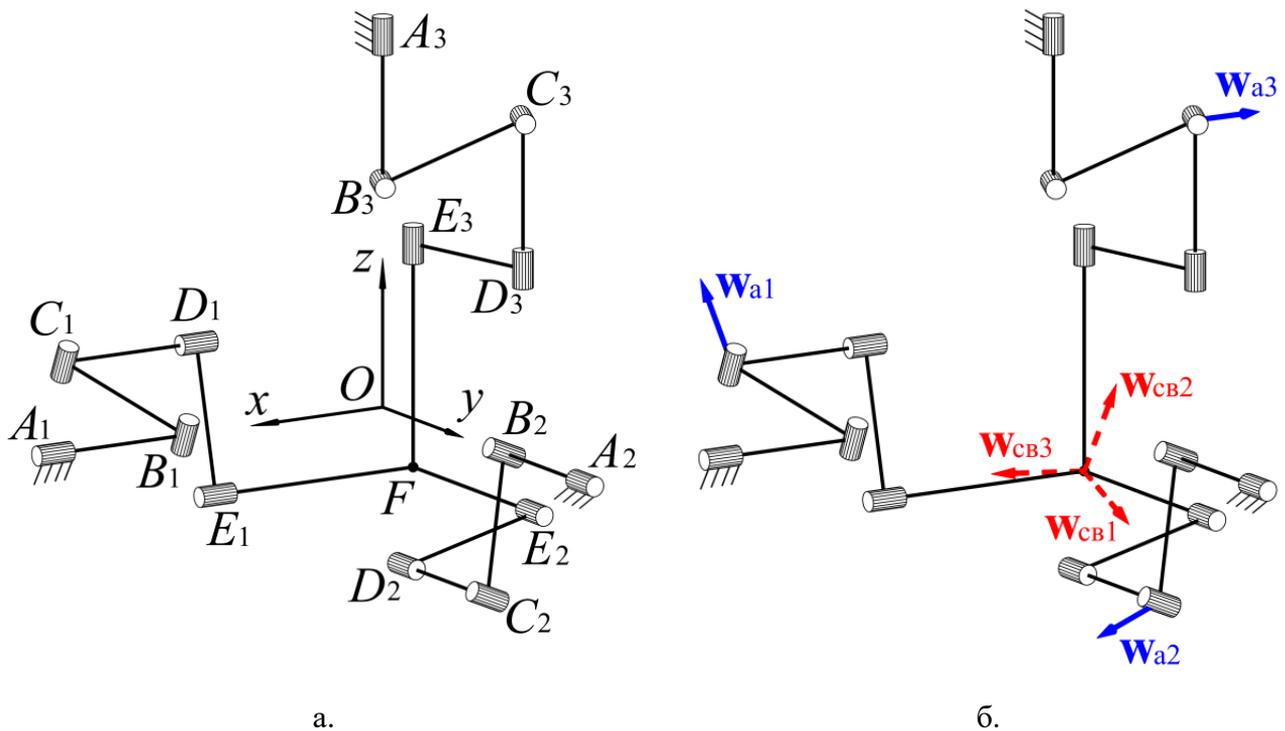


Рисунок 4.3. Механизм 3-RRRRR: взаимное расположение системы координат и кинематических цепей (а), силовые винты механизма (б)

Перейдем к решению обратной задачи о положениях для полученного поступательно-направляющего механизма. В данной задаче, помимо геометрических размеров механизма, считаются известными координаты $x = x_F$, $y = y_F$, $z = z_F$ выходного звена механизма (точки F). Соответственно, для решения задачи необходимо определить углы поворота во входных кинематических парах A , т.е. углы θ_j .

Для начала рассмотрим первую кинематическую цепь. Можно видеть, что поскольку звенья C_1B_1 и E_1F всегда остаются ориентированными вдоль оси Ox вне

зависимости от конфигурации механизма, соответствующая координата точки C_1 будет равна

$$x_{C_1} = x + l_{EF_1} + l_{CD_1},$$

где l_{EF_1} и l_{CD_1} – длины звеньев E_1F и C_1D_1 соответственно.

Рассмотрим вид спереди для первой кинематической цепи (рисунок 4.4).

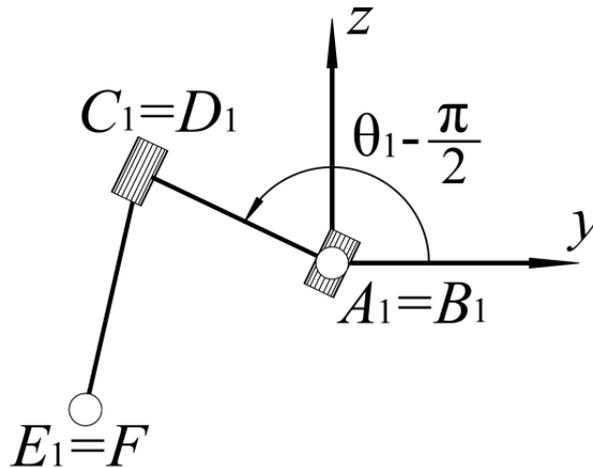


Рисунок 4.4. Первая кинематическая цепь механизма 3-RRRRR. Вид спереди

Очевидно, что угол поворота входного звена θ_1 для получившейся условной плоской кинематической цепи (диады) \underline{RRR} зависит только от координат y и z . При этом длина второго звена диады l_2 будет постоянной, а длина первого звена l_1 – зависеть от координаты x_{C_1} . Искомая длина первого звена диады может быть рассчитана следующим образом

$$l_1 = \sqrt{l_{BC_1}^2 - (x_{C_1} - x_{B_1})^2},$$

где l_{BC_1} – длина звена B_1C_1 .

Зная длину l_1 , координаты y_{C_1} и z_{C_1} можно выразить через угол θ_1 :

$$y_{C_1} = l_1 \cos\left(\theta_1 - \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{l_{BC_1}^2 - (x_{C_1} - x_{B_1})^2} \sin\theta_1,$$

$$z_{C_1} = l_1 \sin\left(\theta_1 - \frac{\pi}{2}\right) = -\sqrt{l_{BC_1}^2 - (x_{C_1} - x_{B_1})^2} \cos\theta_1.$$

Поскольку длина второго звена диады постоянна и равна длине l_{DE1} звена D_1E_1 , можно связать координаты y_{C1} и z_{C1} с координатами выходного звена y и z следующим образом:

$$(y - y_{C1})^2 + (z - z_{C1})^2 = l_{DE1}^2.$$

Подставив в данное выражение формулы для расчета координат y_{C1} и z_{C1} , а также проведя аналогичные рассуждения для второй и третьей кинематических цепей, получим уравнения связи для рассматриваемого механизма:

$$\begin{aligned} \left(y - \sqrt{l_{BC1}^2 - (x_{C1} - x_{B1})^2} \sin \theta_1 \right)^2 + \left(z + \sqrt{l_{BC1}^2 - (x_{C1} - x_{B1})^2} \cos \theta_1 \right)^2 - l_{DE1}^2 &= 0, \\ \left(z - \sqrt{l_{BC2}^2 - (y_{C2} - y_{B2})^2} \sin \theta_2 \right)^2 + \left(x + \sqrt{l_{BC2}^2 - (y_{C2} - y_{B2})^2} \cos \theta_2 \right)^2 - l_{DE2}^2 &= 0, \\ \left(x - \sqrt{l_{BC3}^2 - (z_{C3} - z_{B3})^2} \sin \theta_3 \right)^2 + \left(y + \sqrt{l_{BC3}^2 - (z_{C3} - z_{B3})^2} \cos \theta_3 \right)^2 - l_{DE3}^2 &= 0. \end{aligned}$$

Для краткости обозначим

$$a_1 = \sqrt{l_{BC1}^2 - (x_{C1} - x_{B1})^2}, \quad a_2 = \sqrt{l_{BC2}^2 - (y_{C2} - y_{B2})^2}, \quad a_3 = \sqrt{l_{BC3}^2 - (z_{C3} - z_{B3})^2}.$$

Поскольку при решении обратной задачи о положениях значения a_1 , a_2 и a_3 рассчитываются из известных величин (координаты x выходного звена и геометрических параметров механизма), то три данных параметра также можно считать известными. Подставив a_1 , a_2 и a_3 в уравнения связи, раскрыв скобки с приведением подобных слагаемых, а также сгруппировав все известные при решении обратной задачи о положениях величины в левой части уравнения получим:

$$\begin{aligned} \frac{y^2 + z^2 + a_1^2 - l_{DE1}^2}{2a_1} &= z \cos \theta_1 - y \sin \theta_1, \\ \frac{z^2 + x^2 + a_2^2 - l_{DE2}^2}{2a_2} &= x \cos \theta_2 - z \sin \theta_2, \\ \frac{x^2 + y^2 + a_3^2 - l_{DE3}^2}{2a_3} &= y \cos \theta_3 - z \sin \theta_3. \end{aligned}$$

Известна [196] следующая формула сложения гармонических колебаний:

$$m \cos \theta + n \sin \theta = \operatorname{sgn}(m) \sqrt{m^2 + n^2} \cos \left(\theta + \operatorname{arctg} \left(-\frac{n}{m} \right) \right),$$

где $\operatorname{sgn}(m)$ означает знак коэффициента m .

Преобразуем правые части перегруппированных уравнений связи, используя приведенную формулу:

$$\begin{aligned} \frac{y^2 + z^2 + a_1^2 - l_{DE1}^2}{2a_1} &= \operatorname{sgn}(z) \sqrt{z^2 + y^2} \cos \left(\theta_1 + \operatorname{arctg} \left(-\frac{-y}{z} \right) \right), \\ \frac{z^2 + x^2 + a_2^2 - l_{DE2}^2}{2a_2} &= \operatorname{sgn}(x) \sqrt{x^2 + z^2} \cos \left(\theta_2 + \operatorname{arctg} \left(-\frac{-z}{x} \right) \right), \\ \frac{x^2 + y^2 + a_3^2 - l_{DE3}^2}{2a_3} &= \operatorname{sgn}(y) \sqrt{y^2 + x^2} \cos \left(\theta_3 + \operatorname{arctg} \left(-\frac{-x}{y} \right) \right). \end{aligned}$$

В свою очередь из полученных выражений можно выразить углы θ_1 , θ_2 и θ_3 явным образом:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \pm \arccos \left(\frac{y^2 + z^2 + a_1^2 - l_{DE1}^2}{\operatorname{sgn}(z) 2a_1 \sqrt{z^2 + y^2}} \right) - \operatorname{arctg} \left(-\frac{-y}{z} \right), \\ \theta_2 &= \pm \arccos \left(\frac{z^2 + x^2 + a_2^2 - l_{DE2}^2}{\operatorname{sgn}(x) 2a_2 \sqrt{x^2 + z^2}} \right) - \operatorname{arctg} \left(-\frac{-z}{x} \right), \\ \theta_3 &= \pm \arccos \left(\frac{x^2 + y^2 + a_3^2 - l_{DE3}^2}{\operatorname{sgn}(y) 2a_3 \sqrt{y^2 + x^2}} \right) - \operatorname{arctg} \left(-\frac{-x}{y} \right). \end{aligned}$$

Таким образом, для рассматриваемого поступательно-направляющего механизма обратная задача о положениях имеет аналитическое решение. При этом общее количество рабочих сборок (решений обратной задачи о положениях) равно восьми: по два варианта расположения промежуточных звеньев в каждой цепи для одного набора координат точки F . Стоит отметить, что на приведенной выше схеме (рисунок 4.3.) изображена рабочая сборка с «первыми» углами поворота входных звеньев (θ_{11} , θ_{21} , θ_{31}), соответствующими положительным значениям арккосинуса.

4.2. Анализ рабочей зоны, особых положений и близости к особым положениям механизма

В качестве примера для расчета рассмотрим механизм со следующими размерами (м):

- длины звеньев (одинаковы для всех цепей): $l_{ABi} = 0,2$, $l_{BCi} = 0,2$, $l_{CDi} = 0,2$, $l_{DEi} = 0,2$, $l_{EFi} = 0,3$.
- расстояние от начала координат до входной пары цепи: $l_{OAi} = 0,5$.

Для определения формы и размеров теоретической рабочей зоны механизма (рисунок 4.5) будем использовать итерационный анализ в интервалах координат выходного звена $x = [-0,4; 0]$, $y = [-0,4; 0]$, $z = [-0,4; 0]$ и шагом сетки 0,008 м. Общее количество итераций таким образом равно 132651.

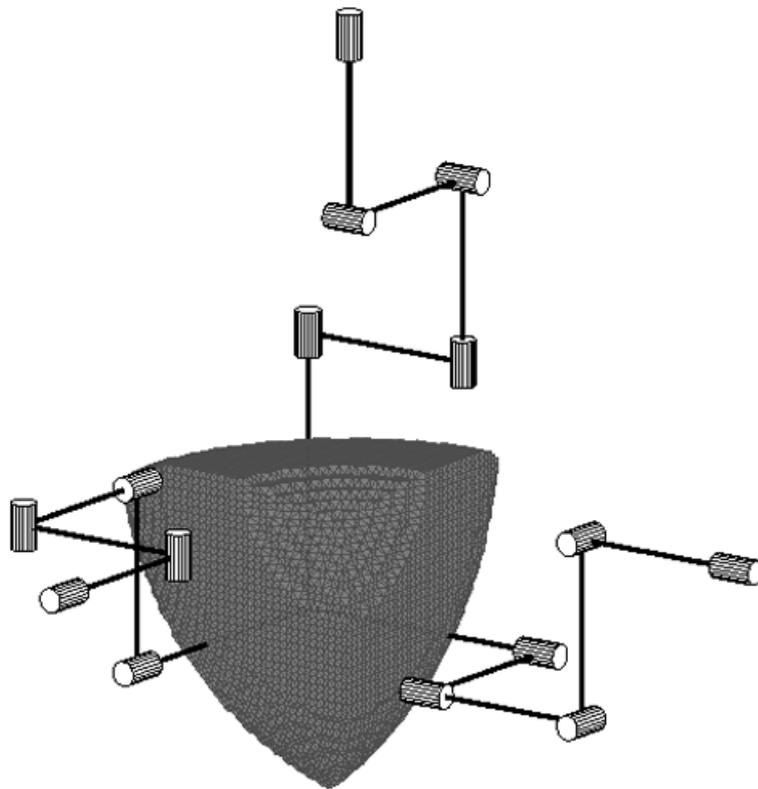


Рисунок 4.5. Теоретическая рабочая зона 3-RRRRR механизма

Рассмотрим особые положения механизма.

При анализе подвижности была, по сути, сформулирована геометрическая интерпретация условия возникновения особых положений типа «ПС». При этом

расположение точек особых положений данного типа только на теоретической границе рабочей зоны неочевидно. Данный факт, однако, можно наглядно продемонстрировать, рассматривая частные производные уравнений связи по входным координатам:

$$\frac{\partial F_1}{\partial \theta_1} = -2a_1(y \cos \theta_1 + z \sin \theta_1),$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial \theta_2} = -2a_2(z \cos \theta_2 + x \sin \theta_2),$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial \theta_3} = -2a_3(x \cos \theta_3 + y \sin \theta_3).$$

Как известно, механизм будет находиться в особом положении типа «ПС», если хотя бы одна из этих производных равна нулю. Это возможно в том случае, если любая из величин a_i равна нулю, либо если нулю равна любая скобка, содержащая синус и косинус угла θ_i . Исходя из определения параметра a_i , приведенного ранее, первое условие можно записать следующим образом:

$$l_{BC1}^2 = (x_{C1} - x_{B1})^2, \quad l_{BC2}^2 = (y_{C2} - y_{B2})^2, \quad l_{BC3}^2 = (z_{C3} - z_{B3})^2.$$

Можно видеть, что выполнение данного условия возможно в том случае, если промежуточное звено B_iC_i в любой цепи расположено вдоль соответствующей координатной оси (то есть, звено B_iC_i находится на одной линии со звеном A_iB_i , этой же цепи), что соответствует предельным перемещениям выходного звена вдоль соответствующей оси координат.

Во втором случае необходимо выполнение любого из условий

$$y = -z \operatorname{tg} \theta_1, \quad z = -x \operatorname{tg} \theta_2, \quad x = -y \operatorname{tg} \theta_3,$$

что соответствует ситуации, при которой проекции звеньев B_iC_i и D_iE_i на плоскость, перпендикулярную оси звена A_iB_i , находятся на одной прямой. В таком случае выходное звено, очевидно, также будет находиться на краю теоретического рабочего пространства.

Итерационный анализ рабочей зоны также показал, что в зависимости от рабочей сборки определитель матрицы **B** или только положителен, или только отрицателен во всех проанализированных точках.

Для особых положений типа «ПУ» итерационный анализ проводился с меньшим шагом сетки (0,005 м), чем при анализе рабочей зоны, но в тех же интервалах изменения координат x , y , z (проанализирована 531441 точка). Было установлено, что форма и расположение поверхностей, состоящих из точек, соответствующих особому положению данного типа, зависит от выбора рабочей сборки. Так, для конфигураций с одинаковыми вторыми индексами в обозначениях входных углов («1, 1, 1» или «2, 2, 2») число точек с $\det(\mathbf{A}) < 0$ составило 193884 из 194421 точек, принадлежащих рабочей зоне, т.е. 99,72% всего объема. При этом данные точки находятся в трех изолированных друг от друга областях в непосредственной близости к границе теоретической рабочей зоны (рисунок 4.6.а) и на практике, вероятнее всего, не попадут в конструктивную рабочую зону. Для всех остальных рабочих сборок число точек с $\det(\mathbf{A}) < 0$ составило 105331, то есть 55,15% всего объема. Кроме того, точки с разными знаками определителя матрицы **A** в данном случае находятся в различных местах внутри рабочего пространства, а не сосредоточены у его границы (рисунок 4.6.б).

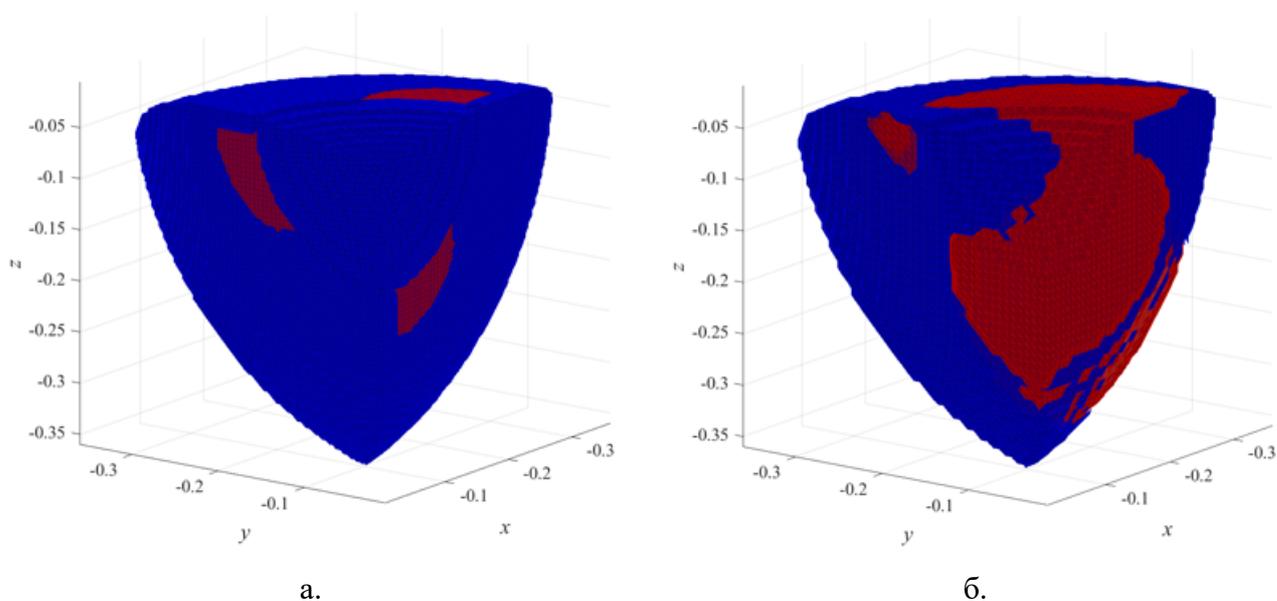


Рисунок 4.6. Знак определителя матрицы **A** в точках рабочей зоны («+» – красный, «-» – синий) механизма 3-RRRRR: рабочая сборка «1,1,1» (а), рабочая сборка «1,1,2» (б)

Таким образом, для рассматриваемого поступательно-направляющего 3-RRRRR механизма оптимальными с точки зрения избегания особых положений типа «ПУ» являются только две рабочих сборки. Остальные шесть требуют перехода через особые положения указанного типа в процессе перемещения выходного звена внутри рабочей зоны. Стоит также отметить, что расположение зон, в которых $\det(\mathbf{A}) > 0$, для рабочей сборки «2, 2, 2» будет отличаться от представленного выше для сборки «1, 1, 1», но при этом форма этих зон не изменится. Иными словами, наблюдается некоторая симметрия расположения этих зон. Аналогичная ситуация наблюдается и для остальных рабочих сборок.

Поскольку каждая кинематическая цепь механизма имеет пять степеней свободы, а его выходное звено – три, в данном случае возможно возникновение особых положений типа «ВС». Для определения расположения точек особых положений данного типа также воспользуемся итерационным методом.

Согласно приведенным ранее зависимостям для отдельной кинематической цепи, силовые винты связей механизма будут иметь следующие Плюккерovy координаты:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_{\text{св1}} &= (0, 0, 0, 0, -\sin \theta_1, \cos \theta_1)^T, \\ \mathbf{w}_{\text{св2}} &= (0, 0, 0, \cos \theta_2, 0, -\sin \theta_2)^T, \\ \mathbf{w}_{\text{св3}} &= (0, 0, 0, -\sin \theta_3, \cos \theta_3, 0)^T. \end{aligned}$$

Поскольку первые три Плюккерovy координаты каждого из данных винтов всегда нулевые, их можно отбросить, получив таким образом матрицу 3×3 :

$$\begin{pmatrix} 0 & -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 \\ \cos \theta_2 & 0 & -\sin \theta_2 \\ -\sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда итерационный анализ особых положений типа «ВС» можно проводить с использованием данной матрицы: если знак ее определителя в двух соседних точках рабочей зоны разный, то между этими точками находится особое положение данного типа.

По итогам проведенного итерационного анализа с применением указанной матрицы были получены следующие результаты (рисунок 4.7): определитель матрицы имеет отрицательный знак 185705 точек при рабочей сборке «1, 1, 1» и в 82617 точек при рабочей сборке «1, 1, 2». При этом можно заметить, что в первом случае поверхность особых положений типа «ВС», разделяющая области с положительным и отрицательным значением определителя, располагается компактно в верхней части рабочей зоны, в то время как для второй рассмотренной рабочей сборки такая поверхность не единственна, и точки особых положений данного типа находятся как у края рабочей зоны, так и в ее глубине. Таким образом, для рабочей сборки «1, 1, 1» можно говорить о потере всего лишь порядка 4,48% объема теоретической рабочей зоны. Для рабочей сборки «1, 1, 2» средняя часть рабочей зоны составляет 42,49% ее общего объема. При этом геометрия данной части такова, что практическое применение рассматриваемого механизма при условии нахождения выходного звена только внутри указанного объема будет затруднено, а расширение эффективной рабочей зоны потребует перехода через особые положения типа «ВС».

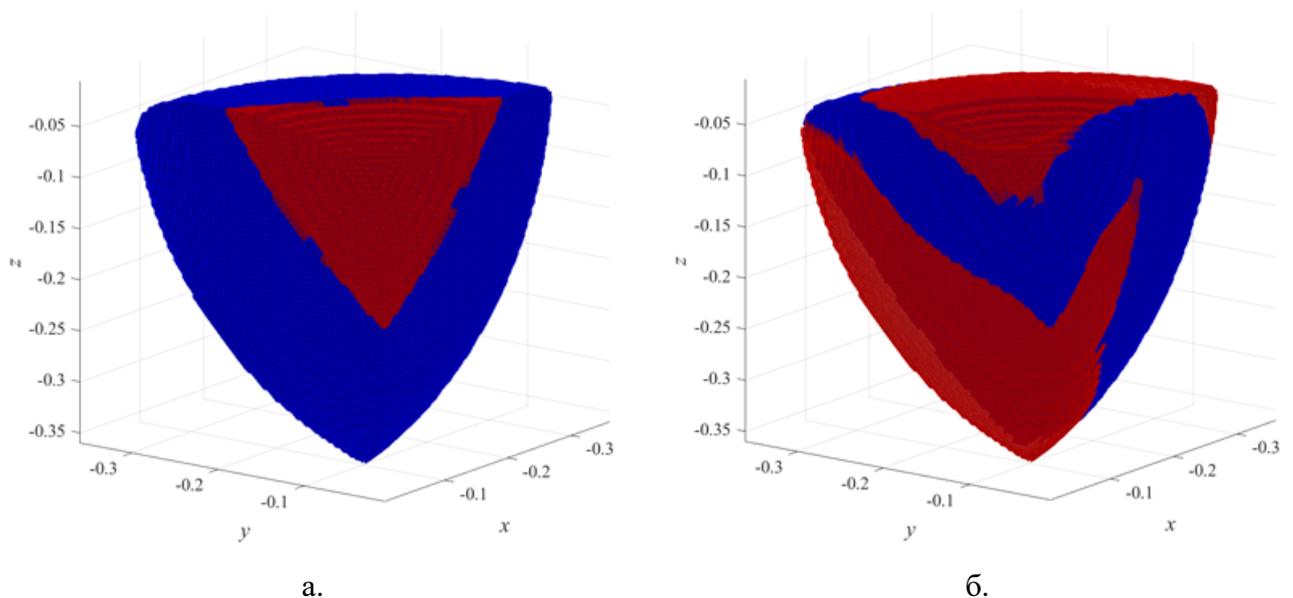


Рисунок 4.7. Знак определителя матрицы Плюккеровых координат силовых винтов связей, полученных по аналитическим формулам, в точках рабочей зоны («+» – красный, «-» – синий) механизма 3-RRRRR: рабочая сборка «1,1,1» (а), рабочая сборка «1,1,2» (б)

При использовании в итерационном анализе определителя матрицы силовых винтов \mathbf{W} , полученной с помощью численных методов, результат для рабочей сборки «1, 1, 1» оказался идентичен рассмотренному. Для рабочей сборки «1, 1, 2» значения определителя противоположны изображенным на рисунке: «синяя» зона становится «красной» и наоборот. При этом форма и расположение поверхностей особых положений типа «ВС», очевидно, остаются неизменными. Таким образом, результаты анализа, полученные с использованием двух различных способов (аналитического и численного расчета Плюккерových координат) вычисления взаимных винтов, одинаковы.

Наконец, перейдем к рассмотрению критериев близости к особым положениям, начав с типа «ПС» (рисунок 4.8). В качестве демонстрационного примера будем использовать срез рабочей зоны при постоянной координате $z = -0,18$ м. Шаг разбиения примем равным 0,002 м.

Как видно, значения скоростей в приводных парах возрастают при приближении к краю среза, что полностью соответствует ожиданиям, т.к. особые положения типа «ПС» расположены на границе теоретической рабочей зоны. Для других рабочих сборок картина аналогична представленной с тем отличием, что определитель матрицы \mathbf{B} в некоторых случаях везде положителен (в данном случае – везде отрицателен).

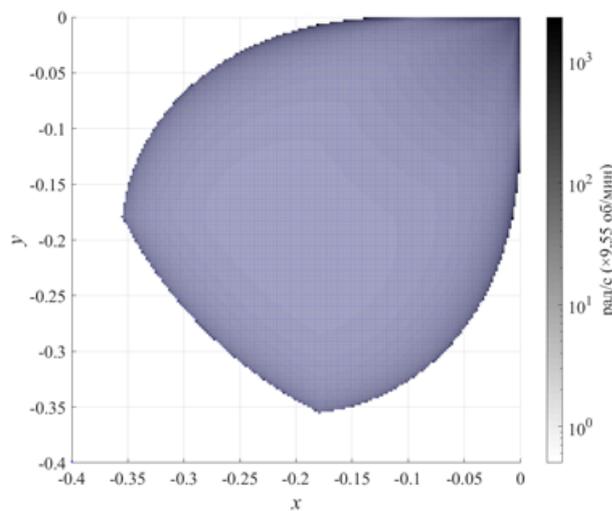


Рисунок 4.8. Распределение значений входных скоростей по срезу рабочей зоны 3-RRRRR механизма при $\|\mathbf{v}\| = 1$ (рабочая сборка «1, 1, 1»)

Далее перейдем к рассмотрению изменения значений критерия близости к особым положениям типа «ПУ» (рисунок 4.9).

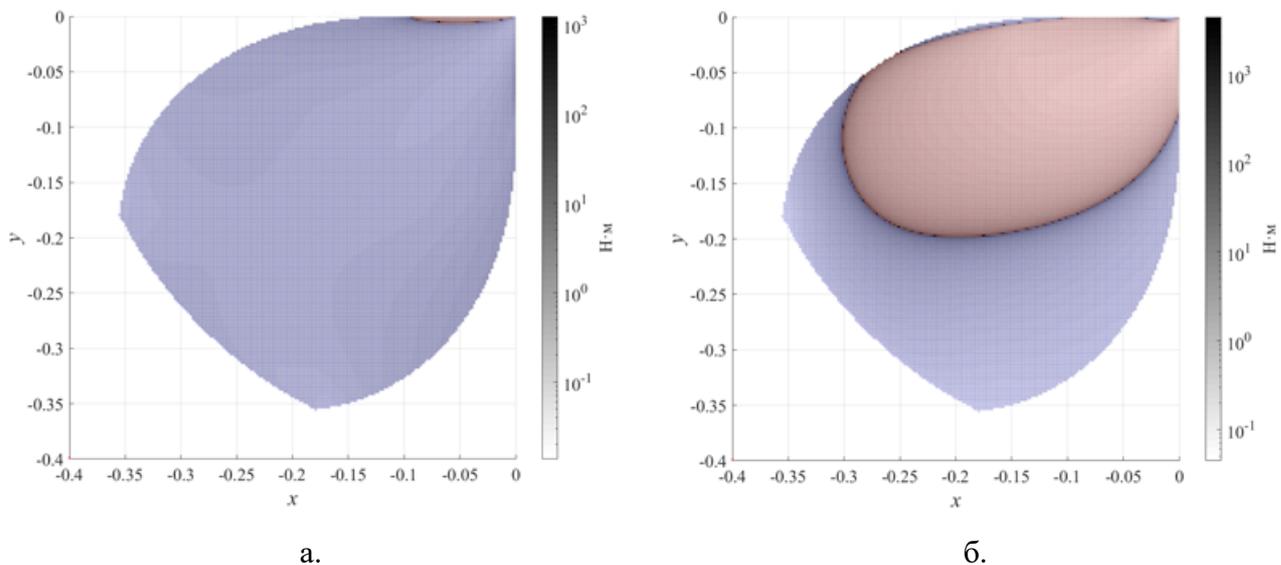


Рисунок 4.9. Распределение значений усилий в приводах по срезу рабочей зоны 3-RRRRR механизма при $\|\mathbf{f}\| = 1$: рабочая сборка «1, 1, 1» (а), рабочая сборка «1, 1, 2» (б)

Как видно из представленного рисунка, возрастание усилий в приводных кинематических парах ожидаемо наблюдается при приближении к границе, разделяющей области положительных и отрицательных значений определителя матрицы \mathbf{A} , т.е. к линии, на которой, собственно, и находятся точки особых положений типа «ПУ».

Как уже было отмечено ранее, каждая кинематическая цепь рассматриваемого поступательно-направляющего механизма накладывает только одну связь на выходное звено. Соответственно, для корректного функционирования всего механизма силовые винты связей всех цепей должны быть линейно независимы. Это означает, при анализе данного механизма можно применить критерий близости к особым положениям типа «ВС» (значение обобщенной реакции), представленный ранее (глава 2), не сталкиваясь при этом со статической неопределенностью. При этом для начала рассмотрим подход, не учитывающий возможное взаимное влияние силовых винтов, то есть при расчетах не будем проецировать силовые винты \mathbf{w}_{ai} на пространство, эквивалентное пространству Φ для кинематических винтов (рисунок 4.10).

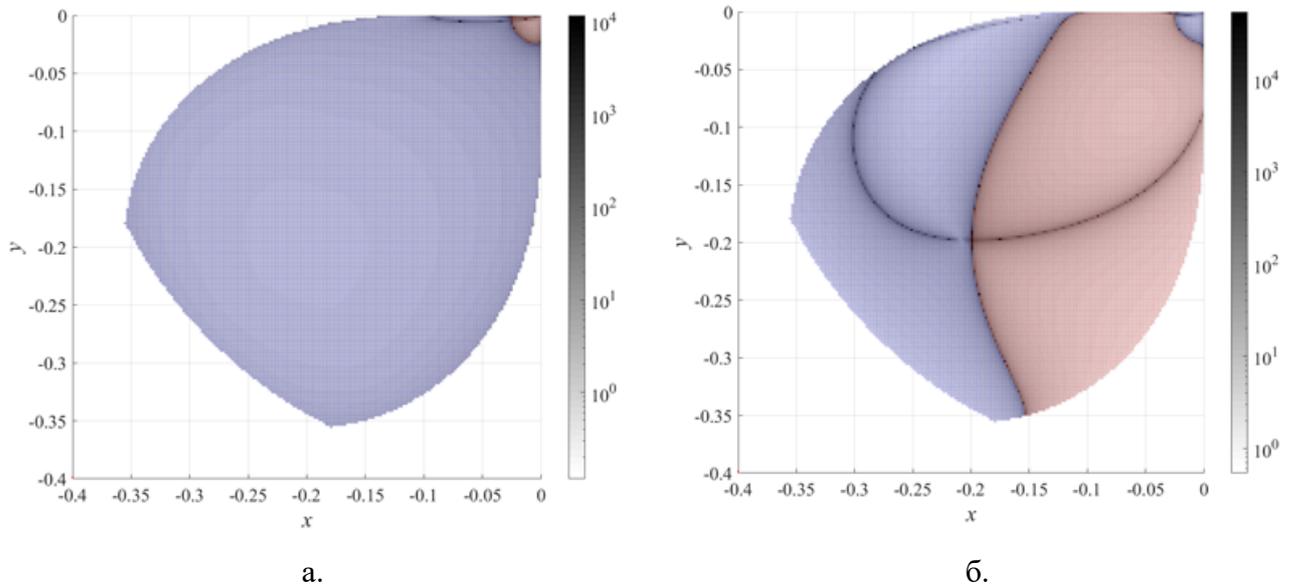


Рисунок 4.10. Распределение значений обобщенных реакций, соответствующих винтам связей механизма при $\|L\| = 1$: рабочая сборка «1, 1, 1» (а), рабочая сборка «1, 1, 2» (б)

Как видно из представленного рисунка, максимальное значение обобщенной реакции, соответствующей винтам связей механизма, увеличивается не только при приближении к особым положениям типа «ВС» (граница областей положительных и отрицательных значений определителя аналитической матрицы Плюккеровых координат силовых винтов связи), но также и вблизи особых положений типа «ПУ». Теоретическая возможность возникновения подобной ситуации была описана ранее в п. 2.4.

Для того чтобы исследовать особенности вырождения отдельных групп силовых винтов механизма удобно рассмотреть определители матриц Грама, составленных для винтов, входящих в эти группы, условно считая при этом данные винты простыми векторами – элементами пространства \mathbb{R}^6 . Такой подход позволяет перейти к квадратным матрицам, что в свою очередь предоставляет возможность удобно визуализировать распределение значений определителей указанных матриц по рабочей зоне механизма. При работе с исходными неквадратными матрицами Плюккеровых координат, изучение вырождения групп винтов возможно только по падению ранга матрицы, что на практике практически неприменимо ввиду того, что уменьшение ранга будет наблюдаться только непосредственно в особом положении (с учетом погрешности вычислений).

Пусть \mathbf{G}_c – матрица Грама силовых винтов связей \mathbf{w}_{cbi} , \mathbf{G}_a – матрица Грама приводных силовых винтов \mathbf{w}_{ai} , а \mathbf{G} – матрица объединенной группы силовых винтов всего механизма в целом. Данные матрицы могут быть формально определены следующим образом:

$$\mathbf{G}_c = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{w}_{cb1}, \mathbf{w}_{c1} \rangle & \langle \mathbf{w}_{cb1}, \mathbf{w}_{cb2} \rangle & \langle \mathbf{w}_{cb1}, \mathbf{w}_{cb3} \rangle \\ \langle \mathbf{w}_{cb2}, \mathbf{w}_{c1} \rangle & \langle \mathbf{w}_{cb2}, \mathbf{w}_{cb2} \rangle & \langle \mathbf{w}_{cb2}, \mathbf{w}_{cb3} \rangle \\ \langle \mathbf{w}_{cb3}, \mathbf{w}_{c1} \rangle & \langle \mathbf{w}_{cb3}, \mathbf{w}_{cb2} \rangle & \langle \mathbf{w}_{cb3}, \mathbf{w}_{cb3} \rangle \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{G}_a = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{w}_{a1}, \mathbf{w}_{a1} \rangle & \langle \mathbf{w}_{a1}, \mathbf{w}_{a2} \rangle & \langle \mathbf{w}_{a1}, \mathbf{w}_{a3} \rangle \\ \langle \mathbf{w}_{a2}, \mathbf{w}_{a1} \rangle & \langle \mathbf{w}_{a2}, \mathbf{w}_{a2} \rangle & \langle \mathbf{w}_{a2}, \mathbf{w}_{a3} \rangle \\ \langle \mathbf{w}_{a3}, \mathbf{w}_{a1} \rangle & \langle \mathbf{w}_{a3}, \mathbf{w}_{a2} \rangle & \langle \mathbf{w}_{a3}, \mathbf{w}_{a3} \rangle \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{w}_{cb1}, \mathbf{w}_{cb1} \rangle & \langle \mathbf{w}_{cb1}, \mathbf{w}_{a1} \rangle & \langle \mathbf{w}_{cb1}, \mathbf{w}_{cb2} \rangle & \langle \mathbf{w}_{cb1}, \mathbf{w}_{a2} \rangle & \langle \mathbf{w}_{cb1}, \mathbf{w}_{cb3} \rangle & \langle \mathbf{w}_{cb1}, \mathbf{w}_{a3} \rangle \\ \langle \mathbf{w}_{a1}, \mathbf{w}_{cb1} \rangle & \langle \mathbf{w}_{a1}, \mathbf{w}_{a1} \rangle & \langle \mathbf{w}_{a1}, \mathbf{w}_{cb2} \rangle & \langle \mathbf{w}_{a1}, \mathbf{w}_{a2} \rangle & \langle \mathbf{w}_{a1}, \mathbf{w}_{cb3} \rangle & \langle \mathbf{w}_{a1}, \mathbf{w}_{a3} \rangle \\ \langle \mathbf{w}_{cb2}, \mathbf{w}_{cb1} \rangle & \langle \mathbf{w}_{cb2}, \mathbf{w}_{a1} \rangle & \langle \mathbf{w}_{cb2}, \mathbf{w}_{cb2} \rangle & \langle \mathbf{w}_{cb2}, \mathbf{w}_{a2} \rangle & \langle \mathbf{w}_{cb2}, \mathbf{w}_{cb3} \rangle & \langle \mathbf{w}_{cb2}, \mathbf{w}_{a3} \rangle \\ \langle \mathbf{w}_{a2}, \mathbf{w}_{cb1} \rangle & \langle \mathbf{w}_{a2}, \mathbf{w}_{a1} \rangle & \langle \mathbf{w}_{a2}, \mathbf{w}_{cb2} \rangle & \langle \mathbf{w}_{a2}, \mathbf{w}_{a2} \rangle & \langle \mathbf{w}_{a2}, \mathbf{w}_{cb3} \rangle & \langle \mathbf{w}_{a2}, \mathbf{w}_{a3} \rangle \\ \langle \mathbf{w}_{cb3}, \mathbf{w}_{cb1} \rangle & \langle \mathbf{w}_{cb3}, \mathbf{w}_{a1} \rangle & \langle \mathbf{w}_{cb3}, \mathbf{w}_{cb2} \rangle & \langle \mathbf{w}_{cb3}, \mathbf{w}_{a2} \rangle & \langle \mathbf{w}_{cb3}, \mathbf{w}_{cb3} \rangle & \langle \mathbf{w}_{cb3}, \mathbf{w}_{a3} \rangle \\ \langle \mathbf{w}_{a3}, \mathbf{w}_{cb1} \rangle & \langle \mathbf{w}_{a3}, \mathbf{w}_{a1} \rangle & \langle \mathbf{w}_{a3}, \mathbf{w}_{cb2} \rangle & \langle \mathbf{w}_{a3}, \mathbf{w}_{a2} \rangle & \langle \mathbf{w}_{a3}, \mathbf{w}_{cb3} \rangle & \langle \mathbf{w}_{a3}, \mathbf{w}_{a3} \rangle \end{pmatrix}.$$

Группа винтов, соответствующая какой-либо из данных матриц, будет вырождена тогда и только тогда, когда определитель рассматриваемой матрицы будет равен нулю.

Рассмотрим распределение значений определителей матриц Грама по исследуемому срезу рабочей зоны (рисунок 4.11). По представленному рисунку видно, что матрица Грама объединенной группы силовых винтов механизма, а значит и сама группа, вырождается при возникновении особых положений и типа «ПУ» и типа «ВС» (рисунок 4.11.в). Также можно заметить, что группа силовых винтов связей ожидаемо вырождается только при возникновении особых положений типа «ВС» (рисунок 4.11.а), а группа приводных силовых винтов не вырождается практически нигде (рисунок 4.11.б), что, опять же, хорошо согласуется с изложенным в п. 2.4 рассуждениями.

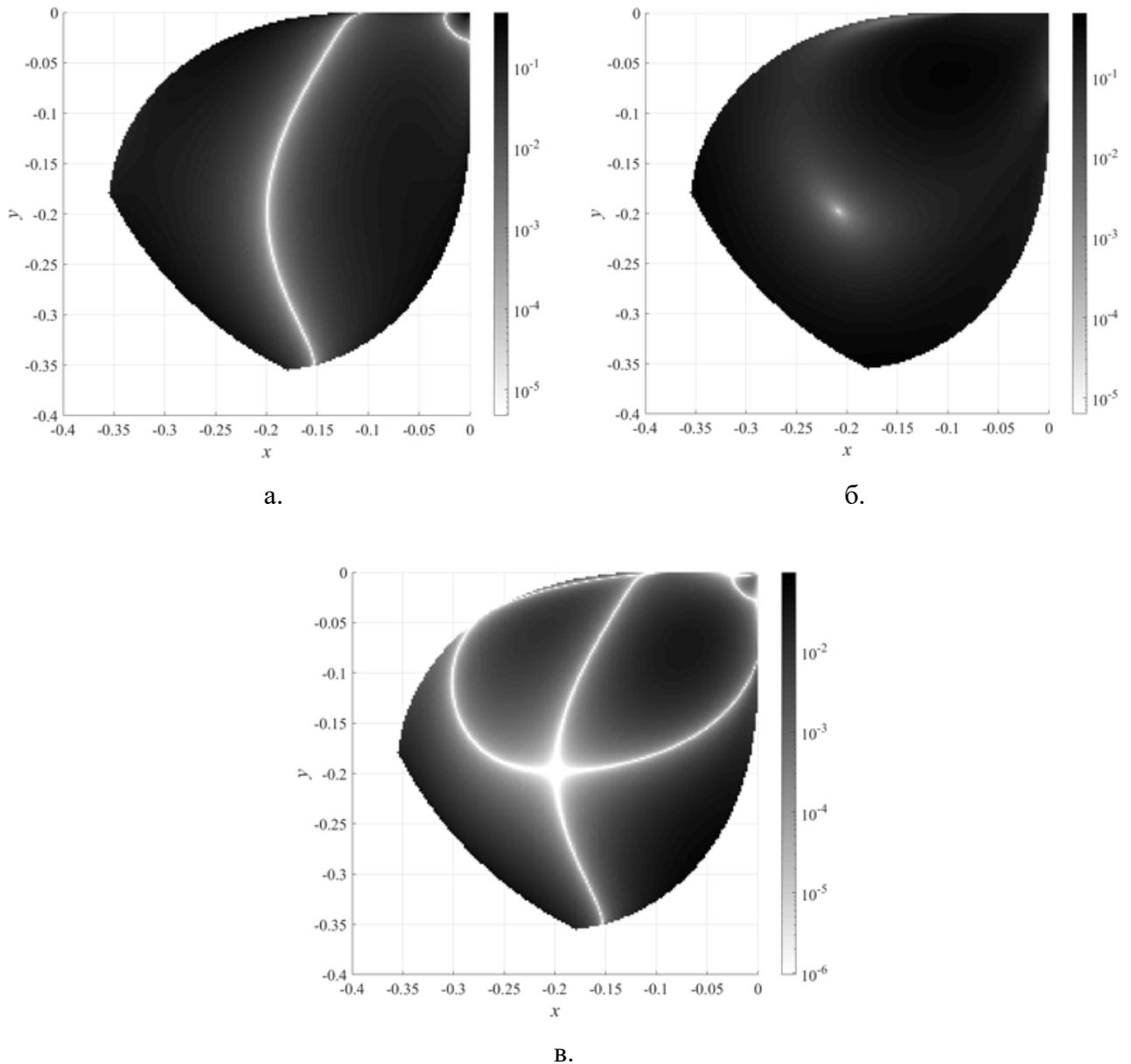


Рисунок 4.11. Распределение значений определителя матриц Грама по срезу рабочей зоны для: группы силовых винтов связей (а), группы приводных силовых винтов (б), объединенной группы силовых всех винтов механизма (в)

Стоит отметить, что вырождение последней группы силовых винтов все же наблюдается в одной точке. При этом можно заметить, что в этой же самой точке значения обобщенных реакций, соответствующих винтам связи, не возрастают (рисунок 4.10.б), то есть не происходит «ложного» увеличения значения критерия близости к особым положениям типа «ВС» при приближении к особому положению типа «ПУ». Также стоит отметить, что условие возникновения особого положения типа «ПУ» (2.3) подразумевает вырождение группы приводных

силовых винтов при сохранении порядка группы C . То есть, формально условие возникновения особых положений типа «ПУ» в данном случае не выполнено. Поэтому определение точек, соответствующих особым положениям типа «ПУ», отдельно от точек особых положений типа «ВС» с применением винтового исчисления без проецирования приводных силовых винтов $w_{ai,j}$ на пространство, эквивалентное пространству Φ для кинематических винтов, не представляется возможным.

Перейдем к расчету рассматриваемого механизма с проецированием силовых винтов w_{ai} (рисунок 4.12).

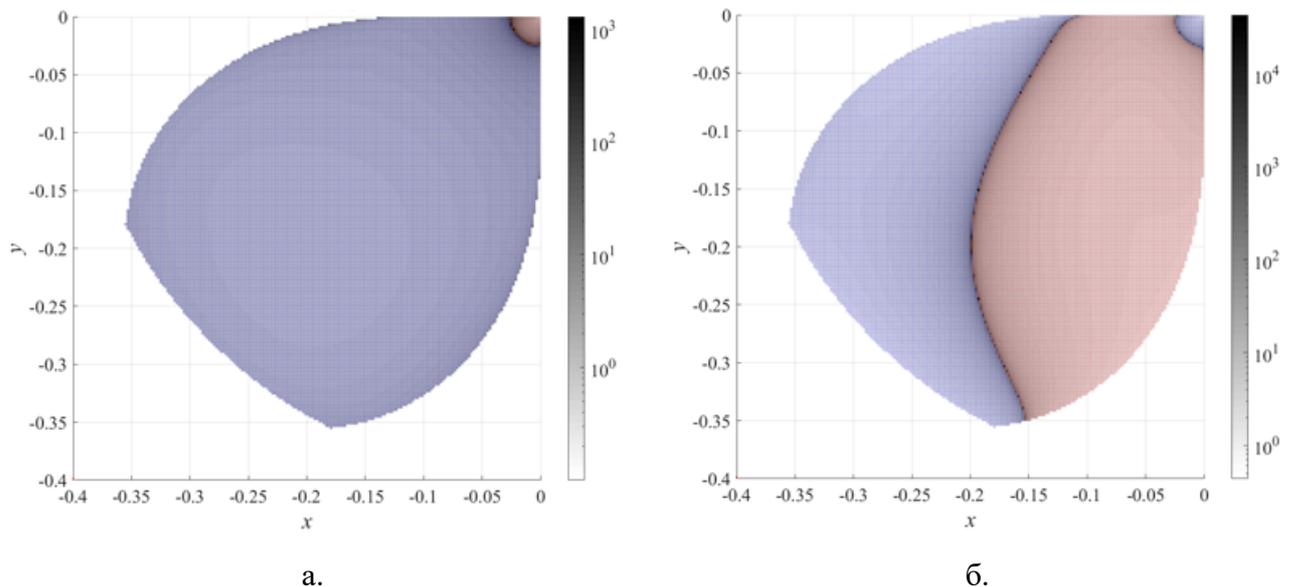


Рисунок 4.12. Распределение значений обобщенных реакций, соответствующих винтам связей механизма при $\|L\| = 1$ (при проецировании винтов w_{ai}): рабочая сборка «1, 1, 1» (а), рабочая сборка «1, 1, 2» (б)

Как видно, в данном случае возрастание абсолютных значений обобщенных реакций наблюдается только на границе зон отрицательных и положительных значений определителя матрицы Плюккерových координат винтов связей. Иными словами, значение критерия близости к особым положениям типа «ВС» не увеличивается при приближении к особым положениям типа «ПУ», что соответствует ожидаемому результату и подтверждает возможность применения рассматриваемого критерия.

В завершение исследования поступательно-направляющего механизма рассмотрим распределение относительной погрешности значений расчетных критериев для среза рабочей зоны при использовании двух различных методов, начав с критерия близости к особым положениям типа «ПС» (рисунок 4.13) для рабочей сборки «1, 1, 1».

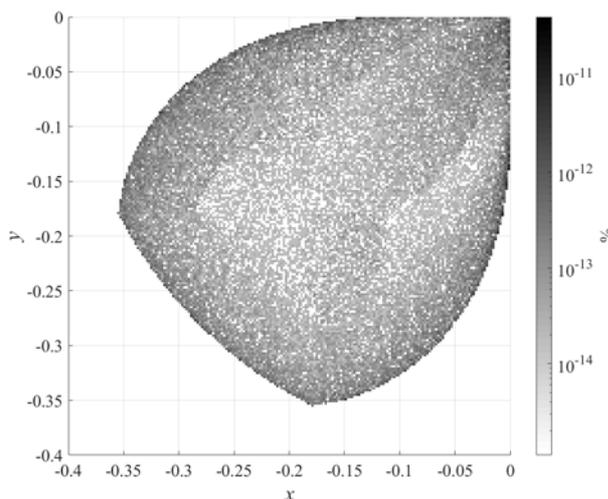


Рисунок 4.13. Распределение относительной погрешности значений скоростей в приводах для среза рабочей зоны (рабочая сборка «1, 1, 1»)

Как видно, относительная погрешность имеет порядок 10^{-11} %. Данный факт говорит о том, что расчеты, проведенные двумя разными методами, дают одинаковый результат, что, в свою очередь, позволяет говорить о правильности самих расчетов, так как, по сути, проводится взаимная проверка используемых методов. Увеличение порядка погрешности наблюдается при приближении к особым положениям типа «ПС», то есть к краю рассматриваемого среза рабочей зоны.

Перейдем к рассмотрению относительной погрешности вычислений усилий в приводных кинематических парах двумя различными методами. При этом сначала сравним результаты, полученные с применением матрицы Якоби, с результатами, полученными с применением винтового исчисления, но без проецирования приводных силовых винтов $w_{ai,j}$ на пространство, эквивалентное пространству Φ для кинематических винтов (рисунок 4.14).

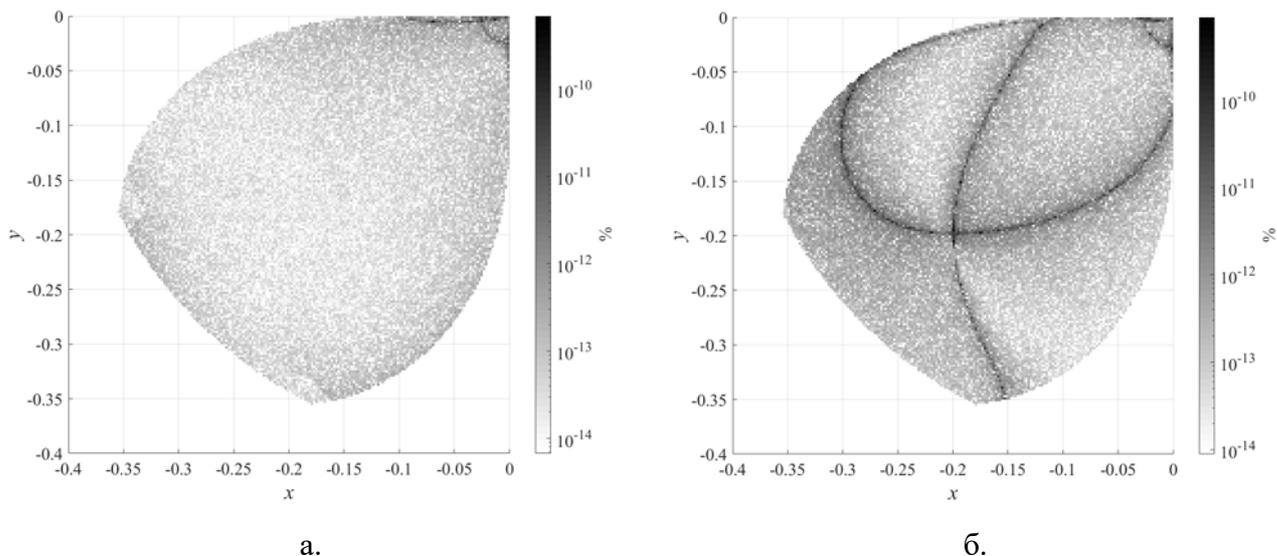


Рисунок 4.14. Распределение относительной погрешности значений усилий в приводах для среза рабочей зоны: рабочая сборка «1, 1, 1» (а), рабочая сборка «1, 1, 2» (б)

Как и в случае ранее рассмотренных механизмов с шестью и четырьмя степенями свободы семейства Delta, относительная погрешность для приводных усилий больше, чем для скоростей в приводных кинематических парах, что объясняется применением большего количества вычислений, использующих численные методы. При этом сама величина погрешности по-прежнему имеет крайне малый порядок (10^{-10} %), что подтверждает правильность проведенных вычислений.

Можно, однако, заметить, что несмотря на то, что в данном случае проводится сравнение результатов расчетов критерия близости к особым положениям «ПУ», рост значений относительной погрешности наблюдается также и при приближении к особым положениям типа «ВС». Этот факт, опять же, объясняется тем, что при данном расчете не учитывалось взаимное влияние силовых винтов разной природы.

Далее рассмотрим изменение относительной погрешности вычислений усилий в приводных кинематических парах, проведенных с применением матрицы Якоби, и с помощью винтового исчисления, но уже с учетом проецирования приводных силовых винтов на пространство, эквивалентное пространству Φ для кинематических винтов (рисунок 4.15).

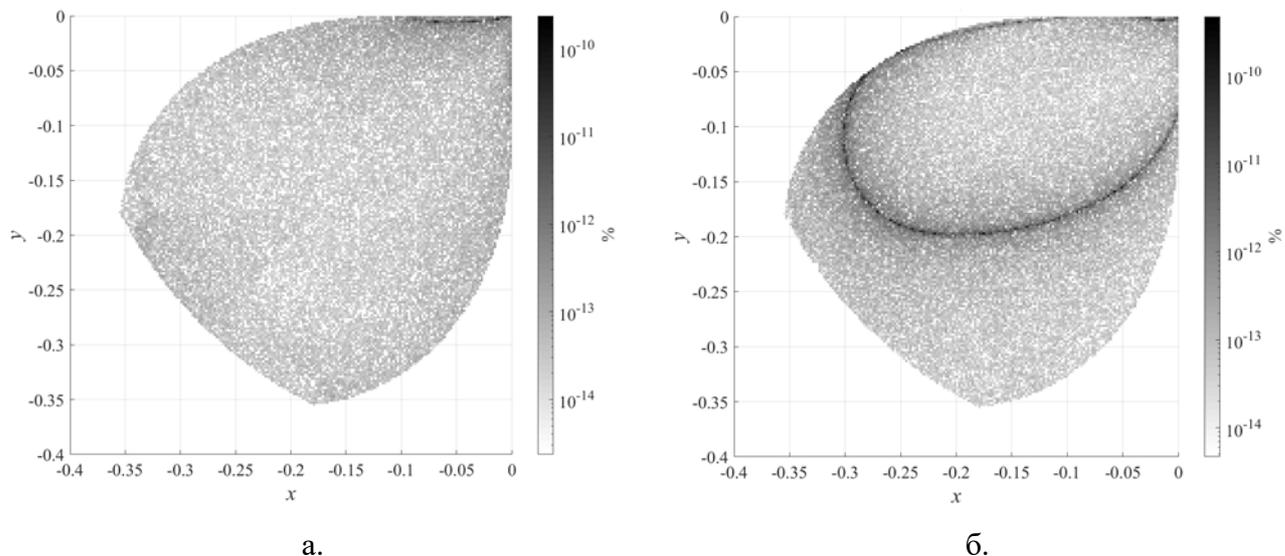


Рисунок 4.15. Распределение относительной погрешности значений усилий в приводах для среза рабочей зоны (при проецировании винтов w_{ai}): рабочая сборка «1, 1, 1» (а), рабочая сборка «1, 1, 2» (б)

Рассматривая представленные рисунки, можно видеть, что использование проекций приводных силовых винтов w_{ai} , вместо непосредственно самих винтов при анализе исследуемого механизма позволило избежать роста относительной погрешности вычислений значений критериев близости к особым положениям типа «ВС».

Стоит отметить, что при анализе приводных усилий, величина относительной погрешности вычислений разными методами в любом случае остается незначительной. Это означает, что если требуется исследовать близость к особым положениям типа «ПУ», то при расчете непосредственных значений критерия близости к указанному типу особым положений не обязательно использовать проекции винтов $w_{ai,j}$, а можно ограничиться использованием непосредственно самих указанных винтов, что позволит упростить проводимые вычисления (как, например, это было сделано для рассмотренного ранее механизма с четырьмя степенями свободы).

4.3. Результаты и выводы по главе

- проведен анализ поступательно-направляющего механизма со структурой 3-RRRRR. Исследована подвижность механизма, получены уравнения связи и решена обратная задача о положениях. Путем итерационного анализа в среде компьютерной алгебры MATLAB проведено исследование рабочей зоны механизма, расположения точек особых положений «ПС», «ПУ» и «ВС», а также рассчитаны значения критериев близости к указанным типам особых положений;
- продемонстрирована применимость предложенного метода расчета критерия близости к особым положениям типа «ВС». Также подтверждено высказанное ранее предположение о том, что приводные силовые винты могут оказывать влияние на расчетное значение критерия близости к особым положениям указанного типа, приводя к его увеличению вблизи особых положений типа «ПУ»;
- проецирование приводных силовых винтов на пространство, аналогичное пространству Φ для кинематических винтов позволяет устранить влияние указанных винтов на значение критерия близости к особым положениям типа «ВС» вблизи особых положений типа «ПУ»;
- при итерационном анализе точек особых положений типа «ВС» в процессе вычисления Плюккерых координат силовых винтов необходимо обеспечивать постоянство ориентации векторного пространства, порождаемого данными винтами.

ГЛАВА 5. АНАЛИЗ СФЕРИЧЕСКИХ МЕХАНИЗМОВ С КРУГОВОЙ НАПРАВЛЯЮЩЕЙ

5.1. Структура, анализ подвижности, уравнения связи и решение обратной задачи о положениях

В качестве следующего примера рассмотрим механизм, основой которого является схема $3\text{-}\underline{\text{R}}\text{RRRR}$. При этом, в отличие от механизма, представленного в предыдущей главе, вращательные шарниры в кинематических цепях в данном случае расположены таким образом, что движение выходного звена будет являться сферическим, а не поступательным.

Начнем рассмотрение с отдельной кинематической цепи со структурой $\underline{\text{R}}\text{RRRR}$ (рисунок 5.1).

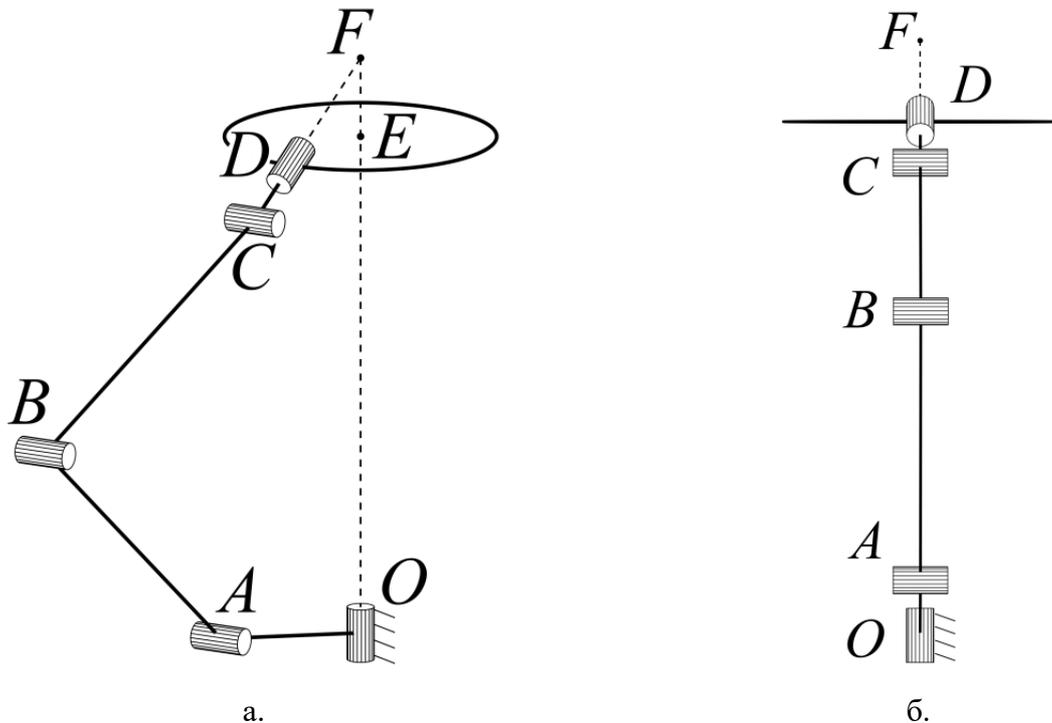


Рисунок 5.1. Кинематическая цепь $\underline{\text{R}}\text{RRRR}$: общий вид (а) и вид спереди (б)

Данная кинематическая цепь включает пять вращательных кинематических пар. Ось первой пары O вертикальна. Оси трех последующих пар A , B и C

параллельны горизонтальной плоскости. Кинематическая пара D расположена на выходном звене (подвижной платформе с точкой E), а ее ось пересекает ось кинематической пары O в некоторой точке F . Кроме того, ось пары D перпендикулярна оси пары C .

Для анализа подвижности цепи рассмотрим ее единичные кинематические винты (рисунок 5.2).

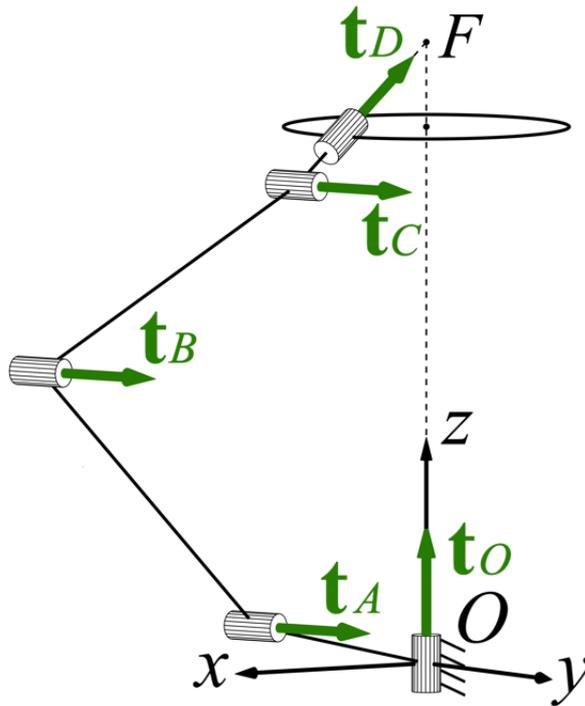


Рисунок 5.2. Единичные кинематические винты цепи \underline{RRRRR}

Все указанные кинематические винты имеют нулевой параметр. Принимая точку F в качестве точки приведения, а также учитывая, что оси пар A , B и C параллельны друг другу, можно записать Плюккерovy координаты данных винтов следующим образом:

$$\mathbf{t}_O = (0, 0, 1, 0, 0, 0)^T,$$

$$\mathbf{t}_A = (\mathbf{d}_A, \boldsymbol{\rho}_{FA} \times \mathbf{d}_A)^T,$$

$$\mathbf{t}_B = (\mathbf{d}_A, \boldsymbol{\rho}_{FB} \times \mathbf{d}_A)^T,$$

$$\mathbf{t}_C = (\mathbf{d}_A, \boldsymbol{\rho}_{FC} \times \mathbf{d}_A)^T,$$

$$\mathbf{t}_D = (\mathbf{d}_D, 0, 0, 0)^T,$$

где \mathbf{d}_A – единичный вектор, задающий направление осей кинематических пар A , B и C , а \mathbf{p}_{FA} , \mathbf{p}_{FB} , \mathbf{p}_{FC} – векторы, проведенные из точки F в точку A , B или C соответственно:

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_{FA} &= (x_A - x_F, y_A - y_F, z_A - z_F), \\ \mathbf{p}_{FB} &= (x_B - x_F, y_B - y_F, z_B - z_F), \\ \mathbf{p}_{FC} &= (x_C - x_F, y_C - y_F, z_C - z_F).\end{aligned}$$

Можно видеть, что векторные части винтов, а именно вектор $(0, 0, 1)$ и векторы \mathbf{d}_A , \mathbf{d}_D , в общем случае являются линейно независимыми. Таким образом, рассматриваемая цепь позволяет в общем случае реализовывать три вращения выходного звена. При этом, поскольку по условию оси первой и последней пар цепи пересекаются в точке F , данная точка будет являться центром вращения, т.е. выходное звено будет всегда поворачиваться относительно данной точки. Разрешенные кинематической цепью поступательные перемещения выходного звена характеризуются ненулевыми моментными частями единичных кинематических винтов. В рассматриваемом случае имеет место три векторных произведения: $\mathbf{p}_{FA} \times \mathbf{d}_A$, $\mathbf{p}_{FB} \times \mathbf{d}_A$ и $\mathbf{p}_{FC} \times \mathbf{d}_A$. Указанные векторные произведения будут линейно зависимыми, поскольку все они должны, по определению, быть перпендикулярны вектору \mathbf{d}_A , а значит лежать в одной плоскости. Таким образом, рассматриваемая цепь разрешает поступательное перемещение выходного звена только в плоскости, перпендикулярной осям пар A , B и C , т.е. в вертикальной плоскости. Из этого следует, что данная цепь накладывает одну связь на выходное звено, а именно – запрещает линейное перемещение в направлении \mathbf{d}_A . В таком случае силовой винт связи будет иметь нулевой параметр, а его Плюккерovy координаты могут быть записаны следующим образом:

$$\mathbf{w}_{\text{св}} = (\mathbf{d}_A, 0, 0, 0)^T.$$

Плюккерovy координаты приводного силового винта цепи \mathbf{w}_a могут быть найдены путем анализа компонент кинематических винтов цепи и силового винта связи. Как отмечено выше, моментные части кинематических винтов \mathbf{t}_A , \mathbf{t}_B и \mathbf{t}_C , по

сути, задают плоскость перпендикулярную вектору \mathbf{d}_A , поэтому векторная часть силового винта, взаимного перечисленным кинематическим винтам, может представлять собой только вектор, перпендикулярный указанной плоскости, т.е., собственно, сам вектор \mathbf{d}_A . При этом, однако, данный вектор, является векторной частью силового винта связи $\mathbf{w}_{св}$. Поскольку винты \mathbf{w}_a и $\mathbf{w}_{св}$ должны быть линейно независимы, векторная часть винта \mathbf{w}_a , очевидно, не может быть равна векторной части винта $\mathbf{w}_{св}$, а значит, в данном случае может быть только нулевой, т.е. винт \mathbf{w}_a будет иметь бесконечный параметр. Из условия взаимности винтов моментная часть винта \mathbf{w}_a должна быть перпендикулярна векторам \mathbf{d}_A и \mathbf{d}_D , т.е. может быть задана их векторным произведением. Тогда с учетом перпендикулярности осей кинематических пар C и D и, соответственно, векторов \mathbf{d}_A и \mathbf{d}_D :

$$\mathbf{w}_a = (0, 0, 0, \mathbf{d}_A \times \mathbf{d}_D)^T.$$

Рассмотрим теперь механизм, включающий три идентичных кинематических цепи, описанных выше. При этом будем считать, что кинематические пары O всех цепей соосны, а точка F является общей для всех трех цепей (рисунок 5.3).

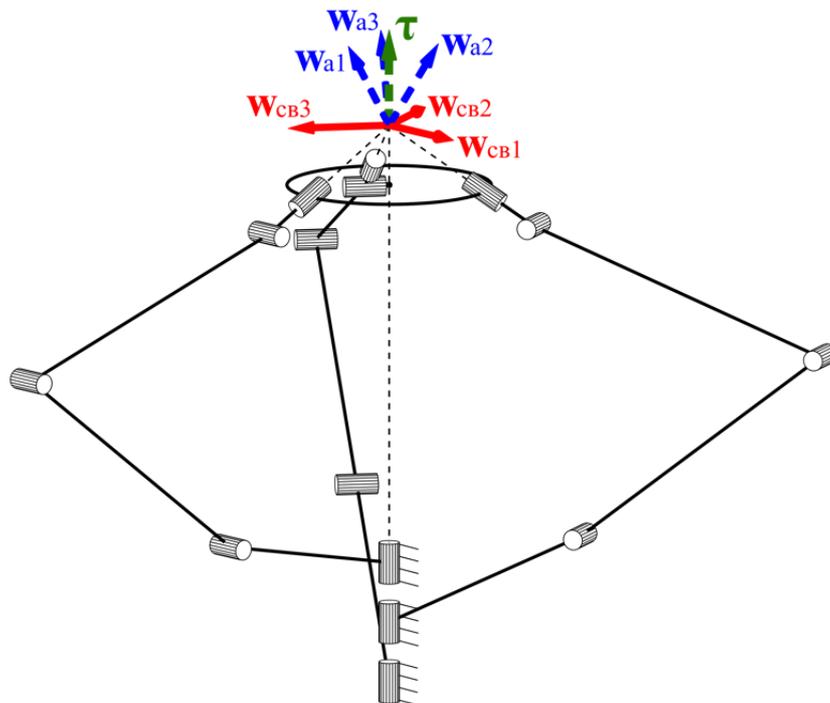


Рисунок 5.3. Сферический механизм 3-RRRRR, его силовые винты и кинематический винт, взаимный силовым

Поскольку каждая из кинематических цепей разрешает все три возможных вращения выходного звена, то при линейной независимости силовых винтов \mathbf{w}_a механизм будет иметь возможность управляемого сферического движения с центром в точке F . Можно видеть, что для любой цепи вектор \mathbf{d}_A всегда лежит в горизонтальной плоскости, а значит силовые винты \mathbf{w}_{cb} в общем случае линейно зависимы образуют двухчленную группу. Как следствие, выходное звено механизма будет иметь возможность неконтролируемого линейного перемещения, характеризуемого кинематическим винтом бесконечного параметра τ , ось которого будет вертикальной.

Проблему наличия неуправляемой подвижности можно решить одним из следующих способов:

- заменить как минимум одну пассивную вращательную пару в любой цепи на приводную;
- ввести дополнительную кинематическую цепь, накладывающую связь на вертикальное линейное перемещение, либо позволяющую управлять данным перемещением.

В первом случае целесообразно сделать приводной одну из кинематических пар A , B или C хотя бы в одной кинематической цепи. Система силовых винтов механизма при этом будет дополнена новым приводным винтом, который, в общем случае, будет линейно независим с уже имеющимися приводными винтами и винтами связи. Это, в свою очередь, позволит управлять вертикальным перемещением выходного звена, а сам механизм будет иметь четыре степени свободы. Недостатком данного решения является то, что оно приведет к усилению неравномерности распределения нагрузки между кинематическими цепями механизма, что, в свою очередь, вместе с необходимостью размещения дополнительного привода, потребует также и изменения конструкции одной из цепей. Альтернативным вариантом может являться замена всех одноименных пассивных пар на приводные во всех трех цепях, однако в таком случае в механизме будет существовать приводная избыточность, целесообразность которой в данном случае сомнительна. В то же время наличие данного типа избыточности влечет за

собой сложность управления механизмом, а необходимость установки двух дополнительных приводов – дополнительные расходы при изготовлении реального устройства на базе рассматриваемого механизма.

Что касается введения дополнительной цепи, такое решение позволяет сохранить «полную параллельность» механизма и представляется наиболее рациональным с практической точки зрения. В качестве недостатка можно отметить необходимость размещения новой кинематической цепи таким образом, чтобы избежать интерференции с промежуточными звеньями уже имеющихся цепей. Данный недостаток, однако, может быть нивелирован за счет применения круговой направляющей, заменяющей входные вращательные кинематические пары. В дальнейшем в данной главе будет рассматриваться именно указанный вариант устранения избыточной подвижности.

Рассмотрим различные варианты топологии дополнительной кинематической цепи, начав с самого простого случая. Таковым, очевидно, будет являться цепь, состоящая из единственного сферического шарнира, закрепленного в точке F (рисунок 5.4).

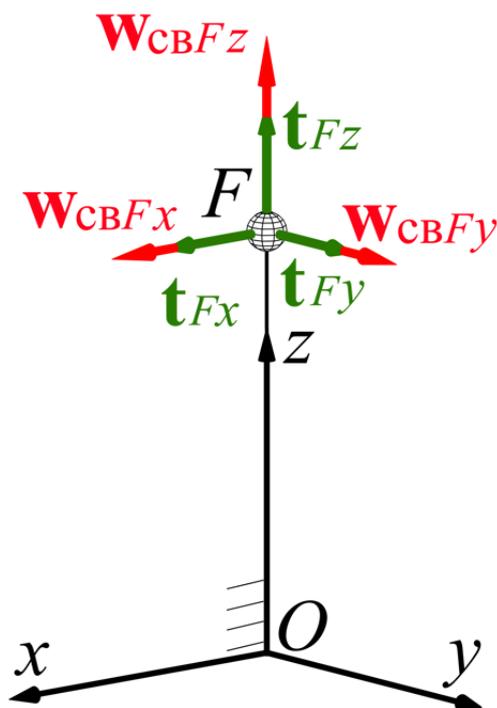


Рисунок 5.4. Кинематическая цепь с пассивным сферическим шарниром и ее винты

Сферический шарнир разрешает три вращения, которые можно охарактеризовать тремя линейно независимыми кинематическими винтами нулевого параметра. Оси указанных винтов должны проходить через точку F , а их направление при соблюдении условия линейной независимости винтов не имеет значения и может быть принято любым, поэтому для удобства будем считать, что данные оси направлены параллельно осям неподвижной системы координат $Oxyz$. Сами кинематические винты, соответственно, могут быть обозначены как \mathbf{t}_{Fx} , \mathbf{t}_{Fy} и \mathbf{t}_{Fz} . Что касается связей, накладываемых на выходное звено, то их можно описать тремя силовыми винтами нулевого параметра. Аналогично кинематическим винтам, оси указанных силовых винтов должны проходить через точку F , а их направление должно быть таким, чтобы обеспечить линейную независимость винтов. Выбрав, как и в предыдущем случае, направления осей винтов параллельными осям неподвижной системы координат $Oxyz$, обозначим данные силовые винты как $\mathbf{w}_{свFx}$, $\mathbf{w}_{свFy}$ и $\mathbf{w}_{свFz}$. Плюккеровы координаты перечисленных кинематических и силовых винтов будут следующими:

$$\begin{aligned}\mathbf{t}_{Fx} &= (1, 0, 0, 0, 0, 0)^T, \\ \mathbf{t}_{Fy} &= (0, 1, 0, 0, 0, 0)^T, \\ \mathbf{t}_{Fz} &= (0, 0, 1, 0, 0, 0)^T, \\ \mathbf{w}_{свFx} &= (1, 0, 0, 0, 0, 0)^T, \\ \mathbf{w}_{свFy} &= (0, 1, 0, 0, 0, 0)^T, \\ \mathbf{w}_{свFz} &= (0, 0, 1, 0, 0, 0)^T.\end{aligned}$$

Можно видеть, что при использовании дополнительной кинематической цепи, состоящей из одного пассивного сферического шарнира, к уже имевшимся трем силовым винтам связи и трем приводным силовым винтам добавляется еще три силовых винта связи. Вне зависимости от того, как будут выбраны направления осей новых винтов связи, ось как минимум одного из них не будет лежать в горизонтальной плоскости, а значит линейное перемещение выходного звена в вертикальном направлении станет невозможным. Вращение выходного звена при

этом ограничено не будет, а значит механизм будет иметь три управляемых вращательных степени свободы (рисунок 5.5).

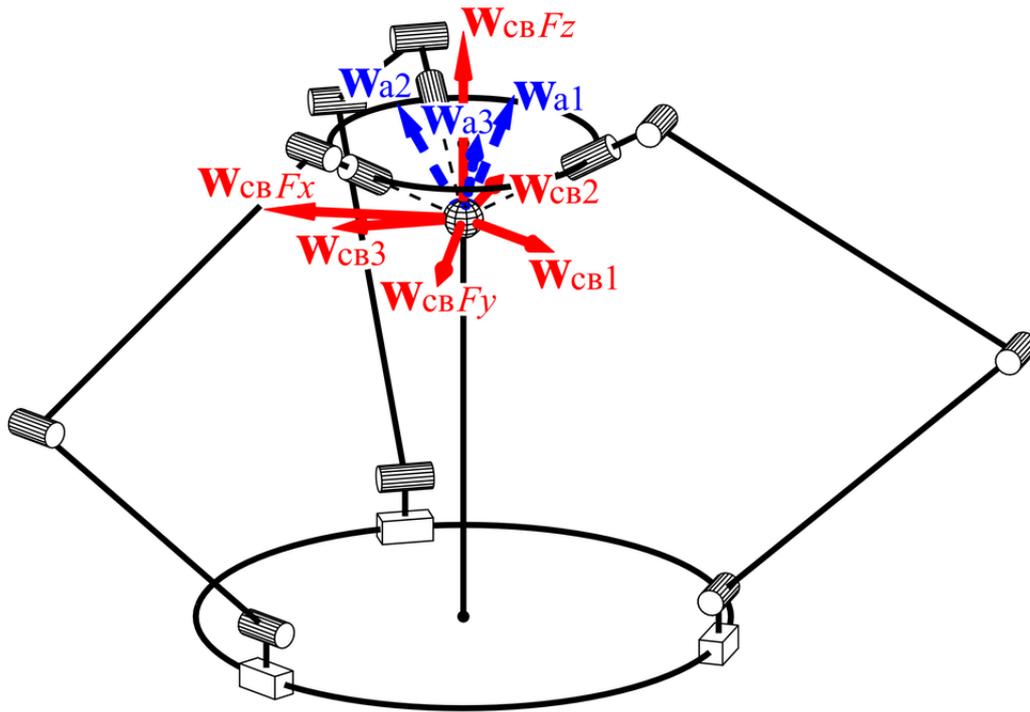


Рисунок 5.5. Сферический механизм 3-RRRRR.S и его силовые винты

Стоит заметить, что в данном случае расположение точки F принято ниже выходного звена. Такое решение представляется наиболее рациональным с практической точки зрения и не оказывает эффекта на кинематику механизма.

Естественным развитием цепи с пассивным сферическим шарниром является цепь типа $\underline{P}S$ с приводной призматической парой (рисунок 5.6). В такой цепи помимо трех кинематических винтов сферического шарнира \mathbf{t}_{F_x} , \mathbf{t}_{F_y} и \mathbf{t}_{F_z} также существует кинематический винт бесконечного параметра \mathbf{t}_P . Плюккеровы координаты данного винта могут быть записаны следующим образом:

$$\mathbf{t}_P = (0, 0, 0, 0, 0, 1)^T.$$

Стоит отметить, что в рассматриваемом случае ось призматической пары направлена вертикально, что, однако, не является обязательным в общем случае, но представляется наиболее логичным.

Кинематическим винтам цепи будут взаимны два силовых винта связи $\mathbf{w}_{свF_x}$ и $\mathbf{w}_{свF_y}$. По аналогии с цепью, состоящей из одного пассивного сферического

шарнира, направление осей указанных силовых винтов также может быть выбрано произвольным, но при этом данные оси должны лежать в плоскости, перпендикулярной оси винта t_P , т.е. в данном случае – горизонтальной. Наконец, в данной цепи также существует приводной силовой винт нулевого параметра w_{a4} , ось которого параллельна оси винта t_P , а его Плюккеровы координаты, соответственно равны:

$$w_{a4} = (0, 0, 1, 0, 0, 0)^T.$$

Таким образом, кинематическая цепь \underline{PS} разрешает четыре перемещения выходного звена: три вращения и вертикальное линейное перемещение, причем последнее является управляемым за счет использования призматической приводной кинематической пары.

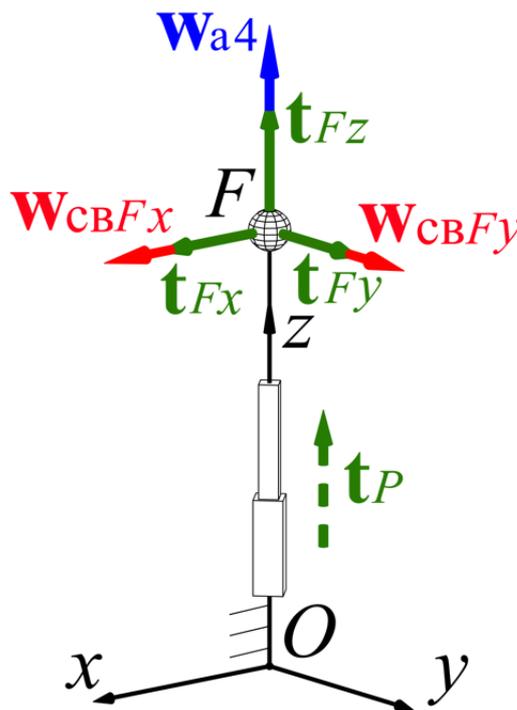


Рисунок 5.6. Кинематическая цепь \underline{PS} и ее винты

Можно видеть, что перемещения выходного звена, разрешаемые кинематической цепью \underline{PS} , полностью совпадают с перемещениями, разрешенными основными кинематическими цепями \underline{RRRRR} . При этом вертикальная линейная подвижность становится управляемой. Таким образом,

механизм 3-RRRRR.PS , включающий указанные цепи (рисунок 5.7), будет иметь четыре степени свободы.

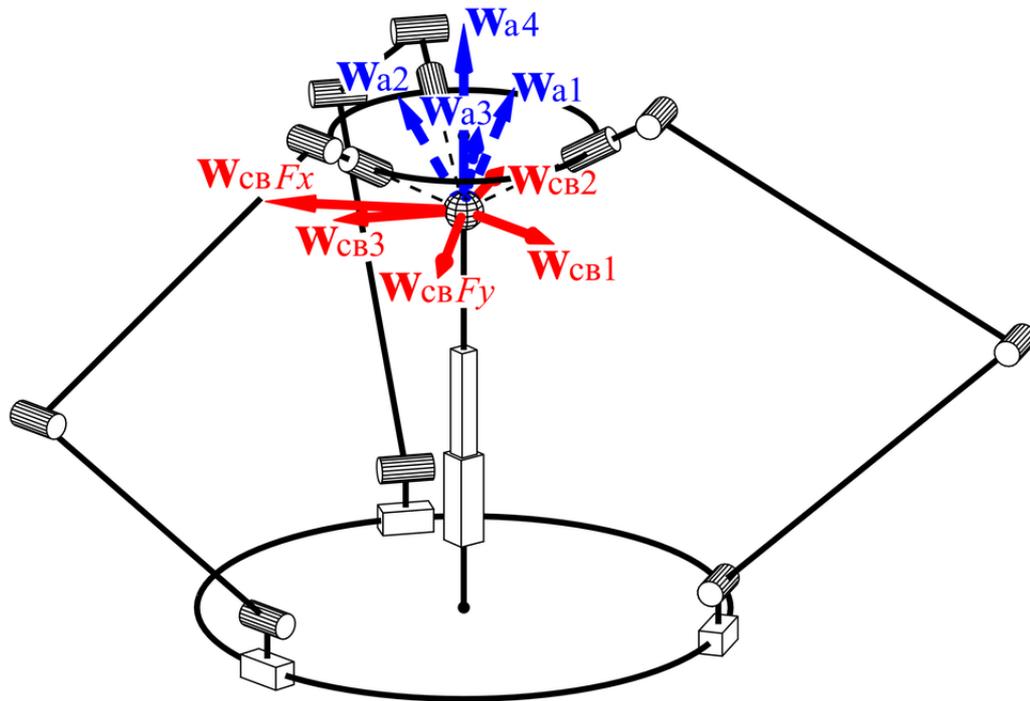


Рисунок 5.7. Сферический механизм 3-RRRRR.PS и его силовые винты

Стоит отметить, что данный механизм будет обладать свойством неполной кинематической развязки, поскольку вертикальное перемещение выходного звена будет являться полностью независимым от перемещений кареток, расположенных на круговой направляющей. Иными словами, данный механизм можно считать реконфигурируемым сферическим механизмом с изменяемой высотой расположения центра вращения.

Несмотря на то, что в каждом из двух рассмотренных случаев, введение в механизм дополнительной кинематической цепи механизмов позволило решить проблему наличия неуправляемой подвижности, данные решения не лишены своих недостатков.

Первый недостаток заключается в необходимости точного расположения сферического шарнира, а именно в обеспечении совпадения его центра с точкой F , которая, по сути, является теоретической. На практике такое возможно только с определенной погрешностью, что может отразиться на кинематике механизма.

Кроме того, изготовление деталей повышенной точности требует дополнительных расходов на производство.

Второй недостаток частично вытекает из первого. Суммарное количество связей, накладываемых на выходное звено механизма, больше минимально необходимого, что ведет к возникновению статической неопределенности при приложении нагрузки, воспринимаемой только силовыми винтами связи. При этом такая нагрузка будет неизбежно появляться за счет деформаций элементов конструкции, вызванной, в том числе, погрешностью расположения сферического шарнира.

Данные недостатки могут быть устранены за счет применения кинематической цепи, не накладывающей связей на выходное звено, например, цепи со структурой \underline{SPS} (рисунок 5.8).

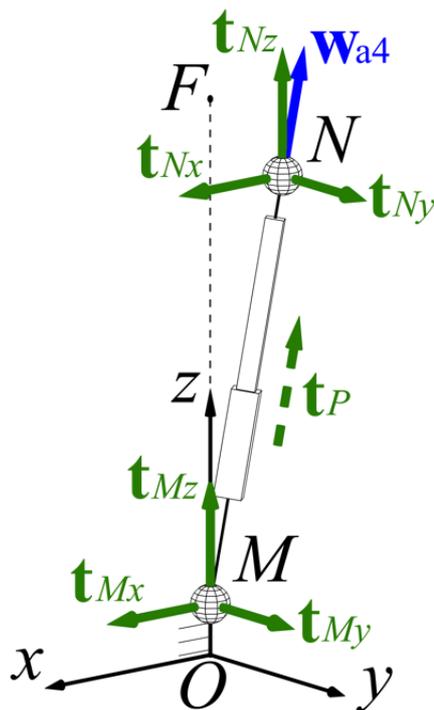


Рисунок 5.8. Кинематическая цепь \underline{SPS} и ее винты

Рассматриваемая цепь включает два сферических шарнира, соединенных приводной призматической кинематической парой. Один из шарниров закреплен на основании (точка M), а второй – на выходном звене (точка N). Каждому сферическому шарниру можно поставить в соответствие по три единичных

кинематических винта нулевого параметра: \mathbf{t}_{Mx} , \mathbf{t}_{My} , \mathbf{t}_{Mz} с осями, проходящими через точку M и \mathbf{t}_{Nx} , \mathbf{t}_{Ny} , \mathbf{t}_{Nz} с осями, проходящими через точку N . Как уже было отмечено ранее, оси данных винтов могут иметь любое направление при условии линейной независимости каждой тройки винтов между собой. При этом очевидно, что для одного винта в точке M и одного винта в точке N может быть выбрано направление вдоль прямой MN , а значит данные винты идентичны. Из этого следует, что шесть перечисленных винтов будут всегда линейно зависимы и образовывать пятичленную группу. Винт \mathbf{t}_P линейно независим с винтами данной группы, поэтому цепь SPS разрешает любые перемещения выходного звена, т.е. не накладывает на него никаких связей. Соответственно, единственным силовым винтом цепи будет приводной винт \mathbf{w}_{a4} . Плюккерovy координаты винтов цепи могут быть определены следующим образом:

$$\begin{aligned}\mathbf{t}_{Mx} &= (1, 0, 0, \boldsymbol{\rho}_{FM} \times [1, 0, 0])^T, \\ \mathbf{t}_{My} &= (0, 1, 0, \boldsymbol{\rho}_{FM} \times [0, 1, 0])^T, \\ \mathbf{t}_{Mz} &= (0, 0, 1, \boldsymbol{\rho}_{FM} \times [0, 0, 1])^T, \\ \mathbf{t}_{Nx} &= (1, 0, 0, \boldsymbol{\rho}_{FN} \times [1, 0, 0])^T, \\ \mathbf{t}_{Ny} &= (0, 1, 0, \boldsymbol{\rho}_{FN} \times [0, 1, 0])^T, \\ \mathbf{t}_{Nz} &= (0, 0, 1, \boldsymbol{\rho}_{FN} \times [0, 0, 1])^T, \\ \mathbf{t}_P &= (0, 0, 0, \mathbf{d}_P)^T, \\ \mathbf{w}_{a4} &= (\mathbf{d}_P, \boldsymbol{\rho}_{FN} \times \mathbf{d}_P)^T,\end{aligned}$$

где \mathbf{d}_P – единичный вектор, направленный вдоль оси призматической пары:

$$\mathbf{d}_P = \frac{(x_N - x_M, y_N - y_M, z_N - z_M)}{\sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2 + (z_N - z_M)^2}},$$

$\boldsymbol{\rho}_{FM}$ и $\boldsymbol{\rho}_{FN}$ – векторы из точки F в точки M и N соответственно:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\rho}_{FM} &= (x_M - x_F, y_M - y_F, z_M - z_F), \\ \boldsymbol{\rho}_{FN} &= (x_N - x_F, y_N - y_F, z_N - z_F).\end{aligned}$$

Рассмотрим теперь непосредственно механизм $3\text{-}\underline{R}\underline{R}\underline{R}\underline{R}\underline{R}\text{.SPS}$ в (рисунок 5.9).

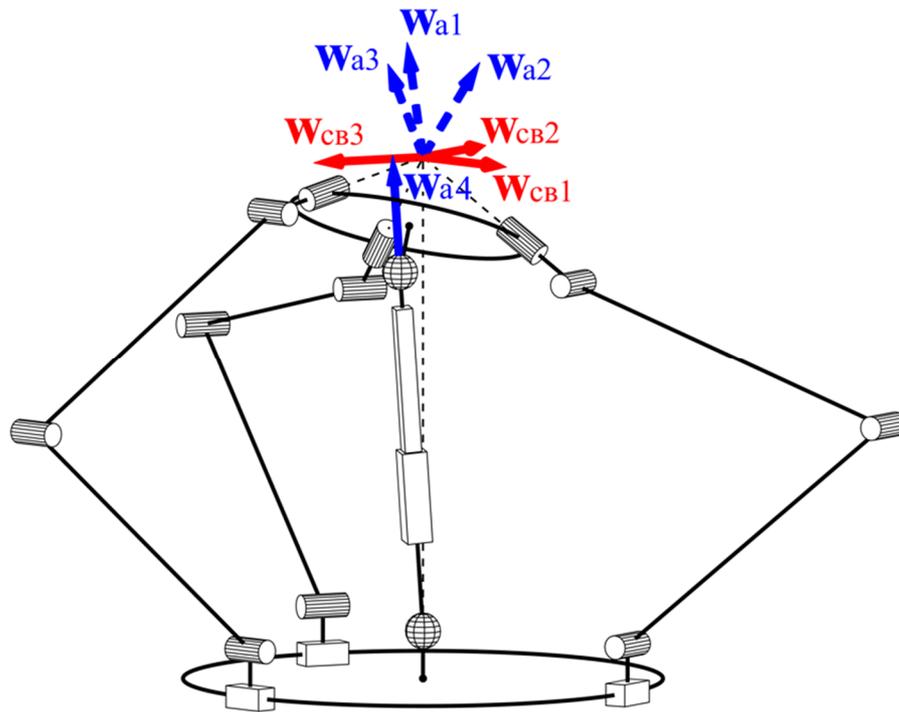


Рисунок 5.9. Сферический механизм $3\text{-}\underline{R}\underline{R}\underline{R}\underline{R}\underline{R}\text{.SPS}$ и его силовые винты

Легко видеть, что силовой винт w_{a4} линейно независим с силовыми винтами w_{a1} , w_{a2} и w_{a3} , а значит данный механизм, как и механизм со структурой $3\text{-}\underline{R}\underline{R}\underline{R}\underline{R}\underline{R}\text{.PS}$, рассмотренный ранее, будет иметь четыре степени свободы, являясь реконфигурируемым сферическим механизмом с изменяемой высотой центра вращения. При этом в данном механизме частичная кинематическая развязка отсутствует. Действительно, в механизме $3\text{-}\underline{R}\underline{R}\underline{R}\underline{R}\underline{R}\text{.PS}$ высота, на которой расположена точка F , зависит только от перемещения в призматической паре, поскольку указанная пара напрямую перемещает сферический шарнир, положение которого совпадает с точкой F . В то же время, в механизме $3\text{-}\underline{R}\underline{R}\underline{R}\underline{R}\underline{R}\text{.SPS}$ дополнительная цепь присоединяется к выходному звену через сферический шарнир, расположенный в точке N . Положение данной точки в пространстве зависит от ориентации выходного звена, а следовательно, и от положения кареток основных кинематических цепей $\underline{R}\underline{R}\underline{R}\underline{R}\underline{R}$, что, собственно, означает отсутствие кинематической развязки. Стоит, однако, отметить, что достижение частичной

кинематической развязки в механизме 3-RRRRR.SPS является возможным. Для этого необходимо, чтобы точка N совпадала с точкой F (рисунок 5.10).

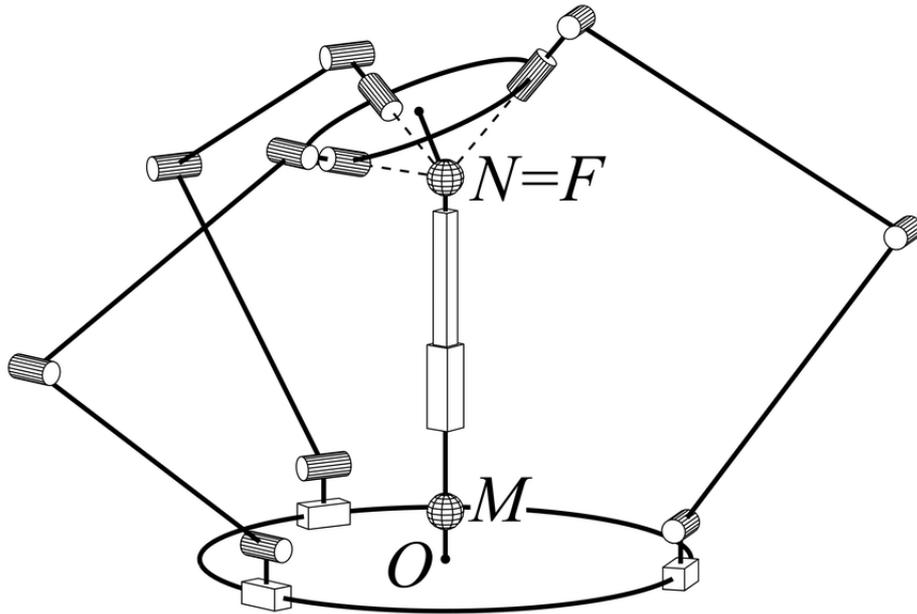


Рисунок 5.10. Вариант механизма 3-RRRRR.SPS с кинематической развязкой вертикального перемещения центра вращения

Перейдем к выводу уравнений связи и решению обратной задачи о положениях для наиболее общего случая – механизма 3-RRRRR.SPS (рисунок 5.11).

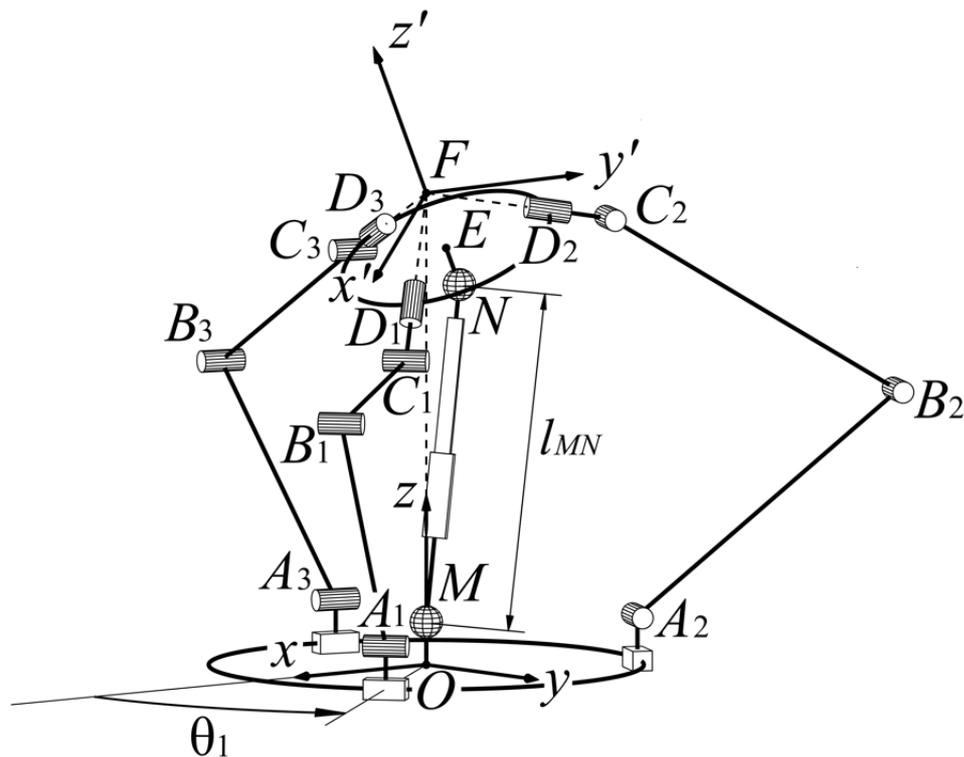


Рисунок 5.11. Схема механизма 3-RRRRR.SPS к решению обратной задачи о положениях

При решении обратной задачи о положениях заданными параметрами, помимо геометрии звеньев, считаются углы поворота выходного звена $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$, или, что то же самое, матрица ориентации \mathbf{R} подвижной системы координат выходного звена $Fx'y'z'$ относительно неподвижной лабораторной системы $Oxyz$. Также считается известной высота z_F , на которой расположена точка F . Неизвестными являются углы поворота входных вращательных пар $\theta_1, \theta_2, \theta_3$, отсчитываемые от положительного направления оси x против часовой стрелки при взгляде с конца оси z , а также длина дополнительной центральной цепи l_{MN} . Чтобы рисунок 5.11 не выглядел перегруженным, на нем представлен только один из входных углов – θ_1 . При этом углы θ_2, θ_3 отсчитываются аналогичным образом – до центра каретки соответствующей цепи. Помимо входных углов и длины центральной цепи требуется также определить координаты шарниров всех цепей, поскольку они требуются для расчета координат кинематических и силовых винтов.

Для решения поставленной задачи в первую очередь целесообразно определить координаты точек D_i в системе $Oxyz$. Пусть x'_{Di}, y'_{Di} и z'_{Di} – координаты точки D_i в системе $Fx'y'z'$. Тогда в системе $Oxyz$:

$$\begin{pmatrix} x_{Di} \\ y_{Di} \\ z_{Di} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_F \\ y_F \\ z_F \end{pmatrix} + \mathbf{R} \cdot \begin{pmatrix} x'_{Di} \\ y'_{Di} \\ z'_{Di} \end{pmatrix},$$

где x_F, y_F, z_F – координаты точки F в системе $Oxyz$.

Стоит отметить, что поскольку точки C_i и N связаны с выходным звеном, то при известных координатах $x'_{Ci}, y'_{Ci}, z'_{Ci}$ и x'_N, y'_N, z'_N этих точек в системе $Fx'y'z'$, их координаты в системе $Oxyz$ могут быть рассчитаны аналогичным образом:

$$\begin{pmatrix} x_{Ci} \\ y_{Ci} \\ z_{Ci} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_F \\ y_F \\ z_F \end{pmatrix} + \mathbf{R} \cdot \begin{pmatrix} x'_{Ci} \\ y'_{Ci} \\ z'_{Ci} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x_N \\ y_N \\ z_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_F \\ y_F \\ z_F \end{pmatrix} + \mathbf{R} \cdot \begin{pmatrix} x'_N \\ y'_N \\ z'_N \end{pmatrix}.$$

Решим сначала обратную задачу о положениях для одной отдельно взятой i -й кинематической цепи механизма. Для этого рассмотрим вид сверху на указанную цепь (рисунок 5.12).

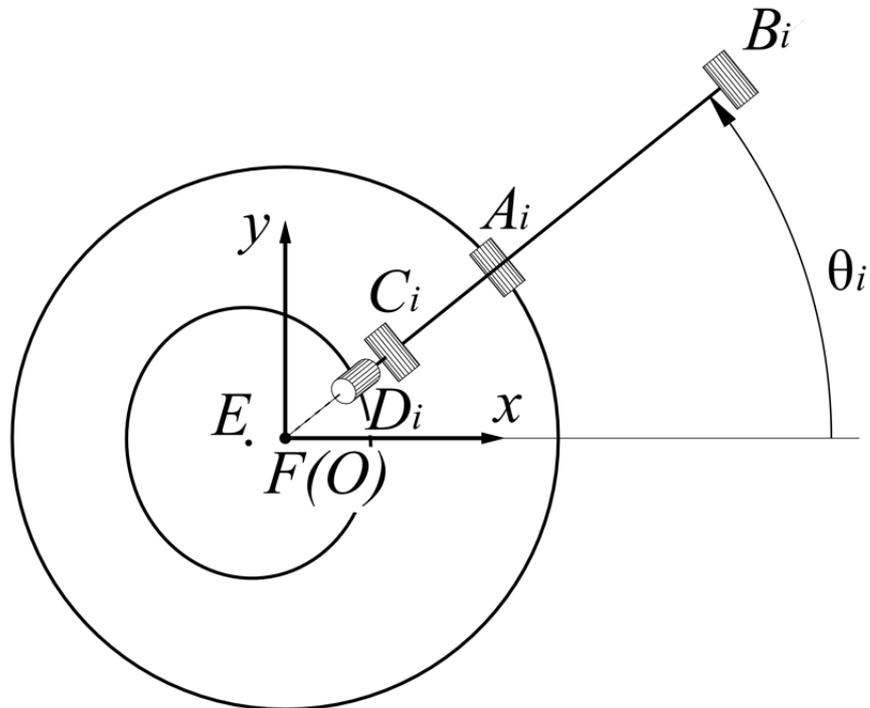


Рисунок 5.12. Вид i -ю цепь $\underline{R}R\overline{R}R\overline{R}$ механизма сверху

Можно видеть, что поскольку все промежуточные звенья i -й цепи $\underline{R}R\overline{R}R\overline{R}$ лежат в одной вертикальной плоскости, значение угла θ_i будет зависеть только от координат x_{C_i} и y_{C_i} . Тогда уравнение связи для этой цепи может быть записано следующим образом:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{y_{C_i}}{x_{C_i}}\right) - \theta_i = 0.$$

Можно видеть, что угол θ_i легко определить как арктангенс отношения координаты y_{C_i} к координате x_{C_i} . Однако областью значений функции арктангенса, как известно, является открытый интервал $(-\pi/2, \pi/2)$. В то же время очевидно, что угол θ_i может принимать любое значение, а значит, применяя данную функцию, получить корректное решение обратной задачи о положениях для i -й цепи $\underline{R}R\overline{R}R\overline{R}$ не представляется возможным. Указанная проблема может быть решена за счет применения широко распространенной в вычислительной математике и

программировании функции $atan2()$, область значений которой представляет собой интервал $(-\pi, \pi]$. Данная функция, как правило, определяется согласно следующему условию [126]:

$$atan2(y, x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) & \text{при } x > 0, \\ \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{при } x < 0, y \geq 0, \\ \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) - \pi & \text{при } x < 0, y < 0, \\ \frac{\pi}{2} & \text{при } x = 0, y > 0, \\ -\frac{\pi}{2} & \text{при } x = 0, y < 0, \\ \text{не определен} & \text{при } x = 0, y = 0. \end{cases}$$

Тогда решение обратной задачи о положениях для i -й цепи \underline{RRRRR} будет иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} \theta_{i,1} &= atan2(y_{Ci}, x_{Ci}), \\ \theta_{i,2} &= atan2(y_{Ci}, x_{Ci}) + \pi. \end{aligned}$$

При этом важно отметить, что с практической точки зрения интерес представляет только первый вариант решения, поскольку при втором варианте промежуточные цепи будут проходить под подвижной платформой, что практически гарантирует интерференцию звеньев различных цепей и, как следствие, невозможность эксплуатации механизма. Таким образом, в общем случае обратная задача о положениях будет иметь восемь теоретически возможных решений.

Что касается дополнительной центральной цепи, то длина l_{MN} по определению является расстоянием между точками M и N , поэтому уравнение связи для этой цепи может быть записано следующим образом:

$$(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2 + (z_N - z_M)^2 - l_{MN}^2 = 0,$$

где x_M, y_M, z_M – координаты точки M .

Соответственно

$$l_{MN} = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2 + (z_N - z_M)^2}.$$

Как видно, в решении используется только положительный квадратный корень, поскольку l_{MN} является расстоянием между двумя физическими шарнирами и в реальном механизме не может быть отрицательным.

Теперь перейдем к определению координат, задающих положение оставшихся двух шарниров A_i и B_i .

Координата z_{A_i} точки A_i постоянна и не зависит от ориентации выходного звена. Координаты x_{A_i} , y_{A_i} могут быть определены следующим образом:

$$x_{A_i} = r_{\text{осн}} \cos \theta_i, \quad y_{A_i} = r_{\text{осн}} \sin \theta_i.$$

где $r_{\text{осн}}$ – радиус основания (круговой направляющей) механизма.

Для определения координат точки B_i рассмотрим вид сбоку на i -ю кинематическую цепь (рисунок 5.13).

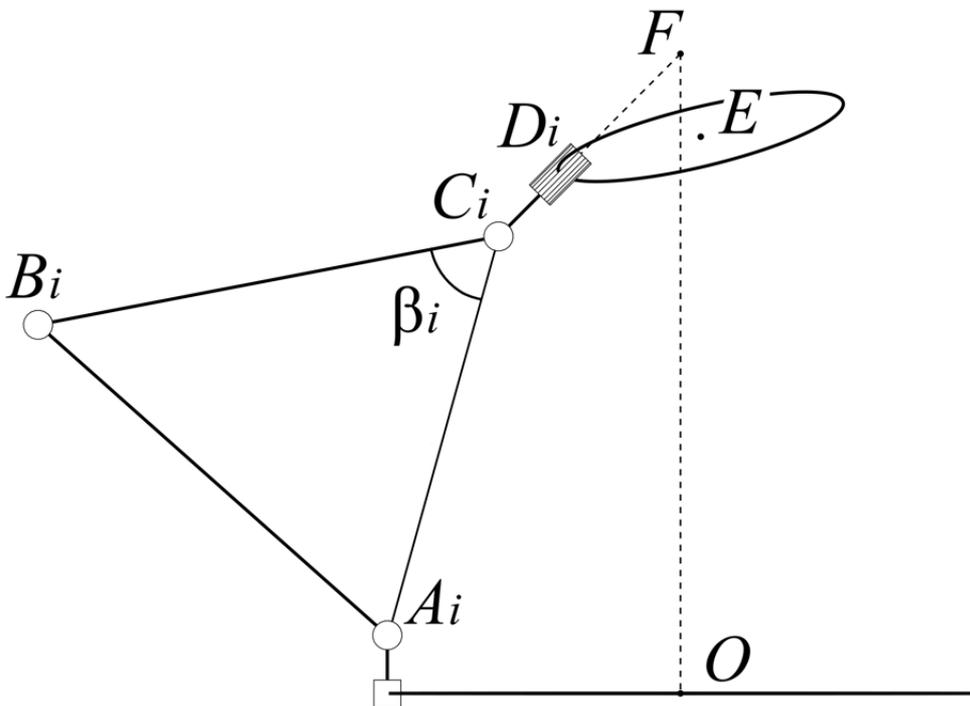


Рисунок 5.13. Вид сбоку на i -ю кинематическую цепь

Длины звеньев A_iB_i (l_{ABi}) и B_iC_i (l_{BCi}) являются заданными геометрическими параметрами механизма, а расстояние между точками A_i и C_i (l_{ACi}) может быть легко вычислено следующим образом:

$$l_{ACi} = \sqrt{(x_{Ci} - x_{Ai})^2 + (y_{Ci} - y_{Ai})^2 + (z_{Ci} - z_{Ai})^2}.$$

Тогда из теоремы косинусов для треугольника $A_iB_iC_i$ следует:

$$\beta_i = \pm \arccos \left(\frac{l_{ACi}^2 + l_{BCi}^2 - l_{ABi}^2}{2l_{ACi}l_{BCi}} \right).$$

От знака «+» или «-» зависит расположение точки B_i : «снаружи» или «внутри» механизма. Вариант с расположением «снаружи» является предпочтительным, т.к. позволяет избежать возможной интерференции промежуточных звеньев цепей.

Пусть \mathbf{d}_{CAi} – единичный вектор, с началом в точке C_i и концом в точке A_i . Координаты данного вектора можно вычислить следующим образом:

$$\mathbf{d}_{CAi} = \frac{(x_{Ai} - x_{Ci}, y_{Ai} - y_{Ci}, z_{Ai} - z_{Ci})}{l_{ACi}}.$$

Можно видеть, что координаты точки B_i могут быть получены путем поворота некоторого вектора длиной l_{BCi} , направленного вдоль \mathbf{d}_{CAi} , на угол β_i вокруг оси пары C_i , т.е. вектора \mathbf{d}_{Ai} , координаты которого равны:

$$\mathbf{d}_{Ai} = (-\sin\theta_i, \cos\theta_i, 0).$$

Важно отметить, что положительное направление угла поворота в правой системе координат отсчитывается против часовой стрелки. При этом, как видно из рисунка, такое направление в данном случае будет означать, что угол β_i отсчитывается от звена B_iC_i к линии A_iC_i . Таким образом, для того чтобы точка B_i оказалась расположена «снаружи» механизма, значение данного угла должно быть рассчитано через арккосинус со знаком «-», либо, что эквивалентно, при расчете угла через арккосинус со знаком «+», матрица поворота должна быть вычислена для угла, равного $-\beta_i$.

Окончательно координаты точки B_i могут быть определены из следующего выражения:

$$\begin{pmatrix} x_{Bi} \\ y_{Bi} \\ z_{Bi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{Ci} \\ y_{Ci} \\ z_{Ci} \end{pmatrix} + \mathbf{R}_{\beta_i} \mathbf{d}_{CAi}^T l_{BCi},$$

где \mathbf{R}_{β_i} – матрица поворота на угол β_i вокруг оси, задаваемой вектором \mathbf{d}_{Ai} , определяемая в общем случае следующим образом [44]:

$$\mathbf{R}_{\beta_i} = \begin{pmatrix} \cos \beta_i + (1 - \cos \beta_i) d_{xAi}^2 & (1 - \cos \beta_i) d_{xAi} d_{yAi} - d_{zAi} \sin \beta_i & (1 - \cos \beta_i) d_{xAi} d_{zAi} + d_{yAi} \sin \beta_i \\ (1 - \cos \beta_i) d_{yAi} d_{xAi} + d_{zAi} \sin \beta_i & \cos \beta_i + (1 - \cos \beta_i) d_{yAi}^2 & (1 - \cos \beta_i) d_{yAi} d_{zAi} - d_{xAi} \sin \beta_i \\ (1 - \cos \beta_i) d_{zAi} d_{xAi} - d_{yAi} \sin \beta_i & (1 - \cos \beta_i) d_{zAi} d_{yAi} + d_{xAi} \sin \beta_i & \cos \beta_i + (1 - \cos \beta_i) d_{zAi}^2 \end{pmatrix},$$

где d_{xAi} , d_{yAi} , d_{zAi} – компоненты вектора \mathbf{d}_{Ai} .

5.2. Анализ рабочей зоны, особых положений и близости к особым положениям сферического механизма с четырьмя степенями свободы

В качестве примера рассмотрим механизм 3-RRRRR.SPS со следующими геометрическими параметрами (м):

- радиус основания (круговой направляющей): $r_{\text{осн}} = 0,5$;
- радиус выходного звена (расстояние от точки E до точек D_i): $r_{\text{вз}} = l_{DE} = 0,25$;
- длины звеньев (для всех цепей): $l_{EF} = 0,15$, $l_{AB} = 0,8$, $l_{BC} = 0,8$, $l_{CD} = 0,15$;
- высота расположения кареток: $z_A = 0,1$;
- координаты точек C_i и D_i в системе $E'x'y'z'$: $x'_{C1} = 0.3786$, $y'_{C1} = 0$, $z'_{C1} = -0.2272$, $x'_{D1} = 0.25$, $y'_{D1} = 0$, $z'_{D1} = -0.15$, $x'_{C2} = -0.1893$, $y'_{C2} = 0.3279$, $z'_{C2} = -0.2272$, $x'_{D2} = -0.125$, $y'_{D2} = 0.2165$, $z'_{D2} = -0.15$, $x'_{C3} = -0.1893$, $y'_{C3} = -0.3279$, $z'_{C3} = -0.2272$, $x'_{D3} = -0.125$, $y'_{D3} = -0.2165$, $z'_{D3} = -0,15$;
- координаты точки M в системе $Oxyz$: $x_M = 0$, $y_M = 0$, $z_M = 0,1$;
- координаты точки N в системе $E'x'y'z'$: $x'_N = 0$, $y'_N = 0$, $z'_N = -0,25$;

Сразу же стоит отметить, что для любого сферического механизма с постоянным центром вращения можно довольно легко подобрать такие геометрические размеры, при которых теоретическая рабочая зона не будет ограничена. В подобных механизмах точка, в которой некоторая кинематическая цепь соединяется с выходным звеном, может располагаться только на сферической поверхности, радиус которой постоянен и равен, собственно, расстоянию от центра вращения (центра сферы) до указанной точки. В таком случае, если в каждой цепи длина промежуточных звеньев достаточна для того, чтобы соединить начало цепи с любой точкой на указанной сферической поверхности, теоретическая рабочая зона механизма не будет ограничена. То же справедливо и для рассматриваемого механизма со структурой $3\text{-}\underline{\text{RRRRR}}.\underline{\text{SPS}}$, если для некоторого заданного значения высоты расположения центра вращения z_F максимально допустимая длина центральной цепи позволяет соединить точку M с любой точкой на поверхности сферы с центром в F и радиусом, равным расстоянию от точки F до точки N .

С учетом вышеизложенного итерационный анализ теоретической рабочей зоны не представляется целесообразным, поэтому можно сразу перейти к анализу особых положений. Перед этим, однако, следует обратить внимание на одну важную особенность рассматриваемого механизма, а именно – неограниченную возможность поворота вокруг оси z без изменения взаимного положения промежуточных звеньев кинематических цепей $\underline{\text{RRRRR}}$ за счет синхронного перемещения всех трех кареток в одном и том же направлении на одинаковое расстояние. Кроме того, в данной работе матрица \mathbf{R} составляется для последовательности поворотов « x », « y », « z ». Тогда очевидно, что для анализа особых положений и близости к ним достаточно рассматривать только различные сочетания углов φ_x и φ_y , поскольку при расчетах поворот вокруг « z » осуществляется в последнюю очередь и не требует изменения конфигурации цепей $\underline{\text{RRRRR}}$. Поэтому для любого постоянного φ_z результаты расчетов, проводимых с использованием матрицы Якоби или винтового исчисления и подразумевающих варьирование значений двух оставшихся углов, будут идентичными.

В процессе итерационного анализа механизма будем изменять углы φ_x и φ_y в интервале $[0^\circ, 360^\circ)$ с шагом в один градус, а угол φ_z примем равным нулю. Высоту расположения центра вращения z_F будем также считать постоянной и равной 1,1 м, а максимальную длину l_{MN} – неограниченной.

Рассмотрение особых положений начнем с типа «ПС». Продифференцировав уравнение связи любой цепи $\underline{R}RRRR$ по переменной θ_i , а уравнение связи дополнительной цепи по l_{MN} , получим:

$$\frac{\partial F_i}{\partial \theta_i} = \operatorname{tg}^2 \theta_i + 1,$$

$$\frac{\partial F_4}{\partial l_{MN}} = -2l_{MN}.$$

где F_i ($i = 1 \dots 3$), F_4 – уравнения связи i -й кинематической цепи $\underline{R}RRRR$ и центральной цепи соответственно, записанные в виде неявных функций входных и выходных координат.

Легко видеть, что первая производная не может обратиться в ноль, поскольку ее значение всегда либо положительно, либо равно бесконечности. Для того, чтобы понять будет ли бесконечное значение производной соответствовать особому положению типа «ПС», рассмотрим группу кинематических винтов i -й кинематической цепи $\underline{R}RRRR$. Вырождение данной группы возможно в двух случаях. Первый случай соответствует линейной зависимости векторов $(0, 0, 1)$, \mathbf{d}_A и \mathbf{d}_D , являющихся векторными частями различных кинематических винтов группы. Данные векторы не могут находиться в одной плоскости поскольку вектор \mathbf{d}_D всегда расположен в горизонтальной плоскости, а вектор $(0, 0, 1)$ – строго вертикален. Кроме того, вектор \mathbf{d}_A всегда перпендикулярен вектору \mathbf{d}_D . Тогда единственным возможным вариантом линейной зависимости данных векторов является совпадение вектора \mathbf{d}_D с осью Oz . В этом случае винты \mathbf{t}_O и \mathbf{t}_D становятся равными с точностью до множителя, а в цепи появляется новая связь, накладываемая на вращение вокруг оси, проходящей через точку F , направление которой задается вектором $\mathbf{d}_A \times (0, 0, 1)$. Вторым случаем соответствует вырождению

моментных частей винтов \mathbf{t}_A , \mathbf{t}_B и \mathbf{t}_C , которое, как легко видеть, возможно тогда, когда точки F , A_i , B_i , C_i (и, соответственно D_i) будут лежать на одной прямой, что, в свою очередь, будет соответствовать нахождению выходного звена на границе рабочей зоны механизма. Поэтому возникновение особого положения типа «ПС» во втором случае возможно только если максимальная длина центральной цепи l_{MN} позволяет переместить точку F на такую высоту, при которой длин промежуточных звеньев цепей \underline{RRRRR} недостаточно для обеспечения свободного вращения выходного звена.

Вторая из представленных выше производных обращается в ноль только в том случае, если значение l_{MN} равно нулю, т.е. точки M и N совпадают. Из этого следует, что определитель матрицы \mathbf{B} , предложенной Х. Анджелесом и К. Госсленом, будет равен нулю только в случае совпадения указанных точек. Если при этом рассмотреть кинематические винты центральной цепи, то можно увидеть, что винты \mathbf{t}_{Mx} , \mathbf{t}_{My} , \mathbf{t}_{Mz} и \mathbf{t}_{Nx} , \mathbf{t}_{Ny} , \mathbf{t}_{Nz} попарно совпадут друг с другом, а винт \mathbf{t}_P не будет определен, поскольку для расчета вектора \mathbf{d}_P требуется произвести деление нуля на ноль. Ввиду неопределенности винта \mathbf{t}_P однозначной трактовки подобной ситуации с точки зрения винтового исчисления не существует. При этом рассматривать данный случай в качестве особого положения типа «ПС» не совсем корректно, поскольку вращение выходного звена, очевидно, ограничено не будет, а линейное перемещение точки F , строго говоря, не запрещено. Кроме того, в реальном механизме такая ситуация практически нереализуема, поскольку для того, чтобы совпали центры двух физических шарниров необходимо специально разработать такую конструкцию этих шарниров, которая сделала бы такое совпадение возможным.

По результатам итерационного анализа особых положений типа «ПС» во всех проанализированных точках определитель матрицы \mathbf{B} имел отрицательное значение. При этом количество проанализированных точек составило 129600, и во всех из них обратная задача о положениях имела решение, т.е. теоретическая рабочая зона (при условии достаточности длины l_{MN}) для заданного значения z_F не ограничена. При этом, как уже было отмечено выше, данная матрица для

рассматриваемого механизма не может выродиться, поэтому использовать изменение знака ее определителя для нахождения точек особых положений указанного типа невозможно. Определить расположение данных точек возможно только с помощью критерия близости к особому положению, что будет продемонстрировано позднее.

Перейдем к анализу особых положений типа «ПУ» с использованием матрицы Якоби. Поскольку рассматриваемый механизм реализует сферическое движение выходного звена, и его итерационный анализ проводится путем перебора углов поворота, в данном случае удобным и целесообразным представляется исследование влияния способа задания ориентации выходного звена на результаты анализа особых положений. По этой причине рассмотрим сначала изменение знака определителя матрицы \mathbf{A}_φ , вычисляемой путем дифференцированием уравнений связи напрямую, т.е. без учета перехода к угловым скоростям выходного звена согласно (2.34) (рисунок 5.14).

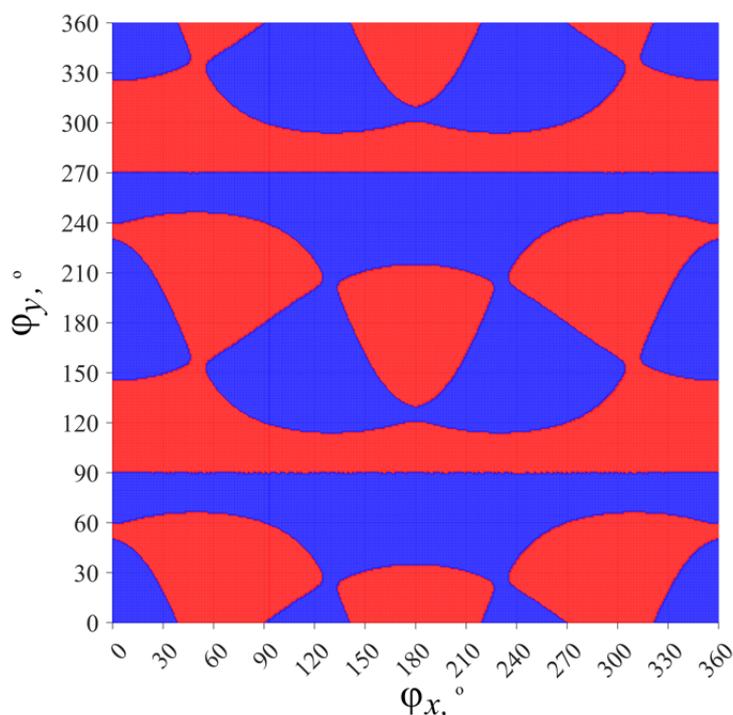


Рисунок 5.14. Знак определителя матрицы \mathbf{A}_φ в точках рабочей зоны сферического механизма («+» – красный, «-» – синий)

По результатам итерационного анализа 129600 точек рабочей зоны, определитель матрицы \mathbf{A} принимал отрицательное значение в 65043 точках, и,

соответственно, положительное значение в 64557 точках. Поскольку значения угла, равные 0° и 360° , эквивалентны, верхняя граница представленного на рисунке графика неразрывно связана с его нижней границей, а правая граница – с левой. Тогда, помимо «горизонтальной» (в контексте рассматриваемого изображения) симметрии относительно вертикальной прямой, проходящей через отметку 180° по оси абсцисс, можно видеть, что картина распределения особых положений при изменении угла φ_y в интервале 90° до 270° полностью идентична картине, наблюдаемой на интервале от -90° до 90° . При этом можно видеть, что при значении φ_y , равном 90° или 270° , механизм должен находиться в особом положении типа «ПУ» при любом возможном значении угла φ_x . Таким образом, рабочая зона разбивается на восемь частей (по четыре части в каждом из двух упомянутых интервалов).

С целью проверки полученного результата проведем аналогичный анализ с помощью винтового исчисления. Для этого рассмотрим вырождение группы приводных силовых винтов механизма. Как уже было отмечено ранее при анализе подвижности механизма, винт \mathbf{w}_{a4} всегда линейно независим с группой, образуемой винтами \mathbf{w}_{a1} , \mathbf{w}_{a2} , \mathbf{w}_{a3} , поскольку имеет нулевой параметр, а винты, входящие в указанную группу – бесконечный параметр. Из этого следует, что вырождение группы всех силовых винтов связи механизма возможно только в том случае, если винты \mathbf{w}_{a1} , \mathbf{w}_{a2} , \mathbf{w}_{a3} линейно зависимы между собой. Поскольку первые три Плюккерovy координаты у каждого из этих винтов всегда равны нулю, можно рассмотреть матрицу 3×3 , составленную из их последних трех Плюккерovy координат:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{d}_{A1} \times \mathbf{d}_{D1} \\ \mathbf{d}_{A2} \times \mathbf{d}_{D2} \\ \mathbf{d}_{A3} \times \mathbf{d}_{D3} \end{pmatrix}.$$

Вырождение данной матрицы будет означать линейную зависимость между винтами \mathbf{w}_{a1} , \mathbf{w}_{a2} , \mathbf{w}_{a3} , а, следовательно, механизм будет находиться в особом положении типа «ПУ». Тогда, по аналогии с матрицей \mathbf{A}_φ , для определения точек,

соответствующих особым положениям данного типа, можно рассмотреть изменение знака определителя указанной матрицы в анализируемой части рабочей зоны при условии, что группа силовых винтов связи в каждой из исследуемых точек не вырождена (рисунок 5.15).

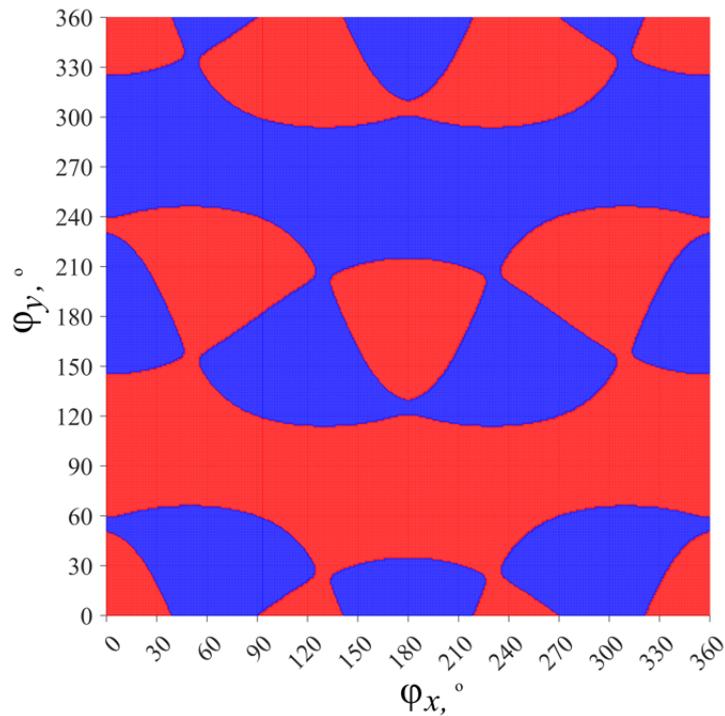


Рисунок 5.15. Знак определителя матрицы Пюккеровых координат приводных силовых винтов цепей \underline{RRRRR} в точках рабочей зоны сферического механизма («+» – красный, «-» – синий)

Как можно видеть, картина распределения особых положений, полученная при использовании винтового исчисления, похожа на полученную ранее при анализе с помощью матрицы \mathbf{A}_ϕ . Однако ключевое отличие заключается в том, что в данном случае отсутствуют особые положения при значении угла ϕ_y , равном 90° или 270° . При этом можно видеть, что рабочая зона разделена особыми положениями уже не на восемь частей, а всего на четыре. Две части большего размера включают по 59509 точек (45,92 % от общего количества исследованных точек) каждая, а две части меньшего размера – по 5291 точек (4,08 % от общего числа точек).

Отличие в результатах анализа объясняется тем, что при использовании матрицы \mathbf{A}_ϕ не учитываются особенности способа задания ориентации выходного звена. Матрица $\mathbf{J}_{об}$ представляет собой матрицу \mathbf{A} , каждый компонент i -й строки

которой разделен на элемент i -й элемент главной диагонали матрицы \mathbf{B} . Поскольку матрица \mathbf{B} является диагональной, можно записать:

$$\mathbf{J}_{об} = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}.$$

Тогда из (2.38) следует, что

$$\mathbf{B}^{-1} \mathbf{A} = \mathbf{B}_\varphi^{-1} \mathbf{A}_\varphi \begin{pmatrix} \mathbf{M}_\varphi^{-1} & \mathbf{0}_{3 \times nv} \\ \mathbf{0}_{nv \times 3} & \mathbf{I}_{nv} \end{pmatrix},$$

Вне зависимости от типа механизма матрица \mathbf{B} содержит только производные по входным координатам, соответственно, в рассматриваемом случае производные от углов поворота в матрице \mathbf{B}_φ^{-1} не присутствуют, поэтому $\mathbf{B}_\varphi^{-1} = \mathbf{B}^{-1}$, тогда:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_\varphi \begin{pmatrix} \mathbf{M}_\varphi^{-1} & \mathbf{0}_{3 \times nv} \\ \mathbf{0}_{nv \times 3} & \mathbf{I}_{nv} \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим теперь результаты итерационного анализа с использованием матрицы \mathbf{A} (рисунок 5.16).

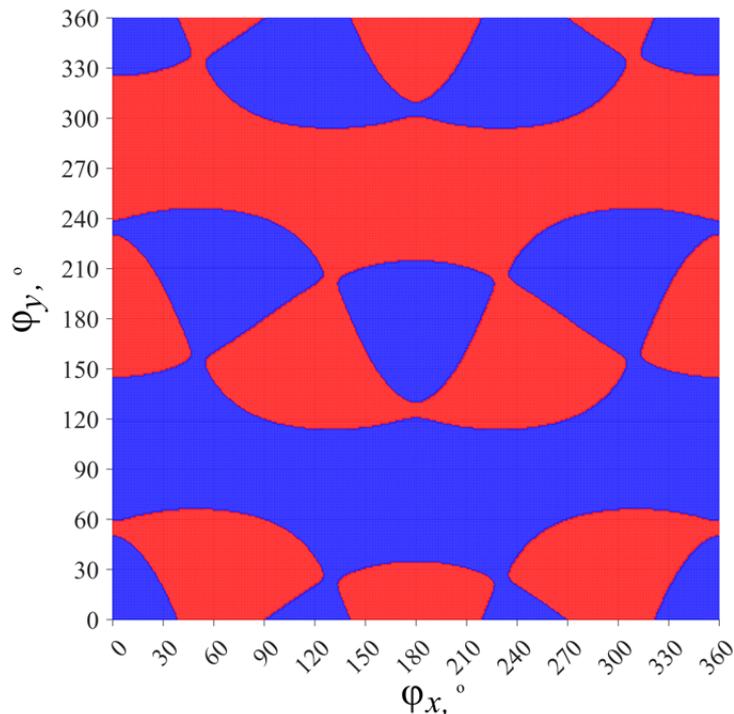


Рисунок 5.16. Знак определителя матрицы \mathbf{A} в точках рабочей зоны сферического механизма («+» – красный, «-» – синий)

Как можно видеть, в данном случае результат анализа особых положений типа «ПУ» полностью соответствует результату, полученному с использованием винтового исчисления, с той разницей, что на графике участки синего цвета стали красными и наоборот. Поскольку для анализа особых положений итерационным методом имеет значение только сам факт изменения знака определителя, результаты расчета двумя разными способами являются одинаковыми.

Таким образом, можно видеть, что при исследовании особых положений типа «ПУ» с помощью матрицы Якоби в механизмах с вращательными степенями свободы важно учитывать способ, которым задается ориентация выходного звена. При этом необходимо преобразовывать матрицу \mathbf{A} соответствующим образом. В противном случае возможно вырождение указанной матрицы в точках, которые не соответствуют особым положениям данного типа.

Перейдем к рассмотрению особых положений типа «ВС». Как уже было отмечено ранее, оси всех силовых винтов $\mathbf{w}_{сви}$ всегда лежат в горизонтальной плоскости, поэтому размерность группы данных винтов в положении, не являющимся особым, будет равна двум. Из этого следует, что особое положение типа «ВС» будет соответствовать случаю, когда оси всех трех винтов будут лежать на одной прямой. Поскольку для любой i -й кинематической цепи ось соответствующего винта $\mathbf{w}_{сви}$ всегда перпендикулярна плоскости, в которой лежат промежуточные звенья этой цепи, легко видеть, что для возникновения особого положения данного типа необходимо, чтобы промежуточные звенья всех трех кинематических цепей лежали в одной плоскости. Формально данное условие можно записать следующим образом:

$$\theta_1 \pm k_1\pi = \theta_2 \pm k_2\pi = \theta_3 \pm k_3\pi,$$

где k_i ($i = 1 \dots 3$) – любое натуральное число (либо ноль).

Если промежуточные звенья всех цепей лежат в одной плоскости, то из этого следует, что все три точки C_i (и D_i) также должны лежать в одной плоскости, которая при этом должна быть вертикальной и содержать ось Oz . Очевидно, что в общем случае выполнение данного условия невозможно, поскольку при ненулевом

значении длины отрезка l_{EF} плоскость, в которой находятся точки C_i не может проходить через точку F , а значит и содержать в себе ось Oz . Таким образом, особые положения типа «ВС» в рассматриваемом механизме отсутствуют, за исключением частного случая $l_{EF} = 0$. Для указанного частного случая особым положением типа «ВС» будет являться любая конфигурация механизма, при которой плоскость платформы будет перпендикулярна горизонтальной плоскости. Стоит, однако, отметить, что в реальном механизме подобные особые положения, если это специально не предусмотрено конструкцией, будут невозможны даже в частном случае, поскольку описываемая конфигурация требует интерференции звеньев как минимум двух кинематических цепей RRRRR.

Перейдем теперь к анализу близости к особым положениям. Поскольку вырождение матрицы $\mathbf{J}_{об}$ возможно только за счет изменения конфигурации цепей RRRRR, для удобства ограничимся рассмотрением только вращательных степеней свободы и внешнего момента. Исследование начнем с особых положений типа «ПС», рассмотрев при этом сразу как распределение скоростей в приводе, так и относительную погрешность расчета разными методами (рисунок 5.17).

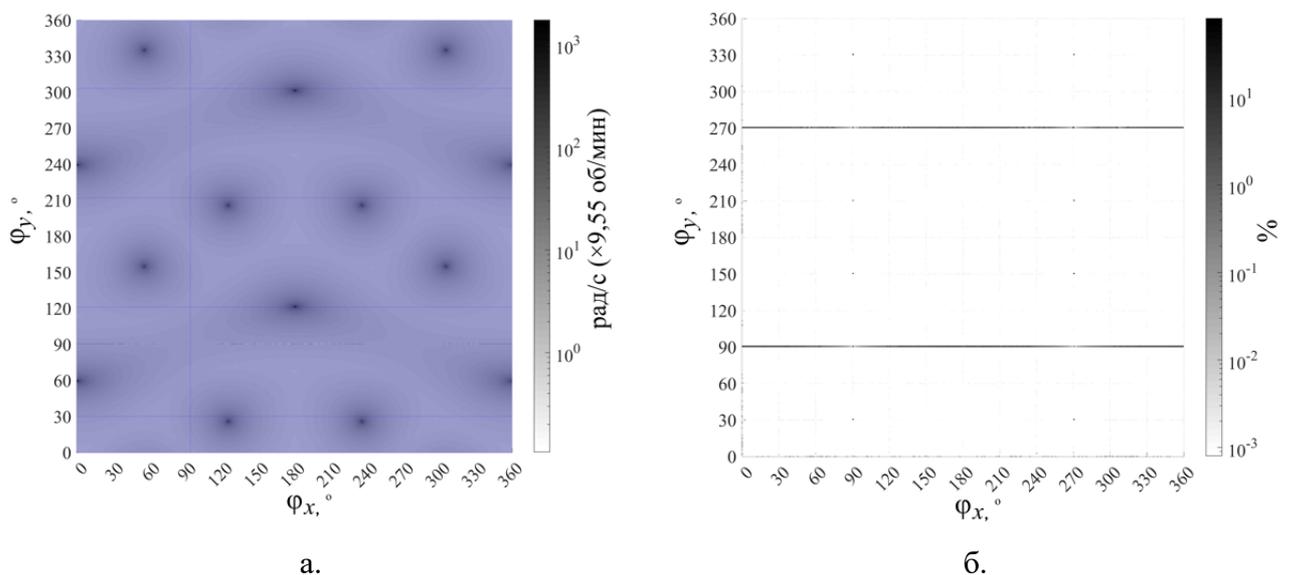


Рисунок 5.17. Распределение по исследуемой части рабочей зоны: значений входных скоростей механизма при $\|\omega\| = 1$ (а), относительной погрешности значений входных скоростей (б)

Как можно видеть, в рассматриваемой части рабочей зоны наблюдается увеличение скоростей в приводах при приближении к некоторым точкам,

количество которых равно двенадцати. Путем дополнительной проверки было установлено, что во всех двенадцати случаях точки D_i и C_i какой-либо одной цепи лежат на прямой OF , что полностью соответствует сделанным ранее выводам об условии возникновения особых положений типа «ПС».

В то же время, в некоторых точках, в частности при значении угла φ_y , равном 90° или 270° , наблюдается значительное (вплоть до десятков процентов) увеличение погрешности расчета скоростей в приводах различными методами. При этом увеличение погрешности в данных областях происходит резко, тогда как в других исследованных точках значение погрешности, как видно по шкале, значительно меньше. Данное явление может быть объяснено тем, что при итерационном анализе в выборку попадают непосредственно точки особых положений, либо точки, в которых особое положение отсутствует, но матрица $\mathbf{J}_{\text{фоб}}$ или матрица перехода \mathbf{M}_φ вырождены. Что уменьшить влияние данного эффекта, проведем такой же анализ, изменив при этом шаг перебора с 1° на $360/359^\circ$, т.е. увеличив размерность сетки на единицу в каждом направлении без изменения границ перебора (рисунок 5.18).

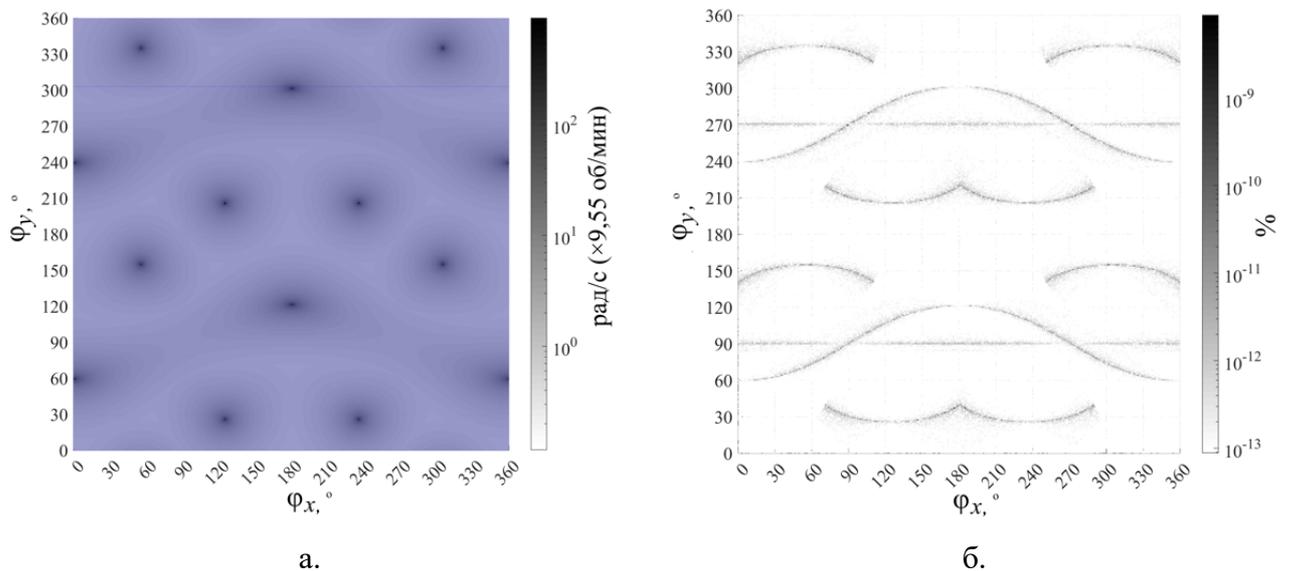


Рисунок 5.18. Распределение по исследуемой части рабочей зоны: значений входных скоростей механизма при $\|\omega\| = 1$ (а), относительной погрешности значений входных скоростей (б) (перебор с измененным шагом)

Можно видеть, что характер распределения значений входных скоростей, ожидаемо, не изменился. В то же время на графике распределения относительной погрешности видны существенные отличия: максимальный порядок погрешности снизился с десятков процентов до 10^{-9} %, т.е. результаты анализа двумя разными методами в данном случае одинаковы.

С учетом вышеизложенного можно сделать вывод, что при итерационном анализе близости к особым положениям типа «ПС» в механизмах с вращательными степенями свободы возможно получение значительно (на порядки) завышенных значений скоростей в приводах в том случае, если часть анализируемых точек соответствует вырождению матрицы $\mathbf{J}_{\text{фоб}}$ или $\mathbf{M}_{\text{ф}}$. При этом переход от производных углов поворота к угловым скоростям выходного звена неспособен устранить данную проблему, поскольку матрица $\mathbf{J}_{\text{об}}$ может быть рассчитана только с использованием указанных матриц, вырождение которых при определенных значениях углов поворотов является неизбежным и никак не связано со структурой рассматриваемого механизма. Так, например, рассматривая матрицу $\mathbf{M}_{\text{ф}}$, определяемую согласно (2.36), можно обнаружить, что ее определитель определяется довольно простым образом:

$$\det(\mathbf{M}_{\text{ф}}) = \cos \varphi_y.$$

Очевидно, что при значении угла φ_y , равном 90° или 270° , определитель матрицы $\mathbf{M}_{\text{ф}}$ обращается в ноль, т.е. данная матрица будет вырождена, что, в свою очередь, объясняет описанное ранее вырождение матрицы $\mathbf{J}_{\text{об}}$ при данных значениях угла, несмотря на то что механизм при этом не находится в особом положении типа «ПС».

Перейдем к анализу близости к особым положениям типа «ПУ», начав, как и в предыдущем случае, с итерационного анализа с шагом, равным 1° . Поскольку при анализе особых положений данного типа в вычислениях используются те же самые матрицы $\mathbf{J}_{\text{фоб}}$ или $\mathbf{M}_{\text{ф}}$, что и при анализе близости к особым положениям типа «ПС», логично предположить аналогичный скачкообразный рост погрешности

расчета значений критерия близости (максимального усилия в приводе) при рассмотрении точек, в которых указанные матрицы вырождены (рисунок 5.19).

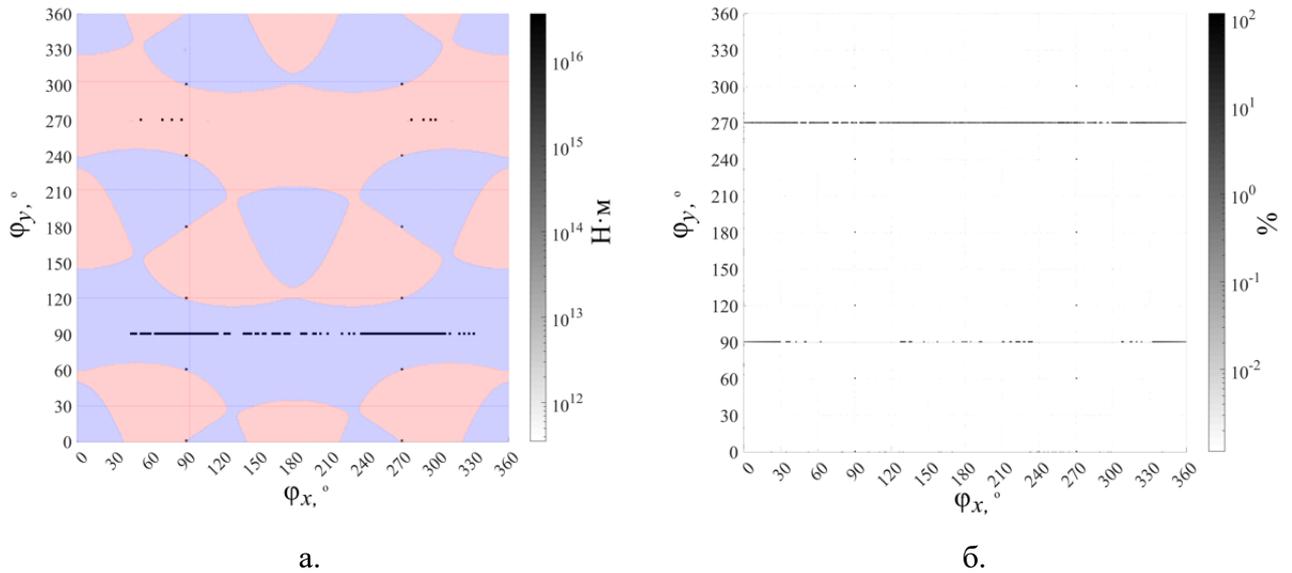


Рисунок 5.19. Распределение по исследуемой части рабочей зоны: значений усилий в приводе механизма при $\|\mathbf{m}\| = 1$ (а), относительной погрешности значений приводных усилий (б)

Полученный результат совпадает с обозначенным выше ожиданиями. Действительно, можно наблюдать значительный рост как значений моментов в приводах (до 10^{16} Н·м), так и погрешности их вычисления разными методами при значениях угла φ_y , равных 90° и 270° . Кроме того, скачкообразный рост данных величин наблюдается и в нескольких отдельных точках при тех же значениях другого угла поворота (φ_x). Однако указанные точки, как можно видеть, являются точками особых положений типа «ПУ», в связи с чем рост значений моментов в приводах и погрешности их расчета в данном случае закономерен. Стоит также отметить, что как на графике распределения приводных усилий, так и на графике погрешности, при значениях угла φ_y , равных 90° и 270° не наблюдается сплошных горизонтальных линий, как в случае анализа близости к особым положениям типа «ПС». В частности, при $\varphi_y = 270^\circ$ на графике распределения приводных усилий выделяются всего несколько точек, а на графике погрешности горизонтальная линия для данного значения более явно выражена, нежели для значения $\varphi_y = 90^\circ$. Данный факт, однако, объясняется особенностями визуализации и большей ошибкой вычислений при работе с плохо определенными или, в некоторых случаях,

вырожденными матрицами, поскольку, в отличие от анализа близости к особым положениям типа «ПС», в данном случае проводится большее количество операций обращения матриц.

Проведем теперь тот же анализ с шагом перебора $360/359^\circ$ (рисунок 5.20).

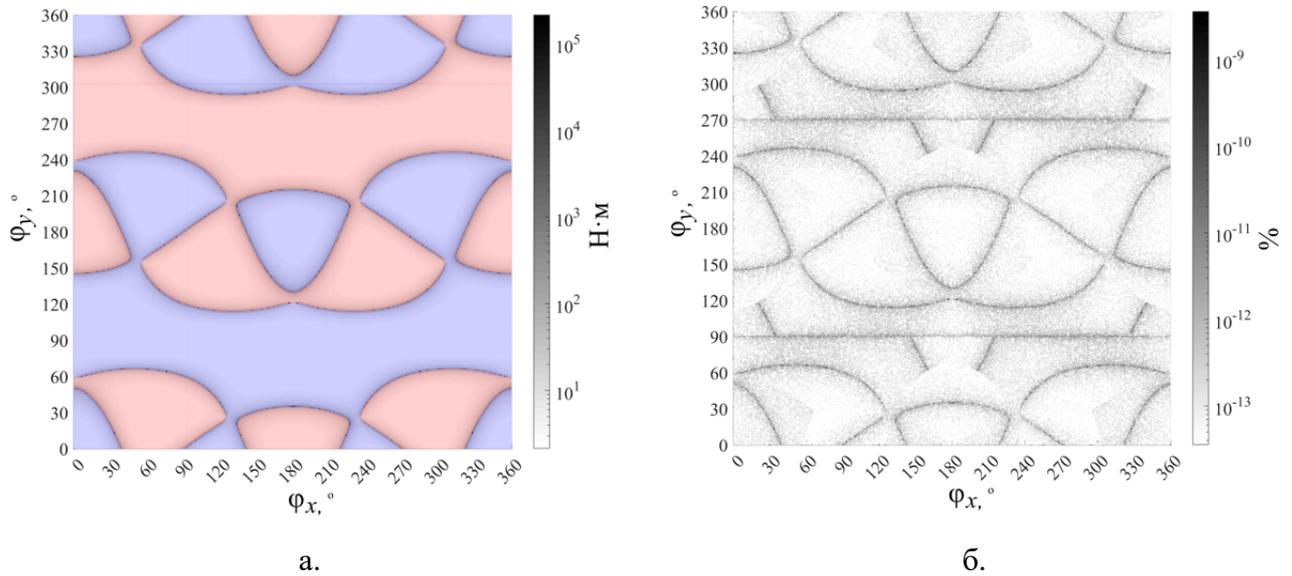


Рисунок 5.20. Распределение по исследуемой части рабочей зоны: значений усилий в приводе механизма при $\|\mathbf{m}\| = 1$ (а), относительной погрешности значений приводных усилий (б) (перебор с измененным шагом)

Как можно видеть, при изменении шага перебора картина изменения приводных усилий и погрешности их расчета по рабочей зоне полностью соответствует ожиданиям. Так, при приближении к особым положениям типа «ПУ» отмечается рост значений приводных усилий, причем в данном случае максимальный порядок данной величины составляет $10^5 \text{ H}\cdot\text{M}$, а не $10^{16} \text{ H}\cdot\text{M}$ как в случае с шагом, равным 1° . Таким же образом ведет себе и погрешность расчета приводных усилий. При этом можно заметить, что в данном случае на соответствующем графике присутствуют явные горизонтальные линии при значениях угла φ_y , равных 90° и 270° , что подтверждает приведенное выше объяснение об отсутствии данных линий при шаге в 1° погрешностями численных методов и особенностями визуализации. Таким образом, при анализе близости к особым положениям типа «ПУ», избежать «ложного» роста значения критерия при анализе точек, в которых вырождается матрица $\mathbf{J}_{\text{фоб}}$ или $\mathbf{M}_{\text{ф}}$, невозможно.

5.3. Результаты и выводы по главе

- проведен анализ семейства сферических механизмов с кинематическими цепями \underline{RRRRR} и дополнительной центральной цепью. Исследована подвижность механизмов, получены уравнения связи и решена обратная задача о положениях. Путем итерационного анализа в среде компьютерной алгебры MATLAB проведено исследование рабочей зоны механизма, расположения точек особых положений «ПС», «ПУ», а также рассчитаны значения критериев близости к указанным типам особых положений, показано, что особые положения типа «ВС» для данного семейства механизмов возможны только в частном случае;
- показано, что при использовании матрицы Якоби, возникновение особых положений типа «ПС» может характеризоваться не только равенством нулю определителя матрицы \mathbf{B} , но и случаем, когда данная матрица не определена;
- для механизмов, ориентация выходного звена которых задается углами поворота, при определении точек особых положений типа «ПУ» возможно появление «ложных» точек, характеризующихся вырождением матрицы \mathbf{A}_ϕ частных производных углов поворота. Для исключения появления ложных точек необходимо преобразовывать матрицу \mathbf{A}_ϕ в матрицу \mathbf{A} с помощью матрицы перехода \mathbf{M}_ϕ ;
- для указанных механизмов ввиду того, что обратная матрица Якоби $\mathbf{J}_{об}$ может быть рассчитана только с использованием матриц $\mathbf{J}_{\phi об}$ и \mathbf{M}_ϕ , при итерационном анализе близости к особым положениям типа «ПС» или «ПУ» в случае попадания в точку, в которой указанные матрицы являются вырожденными, будет наблюдаться скачкообразный рост значения соответствующего критерия. При этом механизм в особом положении одного из указанных типов находиться не будет. Ввиду невозможности расчета обратной матрицы Якоби при дифференцировании уравнений связи другим способом, избежать данной проблемы невозможно.

ГЛАВА 6. АНАЛИЗ ПЛОСКИХ МЕХАНИЗМОВ С ВРАЩАТЕЛЬНЫМИ ШАРНИРАМИ

6.1. Структура, анализ подвижности, уравнения связи и решение обратной задачи о положениях

В качестве следующего примера рассмотрим механизмы, реализующие плоское движение (т.н. плоские механизмы), кинематические цепи которых имеют структуру \underline{RRR} : шарнирный пятизвенник с двумя степенями свободы и механизм $3-\underline{RRR}$ с тремя степенями свободы. Данные механизмы представляют значительный интерес поскольку при одинаковой длине первого и второго звена хотя бы одной цепи обладают довольно редкой особенностью – наличием точек, соответствующих особым положениям «Типа 3» по классификации К. Госслена и Х. Анджелеса [78]. Иными словами, подобные механизмы могут находиться в особом положении типа «ПС» и «ПУ» одновременно, что, в свою очередь, обуславливает необходимость рассмотрения особенностей изменения исследуемых в работе критериев близости к данным типам особых положений в окрестности указанных точек.

Начнем рассмотрение с отдельной плоской кинематической цепи со структурой \underline{RRR} (рисунок 6.1).

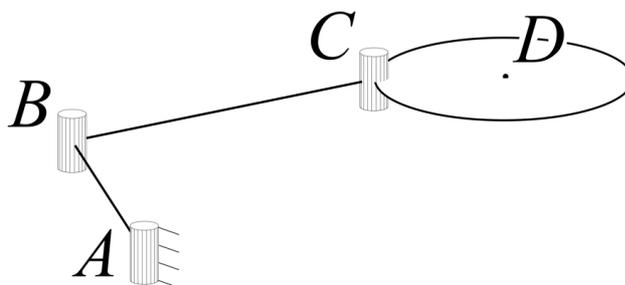


Рисунок 6.1. Плоская кинематическая цепь \underline{RRR}

Рассматриваемая цепь представляет собой один из простейших примеров плоских кинематических цепей и состоит из трех вращательных кинематических

пар A , B и C , соединенных между собой двумя промежуточными звеньями. При этом первая пара A цепи является приводной. Кинематическая пара C расположена на выходном звене механизма (характеризуется точкой D). В частном случае отдельное выходное звено может отсутствовать, а точки C и D – совпадать.

Рассмотрим единичные кинематические винты данной цепи (рисунок 6.2).

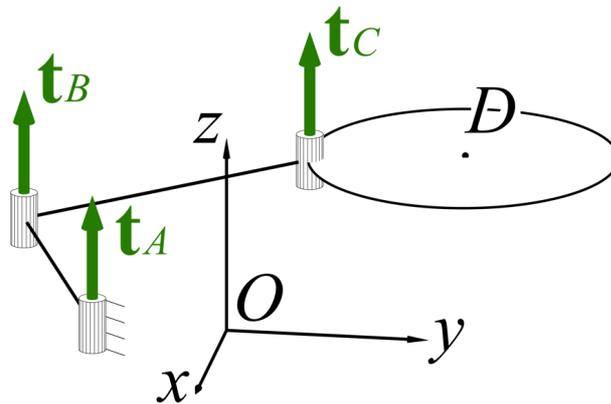


Рисунок 6.2. Единичные кинематические винты цепи $\underline{R}RR$

Легко видеть, что кинематические винты \mathbf{t}_A , \mathbf{t}_B и \mathbf{t}_C будут иметь нулевой параметр. Будем считать, что оси кинематических пар цепи параллельны оси Oz неподвижной системы координат $Oxyz$. Тогда Пюккерovy координаты указанных кинематических винтов при приведении в точку D :

$$\mathbf{t}_A = (0, 0, 1, \boldsymbol{\rho}_{DA} \times [0, 0, 1])^T,$$

$$\mathbf{t}_B = (0, 0, 1, \boldsymbol{\rho}_{DB} \times [0, 0, 1])^T,$$

$$\mathbf{t}_C = (0, 0, 1, \boldsymbol{\rho}_{DC} \times [0, 0, 1])^T,$$

где $\boldsymbol{\rho}_{DA}$, $\boldsymbol{\rho}_{DB}$, $\boldsymbol{\rho}_{DC}$ – векторы, проведенные из точки D в точку A , B или C соответственно.

Данные векторы могут быть определены следующим образом:

$$\boldsymbol{\rho}_{DA} = (x_A - x_D, y_A - y_D, z_A - z_D)^T,$$

$$\boldsymbol{\rho}_{DB} = (x_B - x_D, y_B - y_D, z_B - z_D)^T,$$

$$\boldsymbol{\rho}_{DC} = (x_C - x_D, y_C - y_D, z_C - z_D)^T.$$

Подвижность плоской цепи \underline{RRR} известна: выходное звено имеет две поступательные степени свободы в горизонтальной плоскости и возможность вращения вокруг вертикальной оси. Так, векторные части кинематических винтов \mathbf{t}_A , \mathbf{t}_B и \mathbf{t}_C одинаковы и представляют собой вектор, направленный параллельно оси Oz , а моментные части данных винтов являются векторными произведениями, в каждое из которых входит вектор $(0, 0, 1)$, из чего следует, что данные произведения лежат в одной (горизонтальной) плоскости. Несмотря на то, что моментные части рассматриваемых винтов всегда линейно зависимы, сами винты в общем случае линейно зависимыми не являются.

Силовые винты связей для рассматриваемой цепи, очевидно, должны запрещать вертикальное поступательное перемещение выходного звена, а также вращение вокруг любых двух неколлинеарных осей, находящихся в горизонтальной плоскости. Винт $\mathbf{w}_{св1}$, запрещающий вертикальное перемещение, будет иметь нулевой параметр и вертикальную ось, проходящую, через точку приведения. Плюккерovy координаты данного винта будут следующими:

$$\mathbf{w}_{св1} = (0, 0, 1, 0, 0, 0)^T.$$

Винты $\mathbf{w}_{св2}$ и $\mathbf{w}_{св3}$, запрещающие вращение вокруг осей, лежащих в горизонтальной плоскости, будут иметь бесконечный параметр. Поскольку выбор направления данных осей не имеет значения, будем считать их направленными параллельно Ox и Oy соответственно. Тогда Плюккерovy координаты указанных силовых винтов связи могут быть записаны следующим образом:

$$\mathbf{w}_{св2} = (0, 0, 0, 1, 0, 0)^T.$$

$$\mathbf{w}_{св3} = (0, 0, 0, 0, 1, 0)^T.$$

Для определения Плюккерovy координат приводного силового винта \mathbf{w}_a проанализируем кинематические и силовые винты, рассмотренные ранее. Из условия перпендикулярности \mathbf{w}_a силовым винтам связи следует, что его третья, четвертая и пятая компоненты могут быть только нулевыми, т.к. в противном случае скалярное произведение данного винта с как минимум одним из винтов

связи будет ненулевым. Таким образом, в общем виде Плюккерovy координаты приводного силового винта будут равны:

$$\mathbf{w}_a = (w_a^x, w_a^y, 0, 0, 0, w_a^{oz})^T.$$

Запишем условие взаимности винтов \mathbf{w}_a и \mathbf{t}_C :

$$\mathbf{w}_a \circ \mathbf{t}_C = \langle \boldsymbol{\rho}_{DC} \times [0, 0, 1], [w_a^x, w_a^y, 0] \rangle + \langle [0, 0, 1], [0, 0, w_a^{oz}] \rangle = 0,$$

из которого следует, что

$$\langle \boldsymbol{\rho}_{DC} \times [0, 0, 1], [w_a^x, w_a^y, 0] \rangle = -w_a^{oz}.$$

Аналогичное уравнение может быть получено и для винтов \mathbf{w}_a и \mathbf{t}_B . При этом ввиду равенства векторных частей винтов \mathbf{t}_B и \mathbf{t}_C :

$$\langle \boldsymbol{\rho}_{DC} \times [0, 0, 1], [w_a^x, w_a^y, 0] \rangle = \langle \boldsymbol{\rho}_{DB} \times [0, 0, 1], [w_a^x, w_a^y, 0] \rangle.$$

Пусть $\boldsymbol{\rho}_{CB}$ – вектор, проведенный из точки C в точку B . Тогда

$$\langle \boldsymbol{\rho}_{DC} \times [0, 0, 1], [w_a^x, w_a^y, 0] \rangle = \langle [\boldsymbol{\rho}_{DC} + \boldsymbol{\rho}_{CB}] \times [0, 0, 1], [w_a^x, w_a^y, 0] \rangle.$$

Поскольку как скалярное, так и векторное произведение обладают свойством дистрибутивности по сложению:

$$\langle \boldsymbol{\rho}_{DC} \times [0, 0, 1], [w_a^x, w_a^y, 0] \rangle = \langle \boldsymbol{\rho}_{DC} \times [0, 0, 1], [w_a^x, w_a^y, 0] \rangle + \langle \boldsymbol{\rho}_{CB} \times [0, 0, 1], [w_a^x, w_a^y, 0] \rangle,$$

откуда

$$\langle \boldsymbol{\rho}_{CB} \times [0, 0, 1], [w_a^x, w_a^y, 0] \rangle = 0.$$

Данное выражение может быть преобразовано с использованием свойства смешанного произведения векторов:

$$\langle \boldsymbol{\rho}_{CB} \times [0, 0, 1], [w_a^x, w_a^y, 0] \rangle = \langle \boldsymbol{\rho}_{CB}, [0, 0, 1] \times [w_a^x, w_a^y, 0] \rangle = \langle \boldsymbol{\rho}_{CB}, [-w_a^y, w_a^x, 0] \rangle = 0.$$

Из приведенного выражения следует, что вектор $(-w_a^y, w_a^x, 0)$ должен лежать в горизонтальной плоскости и быть перпендикулярным звену BC . При этом данный

вектор может быть получен поворотом вектора $(w_a^x, w_a^y, 0)$ на угол, равный 90° , вокруг оси Oz . Таким образом, векторная часть винта \mathbf{w}_a будет представлять собой вектор, коллинеарный \mathbf{p}_{CB} .

С учетом того, что $\mathbf{p}_{DC} = (\rho_{DCx}, \rho_{DCy}, 0)$, компоненту w_a^{oz} можно рассчитать, преобразовав полученное ранее выражение:

$$\langle \mathbf{p}_{DC} \times [0, 0, 1], [w_a^x, w_a^y, 0] \rangle = \langle [\rho_{DCy}, -\rho_{DCx}, 0], [w_a^x, w_a^y, 0] \rangle = \rho_{DCy} w_a^x - \rho_{DCx} w_a^y = -w_a^{oz}.$$

Рассмотрим теперь векторное произведение векторов \mathbf{p}_{DC} и $(w_a^x, w_a^y, 0)$:

$$[\rho_{DCx}, \rho_{DCy}, 0] \times [w_a^x, w_a^y, 0] = [0, 0, \rho_{DCy} w_a^x - \rho_{DCx} w_a^y].$$

Легко видеть, что компонента w_a^{oz} с учетом знака равна векторному произведению $\mathbf{p}_{DC} \times (-w_a^x, -w_a^y, 0)$, если считать вектор $(w_a^x, w_a^y, 0)$ направленным из точки C в точку B . Пусть тогда \mathbf{d}_{BC} – единичный вектор направленный из точки B в точку C . В таком случае, с учетом вышеизложенного, Плюккерovy координаты единичного приводного силового винта могут быть записаны следующим образом:

$$\mathbf{w}_a = (\mathbf{d}_{BC}, \mathbf{p}_{DC} \times \mathbf{d}_{BC})^T.$$

Таким образом, приводной силовой винт цепи RRR представляет собой винт нулевого параметра, ось которого направлена вдоль звена BC .

Рассмотрим теперь силовые винты механизмов. При этом стоит отметить, что вне зависимости от того, какое количество кинематических цепей RRR имеет механизм, силовые винты связей каждой из них будут одинаковыми. Поэтому с целью упрощения изложения будем считать, что в любом плоском механизме параллельной структуры, составленном из цепей данного типа, существует только три силовых винта связи \mathbf{w}_{cb1} , \mathbf{w}_{cb2} и \mathbf{w}_{cb3} , т.е. будем рассматривать данные винты для механизма в целом, а не для его отдельных цепей. Тогда в шарнирном пятизвенике силовые винты связи и приводные силовые винты будут совместно образовывать пятичленную группу (рисунок 6.3.а) а в механизме со структурой 3-RRR – шестичленную (рисунок 6.3.б).

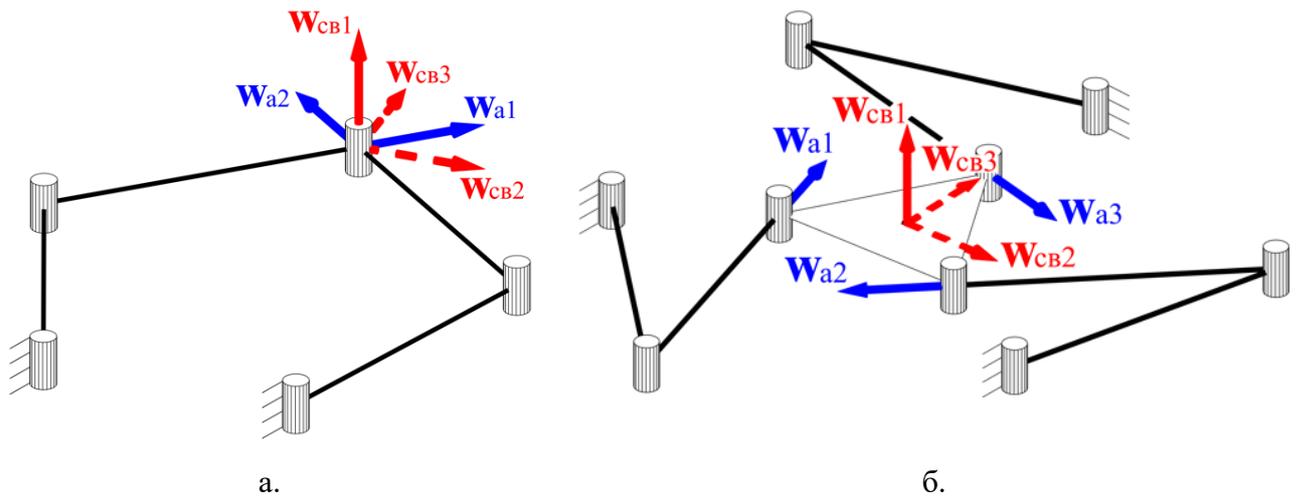


Рисунок 6.3. Механизмы и их силовые винты: шарнирный пятизвенник (а), 3-RRR (б)

С учетом изложенного ранее очевидно, что силовые винты связи всегда остаются линейно независимыми. Кроме того, любой приводной силовой винт также будет линейно независим с силовыми винтами связей W_{cb2} и W_{cb3} , поскольку все указанные винты лежат в одной плоскости, но при этом приводной винт имеет нулевой параметр, а силовые – бесконечный. Также данный винт всегда остается линейно независимым с винтом W_{cb1} ввиду того, что последний также имеет нулевой параметр, а его ось перпендикулярна плоскости, в которой расположены оси приводных силовых винтов. Таким образом, в общем случае группы силовых винтов как шарнирного пятизвенника, так и механизма 3-RRR, не вырождены. Вырождение указанных групп возможно только в случае линейной зависимости между приводными силовыми винтами, что соответствует попаданию механизма в особое положение типа «ПУ». Можно видеть, что в случае шарнирного пятизвенника всегда остается возможность одного неуправляемого движения, а именно – вращения вокруг вертикальной оси. Однако выходное звено данного механизма представляет собой точку, а не твердое тело, поэтому механизм в целом является полностью управляемым.

Перейдем к выводу уравнений связи и решению обратной задачи о положениях. Для шарнирного пятизвенника выходными координатами являются координаты x, y точки $C = C_1 = C_2$ в системе $Oxyz$, а для механизма со структурой 3-RRR – координаты x, y точки D , а также угол поворота платформы φ_z ,

отсчитываемый от оси, параллельной Ox . Входными координатами в обоих случаях являются углы поворота в приводных кинематических парах θ_i (рисунок 6.4).

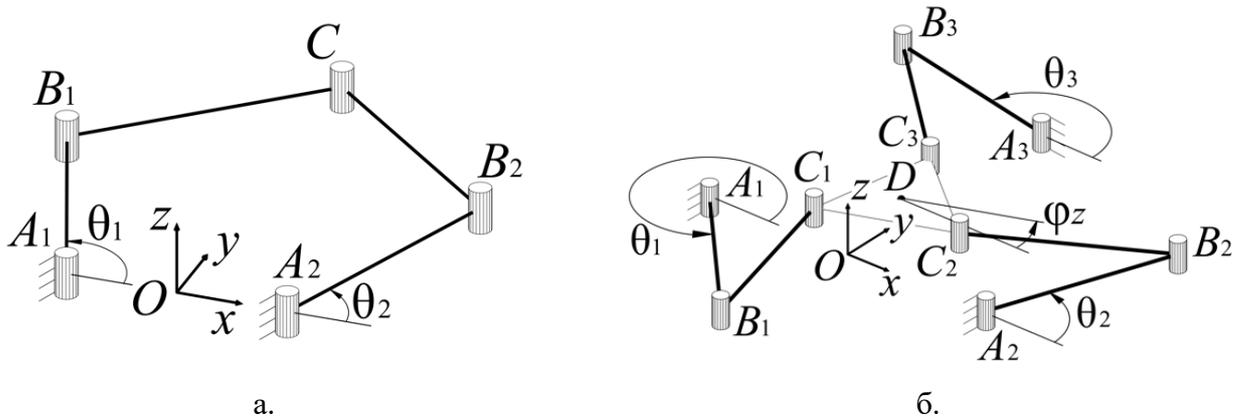


Рисунок 6.4. Схемы механизмов для решения обратной задачи о положениях: шарнирного пятизвенника (а), 3-RRR (б)

Для вывода уравнений связи рассмотрим вид сверху на i -ю кинематическую цепь RRR в общем случае (рисунок 6.5).

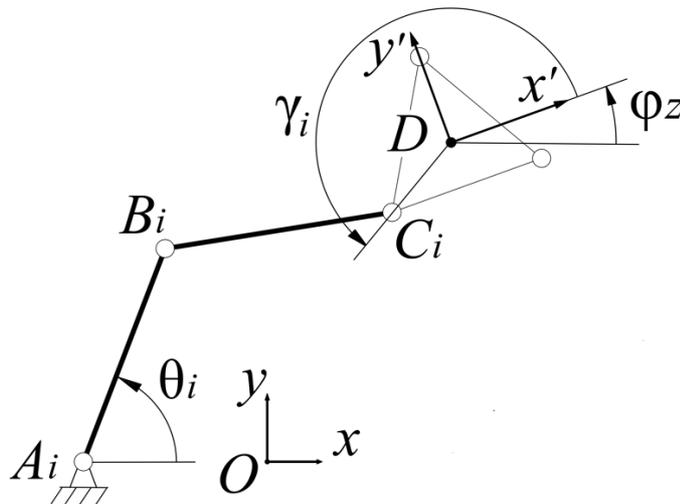


Рисунок 6.5. Вид на i -ю цепь RRR сверху

Для упрощения изложения будем рассматривать механизм в двумерной неподвижной системе координат Oxy вместо трехмерной $Oxyz$, а также введем вспомогательную подвижную систему координат $Dx'y'$. Тогда координаты точки C_i в данной системе координат могут быть удобно выражены через расстояние l_{CDi} между точками C_i и D и угол γ_i :

$$x'_{C_i} = l_{CDi} \cos \gamma_i, \quad y'_{C_i} = l_{CDi} \sin \gamma_i.$$

Легко видеть, что координаты этой же точки в системе $Oxу$ будут следующими:

$$x_{Ci} = x + l_{CDi} \cos(\gamma_i + \varphi_z), \quad y_{Ci} = y + l_{CDi} \sin(\gamma_i + \varphi_z).$$

Пусть l_{ACi} – длина звена A_iB_i . Тогда, используя угол θ_i можно записать координаты точки B_i в системе $Oxу$ следующим образом:

$$x_{Bi} = x_{Ai} + l_{ABi} \cos\theta_i, \quad y_{Bi} = y_{Ai} + l_{ABi} \sin\theta_i,$$

где x_{Ai}, y_{Ai} – координаты точки A_i в системе $Oxу$.

Тогда с учетом постоянства длины звена B_iC_i (l_{BCi}) уравнение связи для цепи RRR будет следующим:

$$(x + l_{CDi} \cos(\gamma_i + \varphi_z) - x_{Ai} - l_{ABi} \cos\theta_i)^2 + (y + l_{CDi} \sin(\gamma_i + \varphi_z) - y_{Ai} - l_{ABi} \sin\theta_i)^2 - l_{BCi}^2 = 0.$$

Для шарнирного пятизвенника $l_{CDi} = 0$, и уравнение связи можно упростить:

$$(x - x_{Ai} - l_{ABi} \cos\theta_i)^2 + (y - y_{Ai} - l_{ABi} \sin\theta_i)^2 - l_{BCi}^2 = 0.$$

Уравнение связи цепи RRR в общем случае может быть решено аналитически относительно угла θ_i . Раскрывая скобки и приводя подобные слагаемые получим:

$$\begin{aligned} & l_{ABi}^2 \cos^2 \theta_i + 2 \cos \theta_i [x_{Ai} l_{ABi} - x l_{ABi} - l_{ABi} l_{CDi} \cos(\gamma_i + \varphi_z)] + \\ & + [x^2 + 2x l_{CDi} \cos(\gamma_i + \varphi_z) - 2x x_{Ai} + l_{CDi}^2 \cos^2(\gamma_i + \varphi_z) - 2x_{Ai} l_{CDi} \cos^2(\gamma_i + \varphi_z) + x_{Ai}^2] + \\ & + l_{ABi}^2 \sin^2 \theta_i + 2 \sin \theta_i [y_{Ai} l_{ABi} - y l_{ABi} - l_{ABi} l_{CDi} \sin(\gamma_i + \varphi_z)] + \\ & + [y^2 + 2y l_{CDi} \sin(\gamma_i + \varphi_z) - 2y y_{Ai} + l_{CDi}^2 \sin^2(\gamma_i + \varphi_z) - 2y_{Ai} l_{CDi} \sin^2(\gamma_i + \varphi_z) + y_{Ai}^2] - l_{BCi}^2 = 0. \end{aligned}$$

Введем следующие обозначения для выражений, заключенных в квадратные скобки и содержащих известные в рамках решения данной задачи величины:

$$\begin{aligned} [a_i]_x &= 2[x_{Ai} l_{ABi} - x l_{ABi} - l_{ABi} l_{CDi} \cos(\gamma_i + \varphi_z)], \\ [b_i]_x &= [x^2 + 2x l_{CDi} \cos(\gamma_i + \varphi_z) - 2x x_{Ai} + l_{CDi}^2 \cos^2(\gamma_i + \varphi_z) - 2x_{Ai} l_{CDi} \cos^2(\gamma_i + \varphi_z) + x_{Ai}^2], \\ [a_i]_y &= 2[y_{Ai} l_{ABi} - y l_{ABi} - l_{ABi} l_{CDi} \sin(\gamma_i + \varphi_z)], \\ [b_i]_y &= [y^2 + 2y l_{CDi} \sin(\gamma_i + \varphi_z) - 2y y_{Ai} + l_{CDi}^2 \sin^2(\gamma_i + \varphi_z) - 2y_{Ai} l_{CDi} \sin^2(\gamma_i + \varphi_z) + y_{Ai}^2]. \end{aligned}$$

В этом случае уравнение связи приобретает следующий вид:

$$[a_i]_x \cos \theta_i + [a_i]_y \sin \theta_i + [b_i]_x + [b_i]_y + l_{ABi}^2 - l_{BCi}^2 = 0.$$

Согласно формуле сложения гармонических колебаний:

$$[a_i]_x \cos \theta_i + [a_i]_y \sin \theta_i = \operatorname{sgn}([a_i]_x) \sqrt{[a_i]_x^2 + [a_i]_y^2} \cos \left(\theta_i + \operatorname{arctg} \left(-\frac{[a_i]_y}{[a_i]_x} \right) \right).$$

Тогда угол поворота в приводной паре θ_i может быть рассчитан следующим образом:

$$\theta_i = \pm \arccos \left(\frac{l_{BCi}^2 - l_{ABi}^2 - [b_i]_x - [b_i]_y}{\operatorname{sgn}([a_i]_x) \sqrt{[a_i]_x^2 + [a_i]_y^2}} \right) - \operatorname{arctg} \left(-\frac{[a_i]_y}{[a_i]_x} \right).$$

Можно видеть, что для одной кинематической цепи RRR в общем случае существует два решения обратной задачи о положениях. Таким образом, для шарнирного пятизвенника количество решений данной задачи будет равно четырем, а для механизма со структурой 3-RRR – восьми.

Стоит также отметить, что для расчета Плюккерových координат силовых и кинематических винтов необходимо рассматривать координаты точек A_i , B_i и C_i в пространственной системе координат $Oxyz$, поскольку операция векторного произведения определена только для трехмерных векторов. Поскольку высота расположения механизма не оказывает влияния на его кинематику, для удобства проведения расчетов координаты z_{Ai} , z_{Bi} и z_{Ci} можно принять равными нулю.

6.2. Анализ рабочей зоны, особых положений и близости к особым положениям механизмов

Перейдем к рассмотрению численных примеров расчета шарнирного пятизвенника и механизма со структурой 3-RRR.

Для шарнирного пятизвенника примем следующие геометрические параметры (м):

- длины звеньев (одинаковы для всех цепей): $l_{AB} = 0,25, l_{BC} = 0,25, l_{CD} = 0;$
- координаты точек A_i : $x_{A1} = -0,1, x_{A2} = 0,1, y_{A1} = y_{A2} = 0,$

а для механизма 3-RRR (м):

- длины звеньев (одинаковы для всех цепей): $l_{AB} = 0,25, l_{BC} = 0,25, l_{CD} = 0,1;$
- точки A_i расположены в вершинах правильного треугольника со стороной 0,4 и имеют координаты: $x_{A1} = -0,2, y_{A1} = 0, x_{A2} = 0,2, y_{A2} = 0, x_{A3} = 0, y_{A3} = 0,3464;$

Углы, задающие положение точек C_i в 3-RRR механизме равны: $\gamma_1 = 210^\circ, \gamma_2 = 330^\circ, \gamma_3 = 90^\circ.$

Теоретическую рабочую зону, как и для всех ранее рассмотренных в работе механизмов, определим путем применения итерационного подхода. В данном случае итерационное исследование будем проводить в интервалах изменения координат $x = [-0,55; 0,55], y = [-0,55; 0,55]$ с шагом перебора по каждой координате, равным 0,005 м. Общее количество итераций, таким образом, будет составлять 48841. Поскольку границы и шаг перебора как для пятизвенника, так и для механизма 3-RRR, одинаковы, оба механизма будут визуализированы в одинаковом масштабе. При анализе особых положений для каждого механизма будем рассматривать по две рабочих сборки: «1, 2» и «2, 2» для пятизвенника и «1, 2, 2» и «2, 2, 2» для механизма 3-RRR. При этом цифра «1» соответствует решению обратной задачи о положениях в соответствующей цепи RRR с использованием знака «+», перед арккосинусом, а цифра «2» – знака «-». Для того, чтобы наглядно продемонстрировать соотношение размеров каждого из рассматриваемых в данном примере механизмов с площадью его рабочей зоны, также дополнительно визуализированы рабочие сборки «1, 2» и «2, 2, 2» пятизвенника и механизма 3-RRR соответственно (рисунок 6.6). Кроме того стоит отметить, что для 3-RRR механизма рассматривается рабочая зона, соответствующая постоянной ориентации выходного звена со значением угла поворота $\varphi_z = 0.$

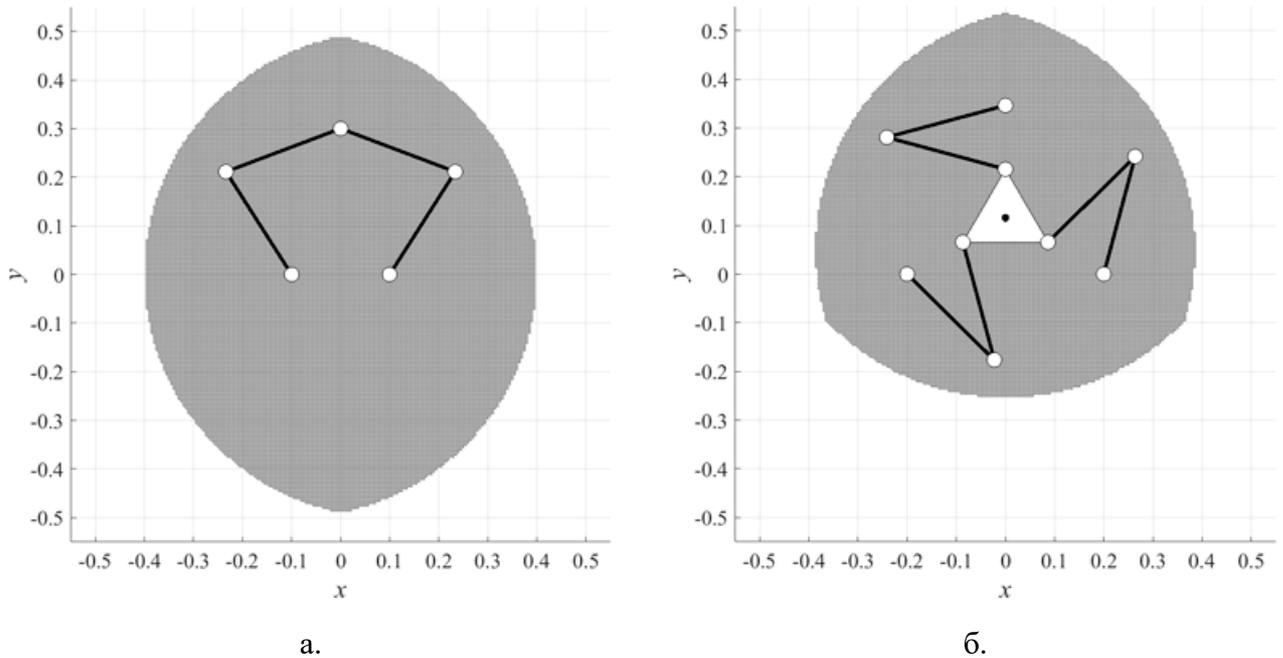


Рисунок 6.6. Рабочие зоны плоских механизмов параллельной структуры: шарнирного пятизвенника (а), механизма 3-RRR (б)

Рассмотрим особые положения механизмов.

Для возникновения особого положения типа «ПС» необходимо, чтобы хотя бы одна частная производная функции $F_i(x, y, \varphi_z, \theta_i)$ по углу θ_i была равна нулю. То есть, в общем виде:

$$\frac{\partial F_i}{\partial \theta_i} = 2l_{ABi} \sin \theta_i (x + l_{CDi} \cos(\gamma_i + \varphi_z) - x_{Ai} - l_{ABi} \cos \theta_i) - 2l_{ABi} \cos \theta_i (y + l_{CDi} \sin(\gamma_i + \varphi_z) - y_{Ai} - l_{ABi} \sin \theta_i) = 0.$$

Преобразуя данное выражение с учетом структуры цепи, получим следующее условие возникновения особого положения типа «ПС»:

$$\tan \theta_i = \frac{(y + l_{CDi} \sin(\gamma_i + \varphi_z) - l_{ABi} \sin \theta_i - y_{Ai})}{(x + l_{CDi} \cos(\gamma_i + \varphi_z) - l_{ABi} \cos \theta_i - x_{Ai})}.$$

Можно заметить, что числитель данной дроби представляет собой разность координат y точек C_i и B_i : $y_{Ci} - y_{Bi}$, а знаменатель – разность координат x этих же точек: $x_{Ci} - x_{Bi}$. Это возможно в том случае, если звенья A_iB_i и B_iC_i находятся на одной линии. Таким образом, если $l_{ABi} \neq l_{BCi}$, то особые положения типа «ПС» при

условии неизменной ориентации выходного звена находятся на теоретической границе рабочей зоны. Если $l_{ABi} = l_{BCi}$, то точки особых положений типа «ПС» будут находиться также и внутри рабочей зоны, а их количество будет равно количеству кинематических цепей. Координаты такой точки, соответствующей i -й цепи будут равны координатам точки D (C для шарнирного пятизвенника) при таком положении выходного звена механизма, в котором точка C_i совпадает с точкой A_i . Особенность данных точек заключается в том, что уравнения связи в них обращаются в тождества вне зависимости от значений угла θ_i , что физически означает возможность неограниченного перемещения в i -й активной паре при неподвижном выходном звене, что согласуется с результатами, полученными И. Боневым и К. Госсленом [78] относительно соответствия данных точек особым положениями «Типа 3» по классификации К. Госслена и Х. Анджелеса. Эти выводы подтверждаются также и результатами итерационного анализа рабочей зоны механизмов: определитель матрицы \mathbf{B} всегда имеет один и тот же знак во всех проанализированных точках за исключением упомянутых выше: в них $\det(\mathbf{B}) = 0$.

Перейдем к рассмотрению результатов анализа особых положений типа «ПУ», начав с двух рабочих сборок пятизвенного механизма (рисунок 6.7).

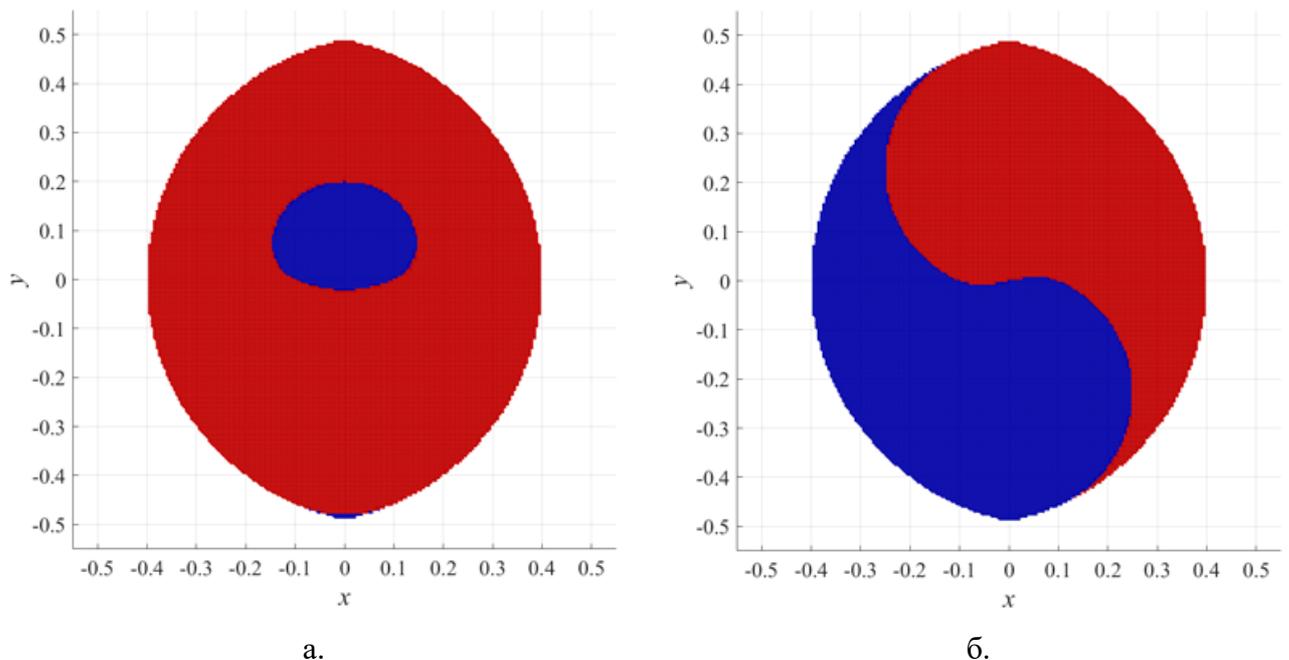


Рисунок 6.7. Знак определителя матрицы \mathbf{A} в точках рабочей зоны («+» – красный, «-» – синий) шарнирного пятизвенника: рабочая сборка «1, 2» (а), рабочая сборка «2, 2» (б)

Результаты итерационного анализа шарнирного пятизвенника следующие:

- 21378 точек с $\det(\mathbf{A}) > 0$ и 2078 точек с $\det(\mathbf{A}) < 0$ для рабочей сборки «1, 2»;
- 11732 точек с $\det(\mathbf{A}) > 0$ и 11733 точек с $\det(\mathbf{A}) < 0$ для рабочей сборки «2, 2».

Рассмотрим теперь две рабочих сборки 3-RRR механизма (рисунок 6.8).

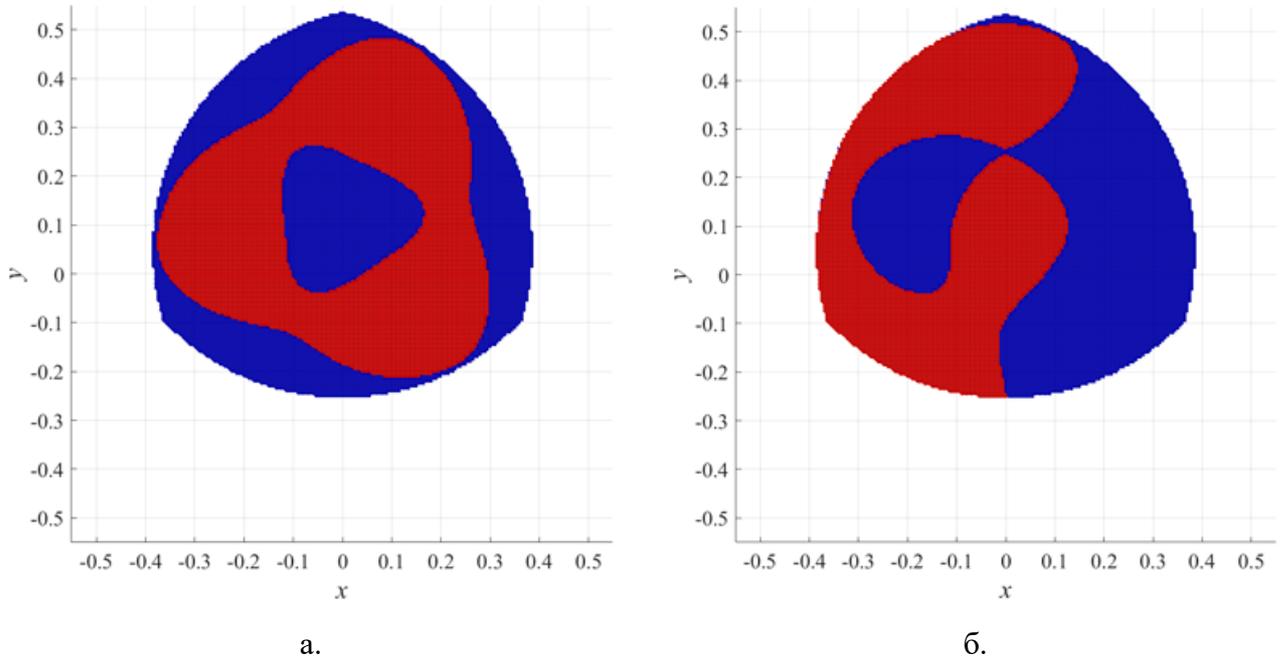


Рисунок 6.8. Знак определителя матрицы \mathbf{A} в точках рабочей зоны («+» – красный, «-» – синий) механизма 3-RRR при $\varphi_z = 0$: рабочая сборка «2, 2, 2» (а), рабочая сборка «1, 2, 2» (б)

Для механизма 3-RRR результаты следующие.

- 10674 точек с $\det(\mathbf{A}) > 0$ и 8148 точек с $\det(\mathbf{A}) < 0$ для рабочей сборки «2, 2, 2»;
- 9066 точек с $\det(\mathbf{A}) > 0$ и 9756 точек с $\det(\mathbf{A}) < 0$ для рабочей сборки «1, 2, 2».

Особые положения типа «BC» у рассматриваемых механизмов отсутствуют.

Рассмотрим теперь критерии близости к особым положениям начав с типа «ПС». Как и ожидалось для каждого механизма возрастание значения критерия наблюдается при приближении к краю рабочей зоны, а также к точкам внутри рабочей зоны, описанным ранее (рисунок 6.9). Стоит отметить, что в данном случае для каждого механизма приводится только одна рабочая сборка, т.к. отличие между различными сборками заключается только в знаке определителя матрицы \mathbf{B} . Также для механизма 3-RRR рассматривается только линейная часть кинематического ванта выходного звена, поскольку, как уже было показано ранее, характер

изменения значений критерия близости к особым положениям типа «ПС» остается неизменным вне зависимости от типа анализируемых компонент указанного винта.

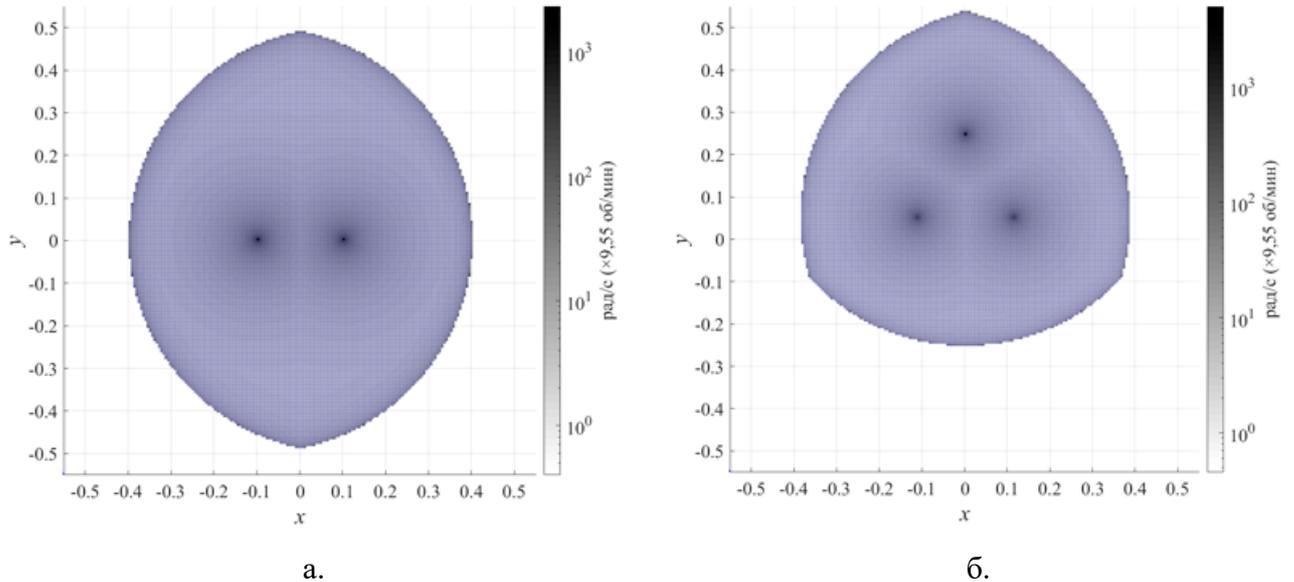


Рисунок 6.9. Распределение значений входных скоростей по рабочей зоне плоских механизмов при $\|\mathbf{v}\| = 1$: шарнирный пятизвенник (рабочая сборка «1, 2») (а), механизм 3-RRR (рабочая сборка «2, 2, 2», $\|\boldsymbol{\omega}\| = 0$, $\varphi_z = 0$) (б)

При рассмотрении распределения значений критерия близости к особым положениям типа «ПУ» можно видеть, что как для шарнирного пятизвенника (рисунок 6.10), так и для механизма 3-RRR (рисунок 6.11) полученные результаты полностью соответствуют ожиданиям.

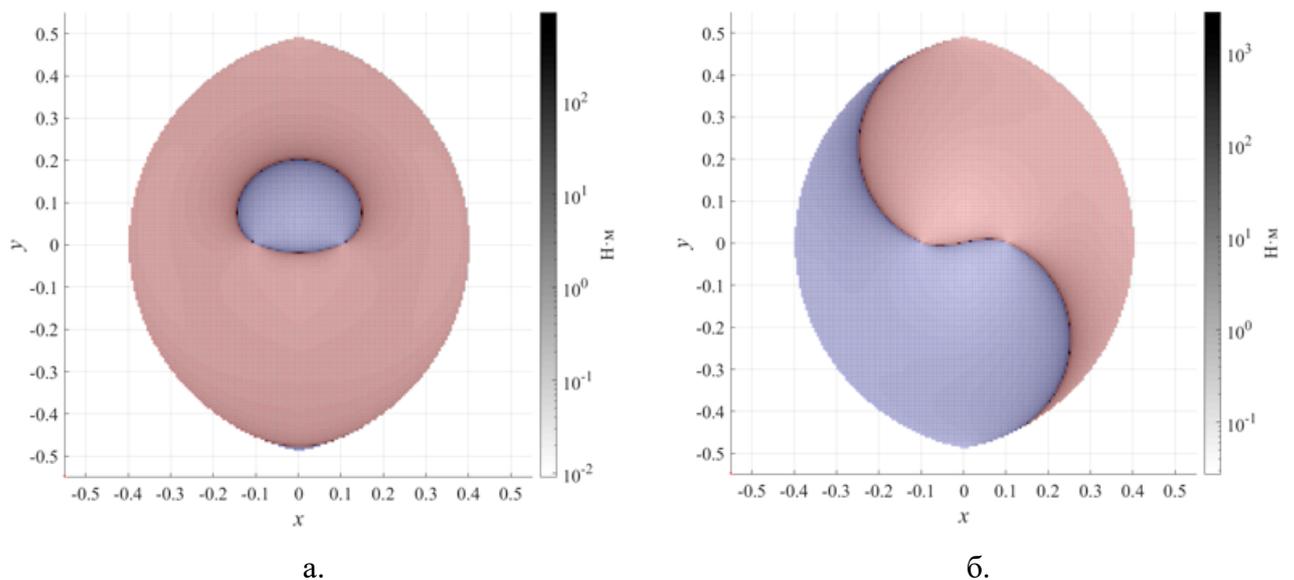


Рисунок 6.10. Распределение значений усилий в приводах по рабочей зоне пятизвенного механизма при $\|\mathbf{f}\| = 1$: рабочая сборка «1, 2» (а); рабочая сборка «2, 2» (б)

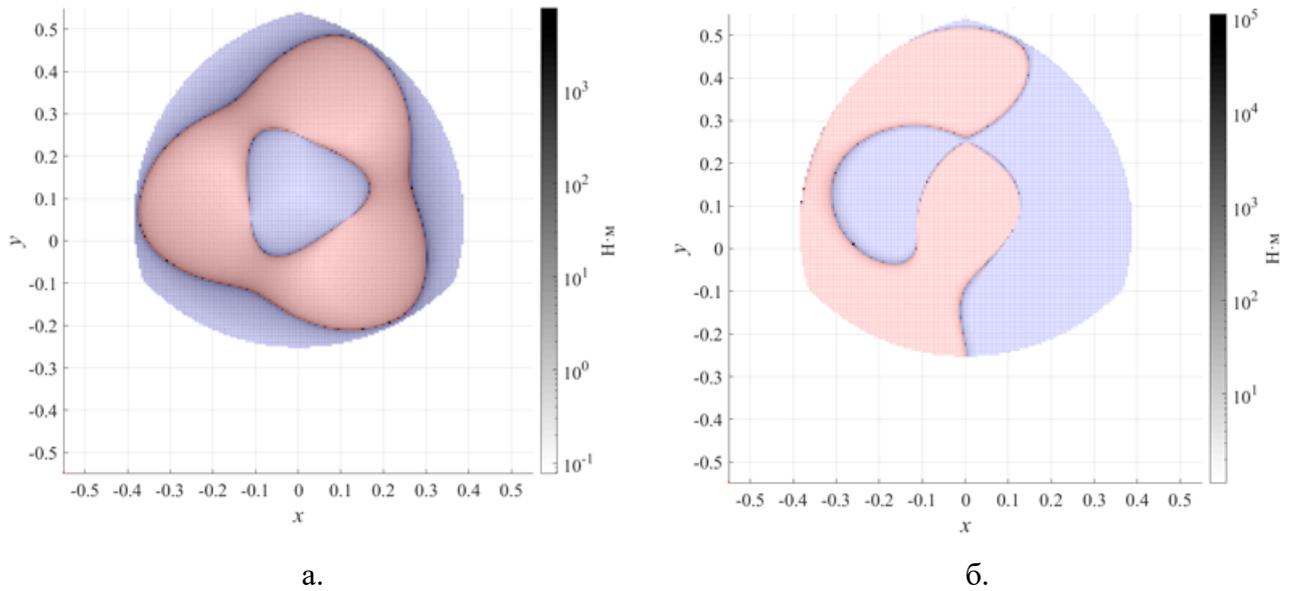


Рисунок 6.11. Распределение значений усилий в приводах по рабочей зоне механизма 3-RRR при $\|\mathbf{f}\| = 1$, $\|\mathbf{m}\| = 0$ ($\varphi_z = 0$): рабочая сборка «2, 2, 2» (а); рабочая сборка «1, 2, 2» (б)

При внимательном рассмотрении можно заметить, что вблизи точек особых положений «Типа 3» по классификации К. Госслена и Х. Анджелеса наблюдается уменьшение значений усилий в приводах, что может быть более наглядно продемонстрировано путем итерационного анализа ближайших окрестностей данных точек (рисунок 6.12).

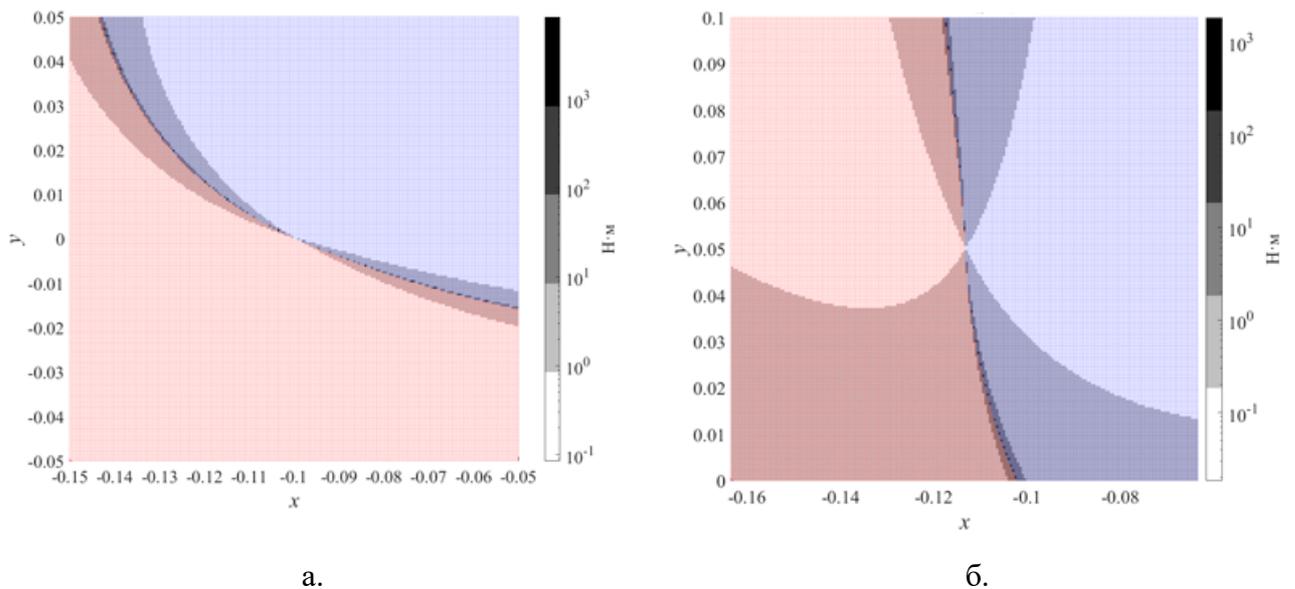


Рисунок 6.12. Распределение значений усилий в приводах вблизи точек особых положений «Типа 3» при $\|\mathbf{f}\| = 1$: для шарнирного пятизвенника (рабочая сборка «1, 2») (а) для механизма 3-RRR (рабочая сборка «2, 2, 2», $\|\mathbf{m}\| = 0$, $\varphi_z = 0$) (б)

Для каждого механизма рассмотрена область размером 0,1 на 0,1 м с шагом перебора 0,0005 вблизи искомой точки, соответствующей первой кинематической цепи механизма. Также для большей наглядности количество оттенков серого, используемых для отрисовки различных уровней значений расчетного критерия, уменьшено до пяти. В данном случае продемонстрировано только по одной точке для рабочих сборок «1, 2» и «2, 2, 2» пятизвенника и 3-RRR механизма соответственно. Однако данное явление наблюдалось также и у остальных точек, как для указанных рабочих сборок, так и для других. Также дополнительно было установлено, что рассмотрение полного силового винта внешней нагрузки для 3-RRR механизма (то есть $\|\mathbf{f}\| = 1$, $\|\mathbf{m}\| = 1$) не приводит к другому результату.

В процессе итерационного анализа было также установлено, что относительная погрешность вычислений значений критериев близости к особым положениям типов «ПС» и «ПУ» двумя различными методами, как для пятизвенника (рисунок 6.13), так и для механизма 3-RRR (рисунок 6.14), не превышает 10^{-9} % в самом худшем случае. Кроме того, также, как и для ранее рассмотренных механизмов, наибольшие значения величины погрешности наблюдаются вблизи особых положений соответствующего типа.

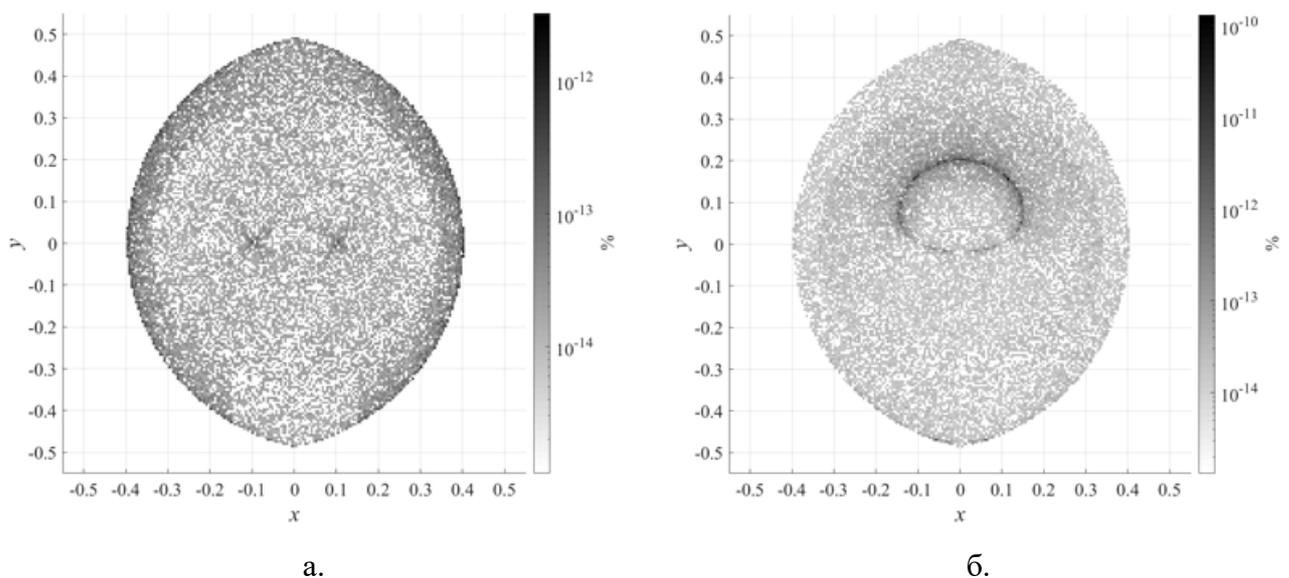


Рисунок 6.13. Распределение относительной погрешности значений для рабочей зоны шарнирного пятизвенника (рабочая сборка «1,2»): входных скоростей (а), усилий в приводах (б)

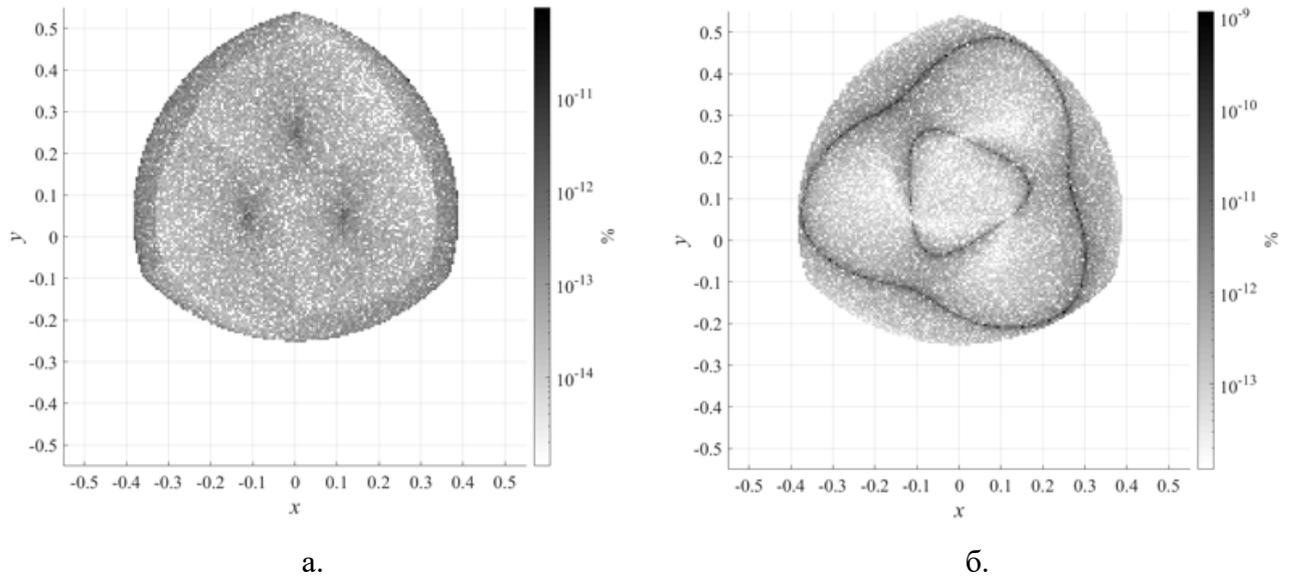


Рисунок 6.14. Распределение относительной погрешности значений для рабочей зоны механизма 3-RRR (рабочая сборка «2, 2, 2»): входных скоростей (а), усилий в приводах (б)

Таким образом, наличие точек особых положений «Типа 3» по классификации К. Госслена и Х. Анджелеса не влияет на применимость предложенных в работе критериев близости к особым положениям. Близость к подобным точкам особых положений может быть оценена по критерию близости к особым положениям типа «ПС».

6.3. Результаты и выводы по главе

- проведен анализ механизмов с плоскими цепями RRR: шарнирного пятизвенника и механизма 3-RRR. Исследована подвижность механизмов, получены уравнения связи и решена обратная задача о положениях. Путем итерационного анализа исследована рабочая зона рассматриваемых механизмов, найдены точки особых положений «ПС», «ПУ», а также рассчитаны значения критериев близости к данным типам особых положений. Особые положения типа «ВС» в рассмотренных механизмах отсутствуют;

- на примере исследованных механизмов рассмотрен редкий случай наличия внутри рабочей зоны механизма точек особых положений «Типа 3» по классификации К. Госслена и Х. Анджелеса, то есть точек, соответствующих одновременно особым положениям типа «ПС» и «ПУ». Показано, что наличие таких точек не оказывает влияния на применимость предложенных критериев близости к особым положениям указанных типов;
- близость точкам особых положений «Типа 3» по классификации К. Госслена и Х. Анджелеса может быть оценена по критерию близости к особым положениям типа «ПС».

ГЛАВА 7. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МЕХАНИЗМА ТИПА DELTA С ЧЕТЫРЬМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

7.1. Общая характеристика исследуемого механизма и его конструкции, вспомогательное оборудование

Рассмотренные ранее в данной работе подходы к расчету критической внешней нагрузки, приводящей к превышению допустимого значения усилия в приводе, не учитывают жесткость. Для более жестких устройств (например, металлообрабатывающих станков), либо роботов с относительно невысокими скоростями и динамической нагрузкой (устройств ориентации и позиционирования) значения реальных приводных усилий не должны значительно отличаться от рассчитанных теоретически по предложенным методам. В то же время для менее жестких конструкций механизмов параллельной структуры перераспределение нагрузки между кинематическими цепями за счет их различной податливости может вносить определенный вклад в отклонение результатов расчетов от реальных экспериментальных значений. Таким образом, проведение эксперимента по оценке корреляции жесткости и отклонения расчетных значений усилий в приводе от реальных представляет определенный интерес.

Как уже было отмечено в первой главе, механизмы типа Delta являются одними из наиболее широко используемых в промышленных робототехнических системах. Чаще всего данная схема применяется в высокоскоростных механизмах с легкими подвижными частями. Облегчение конструкции в конечном итоге приводит к снижению ее жесткости, что, однако, не обязательно является серьезным недостатком, поскольку требования к жесткости сильно разнятся в зависимости от области применения механизма. Тем не менее, механизм данного

семейства ввиду указанных обстоятельств представляет собой оптимальный объект для проведения упомянутого выше эксперимента.

Для экспериментальных исследований был собран 2-PSS.2-P(SS)₂ механизм типа Delta с четырьмя степенями свободы (рисунок 7.1), схема которого аналогична рассмотренной ранее в пункте 3.3 с той разницей, что в данном случае шарниры Гука заменены сферическими шарнирами. Данный факт означает, что механизм практически в любой точке рабочей зоны формально находится в особом положении типа «ПП», что, однако, не оказывает никакого влияния на его эксплуатационные характеристики.

Использование механизма с четырьмя степенями свободы вместо классического трехстепенного варианта предоставляет более широкие возможности по проведению экспериментов, связанных с его поведением при приближении к особым положениям. Стоит заметить, что устройства, построенные на схеме Delta с тремя степенями свободы, как правило, проектируются таким образом, чтобы их рабочая зона была свободна от особых положений.

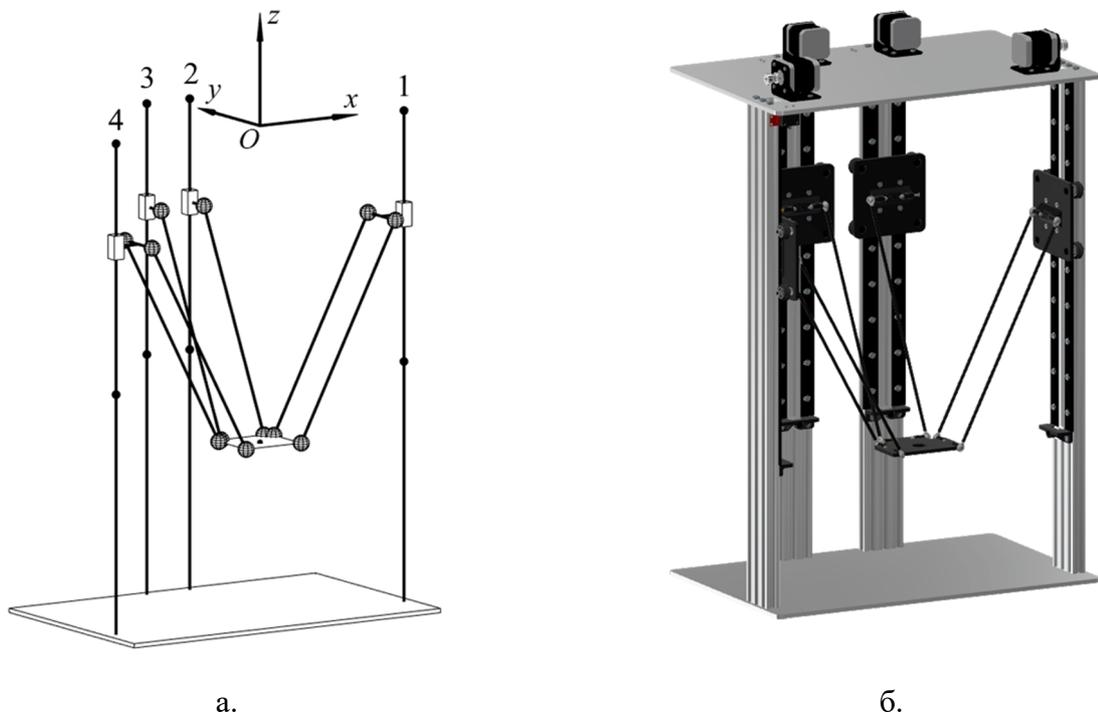


Рисунок 7.1. Механизм 2-PSS.2-P(SS)₂: схема с номерами цепей (а), CAD-модель (б)

Вертикальные стойки механизма выполнены из экструдированного алюминиевого профиля (V-slot) размером 60 × 20 мм. На стойках закреплены

направляющие типа OpenRail фирмы OpenBuilds, по которым перемещаются каретки, приводимые в движение шаговыми двигателями 17HS4401 (типоразмер NEMA 17) через передачу зубчатым ремнем типа GT2. Каретки, выходное звено, а также некоторые вспомогательные детали выполнены из PLA-пластика методом 3D печати. Для штанг использованы углепластиковые трубки внешним диаметром 5 мм со сферическими шарнирами типа «рыбий глаз» на концах. Верхнее и нижнее основание получены путем механической обработки на станке с ЧПУ двух пластин из сплава АМг2 толщиной 6 мм. Для управления роботом используется отладочная плата STM Nucleo-FR401RE и драйверы шагового двигателя А4988. Управление может осуществляться в двух режимах: перемещение в заранее заданную точку рабочей зоны, либо ручное управление посредством двух джойстиков, каждый из которых контролирует две степени свободы. Для этого в среде Mbed была создана специальная программа для микроконтроллера, реализующая указанные режимы.

Геометрические размеры, используемые для математического моделирования механизма (м):

- расстояние от центров шарниров, расположенных на каретке, до средней плоскости конструкционного профиля, проходящей через линию расположения его отверстий: $l_{AB} = 0,0365$;
- межосевое расстояние для шарниров штанги: $l_{BC} = 0,337$;
- расстояние от центров шарниров, расположенных на подвижной платформе, до ее нижней плоскости: $l_{DE} = 0,004$;
- расстояние между центрами соседних шарниров двойной цепи: $l_{B1B2} = l_{C1C2} = 0,070$;
- пределы перемещения каретки (верхний предел, соответствующей нулю координаты z , расположен на 0,005 м ниже положения срабатывания концевых выключателей): $h_{\min} = -0,355$, $h_{\max} = 0$;
- координаты, определяющие положение и ориентацию вертикальной стойки механизма и звена AB : $x_{A1} = 0,235$, $y_{A1} = 0$, $x_{B1} = 0,1985$, $y_{B1} = 0$, $x_{A2} = 0,035$, $y_{A2} = 0,235$, $x_{B2} = 0,035$, $y_{B2} = 0,1985$, $x_{A3} = -0,035$, $y_{A3} = 0,235$, $x_{B3} = -0,035$, $y_{B3} = 0,1985$, $x_{A4} = -0,235$, $y_{A4} = 0$, $x_{B4} = -0,1985$, $y_{B4} = 0$;

- координаты точек C_i в системе $Ex'y'z'$: $x'_{C1} = 0,045$, $y'_{C1} = 0$, $x'_{C2} = 0,035$, $y'_{C2} = 0,045$, $x'_{C3} = -0,035$, $y'_{C3} = 0,045$, $x'_{C4} = -0,045$, $y'_{C4} = 0$, для всех цепей $z'_C = l_{DE} = 0,004$.

Таким образом, по своим размерам и используемым конструктивным элементам и электронным компонентам данный механизм близок к широко распространенным и хорошо зарекомендовавшим себя 3D-принтерам, выполненным по схеме Delta.

Для проведения эксперимента в качестве станда используется горизонтально-фрезерный станок марки 6Н81Г (рисунок 7.2).

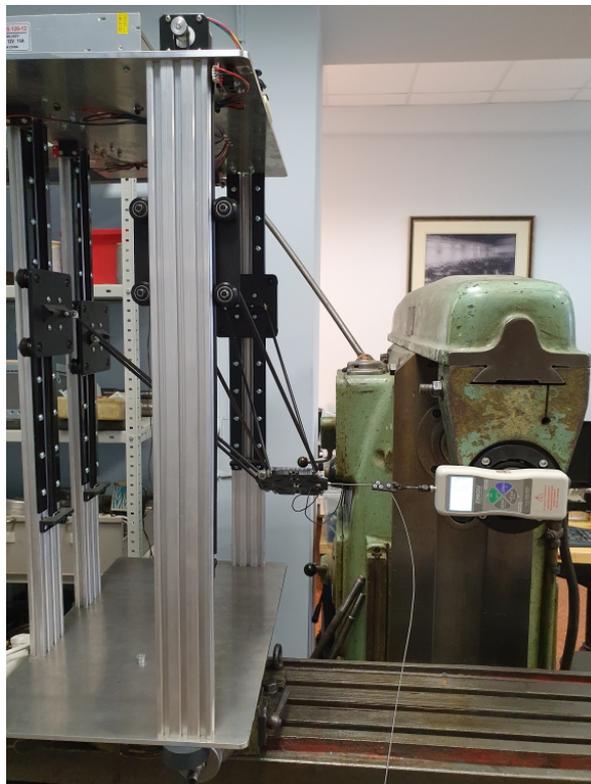


Рисунок 7.2. Общий вид экспериментального станда

Исследуемый механизм притянут винтами к съемному поворотному столу, который в свою очередь закреплен на столе станка, а на станочной консоли установлен электронный динамометр Zhiqu DS2-500N. Выходное звено механизма и динамометр соединены с помощью металлического троса. Таким образом, продольное перемещение стола станка приводит к нагружению выходного звена внешней силой за счет натяжения указанного троса. В то же время поперечное и

вертикальное перемещение стола, а также вращение съемного поворотного стола позволяют выставить механизм таким образом, чтобы направление возникающей силы совпадало с осью штока динамометра. Важно отметить, что жесткость станка, поворотного стола, динамометра и троса (при растяжении) значительно выше жесткости исследуемого механизма. Также при проведении экспериментов обеспечивается минимально возможная длина троса между точками его крепления к выходному звену и динамометру. Все это позволяет считать, что перемещение стола станка компенсируется только упругими деформациями звеньев механизма. При этом низкая жесткость механизма позволяет измерять перемещения по лимбу стола (цена деления 0,05 мм), не внося значимой погрешности. В процессе проведения эксперимента перемещение стола дополнительно контролировалось с помощью индикатора часового типа (цена деления 0,01 мм).

Важное значение при проведении эксперимента имеет не только контроль ошибки измерения непосредственно значения внешней силы, но также и отклонения направления действия этой силы от заданного. Пусть к выходному звену приложена внешняя нагрузка, представляющая собой некоторую чистую внешнюю силу, то есть, $\mathbf{L}_f = \mathbf{F}$, $\mathbf{L}_m = 0$. Согласно (2.41), в общем случае значение усилия в i -м приводе может быть рассчитано как скалярное произведение вектора \mathbf{F} на вектор \mathbf{j}_{Ti}^f , состоящий из соответствующих компонент i -й строки матрицы \mathbf{J}^T :

$$e_{ai} = -\|\mathbf{F}\| \cdot \|\mathbf{j}_{Ti}^f\| \cdot \cos \alpha_i,$$

где α_i – угол между векторами \mathbf{F} и \mathbf{j}_{Ti}^f .

Предположим теперь, что в процессе эксперимента при нагружении выходного звена реальное направление силы \mathbf{F} отклонилось от требуемого, но его норма при этом осталась неизменной. Фактически это означает, что изменился угол α_i . Оценить возникшее при этом относительное отклонение значения усилия в приводе можно следующим образом:

$$\Delta e_{ai} = \left| \frac{e_{ai} - e_{ai}^*}{e_{ai}} \right| \cdot 100\% = \left| \frac{\cos \alpha_i - \cos \alpha_i^*}{\cos \alpha_i} \right| \cdot 100\% = \left| 1 - \frac{\cos \alpha_i^*}{\cos \alpha_i} \right| \cdot 100\%,$$

где звездочкой обозначены величины, изменившиеся за счет отклонения вектора \mathbf{F} от заданного направления.

Очевидно, что чем сильнее угол α_i^* отличается от угла α_i , тем больше становится значение рассматриваемой относительной погрешности. Пусть абсолютная величина отклонения вектора \mathbf{F} от заданного направления выражается некоторым углом δ . Если величина данного угла неизменна, то значение α_i^* будет отличаться от α_i не более, чем на величину $\pm \delta$. Последнее соответствует случаю, когда вектор \mathbf{F}^* окажется в той же плоскости, что и векторы \mathbf{F} и \mathbf{j}_{Ti}^f . Тогда окончательно для оценки (по верхней границе) относительной погрешности расчета усилия в приводе можно использовать следующую формулу:

$$\Delta e_{ai} = \left| 1 - \frac{\cos(\alpha_i \pm \delta)}{\cos \alpha_i} \right| \cdot 100\%.$$

В зависимости от величины угла α_i и его знака наихудшим вариантом, дающим большее значение погрешности, может оказаться как вариант со знаком «+», так и со знаком «-». Поскольку в данном случае интерес представляет только абсолютная величина отклонения, достаточно рассмотреть только изменение угла α_i в интервале от 0° до 90° и отклонение $+\delta$ (рисунок 7.3).

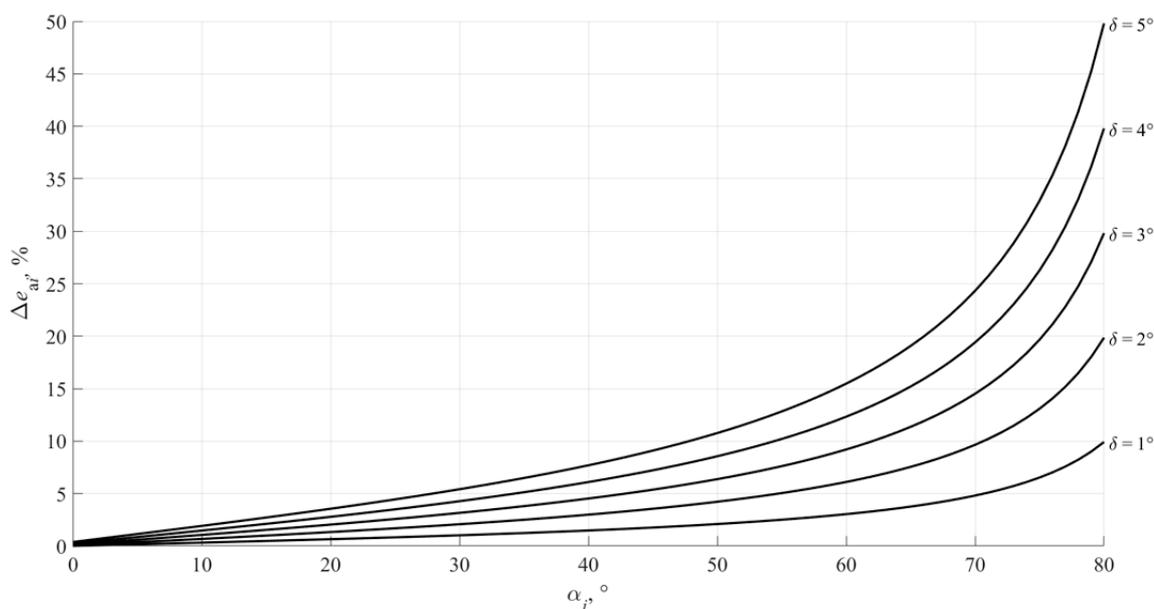


Рисунок 7.3. Относительная погрешность расчета усилия в приводе в зависимости от величины отклонения вектора внешней силы от заданного направления

Из графика видно, что, например, ошибка направления приложения внешней силы в 5° при значении α_i немного большем, чем 45° , приводит к возникновению погрешности вычисления усилия в приводе, превышающей 10 %. Иными словами, чем больше направление внешней силы не совпадает с наилучшим с точки зрения усилия в i -м приводе, тем важнее становится задача контроля за соблюдением этого направления в процессе эксперимента. Для решения данной задачи используется простая система визуального оповещения об отклонении направления внешней силы свыше некоторого значения угла δ (рисунок 7.4).

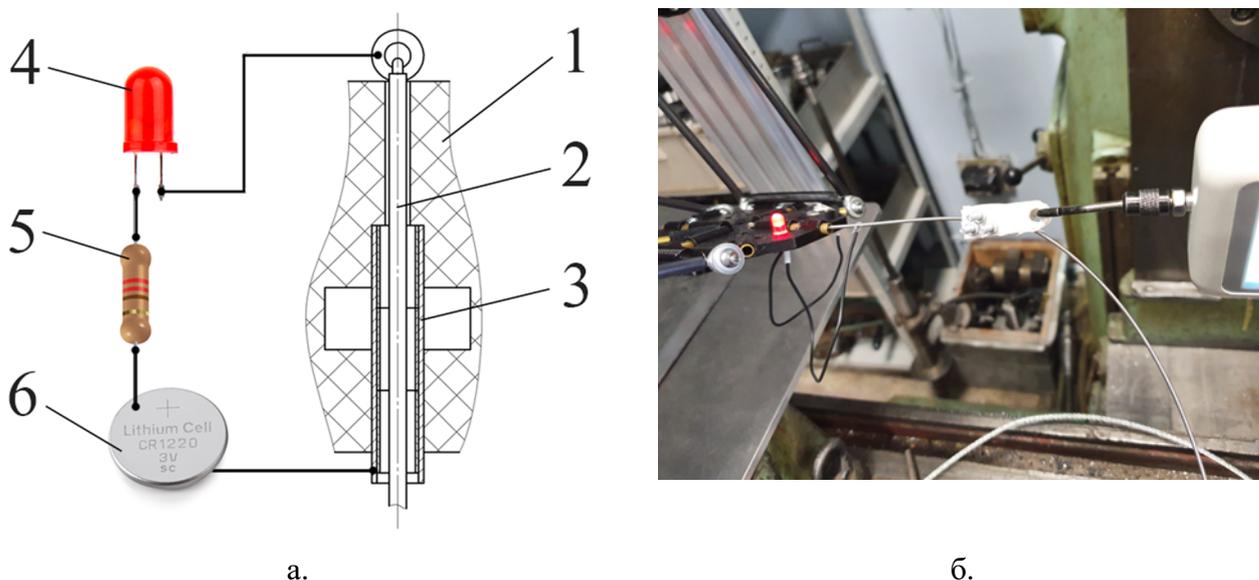


Рисунок 7.4. Контроль направления приложения внешней силы: схема системы контроля (а), срабатывание системы в процессе эксперимента (б)

Рассмотрим устройство и принцип работы данной системы согласно представленной схеме (рисунок 7.4.а). Выходное звено механизма 1 спроектировано таким образом, что в нем во всех направлениях, в которых в процессе эксперимента планируется приложение внешней нагрузки, имеются сквозные отверстия. Через данные отверстия проходит металлический трос 2, диаметром 1,65 мм, с помощью которого прикладывается нагрузка. С внешней стороны отверстий имеются углубления, в которые установлены латунные токопроводящие втулки 3. Наружная втулка имеет длину 25 мм и внутренний диаметр 4 мм, в этой втулке в свою очередь последовательно установлено три втулки длиной 8 мм и внутренним диаметром 3,6 мм. Конец троса соединен с

катодом светодиода 4. Анод диода через резистор 5 номиналом 220 Ом, соединен с положительным выходом элемента питания 6 (элемент CR1220, напряжение 3 В), отрицательный выход которого в свою очередь соединен с токопроводящими втулками. В результате, если в процессе проведения эксперимента при натяжении троса отклонение его оси от оси отверстия в выходном звене составляет больше, чем $1,2^\circ$, то происходит касание троса и внутренней втулки, что приводит к замыканию электрической цепи и включению диода (рисунок 7.4.б). При таком значении δ верхняя граница относительной погрешности вычисления усилия в приводе составит 5% при $\alpha_i = 67,18^\circ$ и 10% при $\alpha_i = 78,15^\circ$.

7.2. Экспериментальное исследование критической внешней силы, приводящей к срыву кареток

Перед тем, как проводить эксперимент по оценке влияния изменения жесткости механизма при приближении к особым положениям на усилие в приводах, необходимо удостовериться, что предсказываемые теоретическими расчетами значения этих усилий соответствуют экспериментальным.

Выражение (2.41), записанное для рассматриваемого механизма, имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} F_{a1} \\ F_{a2} \\ F_{a3} \\ F_{a4} \end{pmatrix} = -\mathbf{J}^T \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \\ M_y \end{pmatrix}, \quad (7.1)$$

где F_{ai} – сила, действующая на каретку в i -й кинематической цепи; F_x, F_y, F_z – внешние силы, действующие на выходное звено параллельно координатным осям x, y, z ; M_y – внешний момент, действующий на это звено и стремящийся повернуть его вокруг оси y' системы координат $Ex'y'z'$.

В общем случае, нагружая в процессе эксперимента выходное звено в разных направлениях внешней силой или моментом, по формуле (7.1) можно рассчитать силы в приводах, удерживающие каретки, и, получив экспериментальные данные об изменении этих сил в зависимости от направления внешнего усилия, сравнить их с результатами расчета. Однако для рассматриваемого механизма проведение подобного эксперимента невозможно, поскольку в качестве приводов в нем используются шаговые двигатели. В двигателях данного типа величина момента удержания всегда постоянна и зависит от силы тока, задаваемой путем настройки драйвера двигателя. Таким образом, в данном случае экспериментально можно определить только некоторое критическое усилие, воздействие которого на выходное звено приведет к провороту вала одного из шаговых двигателей и, как следствие, срыву соответствующей каретки.

Сила F_{ai} может быть определена как скалярное произведение вектора \mathbf{j}_{Ti} , представляющего собой i -ю строку матрицы \mathbf{J}^T , и вектора внешней нагрузки $\mathbf{L} = (F_x, F_y, F_z, M_y)^T$:

$$F_{ai} = -\langle \mathbf{j}_{Ti}, \mathbf{L} \rangle = -\|\mathbf{L}\| \cdot \langle \mathbf{j}_{Ti}, \mathbf{d}_L \rangle, \quad (7.2)$$

где \mathbf{d}_L – единичный вектор, задающий направление внешней нагрузки.

Как уже было отмечено в предыдущих главах, Евклидова норма вектора, содержащего одновременно силовые и моментные компоненты, не имеет физического смысла. Кроме того, приложение внешней силы к выходному звену механизма в данном эксперименте удобно выполнять в горизонтальной плоскости, параллельной плоскости Oxy и, соответственно, плоскости стола станка. Тогда:

$$\mathbf{L} = \mathbf{F}_{xy} = (F_x, F_y, 0, 0),$$

где \mathbf{F}_{xy} – вектор внешней силы, приложенной в плоскости, параллельной плоскости Oxy ; \mathbf{d}_F – единичный вектор направления вектора внешней силы.

Пусть $F_{ai}^{кр}$ – значение критической силы срыва каретки в i -й кинематической цепи, а $\mathbf{F}_{xy}^{кр}$ – соответствующий ей вектор внешней силы. Тогда, подставив данные

величины в (7.2), можно получить выражение для расчета величины внешней нагрузки $\|\mathbf{F}_{xy}^{кр}\|$:

$$\|\mathbf{F}_{xy}^{кр}\| = \frac{-F_{ai}^{кр}}{\langle \mathbf{j}_{Ti}, \mathbf{d}_F \rangle}. \quad (7.3)$$

Важно отметить, что значение силы $F_{ai}^{кр}$ может быть как положительным (сила действует вверх), так и отрицательным (сила действует вниз), поэтому направление действия этой силы определяется таким образом, чтобы при расчете значения $\|\mathbf{F}_{xy}^{кр}\|$ по формуле (7.3) это значение не оказалось отрицательным.

Таким образом, для некоторого направления, заданного вектором \mathbf{d}_F , при известной силе $F_{ai}^{кр}$ можно рассчитать величину внешней силы, которая приведет к срыву этой каретки. Затем в указанном направлении можно нагрузить выходное звено внешней силой до срыва каретки и сравнить полученное уже экспериментальное значение этой силы с расчетным. При этом значение $F_{ai}^{кр}$ для каждой каретки также целесообразно установить экспериментальным путем, поскольку, во-первых, паспортный момент удержания двигателя может отличаться от реального, особенно в условиях, когда отсутствует возможность точного контроля силы тока, во-вторых, таким факторам, влияющим на КПД привода, как наличие ременной передачи, трение колес каретки о направляющие и т.д., довольно сложно теоретически дать точную количественную оценку.

Перейдем к поэтапному рассмотрению эксперимента и соответствующих результатов. Все измерения производились при нахождении выходного звена точке с координатами $x = 0$ м, $y = -0,1$ м, $z = -0,4$ м, $\varphi_y = 0^\circ$. Данная точка была выбрана из соображений минимизации влияния близости к особым положениям.

Вначале было проведено измерение сил срыва кареток. Для этого с помощью динамометра к каждой каретке прикладывалась нагрузка до тех пор, пока не происходил ее срыв. В каждом направлении (вверх и вниз) было произведено по 20 измерений. Контроль направления приложения нагрузки осуществлялся с помощью специального адаптера с электронным устройством, аналогичным описанному ранее. Далее каждая выборка была проверена на принадлежность

нормальному распределению с помощью теста Андерсона-Дарлинга с уровнем значимости 5 %. Также для каждой выборки были рассчитаны математическое ожидание μ и среднеквадратическое отклонение σ (таблица 7.1).

Таблица 7.1. Результаты измерения силы срыва кареток.

№ каретки	Срыв вверх			Срыв вниз		
	μ , Н	σ , Н	p	μ , Н	σ , Н	p
1	30,19	0,56	0,15	25,30	0,65	0,10
2	35,20	1,13	0,19	31,39	0,28	0,40
3	33,11	0,69	0,73	29,79	0,25	0,70
4	30,10	0,95	0,06	24,48	0,35	0,74

Из таблицы видно, что все выборки имеют нормальное распределение, поскольку $p \geq 0,05$, т.е. нулевая гипотеза (принадлежность выборки нормальному распределению) по результатам теста не отвергается. Также можно отметить, что для каждой каретки математическое ожидание силы срыва вверх больше, чем сила срыва вниз. Это объясняется конструкцией механизма: в первом случае сила, приложенная к каретке, передается на вал шагового двигателя через промежуточный шкив, расположенный в нижней части вертикальной направляющей, в то время как во втором случае эта сила передается сразу на шкив, расположенный на валу двигателя.

Далее в плоскости, параллельной Oxy , к выходному звену прикладывалась внешняя сила в различных направлениях до того момента, когда происходил срыв какой-либо каретки. При этом фиксировалось значение критической внешней силы, а также номер каретки и направление ее срыва. Всего было исследовано 8 направлений приложения внешней силы с шагом, равным 45° , для каждого из которых было проведено по 20 измерений. Нагружение выходного звена внешним моментом в данном эксперименте не проводилось. Как и в предыдущем случае, выборки анализировались с помощью теста Андерсона-Дарлинга, после чего вычислялись параметры распределения. Далее полученные результаты

сравнивались со значениями, вычисленными по формуле (7.3) из результатов экспериментального определения силы срыва каждой каретки (таблица 7.2).

Таблица 7.2. Результаты измерения критической внешней силы.

Направление внешней силы	Каретка и направление срыва		Внешняя критическая сила				
	Расчет	Эксперимент	Расчет		Эксперимент		
			μ , Н	σ , Н	μ , Н	σ , Н	p
0 °	2, вниз	4, вниз	26,50 (2)	0,24 (2)	25,67	0,30	0,83
			26,57 (4)	0,38 (4)			
45 °	4, вниз	4, вниз	22,25	0,32	28,83	0,23	0,12
90 °	4, вниз	1, вниз	38,58 (4)	0,55 (4)	37,88	0,35	0,60
			39,93 (1)	1,02 (1)			
135 °	1, вниз	1, вниз	23,03	0,59	22,24	0,29	0,20
180 °	3, вниз	1, вниз	25,15 (3)	0,19 (3)	24,54	0,30	0,17
			27,49 (1)	0,70 (1)			
225 °	3, вниз	3, вниз	23,16	0,19	24,49	0,28	0,41
270 °	3, вниз	3, вниз	46,96	0,39	48,34	0,56	0,54
315 °	2, вниз	2, вниз	24,41	0,22	25,75	0,35	0,35

Отметим, что, как и в предыдущем случае, все выборки имеют нормальное распределение.

Можно видеть, что в трех случаях происходил срыв не той каретки, которая предсказывалась расчетами. При этом, однако, значения расчетной внешней критической силы для обеих кареток весьма близки (в скобках указан номер каретки, для которой приведено соответствующее значение математического ожидания или среднеквадратического отклонения). Это говорит о том, что для рассматриваемого направления внешней силы, теоретически, вероятности срыва для двух разных кареток практически одинаковы. На практике же то, какая именно каретка сдвинется с места, определяется многочисленными факторами, оценить которые и сделать на основе этой оценки точное предсказание сложно и не

представляется целесообразным. Действительно, гораздо более значимую практическую значимость представляет собой адекватная оценка непосредственного значения критической внешней силы вне зависимости от того, какой именно привод оказывается перегруженным. Стоит также отметить, что во всех случаях в каждом из двадцати нагружений наблюдался срыв только указанной в таблице каретки и никакой другой.

Также в результатах прослеживается четкое влияние того факта, что критическая сила срыва кареток вниз меньше таковой для срыва вверх. Так, в теории, при идеальной механической передаче для двух противоположных направлений приложения внешней силы должен наблюдаться срыв одной и той же каретки, но в разных направлениях. Однако, как видно из результатов эксперимента, этого не происходит. Этот факт подтверждает правильность сделанного ранее выбора в пользу того, чтобы экспериментально определять именно критическую силу срыва каретки в разных направлениях, а не момент удержания шагового двигателя или, что было бы еще менее надежным, полагаться на его паспортное значение.

Подведем итоги данного эксперимента (рисунок 7.5).

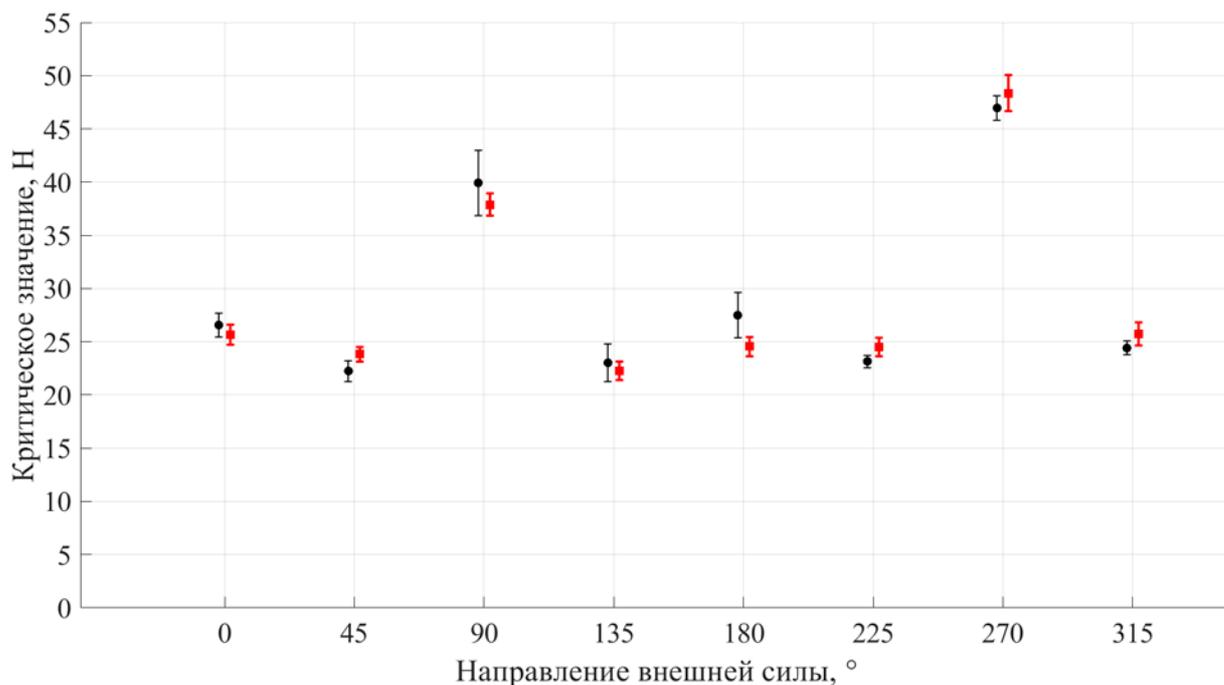


Рисунок 7.5. Расчетное (черный) и экспериментальное (красный) значения критической внешней силы в зависимости от направления ее приложения ($\mu \pm 3\sigma$)

По графику, иллюстрирующему результат, хорошо видно, что результаты измерения величины критической внешней силы, приводящей к срыву каретки, для всех направлений хорошо согласуются со значениями, полученными расчетным путем из экспериментальных данных по срыву непосредственно самих кареток. Различие между математическими ожиданиями экспериментальных и расчетных значений составляет не более 7,1 % для всех направлений, кроме 180 °, для которого эта величина составляет 10,73 %, что, однако, также является хорошим результатом. При этом дисперсия, особенно для экспериментальных значений, невелика, что наглядно видно по разбросу $\pm 3\sigma$ на графике. Стоит отметить, что для направлений 0 °, 90 ° и 180 °, на графике изображены расчетные значения для тех кареток, срыв которых наблюдался при непосредственном проведении эксперимента, а не для тех, срыв которых предсказывался расчетами.

Таким образом, при проведении эксперимента по нагружению выходного звена внешней силой при нахождении этого звена в точке, далекой от особых положений, продемонстрирована адекватность расчетных зависимостей. Это позволяет в дальнейшем использовать их без опасений внести дополнительную погрешность в результаты. Также на примере различий в значениях критической силы срыва одной и той же каретки в разных направлениях (вверх или вниз) было продемонстрирована необходимость учета конструктивных особенностей приводов механизма при прогнозировании значений критических усилий как для самого привода, так и для механизма в целом.

7.3. Экспериментальное исследование влияния изменения жесткости на отклонение значения усилия в приводе от расчетного при приближении к особому положению

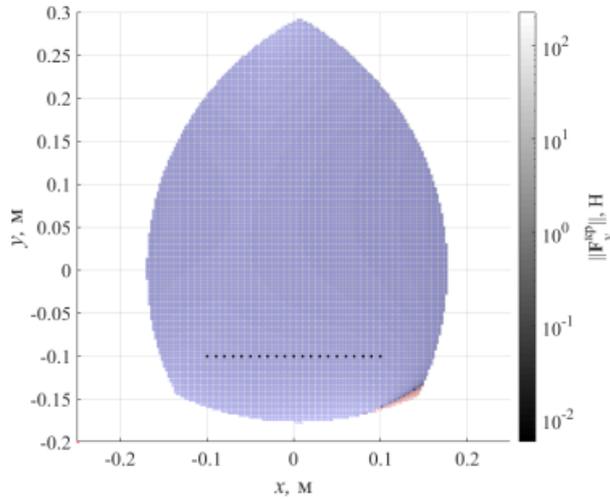
Как уже было отмечено ранее, рассматриваемый механизм обладает заведомо низкой жесткостью. При этом все приведенные ранее расчетные

зависимости жесткость механизмов никак не учитывают. В то же время очевидно, что различие в жесткости между отдельными кинематическими цепями механизма способно повлиять на распределение внешней нагрузки между этими цепями, а значит и на усилия в приводах и напряжения в конструктивных элементах механизма.

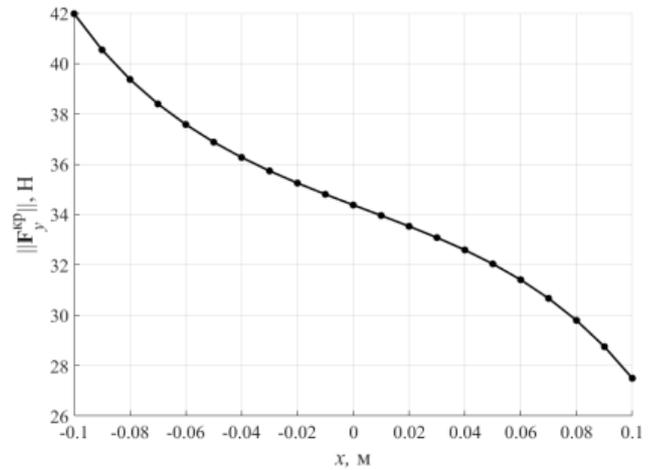
В предыдущем эксперименте было показано, что в точке, далекой от особых положений, значения критической внешней силы, предсказанные расчетами, хорошо согласуются с экспериментальными. Это позволяет предположить, что сама по себе невысокая жесткость механизма не оказывает существенного влияния на точность расчетов. В то же время хорошо известно, что при приближении к особым положениям происходит уменьшение жесткости. При этом, в общем случае, это изменение для отдельных кинематических цепей может существенно различаться. Таким образом, целесообразно провести экспериментальное исследование влияния именно изменения жесткости механизма на величину отклонения расчетных значений критической силы от реальных.

В данном эксперименте координаты установлены следующие значения координат выходного звена: $y = -0,1$ м, $z = -0,4$ м, $\varphi_y = 30^\circ$. Наклон выходного звена позволяет ввести в рабочую зону особые положения типа «ПУ» (рисунок 7.6.а, нижний правый угол среза рабочей зоны). Изменяя при этом только координату x , что удобно с практической точки зрения при проведении эксперимента, можно приближать или отдалять выходное звено от особого положения. В данном случае была выбрана 21 точка: значение x изменялось в пределах от $-0,1$ м до $0,1$ м включительно с шагом $0,01$ м (рисунок 7.6.а.) В указанных точках к выходному звену прикладывалась внешняя сила. Из соображений удобства проведения эксперимента направление этой силы всегда параллельно оси Oy , то есть $\mathbf{F} = F_y$ (направление 270°). В каждой точке проводилось по 20 измерений с последующей проверкой выборки на нормальность и расчетом параметров распределения. Учитывая полученные ранее данные о критических силах срыва кареток (таблица 7.1), по формуле (7.3) можно рассчитать критические значения внешней силы $\|\mathbf{F}_y^{kp}\|$ (рисунок 7.6.б), после чего сравнить

полученные значения с экспериментальными (таблица 7.3). При этом во всех точках расчетами предсказывается срыв каретки второй кинематической цепи вниз.



а.



б.

Рисунок 7.6. Точки проведения эксперимента: расположение на срезе рабочей зоны (а), изменение расчетного значения внешней критической силы (б)

Таблица 7.3. Результаты измерения критической внешней силы (срыв каретки № 2 вниз).

x, м	Внешняя критическая сила					x, м	Внешняя критическая сила				
	Расчет		Эксперимент				Расчет		Эксперимент		
	μ, Н	σ, Н	μ, Н	σ, Н	p		μ, Н	σ, Н	μ, Н	σ, Н	p
-0,1	41,97	0,38	41,24	1,41	0,85	0,01	33,96	0,30	35,61	1,05	0,40
-0,09	40,54	0,36	40,96	0,91	0,47	0,02	33,53	0,30	34,28	0,94	0,80
-0,08	39,37	0,35	39,45	0,83	0,40	0,03	33,08	0,30	33,99	1,19	0,36
-0,07	38,40	0,34	39,29	1,23	0,91	0,04	32,59	0,29	33,85	0,81	0,84
-0,06	37,58	0,34	39,47	0,85	0,84	0,05	32,04	0,29	33,61	0,96	0,98
-0,05	36,88	0,33	37,45	1,02	0,10	0,06	31,41	0,28	34,41	0,84	0,67
-0,04	36,27	0,33	36,36	1,05	0,48	0,07	30,67	0,28	35,28	1,43	0,83
-0,03	35,73	0,32	35,74	1,08	0,40	0,08	29,80	0,27	34,41	1,26	0,09
-0,02	35,25	0,32	35,81	1,36	0,38	0,09	28,75	0,26	37,22	0,71	0,72
-0,01	34,80	0,31	35,99	1,21	0,90	0,1	27,50	0,25	38,37	0,70	0,17
0	34,38	0,31	36,87	1,20	0,48						

Как видно из результатов расчета, значение критической внешней силы изменяется от 41,97 Н при $x = -0,1$ м до 27,5 Н при $x = 0,1$ м, то есть ожидаемо уменьшается при приближении к особому положению. В то же время можно отметить, что разница между расчетными и экспериментальными значениями также увеличивается. Также можно видеть, что экспериментальное значение оказывается больше расчетного (рисунок 7.8), то есть в исследуемом направлении приложения внешней силы механизм в реальности может выдержать большую нагрузку, чем предсказывается расчетом. При этом величина отклонения между расчетными и экспериментальными значениями достигает 39,53 % при $x = 0,1$ м.

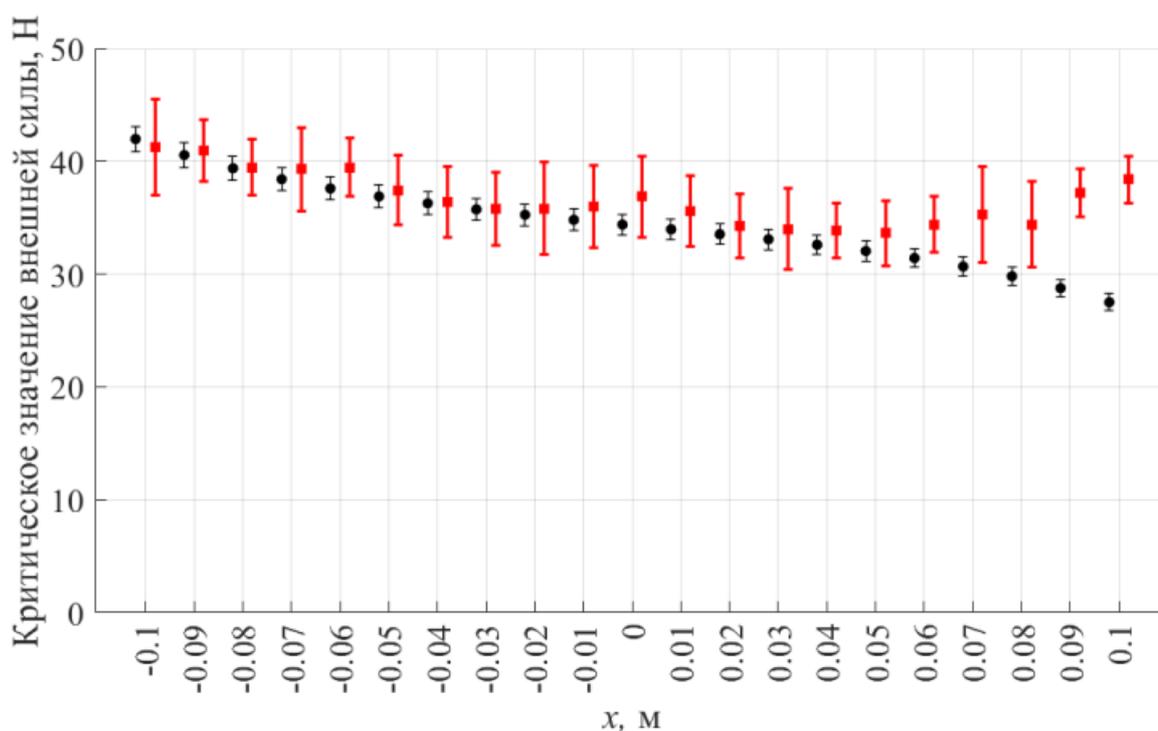
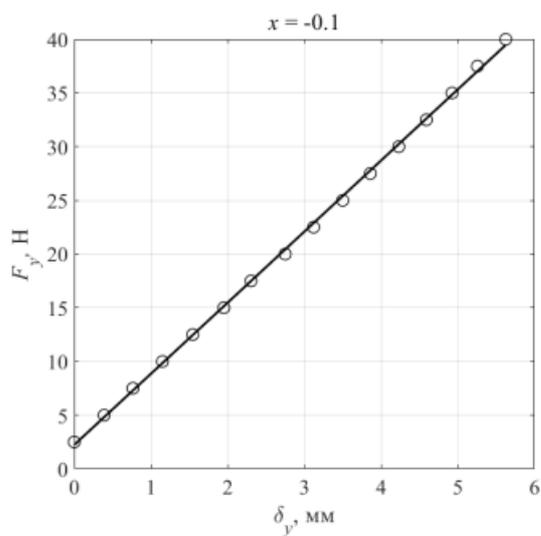


Рисунок 7.7. Расчетное (черный) и экспериментальное (красный) значения критической внешней силы в зависимости от координаты x ($\mu \pm 3\sigma$)

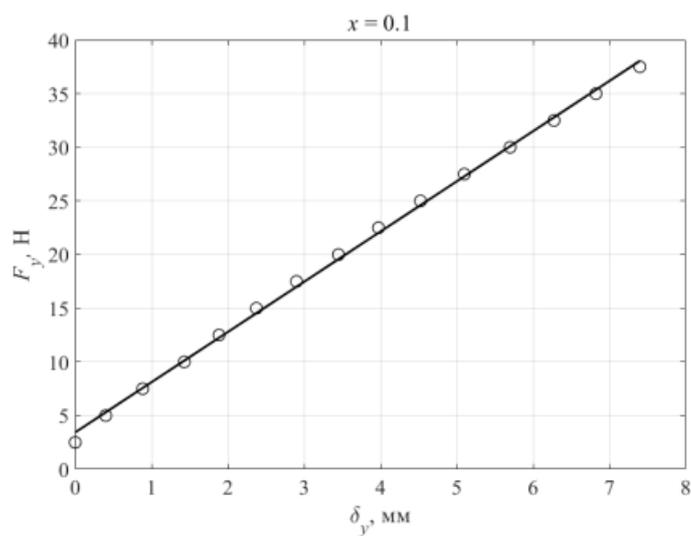
По графику хорошо видно, что в результате эксперимента были получены большие значения среднеквадратических отклонений, нежели те, что были предсказаны расчетом. Так, наибольшего значения (относительно математического ожидания) среднеквадратическое отклонение достигает при $x = 0,07$ м и составляет 4,06 % от значения математического ожидания, что соответствует разбросу $\pm 12,18$ %, если рассматривать диапазон $\pm 3\sigma$. При этом следует обратить внимание

на то, что относительная величина среднеквадратического отклонения не увеличивается при приближении к особому положению, а значит можно говорить о том, что точность измерения экспериментального значения внешней силы достаточна во всех точках. В то же время в предыдущем эксперименте была продемонстрирована адекватность результатов, получаемых расчетным путем. Достоверность как расчетных, так и экспериментальных значений критической внешней силы позволяет сделать вывод о том, что нарастающее при приближении к особому положению отклонение между этими величинами вызвано влиянием одного или нескольких факторов. И, как уже было отмечено ранее, одним из наиболее вероятных факторов является изменение жесткости механизма.

Чтобы проверить данную гипотезу необходимо измерить жесткость механизма в направлении прилагаемой внешней силы в каждой из исследуемых точек. Для этого при нагружении выходного звена силой F_y с шагом, равным 2,5 Н, измерялось перемещение стола станка, т.е., по сути, перемещение выходного звена механизма δ_y в направлении действующей силы. При этом принималось, что $\delta_y = 0$ при $F_y = 2,5$ Н. Таким образом, в каждой точке были получены характеристики жесткости. С целью краткой демонстрации рассмотрим две такие характеристики для крайних точек: $x = -0,1$ м (рисунок 7.8.а) и $x = 0,1$ м (рисунок 7.8.б).



а.



б.

Рисунок 7.8. Примеры результатов измерения жесткости механизма (для направления 270°): при $x = -0,1$ м (а), при $x = 0,1$ м (б)

Из графиков видно, что результаты непосредственных измерений (обозначены символом «○») хорошо согласуются с линейной моделью жесткости (сплошная линия), полученной в результате линейной аппроксимации методом наименьших квадратов. Аналогичная картина наблюдается и во всех остальных точках, поэтому для определения значения жесткости механизма в направлении внешней силы F_y может быть использована линейная модель (таблица 7.4).

Таблица 7.4. Жесткость механизма в направлении силы F_y .

x , м	Размер выборки (включая $\delta_y = 0$)	Жесткость, Н/мм	x , м	Размер выборки (включая $\delta_y = 0$)	Жесткость, Н/мм
-0,1	16	6,620	0,01	14	6,088
-0,09	16	6,412	0,02	13	6,123
-0,08	15	6,410	0,03	13	6,101
-0,07	15	6,416	0,04	13	6,127
-0,06	15	6,461	0,05	13	5,926
-0,05	14	6,305	0,06	13	5,422
-0,04	14	6,196	0,07	14	5,192
-0,03	14	6,302	0,08	13	4,764
-0,02	14	6,217	0,09	14	4,815
-0,01	14	6,117	0,1	15	4,678
0	14	5,937			

Используя полученные данные о значениях критической силы срыва и жесткости механизма в направлении действия этой силы, можно перейти непосредственно к рассмотрению влияния жесткости на отклонение экспериментального и расчетного значений указанной силы. Пусть данное отклонение определяется следующим образом:

$$\Delta F_y^{\text{кр}} = \frac{F_{y,\text{эксп}}^{\text{кр}} - F_{y,\text{расч}}^{\text{кр}}}{F_{y,\text{расч}}^{\text{кр}}} \cdot 100\%,$$

где «эксп» указывает на то, что значение получено в результате эксперимента, а «расч» – путем расчета. Положительное значение отклонения говорит о том, что реально выдерживаемая внешняя нагрузка больше расчетной, в то время как отрицательное свидетельствует о том, что расчет дает завышенное значение этой нагрузки.

При рассмотрении результатов эксперимента можно явным образом прослеживается связь между изменением жесткости механизма и изменением отклонения значения экспериментально определенной критической силы от расчетного (рисунок 7.9).

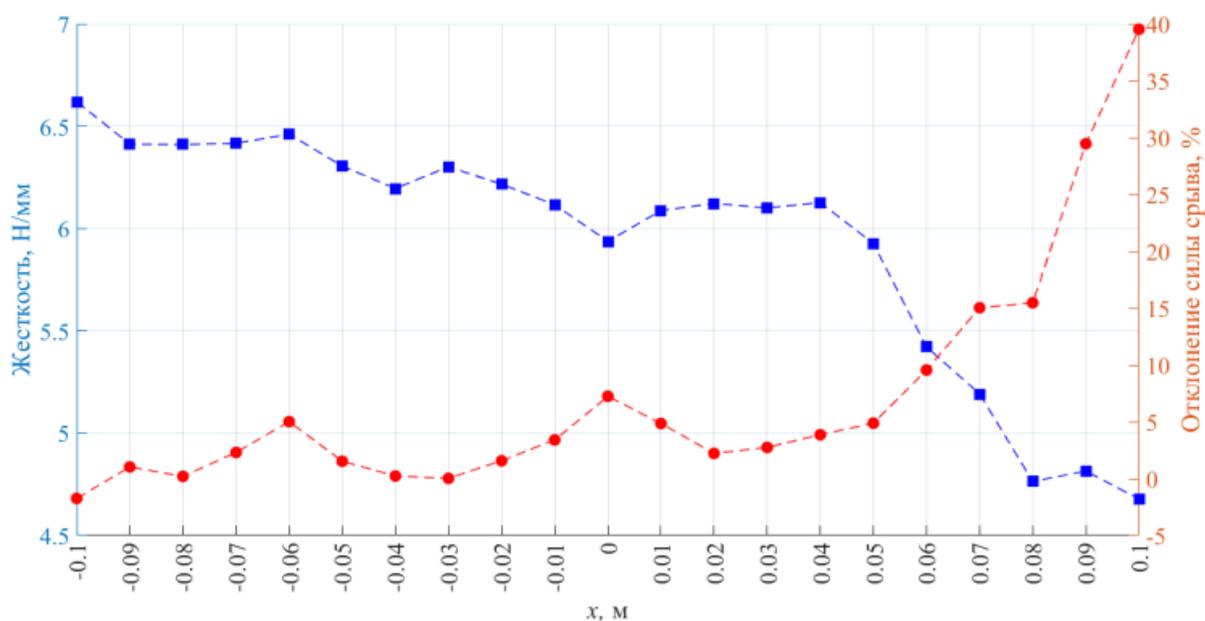


Рисунок 7.9. Изменение жесткости (синий) и отклонения экспериментального и расчетного значений внешней критической силы (красный)

Для количественной оценки взаимозависимости данных величин можно рассчитать коэффициент корреляции (Пирсона), значение которого в данном случае составило $-0,899$, что говорит о высокой степени обратной корреляции между двумя выборками.

Стоит заметить, что жесткость практически любого механизма параллельной структуры может быть теоретически смоделирована с некоторой точностью, например, при помощи метода матричного анализа конструкций [160], при котором промежуточных звенья, как правило, представляются в виде балок. При этом, если

точность моделирования жесткости будет достаточной, то возможно скорректировать расчетные значения внешних критических усилий, чтобы уменьшить погрешность между ними и экспериментальными значениями вблизи особых положений.

Пусть L_{xp} – усилие, приложенное к выходному звену в направлении выходной координаты x_p ($p = 1 \dots n$). Пусть также k_i^{xp} – жесткость i -й кинематической цепи в направлении x_p . Поскольку выходное звено является общим для всех цепей, его перемещение δx_p под действием L_{xp} одинаково вне зависимости от того, какая цепь рассматривается. Иными словами, при разной жесткости кинематических цепей внешняя нагрузка между ними будет распределяться неравномерно. Тогда для каждой цепи можно записать:

$$L_i^{xp} = k_i^{xp} \cdot \delta x_p,$$

где L_i^{xp} – доля внешней нагрузки по координате x_p , приходящаяся на i -ю цепь.

Отсюда следует, что для некоторых двух i -й и j -й цепей справедливо следующее соотношение:

$$\frac{L_i^{xp}}{k_i^{xp}} = \frac{L_j^{xp}}{k_j^{xp}},$$

то есть для любой j -й цепи

$$L_j^{xp} = \frac{L_i^{xp} \cdot k_j^{xp}}{k_i^{xp}}. \quad (7.4)$$

Также очевидно, что сумма всех нагрузок, воспринимаемых отдельными кинематическими цепями, должна быть равна внешнему усилию, которое действует на выходное звено. Тогда для механизма с числом кинематических цепей, равным U :

$$\sum_{j=1}^U L_j^{xp} = L_{xp}. \quad (7.5)$$

Подставив (7.4) в (7.5), можно рассчитать долю внешней нагрузки по координате x_p , приходящуюся на i -ю кинематическую цепь:

$$L_i^{xp} = \frac{k_i^{xp}}{\sum_{j=1}^U k_j^{xp}} \cdot L_{xp}. \quad (7.6)$$

Используя зависимость (7.6), можно модифицировать уравнение (2.41):

$$\mathbf{e}_a = -\mathbf{J}^T \cdot \mathbf{K}' \cdot \mathbf{L}. \quad (7.7)$$

Для механизма с количеством активных пар, равным N_a :

$$\mathbf{K}' = \begin{pmatrix} \frac{k_1^{x1}}{\sum_{j=1}^U k_j^{x1}} & \dots & \frac{k_1^{xn}}{\sum_{j=1}^U k_j^{xn}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{k_{N_a}^{x1}}{\sum_{j=1}^U k_j^{x1}} & \dots & \frac{k_{N_a}^{xn}}{\sum_{j=1}^U k_j^{xn}} \end{pmatrix},$$

Таким образом, при необходимости учета жесткости кинематических цепей в процессе расчета усилий в приводах механизма для заданной внешней нагрузки можно использовать зависимость (7.7).

Главный недостаток представленного подхода заключается в сложности определения жесткости отдельных кинематических цепей в различных направлениях, поскольку ее моделирование для реальных устройств требует учета множества многочисленных факторов и параметров. В то же время тот факт, что рассматриваемый в работе теоретический метод расчета дает заниженную оценку критической силы по сравнению с реальными значениями вблизи особых положений, на практике означает увеличение надежности механизма в данных областях. При этом снижение жесткости, как известно, ведет к различным негативным последствиям: уменьшению собственной частоты механизма, увеличению упругих перемещений и понижению точности позиционирования под внешней нагрузкой и т.д. В этой связи целесообразность корректировки расчетных

значений критической внешней нагрузки в сторону ее уменьшения вблизи особых положений за счет учета жесткости кинематических цепей определяется конкретным применением механизма и накладываемыми на его технические параметры и эксплуатационные характеристики ограничениями.

7.4. Результаты и выводы по главе

- разработана CAD-модель и изготовлен физический прототип механизма 2-PSS.2-P(SS)₂, а также создано программное обеспечение в среде Mbed для управления его движением;
- с использованием изготовленного прототипа проведено экспериментальное исследование механизма, а именно критической силы, приводящей к срыву кареток при приложении внешней силы в различных направлениях в одной точке, а также при приложении внешней силы в одном направлении в различных точках рабочей зоны;
- погрешность определения критической силы в приводах для различных направлений приложения внешней силы составила не более 10,73 %, что подтверждает адекватность теоретических расчетов;
- при уменьшении жесткости механизма в направлении прилагаемой внешней нагрузки, вызванной приближением к особому положению типа «ПУ», наблюдается значительное (до 39,53 %) увеличение погрешности вычисления критической силы. Коэффициент корреляции величины погрешности с жесткостью механизма составил $-0,899$. При этом предложенный в работе метод дает заниженную (т.е. «в запас») оценку допустимой внешней нагрузки, приводящей к перегрузке приводов, за счет перераспределения усилий между кинематическими цепями. Расчетные значения при необходимости могут быть скорректированы путем учета жесткости отдельных кинематических цепей.

ГЛАВА 8. РАЗРАБОТКА КОНСТРУКЦИИ УСТРОЙСТВА ДЛЯ 3D-ПЕЧАТИ ЭЛЕКТРОНИКИ НА БАЗЕ МЕХАНИЗМА ТИПА DELTA С ЧЕТЫРЬМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

8.1. Техническое задание и основные задачи синтеза и анализа механизма, решаемые при разработке конструкции

Поскольку предлагаемые в работе критерии близости к особым положениям напрямую связаны со скоростными, силовыми и прочностными характеристиками механизмов, целесообразно привести пример использования указанных критериев при разработке конструкции реального устройства. В качестве такого примера рассмотрим ключевые этапы конструирования механизма типа Delta с четырьмя степенями свободы, предназначенного для использования в установке по отработке процесса послойной печати электроники.

Техническое задание на устройство содержит следующие требования:

- размер рабочей зоны не менее ($D \times Ш \times В$) 150 мм \times 150 мм \times 50 мм с учетом размещения между основанием и выходным звеном стола высотой 180 мм;
- на выходном звене должно быть размещены две печатные головки (суммарная масса с дополнительным оборудованием не более 0,5 кг);
- механизм должен обеспечивать отвод вверх неактивной головки минимум на 3 мм без использования дополнительных приводов или устройств, размещаемых на выходном звене;
- на выходном звене располагаться площадка размером 100 мм \times 100 мм с толщиной металла до 3 мм, предназначенная для размещения печатных головок;
- точность позиционирования механизма и его повторяемость должны обеспечивать 1 класс точности печатных плат согласно ГОСТ Р 53429-2009 (ширина дорожек и расстояние между ними не менее 0,75мм) с

возможностью повышения в дальнейшем точности до 4 класса (ширина дорожек и расстояние между ними не менее 0,75мм);

- скорость выходного звена в процессе печати должна составлять не менее 0,1 м/с;
- механическая часть устройства должна подразумевать возможность переоснащения выходного звена оборудованием массой до 10 кг, перемещаемого с ускорением до 3 м/с²;
- материал выходного звена и основных несущих элементов конструкции – алюминиевый сплав.

Из представленных технических требований естественным образом вытекают основные задачи синтеза и анализа, которые необходимо решить при разработке конструкции устройства:

- выбор геометрических параметров механизма (параметрический синтез), обеспечивающих требуемые размеры рабочей зоны с учетом возможных конструктивных ограничений;
- обеспечение отсутствия особых положений в рабочей зоне механизма;
- расчет нагрузок на приводы и конструктивные элементы механизма, проверка их прочности;
- подбор двигателей, обеспечивающих требования по скорости выходного звена и перемещаемой массе в любой точке рабочей зоны.

Перейдем к непосредственному решению поставленных задач.

8.2. Параметрический синтез механизма с учетом конструктивных ограничений и обеспечения отсутствия особых положений в рабочей зоне

Первой задачей, решаемой при разработке конструкции является параметрический синтез механизма. Для выбора основных геометрических параметров механизма необходимо знать требуемые размеры его рабочего

пространства. Так, например, можно видеть, что с учетом необходимости размещения стола высотой 180 мм внутри рабочей зоны механизма, ее высота должна составлять не менее 230 мм. Кроме того, важное значение имеют требования к размерам выходного звена и размещению на нем оборудования. Рассмотрим предполагаемую компоновку выходного звена (рисунок 8.1).

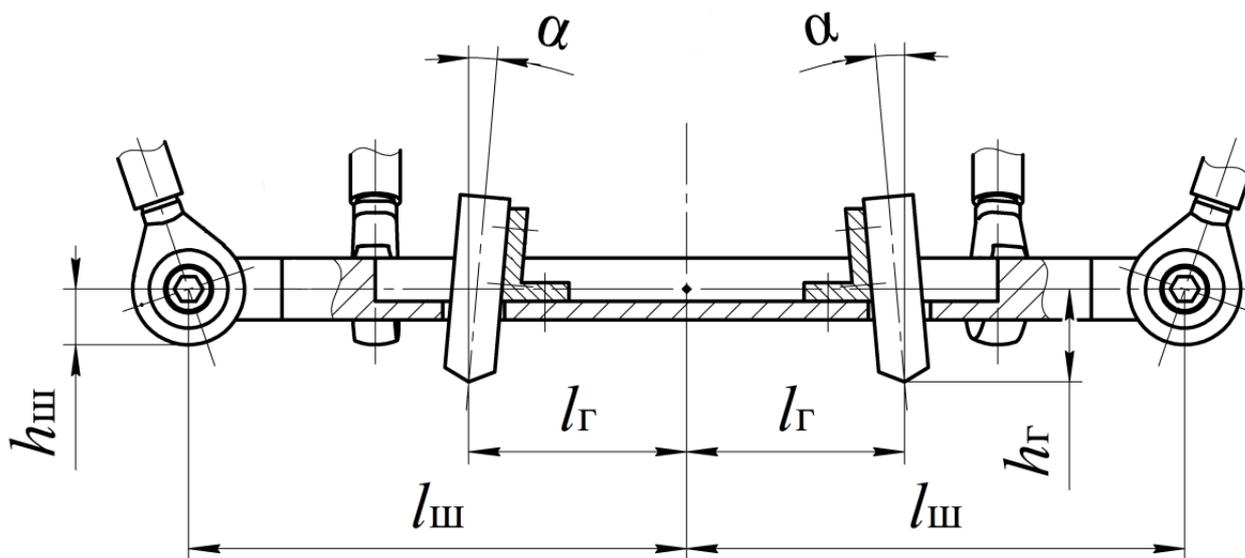


Рисунок 8.1. Предполагаемая компоновка выходного звена (вид спереди)

Расстояние от центра платформы до центра сферического шарнира $l_{\text{ш}}$ напрямую зависит от размера монтажной площадки для печатающих головок. По техническим требованиям половина ширины указанной площадки составит 50 мм. С учетом необходимости обеспечения жесткости выходного звена данная площадка должна быть окружена «рамкой» большей толщины. Сбоку от «рамки» должны быть расположены оси сферических шарниров. При этом, для обеспечения беспрепятственного поворота указанных шарниров, а также для удобства их монтажа, оси должны располагаться на некотором удалении от «рамки». С учетом вышесказанного, длина $l_{\text{ш}}$ балы принята равной 80 мм, толщина платформы – 10 мм. Согласно требованиям к материалу основных деталей механизма (в т.ч. выходного звена), для их изготовления был выбран сплав Д16т. Заготовками для всех деталей служат плиты из указанного материала, выполненные по ГОСТ 17232-99. С учетом предварительно назначенного диаметра оси шарнира, равного 6 мм, и необходимости закрепления данной оси на платформе, габаритные размеры

платформы составили ($Д \times Ш \times В$) 174 мм \times 152 мм \times 10 мм (рисунок 8.2). Также в выходном звене предусмотрено два отверстия под цилиндрические штифты диаметром 6 мм, необходимые для калибровки устройства.

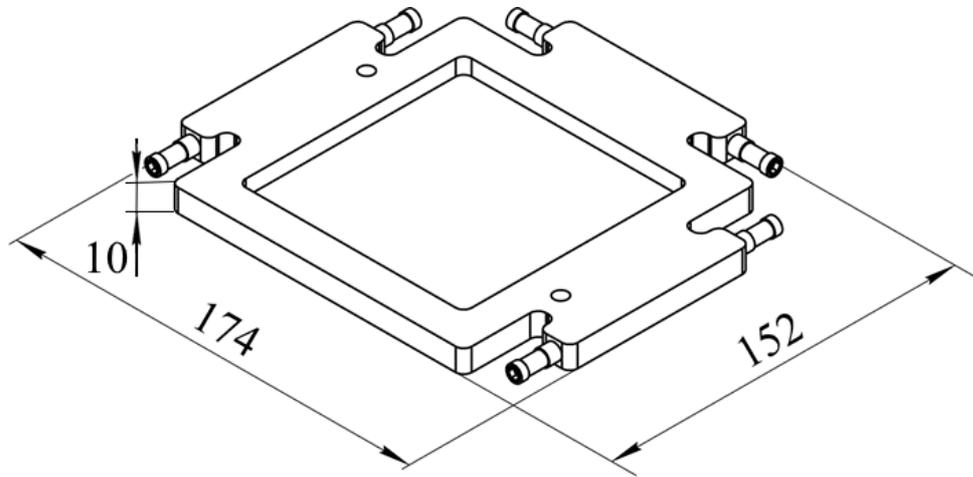


Рисунок 8.2. Габаритные размеры платформы выходного звена

Стоит отметить, что при расчете требуемой высоты рабочей зоны необходимо также учитывать габариты шарниров и расстояние от платформы до низа активной печатающей головки. При этом расстояния l_r , $l_{ш}$, h_r и $h_{ш}$ должны находиться в таком соотношении, чтобы при наклоне выходного звена на угол $\varphi_y = \alpha$ для отвода одной из головок, нижняя точка корпуса сферического шарнира располагалась выше сопла печатающей головки на высоте h_0 (рисунок 8.3).

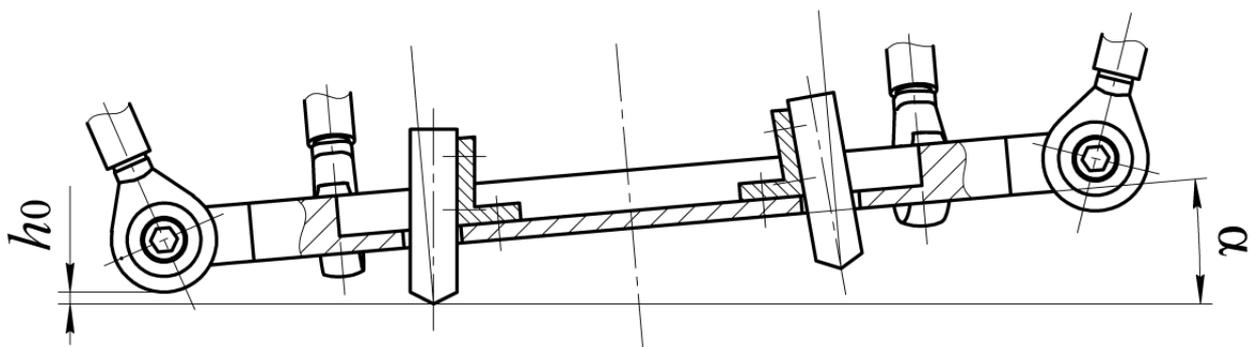


Рисунок 8.3. Зазор h_0 при наклоне выходного звена на угол α

Соответственно, печатные головки при горизонтальном положении выходного звена должны быть наклонены на аналогичный угол α , чтобы при повороте выходного звена было обеспечено их вертикальное положение.

Учитывая размеры монтажной площадки, можно видеть, что максимальное расстояние между соплами печатных головок примерно равно 100 мм, если пренебречь наклоном головок ввиду небольшого значения угла α (порядка 3...5 °). Очевидно, что рабочая зона каждой головки будет смещена вбок относительно оси Oy на половину указанного расстояния, и, соответственно, ширина рабочей зоны, в которой могут использоваться обе головки будет меньше ширины рабочей зоны, построенной для центра выходного звена на те же 100 мм. Таким образом, чтобы соответствовать техническому заданию, реальная ширина рабочей зоны механизма должна составлять не менее 250 мм.

Можно видеть, что размер рабочего пространства синтезируемого механизма должен быть существенно больше размера рабочей зоны печати по ширине и высоте. Для дальнейшей проработки с учетом некоторого запаса был принят размер рабочего пространства механизма (для центра платформы выходного звена), равный 300 мм × 300 мм × 300 мм.

Зная длину и ширину рабочего пространства, можно определить примерное положение стоек из того условия, что при нахождении выходного звена на краю рабочей зоны между ним и стойкой должно оставаться некоторое расстояние. Легко видеть, что минимальное значение расстояния $l_{ст}$ от начала координат до края стойки для принятых габаритов платформы и размеров рабочей зоны

$$l_{ст}^{\min} > \frac{300}{2} + \frac{174}{2} > 237 \text{ мм.}$$

С учетом того, что физически стойка будет иметь некоторую толщину, примем геометрический параметр механизма $x_{Ai} = 250$ мм.

Для изготовления стоек был выбран экструдированный алюминиевый профиль высотой 800 мм и сечением 120 мм × 60 мм с закрепленными на нем линейными направляющими HIWIN HGR15R (рисунок 8.4.а). Каретка представляет собой сборную конструкцию из пластины (сплав Д16Т), закрепленных на ней двух опорных блоков HIWIN HGH15CA и гайки шариковинтовой передачи HIWIN (диаметр винта 16 мм) класса точности С7 с креплением (рисунок 8.4.б).

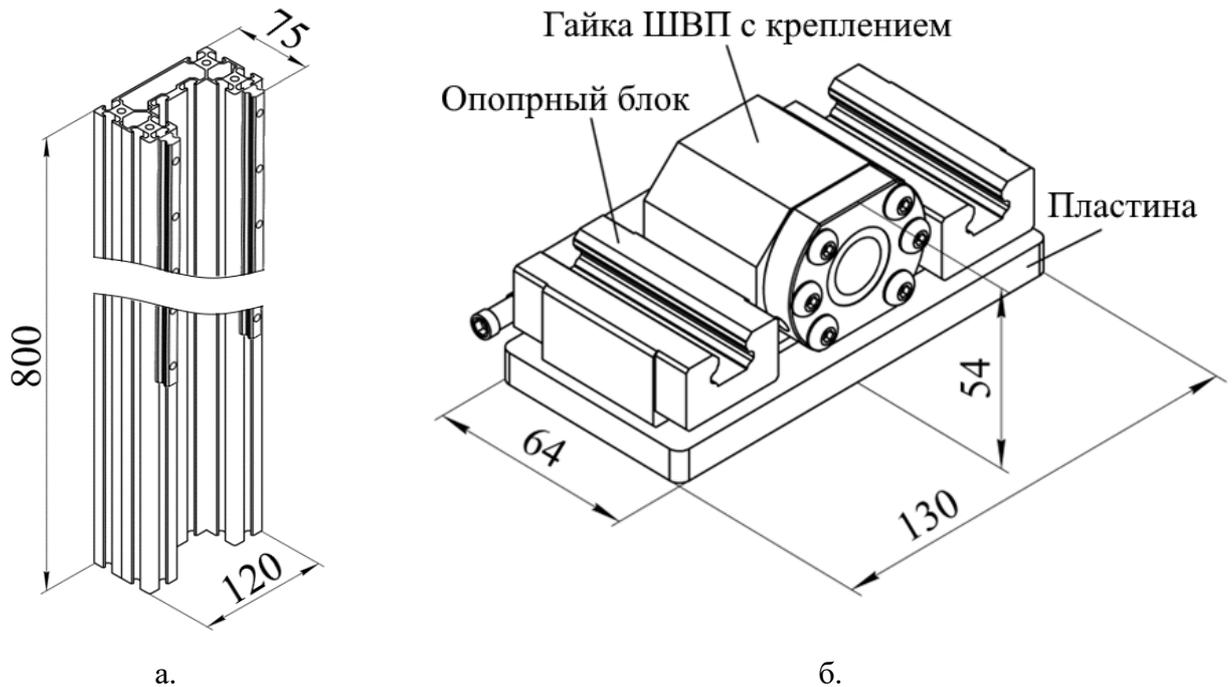


Рисунок 8.4. Размеры элементов конструкции: стойки с направляющими (а), каретки (б)

С учетом размеров платформы выходного звена и расстояния от начала координат до стоек длина штанг (межосевое расстояние между центрами сферических шарниров) была принята равной 380 мм.

Таким образом, исходя из необходимости обеспечения требуемого размера рабочей зоны и с учетом геометрии конструктивных элементов, теоретические геометрические параметры механизма будут следующими (м):

- длины звеньев (для всех цепей): $l_{AB} = 0,048$, $l_{BC} = 0,380$, $l_{DE} = 0$, для двойных цепей $l_{B_1B_2} = l_{C_1C_2} = 0,100$;
- пределы перемещения каретки (для всех цепей): $h_{\min} = -0,650$, $h_{\max} = -0,205$ (могут варьироваться);
- координаты, определяющие положение и ориентацию вертикальной стойки механизма и звена A_iB_i : $x_{A1} = 0,250$, $y_{A1} = 0$, $x_{B1} = 0,202$, $y_{B1} = 0$, $x_{A2} = 0,050$, $y_{A2} = 0,250$, $x_{B2} = 0,050$, $y_{B2} = 0,202$, $x_{A3} = -0,050$, $y_{A3} = 0,250$, $x_{B3} = -0,050$, $y_{B3} = 0,202$, $x_{A4} = -0,250$, $y_{A4} = 0$, $x_{B4} = -0,202$, $y_{B4} = 0$;
- координаты точек C_i в системе $Ex'y'z'$: $x'_{C1} = 0,080$, $y'_{C1} = 0$, $x'_{C2} = 0,050$, $y'_{C2} = 0,080$, $x'_{C3} = -0,050$, $y'_{C3} = 0,080$, $x'_{C4} = -0,080$, $y'_{C4} = 0$, для всех цепей $z'_C = l_{DE} = 0$.

Построим теоретическое рабочее пространство механизма итерационным методом с учетом знака определителя матрицы \mathbf{A} , анализируя интервалы $x = [-0,350; 0,350]$, $y = [-0,350; 0,350]$, $z = [-0,800; -0,100]$ с шагом $0,02$ м по координатам x , y и $0,05$ м по координате z для следующих значений угла наклона φ_y : 0° , 10° , 20° , 30° (рисунок 8.5).

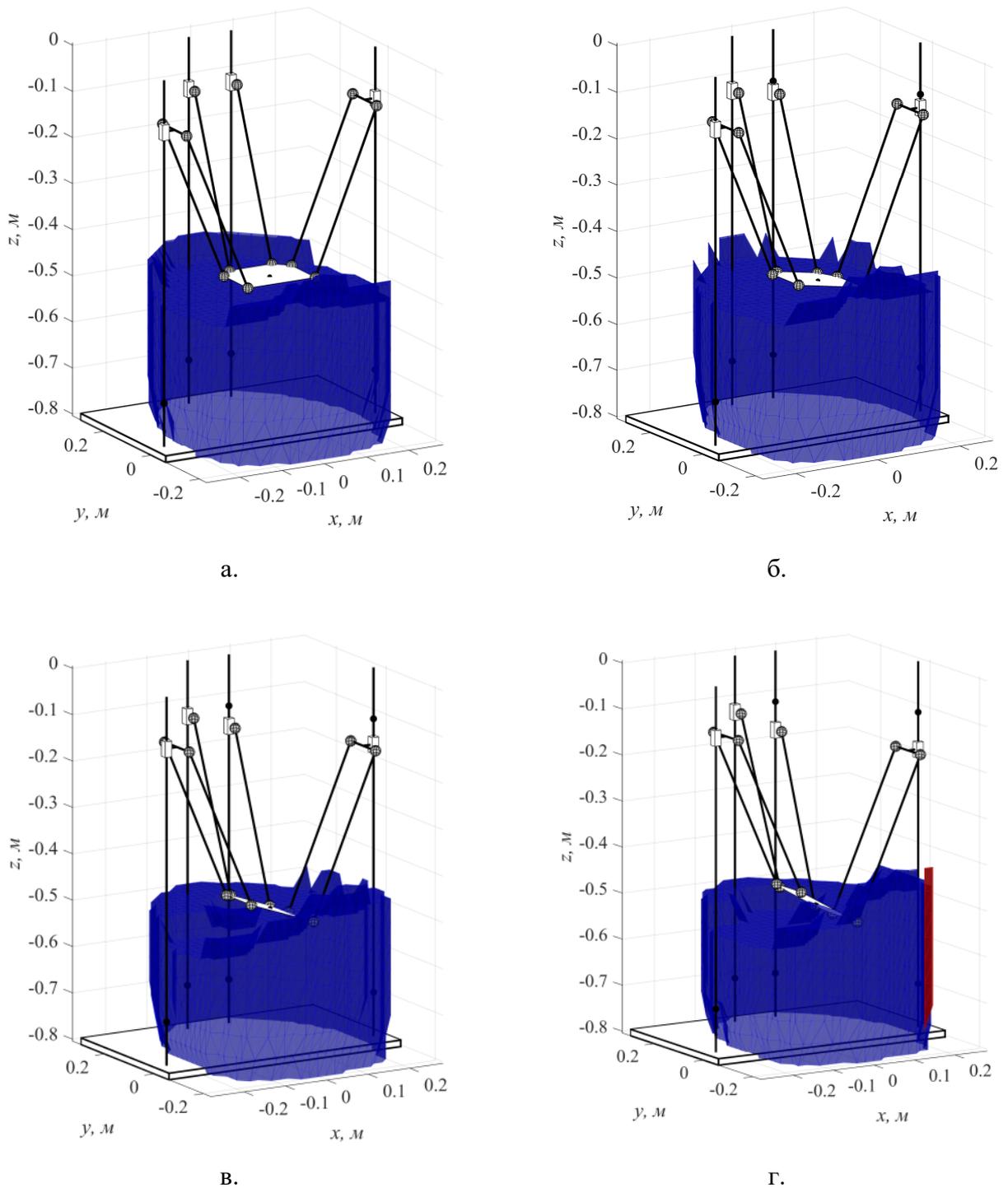


Рисунок 8.5. Знак определителя матрицы \mathbf{A} в точках рабочей зоны («+» – красный, «-» – синий) механизма: $\varphi_y = 0^\circ$ (а), $\varphi_y = 10^\circ$ (б), $\varphi_y = 20^\circ$ (в), $\varphi_y = 30^\circ$ (г)

Из четырех рассмотренных случаев, особые положения внутри рабочей зоны присутствуют только при $\varphi_y = 30^\circ$. Тогда, с учетом некоторого запаса, целесообразно ограничить допустимый угол наклона платформы при эксплуатации механизма значением $\varphi_y = 20^\circ$.

Еще одним фактором, ограничивающим рабочее пространство, является предельно допустимый угол отклонения сферического шарнира вбок γ . Для подобных шарниров данный угол зависит от величины буртика, фиксирующего шарнир от осевого смещения (рисунок 8.6).

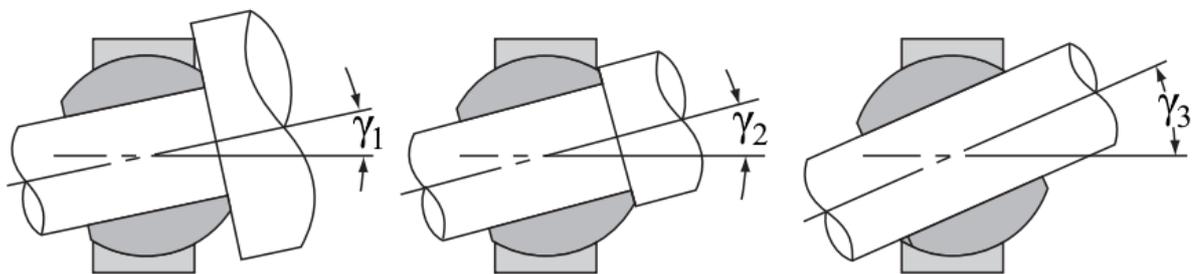
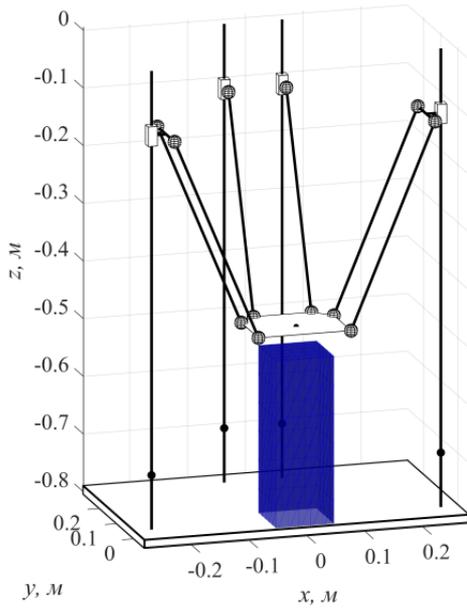


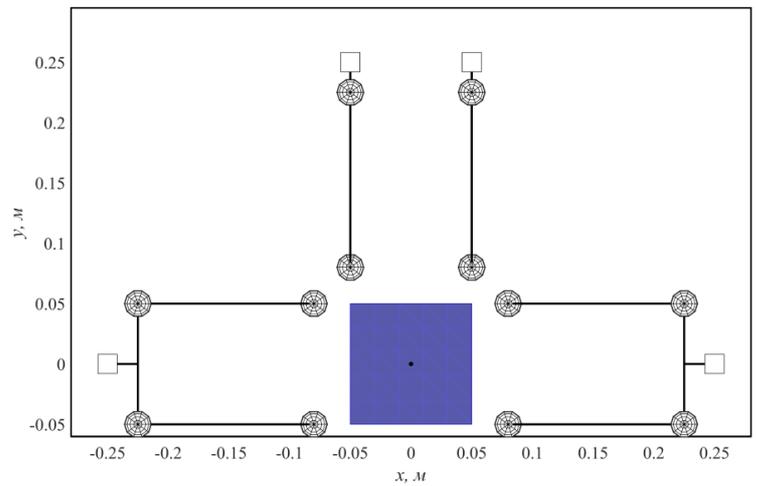
Рисунок 8.6. Предельные углы отклонения вбок сферического шарнира при различных размерах буртика

Для проектируемого устройства был выбран шарнир типоразмера POS 6, для которого $\gamma_1 = 8^\circ$, $\gamma_2 = 14^\circ$ и $\gamma_3 = 30^\circ$. Выбор данного типоразмера обусловлен габаритами платформы а также тем фактом, что у бóльших типоразмеров (POS 8 и выше) предельный угол отклонения γ_3 имеет меньшее значение.

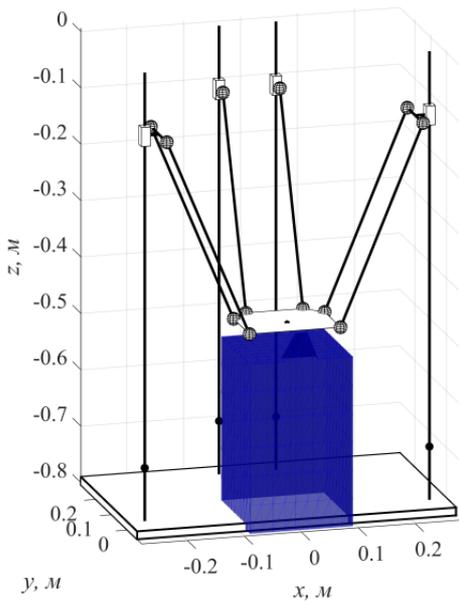
Также был проведен итерационный анализ рабочего пространства для каждого из указанных значений предельного угла отклонения сферического шарнира с использованием тех же интервалов и шага перебора, что и ранее. При этом, если для того, чтобы выходное звено могло находиться в некоторой точке, требуемый угол отклонения в сферическом шарнире должен быть больше допустимого, то такая точка исключалась из рабочей зоны. При значении предельного угла отклонения вбок, равном $\gamma = 8^\circ$, размер рабочего пространства составил $100 \text{ мм} \times 100 \text{ мм} \times 300 \text{ мм}$ (рисунок 8.7), что, очевидно, недостаточно. При следующем значении угла $\gamma = 14^\circ$ размер рабочего пространства увеличился и составил $180 \text{ мм} \times 180 \text{ мм} \times 300 \text{ мм}$ (рисунок 8.8), что, однако, также не соответствует установленным ранее требованиям.



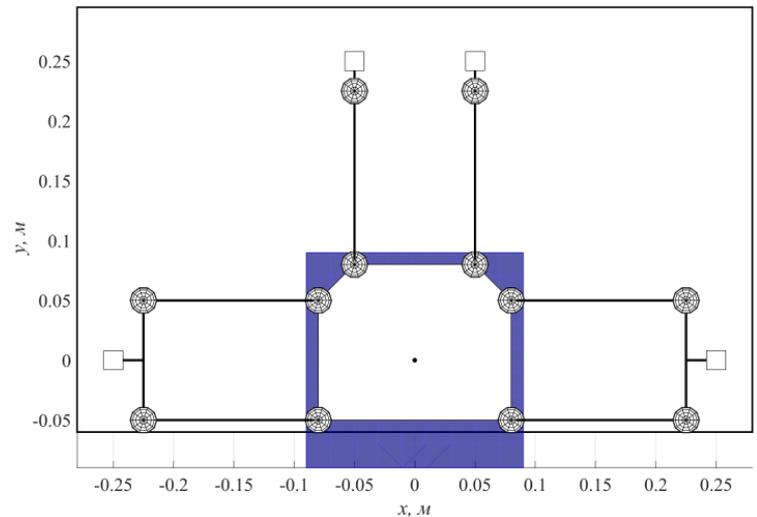
а.



б.

Рисунок 8.7. Рабочая зона механизма при $\gamma = 8^\circ$: изометрия (а), вид сверху (б)

а.



б.

Рисунок 8.8. Рабочая зона механизма при $\gamma = 14^\circ$: изометрия (а), вид сверху (б)

Наконец, при значении допустимого угла отклонения, равном $\gamma = 30^\circ$, размер рабочего пространства составил $350 \text{ мм} \times 350 \text{ мм} \times 300 \text{ мм}$ (рисунок 8.9), что соответствует требованиям к данному размеру с небольшим запасом по длине и ширине.

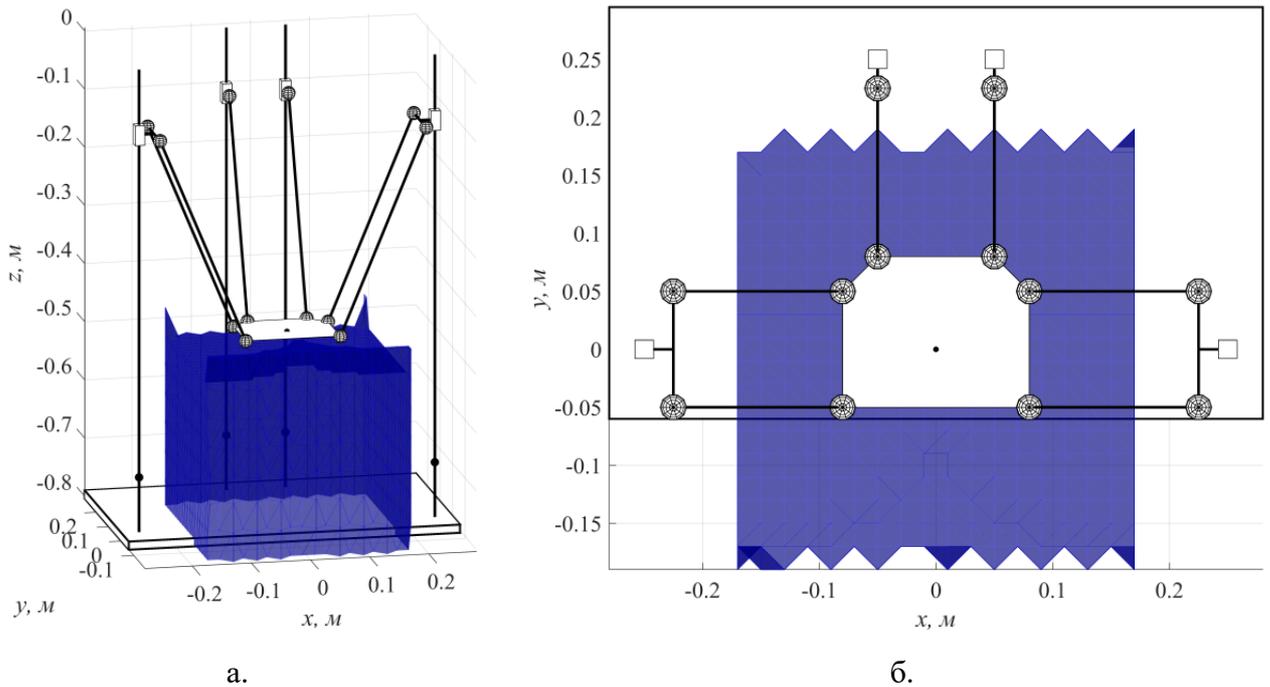


Рисунок 8.9. Рабочая зона механизма при $\gamma = 30^\circ$: изометрия (а), вид сверху (б)

Полученный запас по длине и ширине рабочего пространства допускает использование небольшого буртика для фиксации шарнира, позволяющего избежать применения неудобной в монтаже посадки натягом. При диаметре буртика, равном 7 мм, предельный угол отклонения составляет порядка 25° , а размеры рабочего пространства $300 \text{ мм} \times 300 \text{ мм} \times 300 \text{ мм}$ (рисунок 8.10).

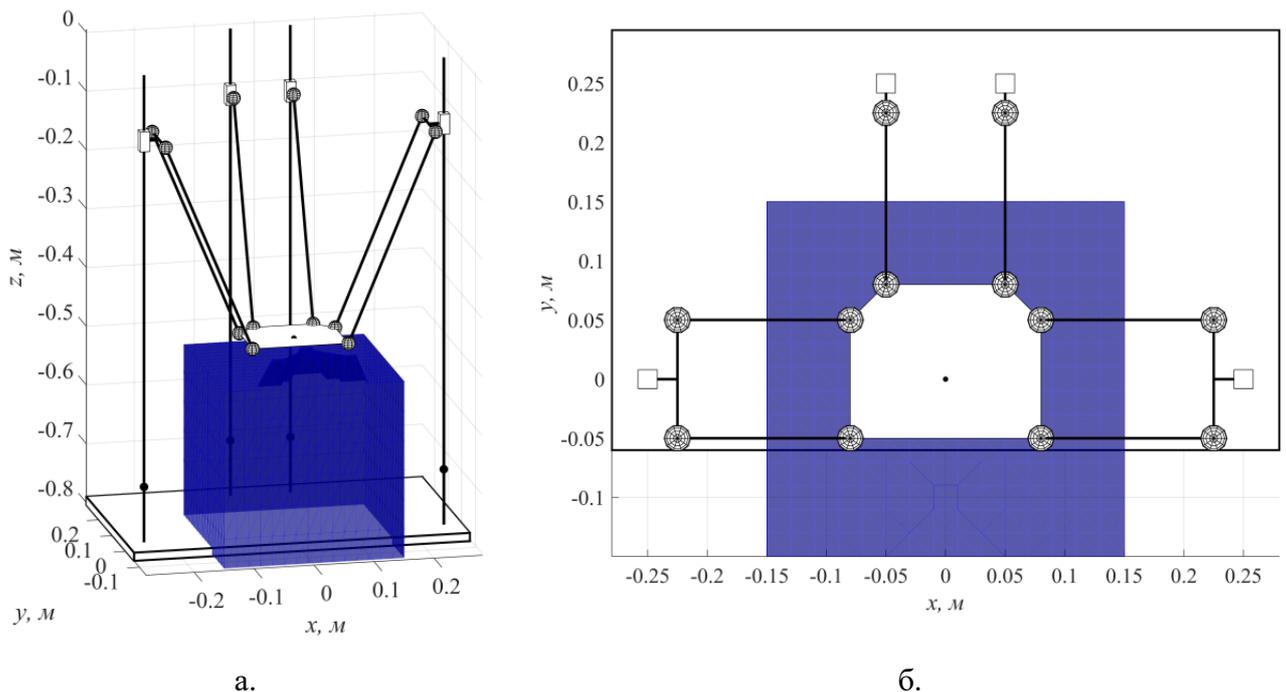


Рисунок 8.10. Рабочая зона механизма при $\gamma = 25^\circ$: изометрия (а), вид сверху (б)

Таким образом, был проведен параметрический синтез механизма, в результате которого были получены его геометрические параметры, позволяющие удовлетворить требования технического задания в части размеров рабочей зоны и отсутствия в ней особых положений с учетом конструктивных ограничений.

8.3. Решение задач конструирования устройства с применением технически обоснованных условий близости к особым положениям

Перейдем к расчету приводных скоростей, а также усилий в приводах и нагрузок на элементы механизма, используя при этом предлагаемые критерии и технически обоснованные условия близости к особым положениям.

Согласно техническому заданию, скорость выходного звена $v_{\text{вых}}$ в процессе печати должна составлять не менее 0,1 м/с. Скорость поворота выходного звена не имеет значения, т.к. в данном случае вращательную степень свободы предполагается использовать только с целью отвода неактивной головки вверх. Применяя предложенный в работе метод, можно для каждой каретки рассчитать максимально возможную скорость v_{ki}^{max} в любой точке рабочей зоны, после чего вычислить соответствующее значение частоты вращения двигателя в об/мин:

$$n_{\text{дв}i}^{\text{max}} = \frac{60 \cdot v_{ki}^{\text{max}}}{p \cdot z \cdot 10^{-3}}, \quad (8.1)$$

где p – шаг шариковинтовой передачи в мм, z – число заходов.

Для выбора электродвигателя, способного обеспечить заданную величину $v_{\text{вых}}$, был проведен итерационный анализ объема рабочей области механизма размером 300 мм × 300 мм × 300 мм. Интервалы изменения координат принимались следующими: $x = [-0,150; 0,150]$, $y = [-0,150; 0,150]$, $z = [-0,800; -0,500]$; шаг перебора 0,005 м. Анализ проводился для горизонтального положения выходного звена ($\varphi_y = 0^\circ$), а также для определенного ранее максимального рекомендуемого угла наклона $\varphi_y = 20^\circ$. Выбранный винт шариковинтовой передачи может

поставляться в двух вариантах: однозаходный с шагом 5 мм или однозаходный с шагом 10 мм. При этом, поскольку v_{ki}^{\max} не зависит от шага винта, из (8.1) видно, что достаточно провести итерационный анализ только для одного p : значения $n_{двi}^{\max}$ для $p = 5$ мм будут в два раза больше значений для $p = 10$ мм. Соответственно, зная значения $n_{двi}^{\max}$ в каждой проанализированной точке, можно выбрать из них наибольшее (рисунок 8.11) и руководствоваться им при выборе электродвигателя.

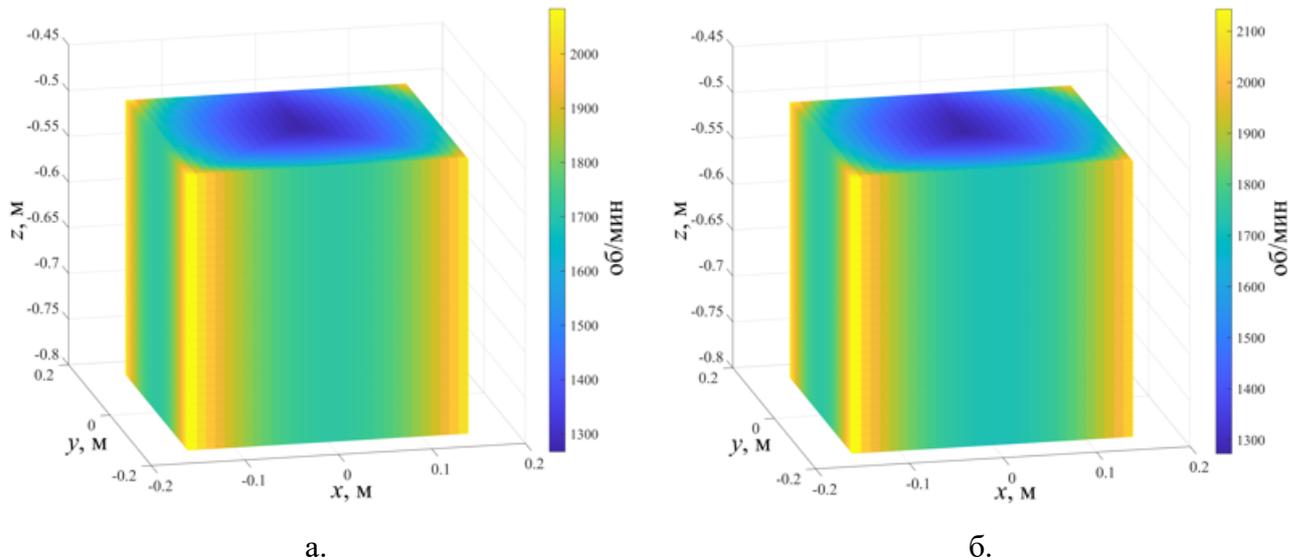


Рисунок 8.11. Распределение наибольших значений частоты вращения двигателя привода для $p = 5$ мм: при $\varphi_y = 0^\circ$ (а), при $\varphi_y = 20^\circ$ (б)

Максимальное значение частоты вращения двигателя по рабочей зоне составило 2083,16 об/мин при $\varphi_y = 0^\circ$, и 2143,22 об/мин при $\varphi_y = 20^\circ$. Для шага винта $p = 10$ мм данные значения составят 1041,58 об/мин и 1071,61 об/мин соответственно.

Требуемое значение частоты вращения может быть обеспечено шаговыми двигателями типоразмера NEMA 23 или NEMA 34 (частота вращения по каталогу до 2500 об/мин) или синхронными серводвигателями (частота вращения по каталогу до 3000 об/мин). При этом использование шаговых двигателей является стандартным решением в области 3D-печати ввиду простоты управления ими и значительно меньшей стоимости по сравнению с синхронными серводвигателями.

Для уточнения модели двигателя необходимо вычислить максимальную нагрузку, приходящуюся на него, которая, в свою очередь может быть рассчитана

с помощью предлагаемых в работе методов по известной внешней нагрузке. Важно отметить, что при использовании данных методов в качестве внешней нагрузки могут выступать не только внешние силы и моменты, приложенные непосредственно к выходному звену, но также и силы инерции. В рассматриваемом случае условная внешняя сила будет складываться из сил тяжести, действующих на элементы механизма и их силы инерции. При этом очевидно, что поскольку масса выходного звена с учетом оборудования, собственного веса подвижной платформы и сферических шарниров (10,5 кг) и масса кареток (0,9 кг) будут значительно превышать массу штанг, последними в расчетах можно пренебречь.

Вектор внешней силы, действующей на выходное звено $\mathbf{f}_{\text{вых}}$, будет равным сумме векторов силы тяжести $\mathbf{f}_{\text{тяж}}$ и инерции $\mathbf{f}_{\text{ин}}$ выходного звена. При этом, поскольку вектор $\mathbf{f}_{\text{ин}}$ может быть взят как со знаком «+», так и со знаком «-», для анализа необходимо принимать большее значение из двух сумм:

$$\mathbf{f}_{\text{вых}}^{\max} = \max(\mathbf{f}_{\text{тяж}} + \mathbf{f}_{\text{ин}}, \mathbf{f}_{\text{тяж}} - \mathbf{f}_{\text{ин}}).$$

Здесь

$$\mathbf{f}_{\text{тяж}} = (0, 0, -m_{\text{вых}} g),$$

$$\mathbf{f}_{\text{ин}} = (0, 0, m_{\text{вых}} a_{\text{вых}}),$$

где $m_{\text{вых}}$ – полная масса выходного звена, $a_{\text{вых}}$ – его ускорение, g – ускорение свободного падения.

Очевидно, что вектор силы тяжести не зависит от положения и скорости выходного звена, а наихудшее направление вектора силы инерции может быть вычислено по предложенным в работе методам, в то время как его норма определяется требованиями технического задания. Таким образом, с помощью данных методов можно рассчитать для каждой цепи величину нагрузки (осевой силы) $F_{a, \text{вых}i}$, действующей на винт шариковинтовой передачи, для наихудшего из возможных направлений ускорения выходного звена, учитывая при этом действующую на него силу тяжести. Стоит заметить, что внешним моментом можно пренебречь ввиду того, что изменение угла наклона звена в

рассматриваемом случае, как уже было отмечено, выполняет только техническую функцию отвода неактивной головки и производится при неподвижном выходном звене.

Осевую нагрузку на винт шариковинтовой передачи создают также силы тяжести и инерции соответствующей каретки. При этом действие силы тяжести постоянно и может быть легко учтено. С другой стороны, определение значения ускорения каретки, необходимого для расчета ее силы инерции представляет собой нетривиальную задачу. В общем случае, наилучшее направление ускорения выходного звена, соответствующее максимально возможной нагрузке на винт от силы инерции данного звена, не совпадает с направлением, обеспечивающим наибольшее значение ускорения каретки. Тогда для точного вычисления максимального значения суммарной нагрузки на винт необходимо решать оптимизационную задачу поиска наилучшего направления ускорения выходного звена с учетом инерции как этого звена, так и кареток. На практике, однако, значение ускорений кареток устройствах, подобных разрабатываемому, ограничиваются значением порядка $2g$. В этом случае, с учетом влияния силы тяжести, максимальная осевая сила на винте, вызванная перемещением каретки, составит $3m_k g$ Н (m_k – масса каретки). С учетом упомянутого ранее значения массы каретки проектируемого устройства, равного $0,9$ кг, величина указанной силы составит $26,47$ Н.

Проведенный в дальнейшем итерационный анализ рабочей зоны (с теми же параметрами перебора, что и ранее) показал, что максимальное значение силы $F_{a.вых} = \max(F_{a.выхi})$, рассчитанное с учетом инерции выходного звена и силы тяжести, действующей на него, равно $201,30$ Н при $\varphi_y = 0^\circ$ и $244,86$ Н при $\varphi_y = 20^\circ$. Тогда, очевидно, значения суммарной расчетной осевой силы F_a , действующей на винт шариковинтовой передачи, составят $227,77$ Н и $271,33$ Н, для $\varphi_y = 0^\circ$ и $\varphi_y = 20^\circ$, соответственно. При этом в реальности нагрузка на винт будет меньше, поскольку, как было отмечено ранее, в общем случае ускорение выходного звена, соответствующее $F_{a.выхi}$, не будет соответствовать ускорению i -й каретки вниз величиной $2g$ м/с².

Для известной осевой силы F_a при заданных значениях КПД шариковинтовой передачи $\eta_{швп}$ и линейных направляющих η_n можно вычислить значение момента на валу электродвигателя, необходимого для преодоления действия указанной силы (в Н·м):

$$T_{дв} = \frac{F_a z p}{2\pi \eta_{швп} \eta_n \cdot 10^3}. \quad (8.2)$$

Для выбранной передачи и направляющих значения КПД по каталогу производителя составляют $\eta_{швп} = 0,95$ и $\eta_n = 0,99$.

Окончательно, для шага винта $p = 5$ мм максимальное значение $T_{дв}$ по рабочей зоне составило $0,1927$ Н·м при $\varphi_y = 0^\circ$ и $0,2295$ Н·м при $\varphi_y = 20^\circ$ (рисунок 8.12).

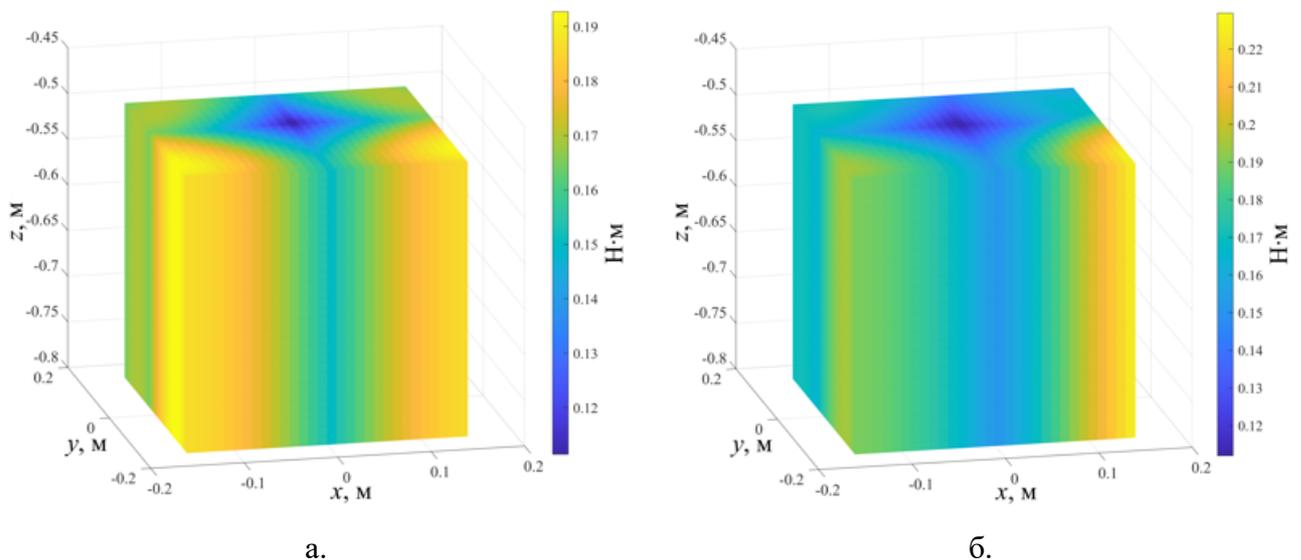


Рисунок 8.12. Распределение наибольших значений момента на валу двигателя привода для $p = 5$ мм: при $\varphi_y = 0^\circ$ (а), при $\varphi_y = 20^\circ$ (б)

Из (8.2) видно, что для $p = 10$ мм, значения искомых моментов будут в два раза больше: $T_{дв} = 0,3854$ Н·м при $\varphi_y = 0^\circ$ и $T_{дв} = 0,4590$ Н·м при $\varphi_y = 20^\circ$.

Ввиду того, что полученные значения моментов достаточно невелики, целесообразно при выборе электродвигателя для приводов отдать предпочтение шаговым двигателям ввиду упомянутых ранее преимуществ двигателей данного типа над синхронными серводвигателями.

Рассмотрим две модели шаговых двигателей типоразмера NEMA 23 производства фирмы Stepline: SL57STH51 (длина корпуса 51 мм, ток фазы 2,8 А,

момент удержания 1,1 Н·м) и SL57STH76 (длина корпуса 76 мм, ток фазы 2,8 А, момент удержания 1,85 Н·м). При этом важно отметить, что значение номинального момента $T_{\text{ном}}$, который может быть развит шаговым двигателем, зависит от частоты оборотов его вала. Данная зависимость, как правило, имеет нелинейный характер и представляется в виде кривой или, реже, таблицы, приводимой производителем в документации на соответствующий двигатель или семейство двигателей (рисунок 8.13).

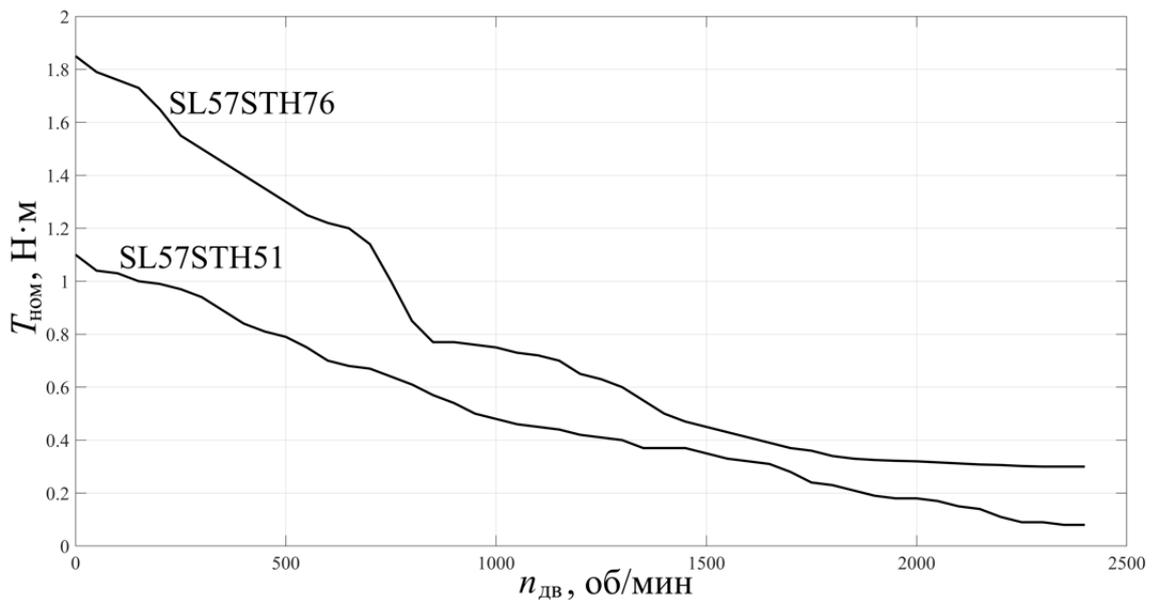


Рисунок 8.13. Зависимость момента на валу от частоты вращения (по данным каталога производителя) для шаговых двигателей SL57STH76 и SL57STH51

Ввиду указанной особенности, при выборе двигателя сначала необходимо в процессе проводимого итерационного анализа во всех точках рабочей зоны для каждой каретки определить максимальные значения частоты вращения вала двигателя и момента на нем, используя описанные выше подходы. Затем для каждой каретки необходимо провести проверку возможности обеспечения требуемого значения момента рассматриваемым двигателем для соответствующей частоты вращения $n_{\text{дв}i}^{\text{max}}$. При этом целесообразно также ввести некоторый коэффициент запаса, учитывающий возможное уменьшение КПД винта шариковинтовой передачи и линейных направляющих за счет ухудшения условий эксплуатации (например, нерегулярного смазывания) и ошибок монтажа

(«расклинивания» направляющих), а также возможных перегрузок со стороны выходного звена. Тогда условие, выполнение которого должно быть обеспечено во всех исследуемых точках рабочей зоны, можно записать следующим образом:

$$T_{\text{ном}} \left(n_{\text{дв}i}^{\text{max}} \right) > K_T T_{\text{дв},i}. \quad (8.3)$$

Для двух рассматриваемых моделей шаговых двигателей был проведен итерационный анализ с проверкой условия (8.3) при углах наклона $\varphi_y = 0^\circ$ и $\varphi_y = 20^\circ$ и шаге винта $p = 5$ мм и $p = 10$ мм (таблица 8.1). Данный анализ проводился для коэффициента запаса $K_T = 1,25$.

Таблица 8.1. Возможность поддержания требуемого значения момента на валу двигателя для $n_{\text{дв}i}^{\text{max}}$ при разных значениях угла наклона платформы и шага винта передачи.

	SL57STH51		SL57STH76	
	$p = 5$ мм	$p = 10$ мм	$p = 5$ мм	$p = 10$ мм
$\varphi_y = 0^\circ$	–	+	+	+
$\varphi_y = 20^\circ$	–	–	+	+

В приведенной таблице знак «+» означает, что условие (8.3) выполняется во всех исследованных точках, а знак «–», соответственно, показывает, что в некоторых точках данное условие нарушается.

Можно видеть, что для двигателя SL57STH76 возможно поддерживать требуемое расчетное значение момента на валу в любой точке рабочей зоны устройства. В то же время, для двигателя SL57STH51 выполнение условия (8.3) в каждой точке рабочей зоны возможно только при горизонтальной ориентации выходного звена и шаге винта шариковинтовой передачи $p = 10$ мм. В остальных случаях для данного двигателя размер рабочей зоны, в которой указанное условие выполняется, будет меньше требуемых 300 мм × 300 мм × 300 мм. При этом нарушение данного условия наблюдается в районе боковых граней рабочего

пространства в полном соответствии с полученным ранее распределением значения $T_{дв}$ (рисунок 8.14).

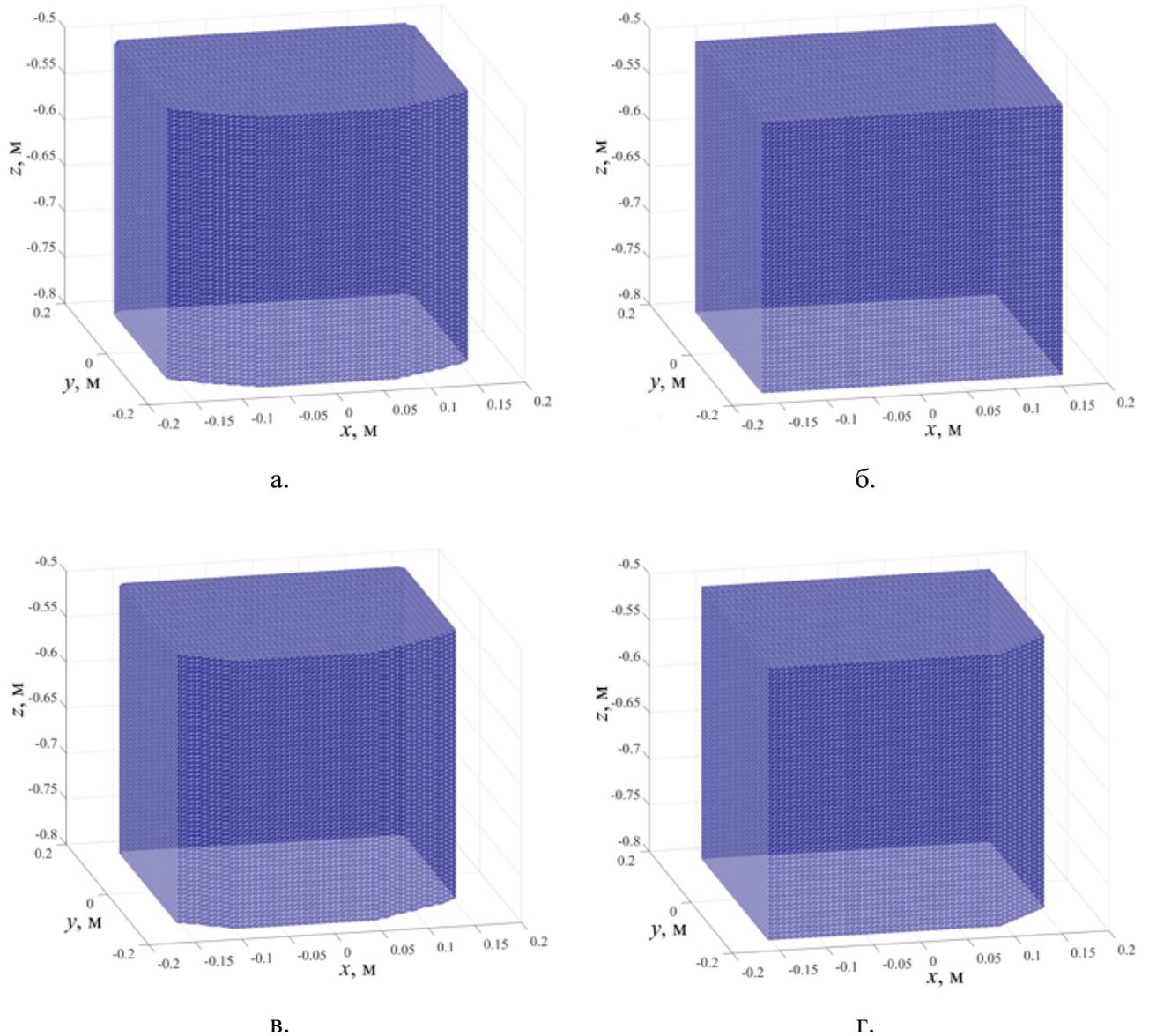


Рисунок 8.14. Рабочее пространство устройства с учетом условия (8.3), двигатель SL57STH51:
 $\varphi_y = 0^\circ, p = 5 \text{ мм}$ (а); $\varphi_y = 0^\circ, p = 10 \text{ мм}$ (б); $\varphi_y = 20^\circ, p = 5 \text{ мм}$ (в); $\varphi_y = 20^\circ, p = 10 \text{ мм}$ (г)

Таким образом, необходимый размер рабочей зоны, в котором гарантированно обеспечиваются необходимые частота вращения электродвигателя и момент на его валу для любой ориентации выходного звена в пределах $\pm 20^\circ$, может быть достигнут при использовании шагового двигателя SL57STH76. При этом шаг винта шариковинтовой передачи может быть равен как 5 мм, так и 10 мм. При $p = 10 \text{ мм}$ от двигателя требуется развивать в два раза меньшую скорость, чем при $p = 5 \text{ мм}$, что, определенно, является преимуществом. Однако при шаге винта,

равном 5 мм повышается точность позиционирования и проявляется эффект частичного самоторможения, что важно для безопасности устройства при отключенных приводах. Поэтому для конструкции данного устройства был выбран шаг $p = 5$ мм.

Использование винтового исчисления позволяет определять не только нагрузки на приводы механизмов, но также и на кинематические цепи в целом или их отдельные элементы. В проектируемом устройстве нагрузка передается с выходного звена на каретки через штанги со сферическими шарнирными головками на концах. Как можно видеть, указанные штанги могут работать только на растяжение или сжатие. С точки зрения винтового исчисления указанная нагрузка уравнивается силовыми винтами механизма. При этом рассмотренная ранее нагрузка от силы тяжести, действующей на выходное звено, и силы инерции этого звена воспринимается приводными силовыми винтами. Силовые винты связей воспринимают только внешние моменты вокруг осей Ox и Oz , которые в данном устройстве незначительны и могут быть вызваны только смещением центра тяжести выходного звена относительно его теоретического положения. Таким образом, нагрузка на каждую кинематическую цепь определяется, по сути, только приводным силовым винтом и значением соответствующей обобщенной реакции. При этом данная нагрузка приводит к растяжению или сжатию соответствующей штанги со сферическими шарнирами.

Для расчета нагрузки на штангу по аналогии с рассмотренными ранее для скорости вращения двигателя привода и момента на его валу способами, необходимо вычислить наихудшее направление приложения внешней силы к выходному звену механизма, которое будет соответствовать максимально возможной нагрузке на штангу. Указанная нагрузка, очевидно, максимальна в том случае, когда максимальна нагрузка на всю кинематическую цепь, т.е. для ее расчета может использоваться то же самый приводной силовой винт и соответствующее значение обобщенной реакции, что и при расчете нагрузки на каретку. При этом, указанный винт характеризует силу, передаваемую вдоль оси штанги, т.е. искомую растягивающую нагрузку. Из этого следует, что величина

растягивающей (или сжимающей) нагрузки на штангу численно равна значению обобщенной реакции для соответствующего приводного винта.

Путем итерационного анализа было установлено, что максимальное значение силы, действующей на штанги кинематических цепей для заданных массы и величины ускорения выходного звена, составляют $F_{ш} = 314,63$ Н при $\varphi_y = 0^\circ$ и $F_{ш} = 420,89$ Н при $\varphi_y = 20^\circ$ (рисунок 8.15).

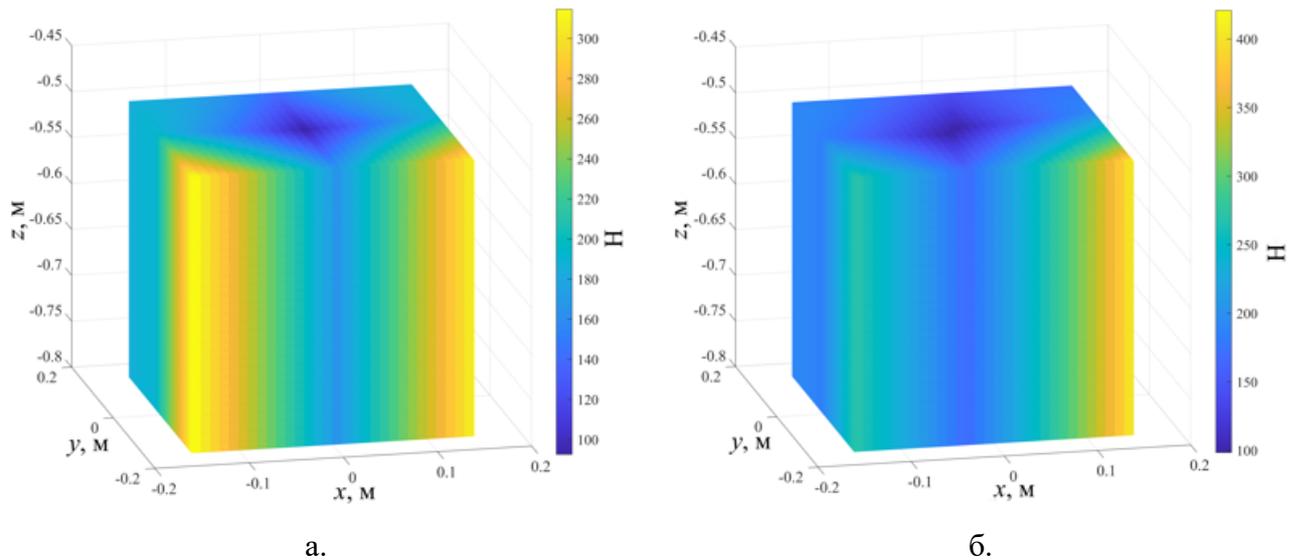


Рисунок 8.15. Распределение наибольшей нагрузки на штанги: при $\varphi_y = 0^\circ$ (а), при $\varphi_y = 20^\circ$ (б)

Также было установлено, что данное значение соответствует нагрузке на вторую и третью цепи. Максимальное значение для первой и четвертой цепей составило 211,91 Н. Более того, для указанных цепей данная нагрузка будет распределяться между двумя штангами, а во второй и третьей приходится на одну. Тогда значение $F_{ш}$ при $\varphi_y = 20^\circ$ для второй и третьей цепей с учетом коэффициента запаса $K_F = 1,25$ (как и в предыдущем случае), может быть использовано в качестве расчетной нагрузки на штангу, которая в итоге составит 526,11 Н.

Элементами, на которые воздействует данная нагрузка, являются сферические шарниры, центральная часть штанги и соединения шарниров с центральной частью.

В качестве сферических шарниров используются сферические головки типа GASW 6 производства фирмы FLURO. При этом данные головки будут испытывать только радиальную нагрузку. Статическая грузоподъемность данного

подшипника, согласно каталогу, $C_0 = 6000$ Н, а динамическая грузоподъемность $C = 4300$ Н. Максимально допустимая радиальная нагрузка, согласно рекомендациям, производителя ограничивается следующим условием:

$$F_r < C_0 f_B f_T,$$

где f_B – коэффициент типа нагрузки, f_T – температурный коэффициент.

Для переменных нагрузок и температуры эксплуатации до 100 °С значения коэффициентов составят: $f_B = 0,5$, $f_T = 1$. Тогда для выбранного подшипника максимально допустимая радиальная нагрузка составит 3000 Н, что почти в шесть раз больше расчетного значения нагрузки, действующей на штангу.

Для расчета динамической нагрузки F_m производителем предлагается следующая формула:

$$F_m = 0,1 \sqrt{\sum_{p=1}^{n_p} F_p^2 t_p},$$

где F_p – нагрузка, действующая в пределах p -го процентного временного интервала, t_p – длительность (в процентах от общего времени эксплуатации) указанного интервала, n_p – количество временных интервалов.

Если принять наихудший теоретически возможный случай, при котором шарнира всегда работает под максимальной нагрузкой, получим:

$$F_m = 0,1 \sqrt{(K_F F_{ш})^2 \cdot 100} = K_F F_{ш} = 526,11 \text{ Н.}$$

Для величины динамической нагрузки производителем приводится следующее условие

$$\frac{C}{F_m} \geq \left(\frac{C}{F} \right)_{\min}. \quad (8.4)$$

Значение коэффициента в правой части условия (8.4) зависит от типа шарнира (обслуживаемый или необслуживаемый) и материалов его контактных поверхностей. Для рассматриваемой модели шарнира значение указанного коэффициента равно 2. В то же время отношение в левой части (8.4) с учетом

известных значений C и F_m будет равно 8,17. Можно видеть, что данное условие выполняется с более чем четырехкратным запасом. Таким образом, как по статической, так и по динамической грузоподъемности используемая сферическая головка имеет существенный запас прочности.

Центральная часть штанги представляет собой углепластиковую трубку внутренним диаметром $d_{\text{тр}} = 6$ мм и наружным диаметром $D_{\text{тр}} = 8$ мм. Тогда напряжения в трубке от растяжения или сжатия:

$$\sigma_{\text{тр}} = \frac{4K_F F_{\text{ш}}}{\pi(D_{\text{тр}}^2 - d_{\text{тр}}^2)} = \frac{4 \cdot 526,11}{\pi(8^2 - 6^2)} = 29,92 \text{ МПа.}$$

Предел прочности углепластика на растяжение может составлять до 2000 МПа [261], что на порядки превосходит расчетное значение действующих напряжений, поэтому прочность центральной части штанги также можно считать обеспеченной.

Наконец, для крепления шарниров к трубке используется клеевое соединение эпоксидным клеем. При диаметре клеевого соединения $d_{\text{кл}} = 6$ мм и его длине $l_{\text{кл}} = 20$ мм, касательные напряжения в соединении $\tau_{\text{кл}}$ будут равны:

$$\tau_{\text{кл}} = \frac{K_F F_{\text{ш}}}{\pi d_{\text{кл}} l_{\text{кл}}} = \frac{526,11}{\pi \cdot 6 \cdot 20} = 1,40 \text{ МПа.}$$

Для широко используемых эпоксидных клеев, например ЭПК-1 и ВК-9, типовая прочность при сдвиге при нормальных условиях составляет 15 МПа, что дает более чем десятикратный запас по прочности. При этом коэффициент запаса, используемый при инженерных расчетах клеевых соединений в машиностроении, как правило, имеет значение порядка 3...5. Из этого следует, прочность клеевого соединения центральной части штанги и шарниров также может считаться гарантированно обеспеченной.

Таким образом, с использованием практических критериев к особым положениям был подобран шаговый электродвигатель, назначен шаг винта шариковинтовой передачи, а также проведена проверка прочности штанг, используемых в кинематических цепях. При этом расчеты проводились из

технически обоснованных условий обеспечения возможности поддержания требуемых характеристик механизма в части максимальной перемещаемой массы, скорости и ускорения выходного звена, а также размеров рабочего пространства. Также стоит отметить, что несмотря на отсутствие, собственно, особых положений в пределах исследуемой рабочей зоны, предложенные практические критерии близости к ним могут и должны быть использованы при параметрическом синтезе, анализе и конструировании реального устройства, что и было продемонстрировано.

С использованием полученных результатов была создана трехмерная твердотельная CAD-модель механизма (рисунок 8.16).

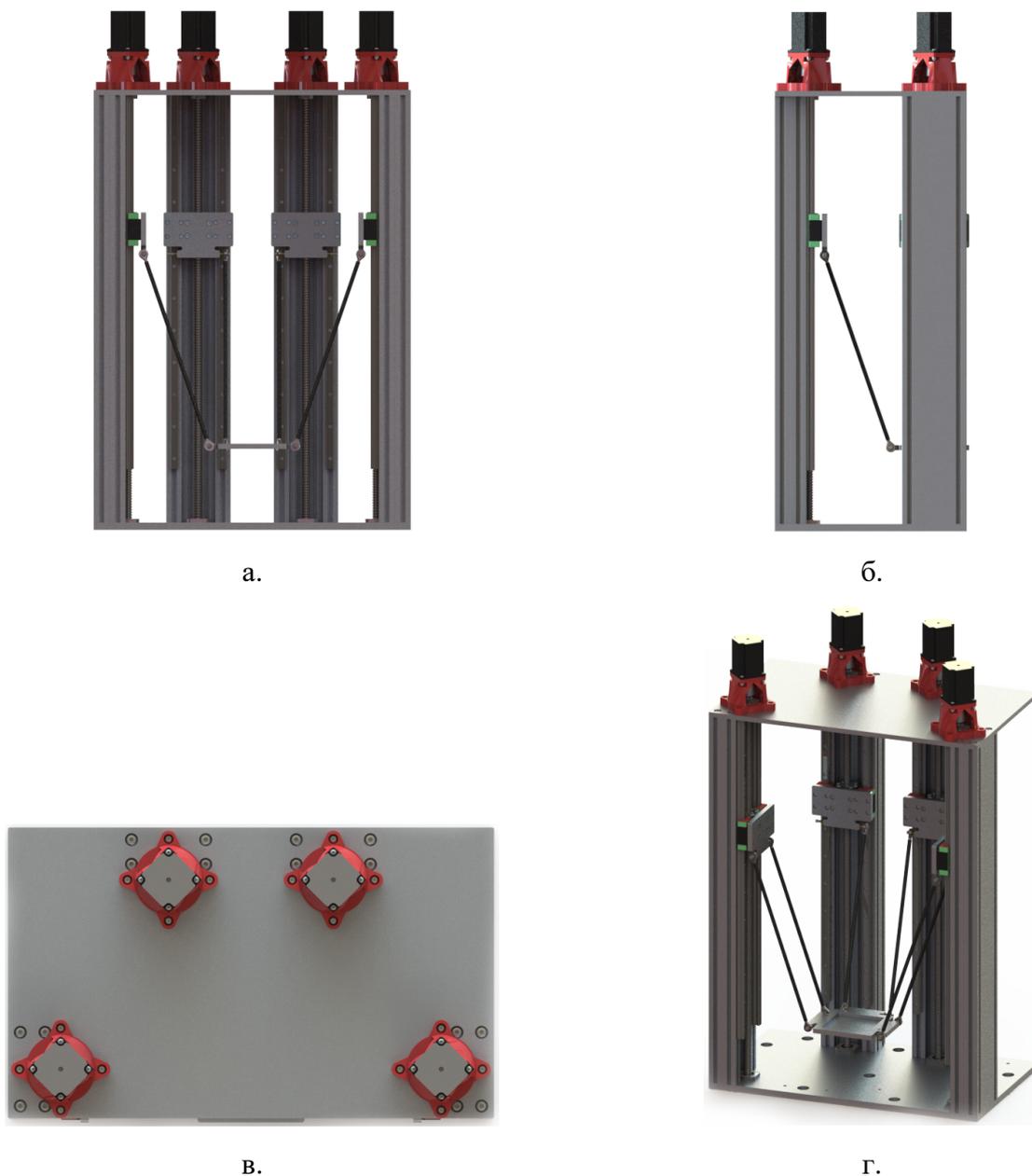
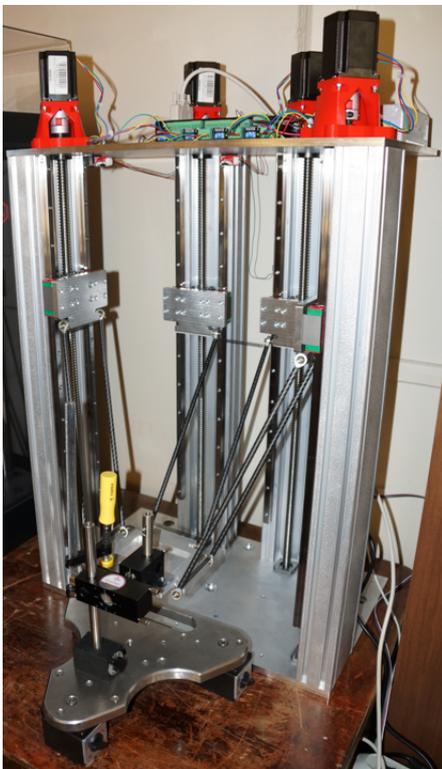


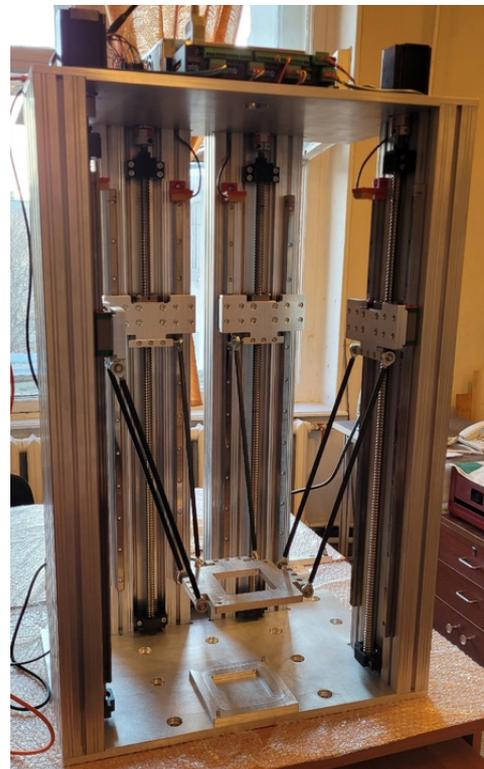
Рисунок 8.16. Модель устройства: вид спереди (а); вид сбоку (б); вид сверху (в); диметрия (г)

На основе трехмерной модели была разработана конструкторская документация на изготавливаемые детали. После изготовления деталей была осуществлена сборка и отладка устройства (рисунок 8.17.а). В частности, при помощи лазерной измерительной системы (интерферометра) CHOTEST SJ6000 была измерена повторяемость по осям x и y . Измерения проводились на перемещении, равном 150 мм, для каждой из осей. Среднее (по двадцати измерениям) значение повторяемости для оси x составило 2,6 мкм, а для оси y было равным 5,5 мкм. При этом наибольшие значения, полученные в ходе измерений, составили 7 мкм и 12 мкм для осей x и y соответственно.

После сборки и отладки устройство было передано заказчику для дальнейшей интеграции в разрабатываемую им установку послойной печати микроэлектроники и непосредственного использования по назначению. Стоит также отметить, что после учета определенных недостатков конструкции данного устройства было разработано и изготовлено его новое исполнение, отличающееся большей технологичностью (рисунок 8.17.б).



а.



б.

Рисунок 8.17. Разработанное устройство в процессе отладки (а) и его второе исполнение (б)

8.4. Результаты и выводы по главе

- на примере механизма Delta с четырьмя степенями свободы показан процесс параметрического синтеза, анализа и конструкторской проработки реального устройства;
- для механизма, лежащего в основе проектируемого устройства, были подобраны геометрические параметры, обеспечивающие требуемый по техническому заданию размер рабочего пространства с учетом конструктивных ограничений;
- с использованием практических критериев близости к особым положениям был проведен анализ механизма, выбраны электродвигатели приводов и шаг винта шариковинтовой передачи, обеспечивающие реализацию параметров движения (скорости и ускорения) и массовых характеристик выходного звена согласно требованиям технического задания;
- создана трехмерная модель проектируемого устройства, изготовлены его компоненты, проведена сборка и отладка. Спроектированное устройство использовано в качестве механизма перемещения печатающих головок установки, предназначенной для отработки процесса 3D-печати микроэлектроники;
- применение предложенных в работе практических критериев близости к особым положениям и методов их расчета позволяет обосновывать применение различных конструктивных решений при проектировании реальных устройств на базе механизмов параллельной структуры и повысить точность инженерных расчетов устройств данного типа.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Настоящая работа посвящена совершенствованию методов анализа особых положений и близости к ним для механизмов параллельной структуры с целью повышения точности и достоверности расчетов характеристик устройств, создаваемых на основе механизмов данного типа, а также расширению их функциональных возможностей. Основной мотивацией проведенных исследований служит тот факт, что при наличии большого количества трудов отечественных и зарубежных ученых, «золотого» стандарта оценки близости к особым положениям на настоящий момент не существует. При этом близость к таким положениям может существенно влиять на способность механизма выполнять свои задачи, что обуславливает практический интерес к подобным исследованиям, а также целесообразность выработки критериев, обладающих ясным физическим смыслом, значения которых напрямую связаны с характеристиками механизмов и могут быть относительно легко измерены. Как было показано в работе, такими критериями могут служить значения скоростей в приводных кинематических парах и обобщенных реакций в винтовых уравнениях равновесия, которые в свою очередь могут быть пересчитаны в приводные усилия или нагрузки на конструктивные элементы механизма. При этом предложенные в работе методы позволяют рассчитывать значения указанных величин для некоторых «наихудших» направлений вектора скоростей выходного звена или вектора внешней нагрузки.

В результате решения поставленных в работе задач были получены следующие основные результаты:

- предложена новая классификация особых положений на четыре типа, соответствующих виду изменения подвижности механизма при попадании в такое положение: потери степени свободы выходным звеном (тип «ПС»), потери управляемости выходным звеном в рамках исходных степеней свободы (тип «ПУ»), вырождению связей, приводящему к появлению у

выходного звена новой степени свободы (тип «ВС»), подвижности в пассивных парах при неподвижном выходном звене и приводах (тип «ПП»). Представлены необходимые и достаточные условия возникновения особых положений перечисленных типов, сформулированные математически с использованием аппарата винтового исчисления;

- для особых положений типов «ПС», «ПУ» и «ВС» предложены критерии близости к ним, представляющие собой значения скоростей в приводах, приводных усилий и обобщенных реакций соответственно, рассчитываемые для векторов скоростей (линейной и угловой) выходного звена или внешних усилий (силы и момента), приложенных в наихудшем направлении для каждого привода (кинематической цепи). Для указанных критериев теоретически обоснованы методы расчета их значений с использованием матрицы Якоби и винтового исчисления. Для особого положения типа «ПП» показана невозможность получения удобного в использовании критерия близости, обладающего ясным физическим смыслом;
- разработаны практические алгоритмы, а также созданы их программные реализации, предназначенные для вычисления значений критериев близости к особым положениям с учетом различных особенностей механизмов. При этом показано, что угловые и линейные компоненты векторов (или винтов) скоростей и усилий могут быть рассмотрены по отдельности, что позволяет решить проблему необходимости нормализации векторов, имеющих одновременно компоненты разных типов. Также теоретически обоснована возможность применения математического аппарата линейной алгебры при промежуточных расчетах, использующих кинематические и силовые винты;
- созданы математические модели механизмов параллельной структуры с различным числом степеней свободы, позволяющие проводить анализ механизмов с использованием предложенных методов, а также разработаны прикладные программы для проведения расчетов с использованием данных моделей. При этом схемы семейства сферических механизмов с круговой

направляющей, поступательно-направляющего механизма и механизма типа Delta с четырьмя степенями свободы являются новыми;

- проверена применимость предложенных методов расчета значений критериев близости к особым положениям на различных механизмах. На примере механизмов типа Delta с шестью и четырьмя степенями свободы продемонстрировано применение предложенных в работе расчетных методов в общем случае без каких-либо особенностей. На примере поступательно-направляющего механизма показаны особенности анализа особых положений типа «ВС» и близости к ним. В частности, продемонстрирована необходимость проецирования приводных силовых винтов на пространство, эквивалентное пространству разрешенных перемещений выходного звена, в том случае, если приводные силовые винты содержат компоненты, соответствующие запрещенным перемещениям выходного звена. На примере сферического механизма с четырьмя степенями свободы продемонстрирована необходимость учета способа задания ориентации выходного звена при анализе особых положений механизма с помощью матрицы Якоби для исключения «ложного» вырождения указанной матрицы. На примере плоских механизмов показаны особенности расчета близости к особым положениям в окрестности точек со свойствами особых положений «ПС» и «ПУ» одновременно;
- спроектирован и собран рабочий прототип механизма Delta с четырьмя степенями свободы, с использованием которого проведены экспериментальные исследования по определению критической внешней силы, приводящей к перемещению (срыву) кареток, удерживаемых приводами – шаговыми двигателями. Результаты эксперимента подтвердили достаточную точность предлагаемых расчетных методов. Также была установлена прямая зависимость между погрешностью вычисления критической силы относительно ее экспериментального значения и снижением жесткости механизма в направлении приложения внешней нагрузки при приближении к особым положениям типа «ПУ»;

- с использованием предложенных в работе критериев близости к особым положениям и методов их расчета проведены параметрический синтез, анализ и конструкторская проработка реального устройства на базе механизма Delta с четырьмя степенями свободы. В соответствии с требованиями технического задания были определены геометрические параметры механизма, позволяющие обеспечить требуемый размер рабочего пространства, выбраны электродвигатель и шаг винта шариковинтовой передачи, реализующие необходимые характеристики движения выходного звена и требования по перемещаемой им массе, а также была проверена прочность штанг (включая сферические шарниры и соединения шарниров с центральной частью штанги), соединяющих выходное звено с каретками. Были осуществлены САД-моделирование, сборка и отладка спроектированного устройства после чего оно было использовано в качестве механизма перемещения печатающих головок в установке для отработки процессов 3D-печати электроники.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алешин А. К., Антонов А. В., Борисов В. А. [и др.]. Механизмы перспективных робототехнических систем. под ред. В. А. Глазунова, С. В. Хейло. М.: ТЕХНОСФЕРА, 2020. 296 с.
2. Алешин А. К., Бузорина Д. С., Гаврюшин С. С. [и др.]. Новые механизмы робототехнических и измерительных систем. под ред. В. А. Глазунова, С. В. Хейло. М.: ТЕХНОСФЕРА, 2022. 244 с.
3. Воробьев Е. И., Гаврюшин С. С., Глазунов В. А. [и др.]. Новые механизмы в современной робототехнике. под ред. В. А. Глазунова, М.: ТЕХНОСФЕРА, 2021. 316 с.
4. Глазунов В. А., Борисов В. А. Разработка механизмов параллельной структуры с четырьмя степенями свободы и четырьмя кинематическими цепями // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2017. № 5. С. 3–12.
5. Глазунов В. А., Данилин П. О., Левин С. В., Тывес Л. И., Шалюхин К. А. Разработка механизмов параллельной структуры с кинематической и динамической развязкой // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2010. № 2. С. 23–32.
6. Глазунов В. А., Колискор А. Ш., Крайнев А. Ф. Пространственные механизмы параллельной структуры. М.: Наука, 1991. 95 с.
7. Глазунов В. А., Левин С. В., Шалюхин К. А., Хаккыоглу М., Во Д. Т. Разработка механизмов параллельной структуры с четырьмя степенями свободы и частичной развязкой // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2010. № 5. С. 3–9.
8. Глазунов В. А., Серков Н. А., Орлов А. В., Алешин А. К., Рашоян Г. В., Скворцов С. А., Шалюхин К. А. Прецизионный механизм параллельной структуры для микроперемещений объектов в нанодиапазоне // VI международная научная конференция «Фундаментальные исследования и инновационные технологии в машиностроении». 2019. С. 125–127.

9. Глазунов В. А., Хейло С. В., Ширинкин М. А., Ларюшкин П. А., Ковальчук А. В. Манипулятор параллельной структуры с четырьмя степенями свободы // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2011. № 4–2. С. 92–93.
10. Демидов С. М., Глазунов В. А., Ласточкин А. Б., Артеменко Ю. Н. Анализ углов давления и особых положений модулей параллельной структуры, предназначенных для механизмов относительного манипулирования // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2011. № 5. С. 11–20.
11. Диденко Е. В., Глазунов В. А., Филиппов Г. С. Разработка плоского механизма параллельной структуры с одной степенью свободы для возбуждения колебаний по любому кинематическому винту // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2018. № 11(704). С. 30–37.
12. Диментберг Ф. М. Определение положений пространственных механизмов. М.: Издательство Академии наук СССР, 1950. 142 с.
13. Диментберг Ф. М. Винтовое исчисление и его приложения в механике. М.: Наука, 1965. 197 с.
14. Диментберг Ф. М. Теория винтов и ее приложения. М.: Наука, 1978. 327 с.
15. Захаров М. Н., Куц М. С., Ларюшкин П. А., Эрастова К. Г. Экспериментальная оценка эффективной рабочей зоны работа параллельной структуры с шаговыми двигателями // Вестник машиностроения. 2021. № 12. С. 44–48.
16. Захаров М. Н., Ларюшкин П. А., Эрастова К. Г. Определение геометрических параметров плоского пятизвенного механизма из условия обеспечения его устойчивой работы в заданной области // Вестник машиностроения. 2017. № 11. С. 10–14.
17. Захаров М. Н., Ларюшкин П. А., Эрастова К. Г. Оптимизация геометрических параметров плоского механизма параллельной структуры методом SQP из условия максимизации эффективной рабочей зоны // Вестник машиностроения. 2018. № 8. С. 24–28.
18. Ильин В. А., Позняк Э. Г. Линейная алгебра. М.: Физматлит, 1999. 297 с.

19. Крайнев А. Ф. Словарь-справочник по механизмам. М.: Машиностроение, 1987. 560 с.
20. Крайнев А. Ф. Механика машин. Фундаментальный словарь М.: Машиностроение, 2000. 904 с.
21. Крайнев А. Ф., Глазунов В. А., Нагорных В. И. Разработка механизмов параллельной структуры для малых перемещений с упругими изгибными кинематическими парами // Проблемы машиностроения и надежности машин. 1992. № 4. С. 79–86.
22. Кулешова Е. М., Ларюшкин П. А. Кинематика механизмов типа «Дельта» с различным числом степеней свободы // Машиноведение и инновации. Конференция молодых ученых и студентов (МИКМУС - 2017). Материалы конференции. 2018. С. 305–308.
23. Ларюшкин П. А. Об исследовании особых положений, связанных с вырождением связей, в механизмах параллельной структуры // Инженерный вестник. 2014. № 10. С. 40–44.
24. Ларюшкин П. А. О подходе к предварительной оценке точности позиционирования параллельного манипулятора с тремя степенями свободы // Инженерный вестник. 2015. № 3. С. 30–34.
25. Ларюшкин П. А. Классификация и условия возникновения особых положений в механизмах параллельной структуры // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2017. № 1 (682). С. 16–23.
26. Ларюшкин П. А. Оценка близости к особым положениям механизмов параллельной структуры путем дифференцирования уравнений связи // Вестник Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана. Серия: Машиностроение. 2019. № 1. С. 71–83.
27. Ларюшкин П. А. Экспериментальное исследование передачи усилия в механизме типа Delta, с четырьмя степенями свободы // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2021. № 5. С. 3–13.

28. Ларюшкин П. А. Определение обобщенных реакций в механизмах параллельной структуры // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2022. № 9 (750). С. 54–62.

29. Ларюшкин П. А. Об углах между подпространствами силовых винтов в механизмах параллельной структуры // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2022. № 6. С. 10–20.

30. Ларюшкин П. А. Исследование особых положений механизма параллельной структуры с шестью степенями свободы типа гексаглайд // Справочник. Инженерный журнал. 2022. № 3 (303). С. 31–37.

31. Ларюшкин П. А., Глазунов В. А., Хейло С. В. Решение задачи о положениях параллельного манипулятора с тремя степенями свободы // Справочник. Инженерный журнал. 2012. № 2. С. 16–20.

32. Ларюшкин П. А., Глазунов В. А., Эрастова К. Г. Определение максимальных усилий в приводах манипуляторов параллельной структуры по заданной величине внешней нагрузки // Машиностроение и инженерное образование. 2016. № 2 (47). С. 40–46.

33. Ларюшкин П. А., Глазунов В. А., Эрастова К. Г., Соломенцев Ю. М. Манипулятор параллельной структуры с вращательными степенями свободы для возможного применения в медицинской робототехнике // Качество. Инновации. Образование. 2016. № S2. С. 110–116.

34. Ларюшкин П. А., Епанчинцева Д. С. Уравнения связи и решение обратной задачи о положениях для плоских механизмов параллельной структуры произвольной геометрии // Инженерный вестник. 2015. № 9. С. 12–21.

35. Ларюшкин П. А., Захаров М. Н., Эрастова К. Г., Глазунов В. А. Структурный анализ и решение обратной задачи о положениях сферического механизма параллельной структуры // Вестник машиностроения. 2017. № 2. С. 34–36.

36. Ларюшкин П. А., Мукабенова Л. Г., Эрастова К. Г., Зайцева О. Ю. Выбор схемы и решение обратной задачи о положениях для системы позиционирования

на базе плоского механизма параллельной структуры // Машиностроение и компьютерные технологии. 2017. № 7. С. 87–101.

37. Ларюшкин П. А., Палочкин С. В. Рабочая зона манипулятора параллельной структуры с тремя степенями свободы // Известия высших учебных заведений. Технология текстильной промышленности. 2012. № 3 (339). С. 92–96.

38. Ларюшкин П. А., Палочкин С. В. Динамика манипулятора параллельной структуры с тремя степенями свободы // Известия высших учебных заведений. Технология текстильной промышленности. 2013. № 4 (346). С. 114–118.

39. Ларюшкин П. А., Палочкин С. В. К решению задач об ускорениях манипуляторов параллельной структуры // Современные наукоемкие технологии и перспективные материалы текстильной и легкой промышленности (Прогресс): сборник материалов международной научно-технической конференции. 2013. С. 169–170.

40. Ларюшкин П. А., Рашоян Г. В., Эрастова К. Г. Об особенностях применения винтового исчисления для оценки близости к особым положениям механизмов параллельной структуры // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2017. № 4. С. 39–45.

41. Ларюшкин П. А., Хейло С. В., Чан К. Н., Глазунов В. А. Геометрическая интерпретация прямой задачи о положениях параллельного манипулятора с тремя степенями свободы // МИКМУС - 2011. XXIII Международная информационно-ориентированная конференция молодых ученых и студентов. 2011. С. 114.

42. Ларюшкин П. А., Эрастова К. Г., Кобылкевич К. А., Скворцов С. А. Исследование особых положений механизма параллельной структуры семейства Delta с четырьмя степенями свободы // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2019. № 6. С. 34–41.

43. Ларюшкин П. А., Эрастова К. Г., Филиппов Г. С., Хейло С. В. К расчету механизмов типа Delta с линейными приводами и различным числом степеней свободы // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2019. № 3. С. 19–26.

44. Лурье А. И. Аналитическая механика. М.: Физматлит, 1961. 824 с.

45. Николаева Е. В., Николаев М. Ю., Молодцов А. С., Пимиева Н. Е., Казаков М. В. Измерение зубчатых косозубых шестерней и червячных колес на координатно-измерительной машине // Омский научный вестник. 2018. № 4 (160). С. 140–145.

46. Садилов М. Д., Тимофеев Г. А. Моделирование движения дельта-робота по заданной траектории с целью определения силовых факторов, действующих на его приводы и шарниры // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2021. № 11 (740). С. 22–30.

47. Тывес Л. И., Данилин П. О., Глазунов В. А. Манипулятор-трипод с шестью степенями подвижности. Патент РФ на изобретение № 2403144. 2010.

48. Филиппов Г. С. Кинематический анализ механизма параллельно-последовательной структуры с пятью степенями свободы // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2019. № 8 (713). С. 18–24.

49. Филиппов Г. С. Научное обоснование и разработка механизмов параллельно-последовательной структуры для многокоординатных манипуляционных систем: дис. ... докт. техн. наук. Москва. 2019. 324 с.

50. Филиппов Г. С., Шалюхин К. А., Рашоян Г. В., Глазунов В. А., Скворцов С. А., Алешин А. К. Механизм манипулятора с параллельной структурой для использования в роботизированном хирургическом комплексе // Технологии и качество. 2021. № 1 (51). С. 46–51.

51. Хейло С. В. Разработка научных основ создания манипуляционных механизмов параллельной структуры для робототехнических систем предприятий текстильной и легкой промышленности: дис. ... докт. техн. наук. Москва. 2014. 292 с.

52. Хейло С. В., Ларюшкин П. А. Определение рабочей зоны манипуляторов параллельной структуры // Справочник. Инженерный журнал. 2013. № 2 (191). С. 27–31.

53. Шалюхин К. А., Рашоян Г. В., Алешин А. К., Скворцов С. А., Левин С. В., Антонов А. В. Задачи кинематического анализа и особых положений механизмов

роботов параллельной структуры // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2018. № 4. С. 11–18.

54. Эрастова К. Г. Совершенствование машин на базе механизмов параллельной структуры за счет коррекции их рабочих зон: дис. ... канд. техн. наук. Москва. 2022. 140 с.

55. Эрастова К. Г., Ларюшкин П. А. Исследование рабочей зоны и особых положений плоского 3-RPR манипулятора в среде MATLAB // Инженерный вестник. 2016. № 7. С. 1–7.

56. Эрастова К. Г., Ларюшкин П. А. Рабочие зоны механизмов параллельной структуры и способы определения их формы и размеров // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2017. № 8 (689). С. 78–87.

57. Эрастова К. Г., Ларюшкин П. А. Оптимизация геометрических параметров механизмов параллельной структуры методом SQP из условия максимизации эффективной рабочей зоны на примере пятизвенного манипулятора // Машиноведение и инновации. Конференция молодых ученых и студентов (МИКМУС - 2017). Материалы конференции. 2018. С. 356–359.

58. Эрастова К. Г., Ларюшкин П. А. Синтез манипулятора параллельной структуры для сборки дистанционирующих решёток тепловыделяющих сборок энергетических ядерных реакторов // XXX Международная инновационная конференция молодых ученых и студентов (МИКМУС - 2018). Сборник трудов конференции. 2019. С. 715–718.

59. Эрастова К. Г., Ларюшкин П. А. Многокритериальная оптимизация конструкции дельта-робота с четырьмя степенями свободы // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2022. № 1 (742). С. 10–19.

60. Эрастова К. Г., Ларюшкин П. А., Глазунов В. А. Рабочая зона и оптимальные геометрические параметры сферического манипулятора параллельной структуры // XXVIII Международная инновационно-ориентированная конференция молодых ученых и студентов (МИКМУС - 2016). Сборник трудов конференции. 2017. С. 310–313.

61. Эрстова К. Г., Шиханова Н. В., Комаров Р. А., Ларюшкин П. А. Исследование конструктивной рабочей зоны плоского лямбдо-подобного механизма с учетом особых положений // Вестник машиностроения. 2021. № 3. С. 36–40.
62. Яглинский В. П., Обайди А. С., Фалько Н. В. Повышение подвижности кабин динамических тренажеров мобильных машин // Технологический аудит и резервы производства. 2014. № 3/4. С. 44–48.
63. Abedinnasab M., Bengom P., Bennehar M. [et al.]. Parallel Manipulators: Design, Applications and Dynamic Analysis. Nova Science Pub, 2016. 181 p.
64. Abu Hanieh A., Horodincea M., Preumont A. Six-Degree-of-Freedom Hexapods for Active Damping and Active Isolation of Vibrations // Journal de Physique IV (Proceedings). 2002. № 11 (12). Pp. 41–48.
65. Alba-Gomez O., Wenger P., Pamanes A. Consistent Kinetostatic Indices for Planar 3-DOF Parallel manipulators, Application to the Optimal Kinematic Inversion // ASME 2005 IDETC/CIE Conference. 2005. Pp. 765–774.
66. Angeles J. Rational Kinematics. Springer New York, 1988. 121 p.
67. Antonov A. v, Chernetsov R. A., Ulyanov E. E., Ivanov K. A. Use of the Chord Method for Analyzing Workspaces of a Parallel Structure Mechanism // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 2020. № 1 (747). Article 012079.
68. Arakelian V., Briot S. Improvement of Positioning Accuracy of PAMINSA (Parallel Manipulator of the I.N.S.A.) // ROMANSY 2006. 16-th CISM-IFTToMM Symposium on Robot Design, Dynamics, and Control. 2006. Pp. 1–9.
69. Arakelian V., Briot S., Glazunov V. Improvement of Functional Performance of Spatial Parallel Manipulators Using Mechanisms of Variable Structure // 12th IFTToMM World Congress, Besançon (France), June. 2007. Pp. 1–6.
70. Arakelian V., Briot S., Glazunov V. Increase of Singularity-Free Zones in the Workspace of Parallel Manipulators Using Mechanisms of Variable Structure // Mechanism and Machine Theory. 2008. № 9 (43). Pp. 1129–1140.
71. Bai S. Optimum Design of Spherical Parallel Manipulators for a Prescribed Workspace // Mechanism and Machine Theory. 2010. № 2 (45). Pp. 200–211.

72. Balli S., Chand S. Transmission Angle in Mechanisms // Mechanism and Machine Theory. 2002. № 2 (37). Pp. 175–195.
73. Barnfather J. D., Goodfellow M. J., Abram T. Positional Capability of a Hexapod Robot for Machining Applications // The International Journal of Advanced Manufacturing Technology. 2017. № 1–4 (89). Pp. 1103–1111.
74. Bernhofer T., Seefried A., Bellmann T., Weber P. Design of a Novel 8-DOF Hexapod Based Motion Platform // The 1st International Electronic Conference on Machines and Applications. 2022. Pp. 24.
75. Bi Z., Jin Y., Gibson R., McTotal P. Kinematics of Parallel Kinematic Machine Exechon // Proceedings of the 2009 IEEE International Conference on Information and Automation. 2009. Pp. 201–206.
76. Bjorck A., Golub G. Numerical Methods for Computing Angles Between Linear Subspaces // Mathematics of Computation. 1973. № 123 (27). Pp. 579–594.
77. Bonev I. A., Gosselin C. M. Analytical Determination of the Workspace of Symmetrical Spherical Parallel Mechanisms // IEEE Transactions on Robotics. 2006. № 5 (22). Pp. 1011–1017.
78. Bonev I., Gosselin C. Singularity Loci of Planar Parallel Manipulators with Revolute Joints // Proceedings of 2nd Workshop on Computational Kinematics. 2001. Pp. 1–11.
79. Bonev I., Zlatanov D., Gosselin C. Singularity Analysis of 3-DOF Planar Parallel Mechanisms via Screw Theory // Journal of Mechanical Design. 2003. № 3 (125). Pp. 573–581.
80. Bourbonnais F., Bigras P., Bonev I. A. Minimum-Time Trajectory Planning and Control of a Pick-and-Place Five-Bar Parallel Robot // IEEE/ASME Transactions on Mechatronics. 2015. № 2 (20). Pp. 740–749.
81. Bourges J.-L., Hubschman J.-P., Wilson J., Prince S., Tsao T.-C., Schwartz S. Assessment of a Hexapod Surgical System for Robotic Micro-Macro Manipulations in Ocular Surgery // Ophthalmic Research. 2011. № 1 (46). Pp. 25–30.
82. Briot S., Arakelian V. Complete Shaking Force and Shaking Moment Balancing of the Position-Orientation Decoupled PAMINSA manipulator // 2009

IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics. 2009. Pp. 1521–1526.

83. Briot S., Arakelian V., Glazunov V. Design and Analysis of the Properties of the Delta Inverse Robot // Proceedings of the X International Conference on the Theory of Machines and Mechanisms. 2008. Pp. 113–118.

84. Briot S., Arakelian V., Guegan S. PAMINSA: A New Family of Partially Decoupled Parallel Manipulators // Mechanism and Machine Theory. 2009. № 2 (44). Pp. 425–444.

85. Briot S., Glazunov V., Arakelian V. On the Design Conditions of Planar Parallel Manipulators in Near-Singular Configurations // The 13th World Congress in Mechanism and Machine Science. 2011. Pp. 1–8.

86. Briot S., Glazunov V., Arakelian V. Investigation on the Effort Transmission in Planar Parallel Manipulators // Journal of Mechanisms and Robotics. 2013. № 1 (5). Article 011011.

87. Briot S., Pashkevich A., Chablat D. Optimal Technology-Oriented Design of Parallel Robots for High-Speed Machining Applications // 2010 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA 2010). 2010. Pp. 1155–1161.

88. Butzhammer L., Hausotte T. Complex 3D Scan Trajectories for Industrial Cone-Beam Computed Tomography Using a Hexapod // Measurement Science and Technology. 2021. № 10 (32). Pp. 105402.

89. Caccavale F., Siciliano B., Villani L. The Tricept Robot: Dynamics and Impedance Control // IEEE/ASME Transactions on Mechatronics. 2003. № 2 (8). Pp. 263–268.

90. Champion G., Qi Wang, Hayward V. The Pantograph Mk-II: A Haptic Instrument // 2005 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. 2005. Pp. 193–198.

91. Campos L., Bourbonnais F., Bonev I., Bigras P. Development of a Five-Bar Parallel Robot with Large Workspace // Proceedings of ASME 2010 International Design Engineering Technical Conferences. 2010. Pp. 917–922.

92. Cappel K. Motion Simulator. Patent US3295224A. 1967.

93. Carricato M. Singularity-Free Fully-Isotropic Translational Parallel Manipulators: Thesis ... Doctor of Philosophy in Mechanics of Machines. 2001. 67 p.
94. Carricato M., Parenti-Castelli V. On the Topological and Geometrical Dynthesis and Classification of Translational Parallel Mechanisms // Proceedings of the 11th World Congress in Mechanism and Machine Science, Tianjin, China. 2004. Pp. 1624–1628.
95. Castaneda L. A., Luviano-Juarez A., Chairez I. Robust Trajectory Tracking of a Delta Robot Through Adaptive Active Disturbance Rejection Control // IEEE Transactions on Control Systems Technology. 2015. № 4 (23). Pp. 1387–1398.
96. Cha S.-H., Lasky T., Velinsky S. Kinematically-Redundant Variations of the 3-RRR Mechanism and Local Optimization-Based Singularity Avoidance // Mechanics Based Design of Structures and Machines. 2007. № 1 (35). Pp. 15–38.
97. Chaker A., Mlika A., Laribi M. A., Romdhane L., Zeghloul S. Synthesis of Spherical Parallel Manipulator for Dexterous Medical Task // Frontiers of Mechanical Engineering. 2012. № 2 (7). Pp. 150–162.
98. Chaker A., Mlika A., Laribi M. A., Romdhane L., Zeghloul S. Clearance and Manufacturing Errors' Effects on the Accuracy of the 3-RCC Spherical Parallel Manipulator // European Journal of Mechanics - A/Solids. 2013. № 37. Pp. 86–95.
99. Chen C., Angeles J. A Generalized Transmission Index for Spatial Linkages // ASME 2005 IDETC/CIE Conference. 2005. Pp. 749–756.
100. Chen H.-J., Bishop R., Agrawal B. Payload Pointing and Active Vibration Isolation Using Hexapod Platforms // 44th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference. 2003. Pp. 1–10.
101. Cheng H., Yiu Y., Li Z. Dynamics and Control of Redundantly Actuated Parallel Manipulators // IEEE/ASME Transactions on Mechatronics. 2003. № 4 (8). Pp. 483–491.
102. Cirillo A., Cirillo P., Maria G. de, Marino A., Natale C., Pirozzi S. Optimal Custom Design of Both Symmetric and Unsymmetrical Hexapod Robots for Aeronautics Applications // Robotics and Computer-Integrated Manufacturing. 2017. (44). Pp. 1–16.

103. Clavel R. Device for the Movement and Positioning of an Element in Space. Patent US4976582A. 1990.
104. Clavel R. Conception d'un Robot Parallèle Rapide à 4 Degrés de Liberté: These... Docteur es Sciences Techniques. 1991. 146 p.
105. Collins C. Forward Kinematics of Planar Parallel Manipulators in the Clifford Algebra of P2 // Mechanism and Machine Theory. 2002. № 8 (37). Pp. 799–813.
106. Coulombe J., Bonev I. A. A New Rotary Hexapod for Micropositioning // 2013 IEEE International Conference on Robotics and Automation. 2013. Pp. 877–880.
107. Dasgupta B., Mruthyunjaya T. Force Redundancy in Parallel Manipulators: Theoretical and Practical Issues // Mechanism and Machine Theory. 1998. № 6 (33). Pp. 727–742.
108. Dong D., Ge W., Liu S., Xia F., Sun Y. Design and Optimization of a Powered Ankle-Foot Prosthesis Using a Geared Five-bar Spring Mechanism // International Journal of Advanced Robotic Systems. 2017. № 3 (14). Article 172988141770454.
109. Dong X., Yu J., Chen B., Zong G. Geometric Approach for Kinematic Analysis of a Class of 2-DOF Rotational Parallel Manipulators // Chinese Journal of Mechanical Engineering. 2012. № 2 (25). Pp. 241–247.
110. Du Y., Li R., Li D., Bai S. An Ankle Rehabilitation Robot Based on 3-RRS Spherical Parallel Mechanism // Advances in Mechanical Engineering. 2017. № 8 (9). Pp. 168781401771811.
111. Duan X., Yang Y., Cheng B. Modeling and Analysis of a 2-DOF Spherical Parallel Manipulator // Sensors. 2016. № 9 (16). Article 1485.
112. Duffy J. Statics and Kinematics with Applications to Robotics. Cambridge University Press, 1996. 174 p.
113. Earl C. F. Some Kinematics Structures for Robot Manipulators Designs // Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design. 1983. № 1 (105). Pp. 15–22.
114. Ebrahimi I., Carretero J., Boudreau R. 3-PRRR Redundant Planar Parallel Manipulator: Inverse Displacement, Workspace and Singularity Analyses // Mechanism and Machine Theory. 2007. № 8 (42). Pp. 1007–1016.

115. Enferadi J., Shahi A. On the Position Analysis of a New Spherical Parallel Robot with Orientation Applications // *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*. 2016. № 37. Pp. 151–161.
116. Erastova K., Laryushkin P. An Extended Approach to Estimating Closeness to Singularity in Parallel Manipulators based on Actuating Efforts Values // *Proceedings of the 2019 International Conference on Artificial Intelligence, Robotics and Control*. 2019. Pp. 23–26.
117. Firmani F., Podhorodeski R. Force-Unconstrained Poses for a Redundantly-Actuated Planar Parallel Manipulator // *Mechanism and Machine Theory*. 2004. № 5 (39). Pp. 459–476.
118. Funabashi H., Takeda Y. Determination of Singular Points and Their Vicinity in Parallel Manipulators Based on the Transmission Index // *9th World Congress on the Theory of Machines and Mechanisms*. 1995. Pp. 1977–1981.
119. Gao F., Liu X.-J., Chen X. The Relationships Between the Shapes of the Workspaces and the Link Lengths of 3-DOF Symmetrical Planar Parallel Manipulators // *Mechanism and Machine Theory*. 2001. № 2 (36). Pp. 205–220.
120. Gao F., Peng B., Li W., Zhao H. Design of a Novel 5-DOF Parallel Kinematic Machine Tool Based on Workspace // *Robotica*. 2005. № 1 (23). Pp. 35–43.
121. Gao Y., Bin J., Haffa D., Kreuzer C., Hartmann J., Speicher M., Lindner F. H., Ostermayr T. M., Hilz P., Rösch T. F., Lehrack S., Englbrecht F., Seuferling S., Gilljohann M., Ding H., Ma W., Parodi K., Schreiber J. An Automated, 0.5 Hz Nano-Foil Target Positioning System for Intense Laser Plasma Experiments // *High Power Laser Science and Engineering*. 2017. № 5. Article e12.
122. Ghaedrahmati R., Gosselin C. Kinematic Analysis of a New 2-DOF Parallel Wrist with a Large Singularity-Free Rotational Workspace // *Mechanism and Machine Theory*. 2022. № 175. Article 104942.
123. Gim K. G., Kim J., Yamane K. Design of a Serial-Parallel Hybrid Leg for a Humanoid Robot // *2018 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*. 2018. Pp. 1–5.

124. Glazunov V. A., Orlov A. V., Skvortsov P. A. Rational Design of a Micro-positioner with Elastic Hinges // Proceedings of IFToMM Asian Mechanism and Machine Science. 2022. Pp. 22–30.
125. Glazunov V., Laryushkin P., Kheylo S. 3-DOF Translational and Rotational Parallel Manipulators // New Trends in Mechanism and Machine Science. Theory and Applications in Engineering. 2013. Pp. 199–207.
126. Glisson T. H. Introduction to Circuit Analysis and Design. Dordrecht: Springer Netherlands, 2011. 768 p.
127. Gloess R., Lula B. Challenges of Extreme Load Hexapod Design and Modularization for Large Ground-Based Telescopes // SPIE Astronomical Telescopes + Instrumentation. 2010. Article 77391U.
128. Gosselin C., Merlet J.-P. The Direct Kinematics of Planar Parallel Manipulators: Special Architectures and Number of Solutions // Mechanism and Machine Theory. 1994. № 8 (29). Pp. 1083–1097.
129. Gosselin C. Kinematic Analysis Optimization and Programming of Parallel Robotic Manipulators: Thesis ... Doctor of Philosophy. 1988. 235 p.
130. Gosselin C. Compact Dynamic Models for the Tripteron and Quadruperon Parallel Manipulators // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering. 2009. № 1 (223). Pp. 1–12.
131. Gosselin C., Angeles J. Singularity Analysis of Closed-Loop Kinematic Chains // IEEE Transactions on Robotics and Automatics. 1990. № 3 (6). Pp. 281–290.
132. Gosselin C., Angeles J. A Global Performance Index for the Kinematic Optimization of Robotic Manipulators // Journal of Mechanical Design. 1991. № 3 (113). Pp. 220–226.
133. Gosselin C., Gagne M. A Closed-Form Solution for the Direct Kinematics of a Special Class of Spherical Three-Degree-of-Freedom Parallel Manipulators // Workshop on Computational Kinematics. 1995. Pp. 231–240.
134. Gosselin C., Laliberté T., Veillette A. Singularity-Free Kinematically Redundant Planar Parallel Mechanisms with Unlimited Rotational Capability // IEEE Transactions on Robotics. 2015. № 2 (31). Pp. 457–467.

135. Gosselin C., Lemieux S., Merlet J.-P. A New Architecture of Planar Three-Degree-of-Freedom Parallel Manipulator // IEEE International Conference on Robotics and Automation. 1996. Pp. 3738–3743.
136. Gosselin C. M., Masouleh M. T., Duchaine V., Richard P.-L., Foucault S., Kong X. Parallel Mechanisms of the Multipterion Family: Kinematic Architectures and Benchmarking // Proceedings 2007 IEEE International Conference on Robotics and Automation. 2007. Pp. 555–560.
137. Gosselin C., St-Pierre E., Gagne M. On the Development of the Agile Eye: Mechanical Design, Control Issues and Experimentation // IEEE Robotics and Automation Magazine. 1996. № 4 (3). Pp. 29–37.
138. Gosselin C., Wang J. Singularity Loci of Planar Parallel Manipulators with Revolute Actuators // Robotics and Autonomous Systems. 1997. № 4 (21). Pp. 377–398.
139. Gosselin C., Wang J. Singularity Loci of a Special Class of Spherical Three-Degree-of-Freedom Parallel Mechanisms with Revolute Actuators // International Journal of Robotics Research. 2002. № 7 (21). Pp. 649–659.
140. Gough V. E., Whitehall S. G. Universal Tyre Test Machine // Proceedings of the FISITA Ninth International Technical Congress. 1962. Pp. 117–137.
141. Gunn L., Yuan Yun, Jinsong Wang, Liping Wang Kinematics of a Tricept-Like Parallel Robot // 2004 IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics. 2004. Pp. 5312–5316.
142. Guo W., Li R., Cao C., Gao Y. Kinematics Analysis of a Novel 5-DOF Hybrid Manipulator // International Journal of Automation Technology. 2015. № 9. Pp. 765–774.
143. Hall J. L., Pettit G. W., Lindler J. E., Anderson E. H., Flint E. M. Compact Lightweight Six-Axis Point-and-Hold Positioning System // SPIE 5054, Smart Structures and Materials 2003: Industrial and Commercial Applications of Smart Structures Technologies. 2003. Pp. 287–300.
144. Hay A., Snyman J. The Optimal Synthesis of Parallel Manipulators for Desired Workspace // Advances in Robot Kinematics. 2002. Pp. 337–346.

145. He Z., Feng X., Zhu Y., Yu Z., Li Z., Zhang Y., Wang Y., Wang P., Zhao L. Progress of Stewart Vibration Platform in Aerospace Micro-Vibration Control // *Aerospace*. 2022. № 6 (9). Article 324.
146. Honegger M., Codourey A., Burdet E. Adaptive Control of the Hexaglide, a 6 DOF Parallel Manipulator // *IEEE International Conference on Robotics and Automation*. 1997. Pp. 543–548.
147. Hubert J., Merlet J.-P. Static of Parallel Manipulators and Closeness to Singularity // *Journal of Mechanisms and Robotics*. 2009. № 1 (1). Pp. 1–6.
148. Hunt K. H. *Kinematic Geometry of Mechanisms*. Oxford: Clarendon Press, 1978. 465 p.
149. Hunt K. H. *Geometry of Robotics Devices* // *Mechanical Engineering Transactions*. 1982. № 4 (7). Pp. 213–220.
150. Hunt K. H. Structural Kinematics of In-Parallel-Actuated Robot Arms // *Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design*. 1983. № 4 (105). Pp. 705–712.
151. Hunt K. H. Special Configurations of Robot-Arms via Screw Theory // *Robotica*. 1986. № 3 (4). Pp. 171–179.
152. Husty M. On the Workspace of Planar Three-Legged Platforms // *World Automation Congress*. 1996. Pp. 339–344.
153. Husty M., Mielczarek S., Hiller M. Constructing an Overconstrained Planar 4-RPR Manipulator with Maximal Forward Kinematics Solution Set // *10th Workshop RAAD*. 2001. Article 6.
154. Jiang M., Hu X., Liu L., Yu Y. Study on Parallel 2-DOF Rotation Mechanism in Radar // *Physics Procedia*. 2012. № 24. Pp. 1830–1835.
155. Joubair A., Slamani M., Bonev I. A Novel XY-Theta Precision Table and a Geometric Procedure for its Kinematic Calibration // *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*. 2012. № 1 (28). Pp. 57–65.
156. Kalafat M. A., Sevinç H., Samankan S., Altinkaynak A., Temel Z. A Novel Origami-Inspired Delta Mechanism with Flat Parallelogram Joints // *Journal of Mechanisms and Robotics*. 2021. № 2 (13). Article 021005.

157. Kang B., Yeung B., Mills J. Two-Time Scale Controller Design for a High-Speed Planar Parallel Manipulator with Structural Flexibility // *Robotica*. 2002. № 5 (20). Pp. 519–528.

158. Keilig L., Bourauel C., Grüner M., Hültenschmidt R., Bayer S., Utz K.-H., Stark H. Design and Testing of a Novel Measuring Set-up for Use in Dental Biomechanics – Measuring Principle and Exemplary Measurements with the Hexapod Measuring System // *Biomedical Engineering*. 2004. № 7–8 (49). Pp. 208–215.

159. Kirichenko A. V., Laryushkin P. A. Parallel Mechanisms in Layout of Human Musculoskeletal System // *Advances in Intelligent Systems and Computing*. Vol. 902. 2nd International Conference of Artificial Intelligence, Medical Engineering, Education, AIMEE 2018. 2020. Pp. 231–240.

160. Klimchik A., Pashkevich A., Chablat D. Fundamentals of Manipulator Stiffness Modeling Using Matrix Structural Analysis // *Mechanism and Machine Theory*. 2019. № 133. Pp. 365–394.

161. Kong X. Reconfiguration Analysis of a 4-DOF 3-RER Parallel Manipulator with Equilateral Triangular Base and Moving Platform // *Mechanism and Machine Theory*. 2016. № 98. Pp. 180–189.

162. Kumar S., Wöhrle H., Gea Fernández J. de, Müller A., Kirchner F. A Survey on Modularity and Distributivity in Series-Parallel Hybrid Robots // *Mechatronics*. 2020. № 68. Article 102367.

163. Kumar V. Characterization of Workspaces of Parallel Manipulators // *ASME Journal of Mechanical Design*. 1992. № 3 (114). Pp. 368–375.

164. Lai Z. C., Yang D. C. H. A New Method for the Singularity Analysis of Simple Six-link Manipulators // *International Journal of Robotics Research*. 1986. № 2 (5). Pp. 66–74.

165. Laribi M. A., Romdhane L., Zegloul S. Analysis and Dimensional Synthesis of the DELTA Robot for a Prescribed Workspace // *Mechanism and Machine Theory*. 2007. № 7 (42). Pp. 859–870.

166. Laryushkin P. A., Glazunov V. A. On the Estimation of Closeness to Singularity for Parallel Mechanisms Using Generalized Velocities and Reactions // Proceedings of 14th IFToMM World Congress. 2015. Article 127160.

167. Laryushkin P., Antonov A., Fomin A., Essomba T. Velocity and Singularity Analysis of a 5-DOF (3T2R) Parallel-Serial (Hybrid) Manipulator // Machines. 2022. № 4 (10). Article 276.

168. Laryushkin P., Antonov A., Fomin A., Glazunov V. Novel Reconfigurable Spherical Parallel Mechanisms with a Circular Rail // Robotics. 2022. № 2 (11). Article 30.

169. Laryushkin P., Antonov A., Fomin A., Glazunov V. Inverse and Forward Kinematics of a Reconfigurable Spherical Parallel Mechanism with a Circular Rail // ROMANSY 24 - Robot Design, Dynamics and Control. 2022. Pp. 246–254.

170. Laryushkin P., Fomin A., Antonov A. Kinematic and Singularity Analysis of a 4-DOF Delta-type Parallel Robot // Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering. 2023. № 4 (45). Article 218.

171. Laryushkin P., Glazunov V. A New 3-DOF Translational Parallel Manipulator: Kinematics, Dynamics, Workspace Analysis // Romansy 19 - Robot Design, Dynamics and Control. Proceedings of the 19th CISM-Iftomm Symposium. 2013. Pp. 11–18.

172. Laryushkin P., Glazunov V., Demidov S. Singularity Analysis of 3-DOF Translational Parallel Manipulator // Advances on Theory and Practice of Robots and Manipulators. Proceedings of ROMANSY 2014 XX CISM-IFTToMM Symposium on Theory and Practice of Robots and Manipulators. 2014. C. 47–54.

173. Laryushkin P., Glazunov V., Erastova K. On the Maximization of Joint Velocities and Generalized Reactions in the Workspace and Singularity Analysis of Parallel Mechanisms // Robotica. 2019. № 4 (37). C. 675–690.

174. Laryushkin P., Pukhova E., Erastova K. Experimental Study of Force Transmission in 4-DOF Parallel Manipulator and Its Educational Applications // ROMANSY 23 - Robot Design, Dynamics and Control. 2021. C. 162–169.

175. Legnani G., Fassi I., Giberti H., Cinquemani S., Tosi D. A new Isotropic and Decoupled 6-DOF Parallel Manipulator // *Mechanism and Machine Theory*. 2012. № 58. C. 64–81.
176. Li Q., Huang Z. Mobility Analysis of a Novel 3-5R Parallel Mechanism Family // *ASME Journal of Mechanical Design*. 2004. № 1 (126). Pp. 79–82.
177. Lin R., Guo W., Cheng S. S. Type Synthesis of 2R1T Remote Center of Motion Parallel Mechanisms with a Passive Limb for Minimally Invasive Surgical Robot // *Mechanism and Machine Theory*. 2022. № 172. Article 104766.
178. Lin W., Li B., Yang X., Zhang D. Modelling and Control of Inverse Dynamics for a 5-DOF Parallel Kinematic Polishing Machine // *International Journal of Advanced Robotic Systems*. 2013. № 8 (10). Article 314.
179. Lipkin H., Pohl E. Enumeration of Singular Configurations for Robotic Manipulators // *ASME Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design*. 1991. № 3 (113). Pp. 272–279.
180. Liu G., Lou Y., Li Z. Singularities of Parallel Manipulators: A Geometric Treatment // *IEEE Transactions on Robotics and Automatics*. 2003. № 4 (19). Pp. 589-594.
181. Liu X.-J., Wang J., Oh K.-K., Kim J. A New Approach to the Design of a DELTA Robot with a Desired Workspace // *Journal of Intelligent and Robotic Systems*. 2004. № 2 (39). Pp. 209–225.
182. López M., Castillo E., García G., Bashir A. Delta robot: Inverse, Direct, and Intermediate Jacobians // *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*. 2006. № 1 (220). Pp. 103–109.
183. Lynch K., Park F. *Modern Robotics: Mechanics, Planning, and Control*. Cambridge University Press, 2017. 544 p.
184. Malosio M., Negri S. P., Pedrocchi N., Vicentini F., Caimmi M., Molinari Tosatti L. A Spherical Parallel Three Degrees-of-Freedom Robot for Ankle-Foot Neuro-Rehabilitation // *2012 Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society*. 2012. Pp. 3356–3359.

185. Malyshev D., Posypkin M., Rybak L., Usov A. Analysis of the Working Area of the Robot DexTAR - Dexterous Twin-Arm Robot // *International Journal of Open Information Technologies*. 2018. № 7 (6). Pp. 15–20.
186. McClintock H., Temel F. Z., Doshi N., Koh J., Wood R. J. The milliDelta: A High-bandwidth, High-precision, Millimeter-scale Delta Robot // *Science Robotics*. 2018. № 14 (3). Article eaar3018.
187. Meng Q., Liu X.-J., Xie F. Design and Development of a Schönflies-Motion Parallel Robot with Articulated Platforms and Closed-Loop Passive Limbs // *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*. 2022. № 77. Article 102352.
188. Merlet J.-P. Optimal Design for the Micro Parallel Robot MIPS // *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*. 2002. Pp. 1149–1154.
189. Merlet J.-P. *Parallel Robots*. Springer, 2006. 394 p.
190. Merlet J.-P. Jacobian, Manipulability, Condition Number, and Accuracy of Parallel Robots // *Journal of Mechanical Design*. 2006. № 1 (128). Pp. 199–205.
191. Miller K. Experimental Verification of Modeling of DELTA Robot Dynamics by Direct Application of Hamilton's Principle. // *Proceedings of 1995 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. 1995. Pp. 532–537.
192. Mohamed M., Duffy J. A Direct Determination of the Instantaneous Kinematics of Fully Parallel Robot Manipulators // *ASME Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design*. 1985. № 2 (107). Pp. 226–229.
193. Moradi Dalvand M., Shirinzadeh B. Motion Control Analysis of a Parallel Robot Assisted Minimally Invasive Surgery/Microsurgery System (PRAMiSS) // *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*. 2013. № 2 (29). Pp. 318–327.
194. Mukanova B. Control of Actuators Torques for Optimal Movement along a Given Trajectory for the DexTAR Robot // *Journal of Applied and Computational Mechanics*. 2021. № 1 (7). Pp. 165–176.
195. Murray A., Pierrot F. N-Position Synthesis of Parallel Planar RPR Platforms // *Advances in Robot Kinematics*. 1998. Pp. 69–78.
196. Nahin P. *The Science of Radio*. American Institute of Physics, 1996. 296 p.

197. Nashawati N., Albitar C., Dib A. The Evaluation of Two Methods for Active Vibration Damping Using RUS Hexapod Platform // Transactions of the Institute of Measurement and Control. 2019. № 5 (41). Pp. 1207–1215.
198. Neumann K.-E. Robot. Patent US4732525A. 1988.
199. Nitsche J., Baumgarten S., Petz M., Röske D., Kumme R., Tutsch R. Measurement Uncertainty Evaluation of a Hexapod-Structured Calibration Device for Multi-Component Force and Moment Sensors // Metrologia. 2017. № 2 (54). Pp. 171-183.
200. Nokleby S., Firmani F., Zibil A., Podhorodeski R. An Analysis of the Force-Moment Capabilities of Branch-Redundant Planar Parallel Manipulators // ASME International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference. 2007. Pp. 1013–1020.
201. Palpacelli M. Static Performance Improvement of an Industrial Robot by Means of a Cable-Driven Redundantly Actuated System // Robotics and Computer-Integrated Manufacturing. 2016. (38). Pp. 1–8.
202. Palpacelli M., Palmieri G., Carbonari L., Callegari M. Experimental Identification of the Static Model of the HPKM Tricept Industrial Robot // Advanced Robotics. 2014. № 19 (28). Pp. 1291–1304.
203. Parenti-Castelli V., Venanzi S. On the Joint Clearance Effects in Serial and Parallel Manipulators // Proceedings of the Workshop on Fundamental Issues and Future Directions for Parallel Mechanisms and Manipulators. 2002. Pp. 215–223.
204. Petelin D., Fomin A., Laryushkin P., Fomina O., Carbone G., Ceccarelli M. Design, Kinematics and Workspace Analysis of a Novel 4-DOF Kinematically Redundant Planar Parallel Grasping Manipulator // Machines. 2023. № 3 (11). Article 319.
205. Pham M.-N., Champlaud H., Liu Z., Bonev I. A. Parameterized Finite Element Modeling and Experimental Modal Testing for Vibration Analysis of an Industrial Hexapod for Machining // Mechanism and Machine Theory. 2022. № 167. Article 104502.

206. Pierrot F. Parallel Mechanisms and Redundancy // Proceedings of the First International Colloquium “Collaborative Research Centre 562 - Robotic Systems for Modelling and Assembly”. 2002. Pp. 261–277.

207. Pierrot F., Company O. H4: A New Family of 4-DOF Parallel Robots // 1999 IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics. 1999. Pp. 508–513.

208. Pierrot F., Uchiyama M., Unno K. HEXA: A Fully-Parallel 6-DOF Japanese-French Robot // Proceedings of the 1st Japanese-French Symposium on Robotics and Manufacturing. 1992. Pp. 285–291.

209. Pugazhenti S., Nagarajan T., Singaperumal M. Optimal Trajectory Planning for a Hexapod Machine Tool During Contour Machining // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science. 2002. № 12 (216). Pp. 1247–1257.

210. Qazani M. R. C., Asadi H., Nahavandi S. An Optimal Motion Cueing Algorithm Using the Inverse Kinematic Solution of the Hexapod Simulation Platform // IEEE Transactions on Intelligent Vehicles. 2022. № 1 (7). Pp. 73–82.

211. Qazani M. R. C., Asadi H., Pedrammehr S., Nahavandi S. Performance Analysis and Dexterity Monitoring of Hexapod-Based Simulator // 4th International Conference on Control, Automation and Robotics (ICCAR). 2018. Pp. 226–231.

212. Qazani M. R. C., Pedrammehr S., Nategh M. J. An Investigation on the Motion Error of Machine Tools’ Hexapod Table // International Journal of Precision Engineering and Manufacturing. 2018. № 4 (19). Pp. 463–471.

213. Qin J., Yu C., Sun Z., Cao L. A Novel Method for Type Synthesis of Parallel Mechanism Without Parasitic Motion Based on 2R1T Parallel Mechanism with Rotational Bifurcation // Chinese Journal of Mechanical Engineering. 2022. № 1 (35). Pp. 78.

214. Quennouelle C., Gosselin C. Kinemastatic Modeling of Compliant Parallel Mechanisms // Meccanica. 2011. № 1 (46). Pp. 155–169.

215. Rao A. C. Parallelism in Planar Kinematic Chains (Manipulators) // Mechanism and Machine Theory. 2004. № 10 (39). Pp. 1111–1122.

216. Rooney J., Earl C. F. Manipulator Postures and Kinematics Assembly Configurations // 6th World Congress on Theory of Machines and Mechanisms. 1983. Pp. 1014–1020.
217. Rosheim M. E., Sauter G. F. New High-Angulation Omni-Directional Sensor Mount // SPIE 4821, Free-Space Laser Communication and Laser Imaging II. 2002. Pp. 163.
218. Rudolf C., Mock C., Gloess R. Hexapod Systems for UHV Applications with Active Vibration Damping // 11th EUSPEN International Conference. 2011. Pp. 1–5.
219. Saiki N., Tadakuma K., Watanabe M., Takane E., Nobutoki M., Suzuki S., Konyo M., Tadokoro S. 2-DOF Spherical Parallel Mechanism Capable of Biaxial Swing Motion with Active Arc Sliders // IEEE Robotics and Automation Letters. 2021. № 3 (6). Pp. 4680–4687.
220. Seif M. A., Hassan A., El-Shaer A. H., Alfar A., Misra S., Khalil I. S. M. A Magnetic Bilateral Tele-Manipulation System Using Paramagnetic Microparticles for Micromanipulation of Nonmagnetic Objects // 2017 IEEE International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics (AIM). 2017. Pp. 1095–1102.
221. Seo J.-W., Kim H.-S. Biomechanical Analysis in Five Bar Linkage Prototype Machine of Gait Training and Rehabilitation by IMU Sensor and Electromyography // Sensors. 2021. № 5 (21). Article 1726.
222. Seward N., Bonev I. A. A New 6-DOF Parallel Robot with Simple Kinematic Model // 2014 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA). 2014. Pp. 4061–4066.
223. Shao P., Wang Z., Yang S., Liu Z. Dynamic Modeling of a Two-DoF Rotational Parallel Robot with Changeable Rotational Axes // Mechanism and Machine Theory. 2019. № 131. Pp. 318–335.
224. Shaoping Bai, Ming Yeong Teo, Wan Sing Ng, Sim C. Workspace Analysis of a Parallel Manipulator with One Redundant DOF for Skull-Base Surgery // Proceedings 2001 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems. Expanding the Societal Role of Robotics in the Next Millennium. Pp. 1694–1699.

225. Shirkhodaie A. H., Soni A. H. Forward and Inverse Synthesis for a Robot with Three Degree-of-Freedom // 19th Summer Computer Simulation Conf. 1987. Pp. 851-856.
226. Siciliano B. The Tricept Robot: Inverse Kinematics, Manipulability Analysis and Closed-Loop Direct Kinematics Algorithm // *Robotica*. 1999. № 4 (17). Pp. 437–445.
227. Song Y., Dong G., Sun T., Lian B. Elasto-Dynamic Analysis of a Novel 2-DoF Rotational Parallel Mechanism with an Articulated Travelling Platform // *Meccanica*. 2016. № 7 (51). Pp. 1547–1557.
228. Song Y., Qi Y., Dong G., Sun T. Type Synthesis of 2-DoF Rotational Parallel Mechanisms Actuating the Inter-Satellite Link Antenna // *Chinese Journal of Aeronautics*. 2016. № 6 (29). Pp. 1795–1805.
229. Song Y., Zhang J., Lian B., Sun T. Kinematic Calibration of a 5-DoF Parallel Kinematic Machine // *Precision Engineering*. 2016. (45). Pp. 242–261.
230. Staicu S. Recursive Modelling in Dynamics of Agile Wrist Spherical Parallel Robot // *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*. 2009. № 2 (25). C. 409–416.
231. Stamper R. A Three Degree of Freedom Parallel Manipulator with Only Translational Degrees of Freedom: Thesis ... Doctor of Philosophy. 1997. 211 p.
232. Stewart D. A Platform with Six Degrees of Freedom // *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*. № 15 (180). Pp. 371–385.
233. Stock M., Miller K. Optimal Kinematic Design of Spatial Parallel Manipulators: Application to Linear Delta Robot // *Journal of Mechanical Design*. 2003. № 2 (125). Pp. 292–301.
234. Sugimoto K., Duffy J., Hunt K. H. Special Configurations of Spatial Mechanisms and Robot Arms // *Mechanism and Machine Theory*. 1982. № 2 (17). Pp. 119–132.
235. Sutherland G., Roth B. A Transmission Index for Spatial Mechanisms // *Journal of Manufacturing Science and Engineering*. 1973. № 2 (95). Pp. 589–597.
236. Taghirad H., Nahon M. Jacobian Analysis of a Macro-Micro Parallel Manipulator // *IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics*. 2007. Pp. 1–6.

237. Takeda Y., Funabashi H. Kinematic and Static Characteristics of In-parallel Actuated Manipulators at Singular Points and in their Neighborhoods. // Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers Series C. 1996. № 570 (60). Pp. 701–708.

238. Tan N. D., Giang L. N., Viet N. D. Modelling and Simulation of a Hexapod Antenna System for Tracking VNREDSAT-1 Satellite // 2020 IEEE International Conference on Environment and Electrical Engineering and 2020 IEEE Industrial and Commercial Power Systems Europe (EEEIC / I&CPS Europe). 2020. Pp. 1–6.

239. Tang P., Hu L., Du H., Gong M., Zhang L. Novel 3D Hexapod Computer-Assisted Orthopaedic Surgery System for Closed Diaphyseal Fracture Reduction // The International Journal of Medical Robotics and Computer Assisted Surgery. 2012. № 1 (8). Pp. 17–24.

240. Theingi, Chen I.-M., Angeles J., Li C. The Management of Parallel-Manipulator Singularities Using Joint-Coupling // Proceedings of the 2003 IEEE International Conference on Information and Automation. 2003. Pp. 773–778.

241. Tsetserukou D., Hosokawa S., Terashima K. LinkTouch: A Wearable Haptic Device with Five-Bar Linkage Mechanism for Presentation of Two-DOF Force Feedback at the Fingerpad // 2014 IEEE Haptics Symposium (HAPTICS). 2014. Article 1.

242. Tunc L. T., Shaw J. Experimental Study on Investigation of Dynamics of Hexapod Robot for Mobile Machining // The International Journal of Advanced Manufacturing Technology. 2015. (84). Pp. 817–830.

243. Vaida C., Plitea N., Carbone G., Birlescu I., Ulinici I., Pisla A., Pisla D. Innovative Development of a Spherical Parallel Robot for Upper Limb Rehabilitation // International Journal of Mechanisms and Robotic Systems. 2018. № 4. Pp. 256–276.

244. Vischer P., Clavel R. Kinematic Calibration of the Parallel Delta Robot // Robotica. 1998. № 2 (16). Pp. 207–218.

245. Voglewede P., Ebert-Uphoff I. Measuring “Closeness” to Singularities for Parallel Manipulators // Proceedings of the 2004 IEEE International Conference on Information and Automation. 2004. Pp. 4539–4544.

246. Voglewede P., Ebert-Uphoff I. Overarching Framework for Measuring Closeness to Singularities of Parallel Manipulators // *IEEE Transactions on Robotics*. 2005. № 6 (21). Pp. 1037–1045.
247. Waldron K. J., Wang S. L., Bolin S. J. A Study of the Jacobian Matrix of Serial Manipulators // *ASME Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design*. 1985. № 2 (107). Pp. 230–238.
248. Wang J., Gosselin C. Kinematic Analysis and Design of Kinematically Redundant Parallel Mechanisms // *ASME Journal of Mechanical Design*. 2004. № 1 (126). Pp. 109–118.
249. Wang R., Niu Z., Chen K., Sun T. Kinematic Optimization Design and Performance Simulation of Novel 5-DOF Parallel Machining Robots with Spatial Layout // *Machines*. 2022. № 12 (10). Article 1187.
250. Wang S. L., Waldron K. J. A Study of the Singular Configurations of Serial Manipulators // *ASME Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design*. 1987. № 1 (109). Pp. 14–20.
251. Wang X., Zhu Q., Lv S., Hao R., Huang J. Kinematics and Workspace Analysis of Tricept Robot // *2020 IEEE 9th Joint International Information Technology and Artificial Intelligence Conference (ITAIC)*. 2020. Pp. 301–305.
252. Wapler M., Urban V., Weisener T., Stallkamp J., Durr M., Hiller A. A Stewart Platform for Precision Surgery // *Transactions of the Institute of Measurement and Control*. 2003. № 4 (25). Pp. 329–334.
253. Waranon L., Pipitsunthonsan P., Ritronnasak R., Zweig T. The Improvement of System Architecture for Robustness Control of Hexapod Antenna Tracking // *2018 15th International Conference on Electrical Engineering/Electronics, Computer, Telecommunications and Information Technology (ECTI-CON)*. 2018. Pp. 229–232.
254. Warnecke H.-J., Neugebauer R., Wieland F. Development of Hexapod Based Machine Tool // *CIRP Annals*. 1998. № 1 (47). Pp. 337–340.
255. Wedin P.-A. On Angles Between Subspaces of a Finite Dimensional Inner Product Space // *Matrix Pencils, Lecture Notes in Mathematics*. 1983. Pp. 263–285.

256. Wohlhart K. Degrees of Shakiness // Mechanism and Machine Theory. 1999. № 7 (34). Pp. 1103–1126.
257. Wu H., Handroos H., Pessi P. Mobile Parallel Robot for Assembly and Repair of ITER Vacuum Vessel // Industrial Robot: An International Journal. 2008. № 2 (35). Pp. 160–168.
258. Wu H., Handroos H., Pessi P., Kilkki J., Jones L. Development and Control Towards a Parallel Water Hydraulic Weld/Cut Robot for Machining Processes in ITER Vacuum Vessel // Fusion Engineering and Design. 2005. № 75–79. Pp. 625–631.
259. Xie Z., Xie F., Liu X.-J., Wang J. Global G3 Continuity Toolpath Smoothing for a 5-DoF Machining Robot with Parallel Kinematics // Robotics and Computer-Integrated Manufacturing. 2021. № 67. Article 102018.
260. Xu Y., Zhang D., Yao J., Zhao Y. Type Synthesis of the 2R1T Parallel Mechanism with Two Continuous Rotational Axes and Study on the Principle of its Motion Decoupling // Mechanism and Machine Theory. 2017. № 108. Pp. 27–40.
261. Yamamoto G., Koizumi K., Okabe T. Tensile Strength of Unidirectional Carbon Fiber-Reinforced Plastic Composites // Strength of Materials. 2020. Article 90272.
262. Yang G., Chen I.-M., Chen W., Lin W. Kinematic Design of a Six-DOF Parallel-Kinematics Machine with Decoupled-Motion Architecture // IEEE Transactions on Robotics. 2004. № 5 (20). Pp. 876–884.
263. Yaşır A., Kiper G., Can Dede M. İ., Wijk V. van der Static Force Balancing of a 2R1T Parallel Manipulator with Remote Center of Motion // Proceedings of the 15th IFToMM World Congress on Mechanism and Machine Science. 2019. Pp. 3219–3226.
264. Ye Y., Yue Z., Gu B. ADRC Control of a 6-DOF Parallel Manipulator for Telescope Secondary Mirror // Journal of Instrumentation. 2017. № 03 (12). Article T03006.
265. Yoshikawa T. Manipulability of Robotic Mechanisms // International Journal of Robotics Research. 1985. № 2 (4). Pp. 3–9.
266. Yu C., Yao K., Zong Y., Ye J., Chen J. Rigid-Body Guidance Synthesis of Noncircular Gear-Five-Bar Mechanisms and Its Application in a Knee Joint Rehabilitation Device // Machines. 2022. № 12 (10). Article 1110.

267. Yu J. J., Dong X., Pei X., Zong G. H., Kong X., Qiu Q. Mobility and Singularity Analysis of a Class of 2-DOF Rotational Parallel Mechanisms Using a Visual Graphic Approach // 35th Mechanisms and Robotics Conference, Parts A and B. 2011. Pp. 1027–1036.

268. Yuefa Fang, Tsai L.-W. Structure Synthesis of a Class of 4-DoF and 5-DoF Parallel Manipulators with Identical Limb Structures // The International Journal of Robotics Research. 2002. № 9 (21). Pp. 799–810.

269. Zaal P., Popovici A., Lewis E. K. Adaptive Hexapod Simulator Motion based on Aircraft Stability // AIAA Scitech 2020 Forum. 2020. Pp. 1–17.

270. Zago L., Droz S. Small Parallel Manipulator for the Active Alignment and Focusing of the Secondary Mirror of the VLTI ATS // Astronomical Telescopes and Instrumentation. 2000. Pp. 450–455.

271. Zaichik L., Yashin Y., Desyatnik P., Smaili H. Some Aspects of Upset Recovering Simulation on Hexapod Simulators // AIAA Modeling and Simulation Technologies Conference. 2012. Pp. 1–12.

272. Zapatero-Gutiérrez A., Laribi M. A., Castillo-Castañeda E. Optimal Design of a Five-Bar Mechanism Dedicated to Assisting in the Fingers Flexion-Extension Movement // MEDER 2021, 5th IFToMM Symposium on Mechanism Design for Robotics. 2021. Pp. 256–264.

273. Zhao J.-S., Liu X., Feng Z.-J., Dai J. S. Design of an Ackermann-Type Steering Mechanism // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science. 2013. № 11 (227). Pp. 2549–2562.

274. Zhao L., Joubair A., Bigras P., Bonev I. A. Metrological Evaluation of a Novel Medical Robot and Its Kinematic Calibration // International Journal of Advanced Robotic Systems. 2015. № 9 (12). Pp. 126.

275. Zhao L., Yen A. K. W., Coulombe J., Bigras P., Bonev I. Kinematic Analyses of a New Medical Robot for 3D Vascular Ultrasound Examination // Transactions of the Canadian Society for Mechanical Engineering. 2014. № 2 (38). Pp. 227–239.

276. Zlatanov D., Bonev I., Gosselin C. Constraint Singularities of Parallel Mechanisms // Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation. 2002. Pp. 496–502.

277. Zlatanov D., Fenton R. G., Benhabib B. A Unifying Framework for Classification and Interpretation of Mechanism Singularities // Journal of Mechanical Design. 1995. № 4 (117). Pp. 566–572.

278. Zlatanov D., Fenton R. G., Benhabib B. Classification and Interpretation of the Singularities of Redundant Mechanism // Proceedings of ASME Design Engineering Technical Conferences. 1998. № 6. Pp. 1–11.