

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт машиноведения им. А.А. Благонравова Российской академии наук

На правах рукописи

Карпов Иван Андреевич

**Разработка метода экспериментального определения
коэффициента потерь колебательных систем на основе
дискретного ARMA-моделирования**

1.1.7. Теоретическая механика, динамика машин

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата технических наук

Научный руководитель:
Заслуженный деятель науки РФ,
д.ф.-м.н.,
Бобровницкий Юрий Иванович

Москва 2025

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	4
ГЛАВА 1 Обзор существующих экспериментальных методов определения потерь .	11
<i>Введение</i>	<i>11</i>
1.1 <i>Что такое коэффициент потерь</i>	<i>12</i>
1.2 <i>Методы измерения во временной области</i>	<i>18</i>
1.3 <i>Методы измерения в частотной области</i>	<i>19</i>
1.4 <i>Методы экспериментального модального анализа (ЭМА).....</i>	<i>20</i>
1.4.1. <i>Модальные модели; допущения и соотношения ЭМА</i>	<i>20</i>
1.4.2. <i>PPM и подобные методы</i>	<i>22</i>
1.4.3. <i>Общие алгоритмы.....</i>	<i>23</i>
1.5 <i>Точность определения коэффициента потерь</i>	<i>23</i>
<i>Заключение Главы 1</i>	<i>25</i>
ГЛАВА 2 Построение дискретно-временных моделей колебательных систем по	
непрерывным моделям	26
<i>Введение</i>	<i>26</i>
2.1 <i>Временные ряды и дискретные модели</i>	<i>26</i>
2.2 <i>Механический осциллятор.....</i>	<i>31</i>
2.2.1. <i>Непрерывный подход.....</i>	<i>31</i>
2.2.2 <i>Дискретизация и ARMA-модель.....</i>	<i>34</i>
2.2.3. <i>Спектральный анализ</i>	<i>38</i>
2.3 <i>Колебательная система с N степенями свободы.....</i>	<i>40</i>
2.3.1. <i>Общая непрерывная модель</i>	<i>40</i>
2.3.2. <i>SS-модели.....</i>	<i>41</i>
2.3.3 <i>Одномерная модель черного ящика</i>	<i>45</i>
<i>Результаты Главы 2</i>	<i>51</i>
ГЛАВА 3 Описание предложенного экспериментального метода определения потерь	
53	
<i>Введение</i>	<i>53</i>
3.1 <i>Рабочая модель колебательной системы и обоснование метода.....</i>	<i>53</i>
3.2 <i>Выбор порядка ARMA-модели, энергетический критерий ЕС</i>	<i>56</i>
3.3 <i>Построение ARMA-модели по данным измерения.....</i>	<i>58</i>
3.4 <i>Нахождение собственных частот и коэффициентов потерь</i>	<i>59</i>
3.5 <i>Нахождение спектральной плотности мощности с помощью параметров ARMA-</i>	
<i>модели.....</i>	<i>61</i>
<i>Заключение к Главе 3</i>	<i>63</i>

ГЛАВА 4	Основные свойства метода: численные эксперименты.....	65
	<i>Введение</i>	<i>65</i>
	<i>4.1 Схема построения искусственных сигналов.....</i>	<i>65</i>
	<i>4.2 Широкая область применимости</i>	<i>65</i>
	<i>4.3 Разделение близких собственных частот</i>	<i>71</i>
	<i>4.4 Частотная декомпозиция</i>	<i>73</i>
	<i>4.5 Другие свойства</i>	<i>74</i>
	<i>Заключение к Главе 4</i>	<i>76</i>
ГЛАВА 5	Экспериментальная проверка метода.....	77
	<i>Введение</i>	<i>77</i>
	<i>5.1 Эксперименты на простейших колебательных системах</i>	<i>77</i>
	<i>5.2 Эксперименты на лабораторной установке ИМАШ РАН</i>	<i>80</i>
	<i>5.3 Применение метода при испытании космического прибора.....</i>	<i>86</i>
	<i>Выводы</i>	<i>87</i>
	Заключение	88
	Список литературы.....	91
	ПРИЛОЖЕНИЕ А.....	98
	<i>Список публикаций автора по теме диссертации</i>	<i>98</i>
	<i>Доклады автора по теме диссертации на конференциях</i>	<i>101</i>
	ПРИЛОЖЕНИЕ Б Замена производных конечными разностями	103
	ПРИЛОЖЕНИЕ В Вывод формулы (2.25), ее связь с временными рядами и z-преобразованием.....	106

Введение

Актуальность работы

Потери (демпфирование, диссипация, поглощение, рассеяние) энергии колебаний или просто «потери» – неотъемлемое свойство всех без исключения колеблющихся упругих тел, сред, материалов и структур, состоящее в том, что из-за деформаций часть энергии колебаний превращается в тепло и другие формы энергии. Физические причины этих превращений многочисленны, неконтролируемы и пока недостаточно изучены. Теоретически потери можно рассчитывать сегодня лишь в очень немногих простейших случаях. Поэтому в основном потери измеряют экспериментально.

Последние несколько десятилетий потери приобрели огромное значение в современной науке и технике. Это вызвано тем, что потери напрямую определяют амплитуды резонансных колебаний и, следовательно, несут основную часть ответственности за высокие уровни шума и вибраций многочисленных машин, разного рода механизмов и устройств и других источников. Из-за все возрастающего числа источников и их мощности, проблема снижения шума и вибраций уже к середине XX века стала одной из основных в промышленности, на транспорте, в городах как с точки зрения экологии, т.е. воздействия на человека, так и с технической точки зрения, т.е. обеспечения прочности и надежности изделий техники и оборудования. Последовавший после этого период времени, который продолжается и сейчас, ознаменовался бурным развитием работ по этой проблеме, результаты которых привели к заметным подвижкам ее решения практически во всех «шумных» отраслях промышленности. Публикации по проблеме насчитывают несколько тысяч названий, не считая отраслевые материалы. В этот период были развиты общие подходы и методы снижения уровней шума и вибраций [1–8], методы и средства решения проблемы с учетом специфики отдельных отраслей промышленности [9–15], созданы и исследованы материалы с повышенным демпфированием [16–21], написаны десятки книг, например, [22–28] и обзоров [29–34].

Естественно, что для широкого использования разработанных методов, материалов и структур с повышенными демпфирующими свойствами были также разработаны и соответствующие методы экспериментального определения коэффициента потерь [35–41], некоторые из которых были оформлены как международные стандарты. Возникли и также активно разрабатываются в настоящее время два новых научных направления, «Идентификация систем» [42] и «Экспериментальный модальный анализ» [43], посвященные моделированию динамических (в том числе колебательных) систем и определению (в частности, измерению) их параметров, в число которых входят и параметры потерь. Отдельный обзор существующих экспериментальных методов измерения потерь

колебательных систем приведен далее в Главе 1 настоящей диссертации. Отметим лишь то, что разработанные методы измерения потерь имеют сравнительно узкий динамический диапазон измерений, ограниченный «не слишком демпфированными системами» [43].

Отмеченные выше достигнутые результаты решения проблемы шума и вибраций, имеющие огромное значение для улучшения экологии человека и повышения эксплуатационных условий техники, в конечном итоге были получены в значительной мере благодаря определенному повышению потерь в повсеместно используемых материалах и структурах. Но это еще не предел. Имеющиеся теоретические оценки, см. например, [44], показывают, что до верхнего предела потерь еще далеко. Это очень важное и своевременное обстоятельство, т. к. в последнее время уже появились признаки того, что имеющиеся сегодня методы и средства снижения шума и вибраций недостаточны. Причиной этого является хорошо известный факт о том, что практически все разработанные средства используют значительные дополнительные массы и объемы, что совершенно недопустимо в таких новых отраслях промышленности, как ракетно-космическая техника и авиастроение. Для изделий этих и некоторых других отраслей в настоящее время необходима разработка принципиально новых материалов и структур с еще более высоким уровнем демпфирования с минимальной массой и минимальными размерами. Сегодня уже общепризнано, что создание таких структур принципиально возможно и основной базой для этого являются метаматериалы. Метаматериал – это, фактически, сложная неоднородная, чаще всего периодическая, структура, которая в зависимости от устройства может обладать широким кругом волновых и звукопоглощающих свойств, см. например, [45–52]. Судя по публикациям, активные поисковые работы по метаматериалам в настоящее время проводятся во всем мире. Их результаты пока находятся на лабораторном уровне, но уже имеющиеся лабораторные эксперименты указывают на перспективность дальнейших исследований. Аналитический обзор последних работ этого направления, связанный с потерями, можно найти в статье [53].

Поскольку коэффициент потерь метаматериалов значительно выше, чем в существующих композиционных материалах, параллельно с проводимыми исследованиями возникла также необходимость в новых методах измерения потерь в сложных и сильно демпфированных системах. Основными требованиями к таким методам являются широкий динамический диапазон измеряемых потерь (вплоть до критических значений) и высокая точность, т.е. то, чего недостает существующим методам измерений. Этим обусловлена *актуальность* работ, выполненных автором диссертации по созданию нового метода измерения коэффициента потерь, представленного в настоящей диссертации.

Целью диссертационной работы является разработка нового метода экспериментального определения коэффициента потерь, применимого к сложным инженерным системам, в частности, сильно демпфированным колебательным системам.

Как показано в диссертации, метод был предложен и разработан, научно обоснован и тщательно проверен в численных и лабораторных экспериментах. Он обладает практически неограниченной областью применимости, максимально возможным динамическим диапазоном измерения и высокой точностью и экономичностью. Метод также обладает возможностью применения частотной декомпозиции (разбиения широкого частотного диапазона на ряд более узких поддиапазонов и применения метода к каждому поддиапазону независимо), а также обладает способностью различать близкие собственные частоты. Таким образом, метод удовлетворяет всем специальным требованиям, необходимым для проектирования «суперпоглотителей» звука из метаматериалов для ракетно-космической техники и самолетостроения.

Перечисленные свойства предложенного метода обусловлены удачным сочетанием нескольких использованных в нем новых положений. Это прежде всего применение в качестве рабочей модели метода дискретных моделей типа ARMA (AutoRegressive Moving Average models), которые описываются конечно-разностными уравнениями и которые для моделирования колебательных систем в акустике и теории колебаний ранее практически не использовались. Между тем сравнительно с обычно применяемыми непрерывными моделями, описываемыми дифференциальными уравнениями, они обладают рядом достоинств. Это их высокая точность, простота построения по данным измерения и др.

Чтобы пояснить смысл и следствия использования ARMA-модели и других новых положений, необходимо сделать следующее замечание. Особенностью потерь является то, что их нельзя измерить подобно массе и упругости в статическом режиме. Для их измерения необходимо, чтобы исследуемая система совершала свободные или вынужденные колебания, по измерениям которых строится рабочая модель системы, а уже по значениям модельных параметров вычисляются коэффициенты потерь. Поэтому выбор рабочей модели метода имеет принципиальное значение.

В сравнении с конечно-разностными методами численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений (такими как метод Эйлера, метод Рунге–Кутты и др.), основанными на предварительно известной физической модели системы, диссертационный метод является «модельно-независимым»: он позволяет с высокой точностью идентифицировать колебательные системы любой физической природы, при условии корректного выбора порядка модели. Таким образом, подход обладает универсальностью

применения — особенно в ситуациях, когда аналитическая форма уравнений системы неизвестна или трудна для построения.

Универсальность предлагаемого метода и разработанный в диссертации энергетический критерий *ЕС* адекватности ARMA-модели позволяют более эффективно работать с известной проблемой выбора порядка модели, имеющейся в классическом модальном анализе: в классическом подходе число мод заранее неизвестно, а интерпретация каждого слагаемого в модели может быть неоднозначной, особенно в случае близкорасположенных или сильнозатухающих мод колебаний. В то же время, ARMA-подход, благодаря своей структуре, аналогичной конечно-разностной форме, удобно формализуется (определение параметров ARMA-модели сводится к системам линейных уравнений и не требует программной модификации алгоритма при изменении числа мод) и просто реализуется в вычислительных алгоритмах, что обеспечивает практическую применимость такого подхода.

Кроме того, в отличие от классического модального анализа, метод диссертации, в общем случае, не требует построения спектра отклика системы для извлечения модальных параметров. Это позволяет исключить ошибки, связанные с оценкой спектра и влиянием оконных преобразований, а также делает метод устойчивым к шуму и ограниченному объёму данных, что делает метод еще и экономичным, и, как следствие, пригодным к задачам, где требуется идентификация в режиме реального времени.

Новые положения, а именно критерий *ЕС* и применение ARMA-модели в качестве рабочей модели с учетом ее свойств делают предлагаемый в диссертации метод довольно простой и быстрой процедурой, удобной при проектировании эффективных звукопоглотителей, где требуются многократные измерения коэффициента потерь. В приводимый ниже список *новых результатов* работы включен также теоретический результат, устанавливающий однозначную связь между ARMA-моделями и известными непрерывными моделями системы с N степенями свободы. Он устанавливает аналитическую связь между коэффициентами конечно-разностных уравнений и эквивалентных дифференциальных уравнений, позволяя строить дискретные модели по известным непрерывным моделям и наоборот. Этот результат имеет общезначимое значение и может быть полезен не только в механике и акустике, но и, например, в электродинамике.

Научная новизна работы состоит в следующем.

1. Предложен энергетический критерий адекватности ARMA-моделей колебательных систем.

2. Предложен метод построения адекватных ARMA-моделей произвольных линейных колебательных систем механики и акустики по данным измерения их вынужденных колебаний.

3. На основе дискретно-временных моделей типа ARMA разработан (предложен, научно обоснован, исследован на свойства, экспериментально проверен) универсальный экспериментальный метод определения коэффициента потерь энергии, применимый к линейным механическим и акустическим системам произвольной сложности, включая метаматериалы.

4. Найдены аналитические связи между параметрами непрерывных и дискретных моделей колебательных систем, позволяющие строить ARMA-модели по известным непрерывным, например, КЭ-моделям и наоборот.

5. Разработан комплекс программ в среде MATLAB для проведения численных и лабораторных экспериментов.

Практическая значимость работы.

1. Измерение коэффициента потерь сложных инженерных конструкций позволяет проводить уточненные расчеты их шума и вибраций, прочности и долговечности, прогнозировать ресурс.

2. Измерение точных значений коэффициента потерь метаматериальных поглотителей используется для проектирования новых эффективных методов борьбы с шумом и вибрацией в изделиях ракетно-космической техники и самолетостроения.

Положения, выносимые на защиту.

1. Энергетический критерий адекватности ARMA-моделей.

2. Новый эффективный метод экспериментального определения коэффициента потерь колебательных систем инженерного типа.

3. Аналитические связи между классическими непрерывными акустическими моделями колебательных систем и дискретными ARMA-моделями.

4. Уникальные свойства предложенного метода измерения потерь (универсальность, широкая область применимости, максимально возможный динамический диапазон измерения, высокая точность, простота, экономичность), выявленные в процессе проведения численных и лабораторных экспериментов.

Объект и предмет исследования. *Объектом исследования* в диссертационной работе являются сложные инженерные колебательные системы типа машин, механизмов, инженерных конструкций, различных структур. *Предметом исследования* является коэффициент потерь объекта и методы его экспериментального измерения.

Методология исследований. Для расчета колебаний систем использовалось непрерывное и дискретное моделирование систем, аналитические методы и численные расчеты в среде MATLAB. При проведении лабораторных экспериментов использовалась стандартная акустическая аппаратура и стандартные методы обработки данных.

Достоверность и обоснованность представленных в диссертации результатов подтверждены численной и экспериментальной проверкой и соответствием результатам других авторов.

Апробация работы. Результаты исследований, представленные в диссертации, докладывались на 12-ти Всероссийских и международных конференциях (см. Приложение А): на XXXII, XXXIV, XXXV и XXXVI сессиях Российского акустического общества (г. Москва, 14-18 октября 2019, 14–18 февраля 2022 г., 13–17 февраля 2023 г., 21-25 октября 2024 г.), на III Всероссийской акустической конференции (г. Санкт-Петербург, 21-25 сентября 2020), на Всероссийском Аэроакустическом Форуме (г. Геленджик, 20-25 сентября 2021), на международных научно-технических конференциях «Динамика и виброакустика машин» ДВМ`2022 и ДВМ`2024 (г. Самара, 21-23 сентября 2022, 4-6 сентября 2024), на международной научной конференции «Машины, технологии и материалы для современного машиностроения», посвященной 85-летию ИМАШ РАН. (г. Москва, 23 ноября 2023), на XX Научно-технической конференции по аэроакустике (г. Суздаль, 24-29 сентября 2023), на международной 51 школе-конференции «Актуальные проблемы механики» памяти Д.А. Индейцева (г. Великий Новгород, 19-21 июня 2024), на международной 52 школе-конференции «Актуальные проблемы механики» памяти Н.Ф. Морозова (г. Санкт-Петербург, 23-27 июня 2025) и обсуждались на научных семинарах в научном отделе «Теоретической и прикладной акустики» ИМАШ РАН.

Метод был успешно апробирован при анализе результатов натурных вибромеханических испытаний конструкции научного прибора «БТН-М2», разработанного ИКИ РАН [54] для эксперимента на Российском Сегменте МКС, который успешно прошел летные испытания и в настоящее время работает в эксперименте «БТН-Нейтрон» на станции.

Публикации. Основные результаты научно-квалификационной работы опубликованы в 15 печатных работах, в том числе в 3 статьях в рецензируемых научных журналах, индексируемых в WoS, и 12 статьях и публикациях в сборниках докладов/тезисов конференций, индексируемых в РИНЦ (см. Приложение А).

Личный вклад автора. Все изложенные в диссертации оригинальные результаты получены лично автором либо при его участии. Полученные результаты обсуждались совместно с научным руководителем. Автором лично продумывались и планировались описанные в работе численные и лабораторные эксперименты, выполняемые далее либо

самостоятельно автором, либо совместно с сотрудниками лаборатории. Автором разработан комплекс программ для проведения численных и лабораторных экспериментов, а также для обработки полученных результатов. Автор принимал участие в написании оригинального текста публикаций по представленным в данной диссертации результатам.

Структура и объем диссертации.

Диссертация состоит из введения, пяти оригинальных глав, заключения, списка литературы и трех приложений. Каждая глава включает в себя краткое введение в рамках поставленной задачи, оригинальную часть и выводы. Работа содержит 109 страниц, включает 24 рисунка и 101 библиографическую ссылку.

Общая характеристика работы.

Диссертация является научно-квалификационной работой, в которой решена научная задача, имеющая значение для научного направления «Механика и машиностроение» отрасли Технические науки в части создания новых методов решения проблемы снижения шума и вибраций машин и конструкций.

Разработанный в диссертации новый метод измерения коэффициента потерь необходим для более точного моделирования и прогнозирования виброакустических процессов машин и оборудования и для проектирования эффективных звуко- и вибропоглотителей из метаматериалов для применения в ракетно-космической технике и самолетостроении.

Диссертация соответствует следующим разделам научных исследований паспорта научной специальности 1.1.7. «Теоретическая механика, динамика машин».

п.3. Теория колебаний механических систем.

п.5. Управление движением, наблюдаемость и *идентификация механических систем*.

п.13. Динамика систем, состоящих из абсолютно твердых и деформируемых тел, в том числе машин, приборов и конструкций.

п.14. *Математическое и компьютерное моделирование кинематики и динамики механических систем*, в том числе машин, приборов и их элементов *при динамических, статических, тепловых и других видах воздействий*.

п.15. Экспериментальное исследование динамики систем тел, в том числе летательных аппаратов, машин, приборов и конструкций (только технические науки).

ГЛАВА 1

Обзор существующих экспериментальных методов определения потерь

Введение

Особенностью потерь, как составной части любой механической колебательной системы, которая отличает его от инерционной и упругой составляющих, является невозможность измерить его величину в статическом режиме. Поэтому каждый метод его измерения основан на анализе колебаний всей системы и, соответственно, зависит от того, для решения какой физической задачи потребовался учет потерь и какая математическая модель системы при этом используется.

Практическая необходимость в создании такого экспериментального метода, по-видимому, впервые возникла в начале 19-го столетия в связи с задачами о распространении и затухании звука в воздухе и воде и о колебаниях органных труб и других духовых музыкальных инструментов. К этому времени теоретически уже были сформулированы основные физические механизмы поглощения звука в газообразных и жидких средах – это вязкое трение и теплопроводность – см. [55], где описаны результаты раннего этапа развития акустики. Колебания и волны в этих средах стали моделироваться волновым уравнением с тремя дополнительными параметрами, ответственными за поглощение звука – коэффициентом сдвигового вязкого трения, аналогичным коэффициентом для объемных деформаций и коэффициентом теплопроводности – см. также [56]. В последующем значения этих коэффициентов были получены для всех известных газов и жидкостей путем измерения пространственного затухания волн или временного затухания свободных колебаний в трубах или в других экспериментах по исследованию движения (течений) и тепловых процессов в средах [35]. Эта модель является рабочей и в наши дни, она широко используется для решения акустических задач в протяженных средах и, в частности, применяется в качестве базовой модели в коммерческих программных конечно-элементных пакетах типа COMSOL Multiphysics.

Как следует из вышеизложенного, наибольшие потери в газах имеют место на его границах с твердыми телами из-за больших градиентов скорости и температуры, а также на резонансах из-за больших амплитуд акустического поля. Поэтому эффективные звукопоглощающие материалы обычно проектируются в виде структур с большой площадью интерфейса газ-твердое тело, например, таких как вата, пористые, волокнистые и подобные материалы [38]. В архитектурной и строительной акустике они повсеместно применяются как штучные поглотители или звукопоглощающие покрытия. Ввиду невозможности теоретически

точно рассчитать их потери, для их характеристики используются эффективные параметры, среди которых наиболее известен *коэффициент поглощения*. Он определяется как отношение поглощенной мощности к мощности падающего звукового поля. В современной журнальной литературе по акустике чаще всего встречается коэффициент поглощения с обозначением α , который измеряется в *интерференционных и импедансных трубах* в условиях нормального падения плоских волн [40]. Хотя коэффициент α только качественно характеризует поглощающие способности материала, он очень популярен среди инженеров и исследователей из-за чрезвычайной простоты его измерения и возможности производить сравнительный анализ различных поглотителей. В реальных условиях, например, в концертных залах или заводских помещениях, где звуковые поля гораздо сложнее отдельных плоских волн, потери поглотителей описываются *диффузным коэффициентом поглощения*, который соответствует условию падения плоских волн одновременно во всех направлениях. Он измеряется в *реверберационных камерах*, в которых благодаря специальной геометрии помещения реализуются поля, близкие к диффузному [39, 41].

Значительно сложнее, чем в газах и жидкостях, физическая картина поглощения звуковых колебаний и волн в твердых средах, материалах и структурах. Помимо указанных выше двух физических механизмов (вязкого трения и теплопроводности), в них имеют место многочисленные релаксационные механизмы потерь энергии на дислокациях, локальных дефектах, на границах зерен, доменов и блоков поликристаллических материалов и другие. В неоднородных и составных конструкциях к ним добавляются потери на сухое трение и другие нелинейные эффекты, потери в болтовых, заклепочных, сварных соединениях, излучение энергии в опоры и окружающую среду и многие другие источники потерь – то, что принято называть *конструкционным демпфированием*. Во многих реальных конструкциях и устройствах, например, в различных машинах, механизмах и приборах, а также в строительных сооружениях, в транспортных средствах, космических аппаратах и подобных сложных объектах конструкционные потери являются определяющими. Очевидно, что теоретически предсказать потери в таких системах невозможно и экспериментальные методы измерения являются единственной возможностью их учесть.

1.1 Что такое коэффициент потерь

Наиболее распространенным эффективным параметром, характеризующим демпфирование в таких сложных колебательных системах, является *коэффициент потерь* η . Он зависит от частоты и определяется как отношение энергии колебаний, поглощенной за один период, к средней по времени общей энергии системы (кинетической + потенциальной). Как функция частоты он принимает максимальное значение на резонансных частотах системы –

см., например, [5, Ch.12]. А так как во время резонансов инерционные и упругие компоненты системы взаимно компенсируют друг друга, то колебания на этих частотах, в том числе амплитуды резонансных колебаний, полностью определяются именно максимальными значениями коэффициента потерь.

Математически коэффициент потерь произвольной механической линейной колебательной системы, совершающей свободные или вынужденные гармонические колебания частоты ω , записывается следующим образом:

$$\eta(\omega) = \frac{\Phi}{\omega E}, \quad (1.1)$$

где Φ – мощность потерь, E – общая средняя энергия. Например, для механического осциллятора с параметрами (m, c, k) , который совершает вынужденные колебания под действием силы $f(t) = fe^{i\omega t}$, формула (1.1) дает

$$\eta(\omega) = \eta \frac{2\omega_0\omega}{\omega_0^2 + \omega^2}. \quad (1.2)$$

Это функция, равная нулю при $\omega = 0$ и ∞ и принимающая максимальное значение при $\omega = \omega_0$, равное $\eta = c/m\omega_0$, где $\omega_0^2 = k/m$. Так как энергия систем теряется из-за демпфирования в основном на частотах вблизи резонансов, то при многочастотном возбуждении общие потери системы определяются максимальными значениями коэффициента потерь. Этим оправдан выбор в качестве одного из основных параметров колебательных систем *максимального значения коэффициента потерь* $\eta = \eta(\omega_0) = c/m\omega_0$ или пропорциональных ему величин – *относительного коэффициента демпфирования* $\zeta = \eta/2$ и *коэффициента затухания свободных колебаний* $\gamma = \eta\omega_0/2$.

Этим объясняется особое внимание, которое уделяется в современных экспериментальных методах измерения потерь к его модальным значениям, т.е. к значениям на собственных частотах колебательных систем. К настоящему времени таких методов уже создано довольно много. Это означает, что пока не найдено единого точного универсального метода, а создано множество приближенных методов, отличающихся точностью и областью применимости. Все они, однако, основаны на использовании одной и той же колебательной модели системы – *модальной модели*, которая помимо отмеченной выше смысловой значимости, лучше других моделей соответствует данным измерения. Разработанные методы являются важной частью обширного раздела современной науки под названием *Экспериментальный модальный анализ* или, сокращенно, ЭМА, который активно развивался

последние 50 лет и продолжает развиваться в настоящее время – см., например, [43, 57–59]. Приведем краткое описание основных положений ЭМА с акцентом на измерение потерь в колебательных системах.

Модальная модель является следствием известного математического результата: вынужденные колебания произвольной линейной колебательной системы конечных размеров могут быть точно представлены в виде разложения по собственным функциям соответственного оператора. Непрерывные краевые задачи динамической теории упругости и акустики имеют обычно бесконечное число собственных функций, поэтому в модальном анализе используют еще один математический результат: такая система может быть приближенно с любой степенью точности заменена конечно-элементной структурой с конечным числом N степеней свободы, которая описывается системой N связанных между собой обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка вида

$$M\ddot{\mathbf{u}}(t) + C\dot{\mathbf{u}}(t) + K\mathbf{u}(t) = \mathbf{f}(t), \quad (1.3)$$

где $\mathbf{u}(t) = [u_1(t), u_2(t), \dots, u_N(t)]^T$ и $\mathbf{f}(t) = [f_1(t), f_2(t), \dots, f_N(t)]^T$ – это N -векторы смещений и внешних сил; M , C , K – действительные симметричные $N \times N$ -матрицы, M положительно определена, C и K определены неотрицательно. Потери в этой структуре представлены эквивалентными сосредоточенными вязкими демпферами с набором C коэффициентов вязкого трения. Отметим, что используемая линейная модель вязкого демпфирования согласуется со всеми известными общезначимыми законами и принципами, в частности, обладает свойствами устойчивости и причинности, в отличие от некоторых других распространенных, например, гистерезисных моделей [60].

Структура (1.3) в общем случае имеет конечное число $2N$ комплексных собственных частот и такое же число комплексных собственных векторов. Если число N степеней свободы не слишком мало, модель (1.3) все еще довольно сложна для экспериментального измерения коэффициентов C . Дальнейшее упрощение модальной модели состоит в том, что в качестве базовой системы векторов, по которой разлагаются произвольные решения системы (1.3), используются собственные векторы недемпфированной структуры, у которой $C = 0$.

Разыскивая решение для свободных колебаний недемпфированной системы в стандартном виде

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u} e^{\gamma_0 t}, \quad (1.4)$$

получим систему алгебраических уравнений

$$(K + \gamma_0^2 M) \mathbf{u} = 0, \quad (1.5)$$

которую в общей алгебре принято называть обобщенной задачей на собственные значения. Система (1.5) имеет ненулевые решения только для N собственных значений γ_{0n}^2 , $n = 1, 2, \dots, N$, являющихся корнями характеристического уравнения $\det(K + \gamma_0^2 M) = 0$. В силу указанных выше свойств матриц M и K , все собственные значения γ_0^2 являются действительными отрицательными величинами, которые удобно записать как

$$\gamma_{0n}^2 = -\omega_{0n}^2 \quad \text{или} \quad \gamma_{0n}^{(1,2)} = \pm i\omega_{0n}, \quad (1.6)$$

где $\pm\omega_{0n}$, $n = 1, 2, \dots, N$ – это $2N$ действительных N положительных и N отрицательных величин, имеющих физический смысл (и размерность) круговой частоты, и носят название *собственных частот недемпфированной системы*. Каждому собственному значению γ_0^2 задачи (1.5) и, соответственно, каждой из двух собственных частот $\pm\omega_{0n}$, отвечает один собственный N -вектор $\mathbf{u}_n$, являющийся решением (1.5) при $\gamma_0^2 = \gamma_{0n}^2$. Вектор $\mathbf{u}_n$ называется также n -ой собственной или нормальной формой колебаний системы, а решение (1.4) со значениями (1.6) – собственными функциями задачи. Общее число собственных функций равно $2N$. Подчеркнем, что все N элементов формы $\mathbf{u}_n$ являются действительными величинами, что физически означает, что все массы колебательной системы на собственных частотах колеблются либо в фазе друг с другом, либо в противофазе. Нормальные формы обычно нормируются в соответствии с их M -ортогональностью и K -ортогональностью, т.е. в соответствии с соотношениями ортогональности вида

$$\mathbf{u}_j^T M \mathbf{u}_n = \delta_{jn}, \quad \mathbf{u}_j^T K \mathbf{u}_n = \omega_{0n}^2 \delta_{jn}, \quad (1.7)$$

где δ_{jn} – символ Кронекера. Следуя Рэлею [55], пару $\{\omega_{0n}, \mathbf{u}_n\}$ называют *нормальной модой* рассматриваемой колебательной системы.

Наконец, чтобы иметь возможность разлагать по нормальным модам колебания демпфированной системы, в ЭМА делается еще одно серьезное допущение: демпфирование системы предполагается рэлеевским, т.е. матрица C коэффициентов вязкого трения предполагается пропорциональной матрицам масс и упругостей: $C = 2\alpha M + 2\beta K$ [55]. Разыскивая при этом условие решения для свободных колебаний демпфированной системы (1.3) в виде, аналогичном (1.4),

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}e^{\gamma t}, \quad (1.8)$$

получим следующую систему алгебраических уравнений

$$\left(K + \left(\frac{\gamma^2 + 2\alpha\gamma}{1 + 2\beta\gamma} \right) M \right) \mathbf{u} = 0, \quad (1.9)$$

которая в точности совпадает с системой (1.5), если в ней число в круглых скобках приравнять к значению γ_0^2 , т.е. если положить, что параметр γ удовлетворяет соотношению

$$\gamma^2 + 2\gamma(\alpha - \beta\gamma_0^2) - \gamma_0^2 = 0. \quad (1.10)$$

Отсюда следует, что задача (1.8), (1.9) свободных колебаний демпфированной системы с рэлеевскими потерями имеет те же N собственных форм $\mathbf{u}_n$, что и задача (1.4), (1.5) для недемпфированной системы, а также комплексно-сопряженные собственные частоты

$$\gamma_n^{(1,2)} = -\omega_{0n}\zeta_n \pm i\omega_n, \quad (1.11)$$

выраженные через частоты (1.6) недемпфированной системы посредством соотношения (1.10). Здесь $\zeta_n = \alpha / \omega_{0n} + \beta\omega_{0n}$ – *относительные модальные коэффициенты демпфирования* (damping ratios) и $\omega_n = \omega_{0n}\sqrt{1 - \zeta_n^2}$ – *собственные частоты демпфированной системы*. Любое свободное или вынужденное колебание линейной системы с N степенями свободы и рэлеевским демпфированием является линейной комбинацией нормальных мод,

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{n=1}^N \mathbf{u}_n q_n(t) = U\mathbf{q}(t), \quad (1.12)$$

где $U = [\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_N]$ – *модальная $N \times N$ -матрица*, составленная из нормальных форм, $\mathbf{q}(t) = [q_1(t), q_2(t), \dots, q_N(t)]^T$ – N -вектор модальных переменных, т.е. амплитуд нормальных мод. Если в системе (1.3) вектор смещений $\mathbf{u}(t)$ заменить согласно (1.12) вектором $\mathbf{q}(t)$, получим систему N независимых друг от друга уравнений второго порядка относительно модальных переменных,

$$\ddot{\mathbf{q}}(t) + D\dot{\mathbf{q}}(t) + \Omega_0^2 \mathbf{q}(t) = \mathbf{g}(t). \quad (1.13)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(t) &= U^T \mathbf{f}(t), \quad \Omega_0^2 = U^T K U = \text{diag}\{\omega_{01}^2, \omega_{02}^2, \dots, \omega_{0N}^2\}, \\ D &= U^T C U = \text{diag}\{2\omega_{01}\zeta_1, 2\omega_{02}\zeta_2, \dots, 2\omega_{0N}\zeta_N\}, \quad U^T M U = I_N, \end{aligned} \quad (1.14)$$

где I_N – это единичная матрица порядка N . Соотношения (1.14), помимо ортогональности (1.7) нормальных мод, показывают, что модальная матрица U с помощью так называемого преобразования конгруэнтности одновременно диагонализует все три матрицы системы (1.3)¹.

Система уравнений (1.13), а также другие соотношения (1.11) – (1.14) определяют наиболее простую модальную модель линейной колебательной системы, общепринятую в экспериментальном модальном анализе [43]. Для демпфированной колебательной системы с N степенями свободы модель состоит из N нормальных мод. Параметрами каждой моды являются величины $\{\omega_{0n}, \zeta_n, \mathbf{u}_n\}$, т.е. ω_{0n} – собственная частота недемпфированной системы, ζ_n – относительный коэффициент демпфирования (или $\eta_n = 2\zeta_n$ – максимальный или модальный коэффициент потерь) и $\mathbf{u}_n$ – форма колебаний. Эта мода отличается от классической нормальной моды недемпфированной системы только добавлением параметра ζ_n или η_n .

Целью экспериментального модального анализа является построение модальной модели, т.е. определение значения параметров всех мод исследуемой колебательной системы на основе проведения определенных экспериментов и тестов. После того, как модальная модель построена и проверена, она может быть применена для расчета и прогнозирования колебаний системы при произвольных возбуждениях и условиях, используя представление (1.12) и решение уравнений (1.13) с заданными внешними силами и начальными условиями. При необходимости по известной модальной модели с помощью соотношений (1.12), (1.14) можно вычислить матрицы M , C , K , например, $M = (U U^T)^{-1}$ и т.д., и, таким образом, построить конечно-элементную модель (1.3).

Все методы экспериментального определения модальных параметров, в частности потерь, основаны на согласовании (curve fitting) теоретической модальной модели с экспериментально измеренными данными. Большое число существующих методов объясняется частично множеством возможных способов возбуждения² исследуемой

¹ Согласно теории [61], в общем случае нормальные формы могут диагонализировать только две матрицы, M и K . В данном случае матрица C также диагонализуется благодаря своему особому свойству рэлеевской пропорциональности.

² В методах ЭМА предполагаются доступными измерению и, следовательно, известными как внешнее возбуждение, так и отклики на него. Задачи, в которых известны только отклики, а возбуждение по тем или иным причинам неизвестно, являются предметом исследования другой области науки, называемой «Операционным модальным анализом» (ОМА). Методы ОМА обладают своими особенностями и не затрагиваются в данной работе.

колебательной системы, разнообразием доступных измерению физических откликов системы и средств их измерения. Подробные обзоры существующих методов и соответственной обширной литературы можно найти в книгах по модальному анализу [43, 57–59]. Ниже будут отмечены лишь те из них, которые тесно связаны с измерением потерь и собственных частот, используя минимальные экспериментальные данные. В частности, будут опущены многочисленные методы, основанные на многоканальных измерениях, необходимых для определения форм колебаний.

1.2 Методы измерения во временной области

Методы ЭМА разделяются на две группы, характеризующиеся измерениями во временной области и в частотной области. Во временной области обычно исследуются свободные колебания систем, возбуждаемые ударным воздействием или начальными условиями.

Пусть, например, система (1.3) с N степенями свободы возбуждается ударом по j -ой массе силой $f_j(t) = f_j \delta(t)$, а отклик системы в виде смещения массы с номером k измеряется и записывается как скалярная функция времени $\hat{u}_k(t)$. При этом, как показано в [A2], возбуждаются все нормальные моды системы. Поэтому теоретическая модальная модель отклика записывается, согласно (1.12), в виде

$$u_k(t) = \sum_{n=1}^N U_{nk} q_n(t), \quad (1.15)$$

где U_{nk} – элемент модальной матрицы U , а амплитуды каждой нормальной моды $q_n(t)$ определяются независимо решением соответственных уравнений системы (1.13). Полученное стандартным способом, это решение равно

$$q_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ \frac{U_{nj} f_j}{\omega_n} \sin(\omega_n t) & \text{при } t \geq 0, \end{cases} \quad (1.16)$$

где $\omega_n = \omega_{0n} \sqrt{1 - \zeta_n^2}$ – собственная частота демпфированной системы – см. также (1.11). Сравнивая теоретическую модель смещения k -ой массы (1.15), (1.16) с измеренным смещением $\hat{u}_k(t)$, из тех или иных условий их близости можно определить параметры ω_{0n} и ζ_n , $n = 1, \dots, N$, модальной модели. В частности, если $N = 1$, для этого достаточно на кривой $\hat{u}_k(t)$ измерить период колебаний и логарифмический декремент.

Иногда теоретическая модель свободных колебаний системы записывается в более общем виде суммы комплексных экспонент, $u_k(t) = \sum_{n=1}^{2N} a_{nk} e^{\gamma_n t}$. В настоящее время существует целый ряд алгоритмов определения неизвестных a_{nk} и γ_n по данным измерения $\hat{u}_k(t)$, см., например, [62, 63]. Однако впервые и наиболее просто такая задача была аналитически решена Прони еще в XVIII веке для модели в виде суммы чисто затухающих экспонент [64]. Впоследствии решение Прони и его варианты были распространены на затухающие синусоиды и даже на чисто гармонические сигналы и стали применяться в различных областях науки, включая спектральное оценивание [65].

1.3 Методы измерения в частотной области

На практике гораздо чаще применяют методы ЭМА в частотной области. В этом случае используются вынужденные колебания систем, а в качестве экспериментальных данных регистрируются и используются *частотные характеристики откликов* (Frequency Response Functions – FRF). Полная модель частотных откликов системы с N степенями свободы описывается комплексной симметричной $N \times N$ -матрицей $H(\omega)$, элементами которой $H_{jk}(\omega)$ являются комплексные амплитуды откликов j -ых масс при действии на k -ые массы гармонических сил единичной амплитуды и частоты ω , $f_j(t) = e^{i\omega t}$. При этом если откликом является смещение, элемент $H_{jk}(\omega)$ представляет собой *податливость* (receptance) с размерностью [м/Н]. Если откликом является скорость или ускорение масс, тогда $H_{jk}(\omega)$ – это *подвижность* (admittance) или *ускоряемость* (accelerance). Как следует из уравнений (1.3), матрица частотных откликов удовлетворяет равенству $H(\omega)F(\omega) = U(\omega)$, где $F(\omega)$ и $U(\omega)$ – это N -векторы спектров Фурье сил и соответствующих откликов, и поэтому может быть измерена при действии на систему произвольных (необязательно гармонических) сил. Как и выше, экспериментально полученные частотные характеристики будут обозначаться «крышками», например, $\hat{H}(\omega)$, $\hat{H}_{jk}(\omega)$.

Теоретическая полная модель матрицы частотных откликов, выраженная через модельные параметры, получается непосредственно из соотношений (1.12) – (1.14) и записывается как

$$H(\omega) = U \text{diag} \left\{ \omega_{0n}^2 - \omega^2 + 2i\omega\omega_{0n}\zeta_n \right\}^{-1} U^T.$$

Соответственно, произвольный элемент этой матрицы имеет вид

$$H_{jk}(\omega) = \sum_{n=1}^N \frac{A_{jk}^{(n)}}{\omega_{0n}^2 - \omega^2 + 2i\omega\omega_{0n}\zeta_n}, \quad \text{где } A_{jk}^{(n)} = U_{jn}U_{kn}. \quad (1.17)$$

Он состоит из N слагаемых, каждое из которых описывает передачу колебаний от силы, приложенной к k -ой массе, на j -ую массу посредством одной из мод. Отсюда следует, что для определения всех собственных частот и модальных коэффициентов потерь $\eta_n = 2\zeta_n$, $n = 1, 2, \dots, N$, в принципе достаточно экспериментально измерить только одну функцию $\hat{H}_{jk}(\omega)$ для двух произвольных точек j и k системы и построить для нее модальную модель (1.12), используя один из известных алгоритмов установления соответствия (curve fitting) между спектральными кривыми $\hat{H}_{jk}(\omega)$ и $H_{jk}(\omega)$. Ниже приведены некоторые наиболее простые и часто используемые алгоритмы.

1.4 Методы экспериментального модального анализа (ЭМА)

1.4.1. *Модальные модели; допущения и соотношения ЭМА.* Полезно начать с простейшей колебательной системы – механического осциллятора, для которого $N = 1$. Он описывается конечно-элементным уравнением (1.3) вида

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = f(t),$$

имеет одну нормальную моду с тремя модальными параметрами:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ – собственная частота недемпфированной системы,}$$

$$\eta = 2\zeta = \frac{c}{m\omega_0} \text{ – модальный (максимальный) коэффициент потерь,}$$

$$u_0 = \frac{1}{\sqrt{m}} \text{ – нормированная по (1.7) «форма» колебаний,}$$

которые в данном случае однозначно и довольно просто выражаются через три материальных параметра (m , c , k). Частотная характеристика по смещению (1.17), т.е. податливость осциллятора, равна

$$H(\omega) = \frac{1}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\omega_0\eta} \quad (1.18)$$

Если экспериментально измерена аналогичная частотная характеристика $\hat{H}(\omega)$, то для определения модальных параметров осциллятора в принципе достаточно приравнять $H(\omega)$ и

$\hat{H}(\omega)$ на трех произвольных частотах. Но на практике всегда имеются ошибки измерения и моделирования, что требует применения более сложных алгоритмов фиттинга частотных кривых, в том числе основанных на минимизации невязки $|H(\omega) - \hat{H}(\omega)|^2$ в рабочем диапазоне частот и приводящих к нелинейным уравнениям. В литературе есть много таких алгоритмов, и выбор одного из них неоднозначен. Укажем поэтому алгоритм, который является самым простым и практически наиболее удобным среди всех существующих алгоритмов.

В этом алгоритме измеряется модуль подвижности осциллятора $|\hat{H}_v(\omega)|$, т.е. абсолютная величина частотной характеристики по скорости. Ее модальная модель выражается через податливость (1.18) как $|H_v(\omega)| = |i\omega H(\omega)|$. Нетрудно показать, что эта величина принимает максимальное значение, равное $1/m\omega_0\eta$ на собственной частоте ω_0 недемпфированного осциллятора, а модальный коэффициент потерь равен

$$\eta = \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \quad (1.19)$$

Здесь $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$; $\omega_1 < \omega_0$ и $\omega_2 > \omega_0$ – это две частоты в окрестности ω_0 , на которых кривая подвижности принимает значение на уровне $1/\sqrt{2} \approx 0.707$ от своего максимального значения. Формула (1.19) математически точна и верна для значений коэффициента потерь $0 < \eta < 2$. Таким образом, этим алгоритмом можно достаточно просто определить все модальные параметры, в том числе коэффициент потерь механического осциллятора, если на экспериментальной кривой $\hat{H}_v(\omega)$ измерить ее максимальное (резонансное) значение, резонансную частоту и ширину резонансной кривой на уровне $1/\sqrt{2}$ максимума. Следует, однако, иметь в виду, что формула (1.19) верна только для подвижности, т.е. для частотной характеристики по скорости. Для податливости и ускоряемости аналогичные алгоритмы сложнее, и области их применимости ограничены.

С использованием комплексной подвижности связан еще один простой способ определения потерь и других модальных параметров осциллятора. Он состоит в том, что на плоскости (x, y) , где

$$\begin{aligned} x = \operatorname{Re}[H_v(\omega)] &= \frac{1}{m} \frac{\omega^2 \omega_0 \eta}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\omega_0\eta}, \\ y = \operatorname{Im}[H_v(\omega)] &= \frac{1}{m} \frac{\omega(\omega_0^2 - \omega^2)}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\omega_0\eta}, \end{aligned} \quad (1.20)$$

нужно построить так называемую кривую Найквиста, каждая точка которой соответствует одной частоте ω . Нетрудно проверить, что этот график является окружностью $(x-r)^2 + y^2 = r^2$, где $r = 1/2m\omega_0\eta$, по геометрическим параметрам которой находятся модальные параметры [43, 59].

Следует отметить, что для механического осциллятора и, следовательно, для всех колебательных систем с одной степенью свободы, существуют и другие достаточно простые методы измерения модальных параметров, например, если в качестве частотной характеристики использовать динамическую жесткость, т.е. обратную величину податливости (1.18), или импеданс, т.е. обратную величину подвижности, $H_v^{-1}(\omega)$. Они менее распространены и поэтому здесь подробно не рассматриваются. В то же время, приведенное выше два алгоритма определения потерь (по ширине резонансной кривой (1.19) и по окружности Найквиста) изложены достаточно детально, т.к. они играют большую роль в модальном анализе также более сложных колебательных систем.

При построении модальных моделей систем с конечным числом N степеней свободы в качестве частотных характеристик наиболее широко используются модули податливости (1.17) и подвижности, т.е. $|H_{jk}(\omega)|$ и $|i\omega H_{jk}(\omega)|$. Применимость тех или иных алгоритмов фиттинга кривых этих характеристик зависит от свойств исследуемой системы, точнее, от плотности собственных частот системы и от величины демпфирования.

1.4.2. PPM и подобные методы. Если плотность собственных частот мала, то есть если они отстоят достаточно далеко друг от друга, а демпфирование при этом не слишком велико, так что отдельные резонансные пики оказываются изолированными, то в этом случае можно считать, что каждый такой резонансный пик формируется одной модой и в окрестности такой резонансной частоты система с N степенями свободы моделируется простейшей системой с одной степенью свободы. Для вычисления параметров этой моды можно воспользоваться одним из указанных выше алгоритмов для осциллятора, в частности, для вычисления модальных потерь использовать формулу (1.19). Применяя этот подход последовательно ко всем изолированным резонансным пикам, можно определить модальные потери и другие модальные параметры во всем исследуемом диапазоне частот. В западной литературе этот метод модального анализа носит название *peak picking method* (PPM), т.е. метод выделенных резонансных пиков.

Существует также целый ряд разновидностей этого метода, в которых для анализа отдельных пиков используют графики Найквиста, а также кривые комплексной динамической жесткости и импеданса. Кроме того, чтобы частично учесть и исключить влияние на

выделенный пик остальных резонансов, к частотной характеристике типа (1.18) добавляют слагаемые, постоянные или зависящие от частоты (residues в англоязычной литературе), которые определяются наряду с модальными параметрами. Еще одна модификация состоит в замене действительных модальных постоянных $A_{jk}^{(n)}$ в (1.17) комплексными значениями. При этом хорошее соответствие между теоретическими и экспериментальными частотными характеристиками достигается не только в районе резонансов, но и на других частотах.

1.4.3. *Общие алгоритмы.* Если плотность собственных частот исследуемой системы с N степенями свободы велика и/или в системе много демпфирования, так что соседние резонансы частично накладываются друг на друга, метод РРМ не работает. В этом случае применяется один из следующих двух основных методов – метод нелинейных уравнений и метод полиномиальных дробей. В первом из них строится квадратичная невязка E между теоретической (1.17) и экспериментальной $\hat{H}_{jk}(\omega)$ кривыми, и из систем уравнений $dE/d\zeta = 0$, где ζ обозначает вектор всех модальных и дополнительных параметров системы. Эти уравнения нелинейные и для их решения требуются те или иные упрощения. Вторым методом похож на первый, но сначала модальная модель (1.17) представляется в виде отношения двух полиномов по частоте (путем приведения к общему знаменателю), а затем минимизируется квадратичная невязка E . Уравнения получаемой таким образом алгебраической системы линейны и легко решаются относительно неизвестных коэффициентов полиномов, а по ним затем вычисляются и модальные параметры. Для этих методов также существует множество модификаций с упрощениями, описание которых можно найти в литературе [43, 57–59]. Отметим, что представление функций отношениями полиномов в математике носит название Падэ аппроксимации [66]. Помимо модального анализа, это представление имеет ряд других приложений в виброакустике, например, [67, 68].

1.5 Точность определения коэффициента потерь

В заключение обзора коснемся вопроса точности упомянутых методов модального анализа. Очевидно, что на точность модального анализа влияют ошибки измерения: чем ошибки измерения больше, тем менее точно определяются модальные параметры. Ошибки вычислений также могут быть существенны при неоптимальном выборе параметров компьютерной обработки сигналов или когда в системе много собственных частот и приходится решать плохо обусловленные системы алгебраических уравнений. В принципе, эти ошибки контролируемы и частично управляемы.

Иная ситуация с так называемыми *модельными ошибками*. Для неадекватной модели невязка между колебаниями реальной системы и ее модели может быть значительной даже при

отсутствии ошибок измерения и расчета. В модальном анализе есть целый ряд модельных погрешностей, как результат сделанных упрощающих допущений. Одна из таких погрешностей обусловлена заменой реальных колебательных систем, у которых, как правило, большое, часто бесконечное, число собственных частот и мод, системами конечно-элементного типа (1.3) с ограниченным числом степеней свободы и собственных частот. Неучтенные в модели моды могут оказывать заметное влияние на колебания учтенных мод, даже если спектры внешнего возбуждения не выходят за рамки рабочего диапазона частот. Еще одна модельная ошибка модального анализа обусловлена заменой комплексных форм собственных колебаний реальных систем действительными формами нормальных мод. Рэлееское (пропорциональное) демпфирование модальной модели также является причиной ухудшения точности моделирования. Например, в главе 12 справочника [5] показано на примере, что если пропорциональная матрица демпфирования C в модели (1.3) отличается от реальной матрицы на 20% по евклидовой норме, то это вызывает такую же по величине ошибку модальных параметров. К модельным ошибкам приводит также линейность модели (1.3) и (1.17), а также использование в качестве базового вязкий тип демпфирования, хотя реальные колебательные системы всегда в той или иной мере нелинейны, а природа реального демпфирования может быть другой, например, наследственной или гистерезисной, т.е. необязательно вязкой – см. [60]. Модельные ошибки зависят от свойств исследуемых систем и могут быть оценены путем сравнения с более точными моделями. В литературе есть ряд работ, выполненных в этом направлении. Однако, в целом, вопрос ошибок модального анализа пока остается открытым, хотя многие исследователи и инженеры считают, что точность модального анализа в его сегодняшней модификации достаточно высока для расчета и прогнозирования колебаний современных инженерных конструкций, если в них содержится не слишком мало и не слишком много демпфирования – см. [1, 5, 43, 57–59, 69].

В заключение обзора также обратим особое внимание на одну из важных проблем модального анализа, присущую всем конкретным его методам, и которая во многом определяет точность методов. Это так называемая «проблема порядка модели». Она состоит в том, что для построения модальной модели, т.е. для определения значений всех модальных параметров по данным измерения, необходимо заранее знать число мод или общее число модальных параметров исследуемой системы, т.е. порядок ее модели. Если порядок модели меньше требуемого значения, например, при описании одномодовой моделью системы с двумя модами, потери такой модели в общем случае не имеют ничего общего с потерями реальной системы. Наоборот, если порядок модели превышает порядок системы, часть мод модели обычно оказываются ложными. Отделение ложных мод от истинных – непростая задача, требующая дополнительных измерений и вычислений, см. напр. [43].

Справедливости ради следует отметить, что проблема порядка моделей имеет место не только в модальном анализе линейных колебательных систем, но и при построении параметрических моделей практически всех известных динамических систем. Для определения порядка предложено множество методов и критериев адекватности моделей – см., например, [42, 43]. В работе [A2], в частности, предложен энергетический критерий адекватности моделей, наиболее точно отвечающий требованиям и особенностям задач акустики и теории колебаний, который играет важную роль и в данной работе.

Заключение Главы 1

Приведен краткий обзор существующих методов экспериментального определения коэффициентов потерь линейных колебательных систем. Таких методов много. Они отличаются используемыми моделями систем, особенностями возбуждения их колебаний, а также тем, какие характеристики колебаний измеряются, и алгоритмами их обработки. Большинство методов, разработанных в рамках «Экспериментального модального анализа» (ЭМА), требуют особых условий эксперимента и обладают ограниченным динамическим диапазоном измеряемых потерь.

В обзоре показано, что построение модальной модели колебательной системы сопряжено с несколькими упрощающими допущениями, погрешность которых невелика только для слабо демпфированных систем.

Вывод: для сложных колебательных систем типа инженерных конструкций, а также для сильно демпфированных колебательных систем, какими являются современные поглотители звука и вибраций, требуется разработка более простых и эффективных методов измерения потерь.

ГЛАВА 2

Построение дискретно-временных моделей колебательных систем по непрерывным моделям

Введение

Отличительной особенностью предлагаемого в диссертации метода измерения потерь в колебательных системах является использование для моделирования исследуемых систем дискретных по времени моделей типа ARMA. В акустике и теории колебаний, где все физические переменные (смещение, давление и др.) традиционно рассматриваются как непрерывные функции времени, такие модели используются только для обработки сигналов и хранения информации в компьютерах, а непосредственно для решения задач практически не применяются³. Между тем, дискретно-временные модели имеют целый ряд достоинств таких, например, как простота построения модели по данным измерения и высокая точность моделирования, которые в полной мере использованы в предлагаемом методе. По этой причине в диссертацию включена целая Глава 2, посвященная предварительному исследованию временных рядов, т.е. функций дискретного времени, и получению для них некоторых новых результатов, необходимых для обоснования и работы приводимого в диссертации метода. Основное внимание в этой главе уделено установлению аналитической связи между известными непрерывными колебательными моделями и дискретными ARMA-моделями, которые позволяют легко строить дискретные модели по непрерывным и наоборот.

В начале Главы 2 приведены общие сведения о дискретных моделях и временных рядах, относящиеся в основном к области науки «Теория управления», где они используются повсеместно. Связь между непрерывными акустическими и дискретными моделями исследована во второй части главы сначала для простейшей колебательной системы – механического осциллятора в подробном изложении, а затем для произвольной колебательной системы – механической структуры с N степенями свободы, в более кратком изложении.

2.1 Временные ряды и дискретные модели

Существуют области, где исследуемые явления и процессы по своей природе являются дискретными или измеряются только в определенные моменты времени. Многообразие и доступность таких измерений были одной из главных причин раннего развития научных

³ Здесь не имеется в виду дискретизация по пространственным координатам и метод конечных элементов, т. к. дискретизация по времени в отличие от пространственных координат требует выполнения принципа причинности, приводя к большим отличиям этих двух подходов.

исследований. Наблюдения за температурой воздуха в городах, за морскими приливами, солнечными пятнами и другими дискретными явлениями уже в 18-ом веке привели ученых к формулировке математического понятия *временных рядов*, детерминированных и случайных, и к необходимости их анализа с целью извлечения из них информации, необходимой для понимания природы явлений, а также для построения их динамических моделей, прогнозирования и управления. В начале 20-го столетия на основе этих исследований был сформирован самостоятельный научный раздел «Анализ временных рядов» с большим числом важных результатов и приложений в области спектрального оценивания, статистики (см., например, [65, 70, 71]).

Настоящий прорыв в развитии дискретных моделей и методов исследования дискретных временных процессов начался в середине 20-го века и продолжается сейчас в связи с бурным развитием промышленности, особенно, транспорта, и с необходимостью проектирования оптимальных систем автоматического управления производственными процессами и работой транспортных средств. Эта область науки, которую принято называть «теорией управления» (прежнее название «теория автоматического регулирования»), является сегодня одной из самых развитых. Здесь уже написаны десятки монографий как непосредственно по теории управления, например [72–76], так и по примыкающим к ней дисциплинам – по «идентификации систем», т.е. по построению математических моделей динамических систем на основе экспериментальных данных [42, 77–79], по цифровой обработке временных сигналов [65, 80] и др. По этой тематике также имеются тысячи публикаций в журналах и трудах многочисленных регулярных конференций – см., в частности, [81, 82], где в открытом доступе печатаются доклады конференций, проводимых под эгидой Международной федерации по автоматическому управлению (International Federation on Automatic Control – IFAC) за 1960-2014 годы [81] и с 2015 года по настоящее время [82]. Многие теоретические и практические результаты теории управления, в том числе дискретные модели и методы исследования временных процессов, в последние годы были успешно распространены на другие области, включая такие, казалось бы, далекие от техники области как биология, медицина, языкознание и другие см., например, [83, 84].

Однако, как отмечалось выше, акустику эти процессы затронули незначительно, несмотря на наличие целого ряда проверенных на практике достоинств дискретных методов (простота экспериментального построения дискретных моделей, экономичность в вычислениях, робастность, т.е. работоспособность при низких значениях отношения «сигнал/шум», возможность прогнозирования случайных процессов и др.). В литературе можно найти отдельные статьи, где дискретные модели временных процессов применяются для решения задач модального анализа, акустического мониторинга и диагностики

колебательных систем, например, в [85–90, АЗ, А14]. Но на регулярной основе, если не считать обработку сигналов, дискретные методы исследования временных процессов в акустике пока не применялись, насколько известно автору данной научной работы, который не смог найти в известных монографиях и справочниках по акустике даже упоминания о них.

В данной диссертационной работе сделана попытка частично восполнить этот пробел. Некоторое внимание в ней уделено построению дискретных по времени моделей по известным непрерывным моделям для простейших акустических структур – колебательных систем с конечным числом степеней свободы. В основу построения положен критерий, согласно которому временные ряды, описывающие свободные и вынужденные колебания дискретных моделей, должны в точности совпадать с соответственными дискретизированными непрерывными решениями. Такое требование продиктовано особенностью акустических задач, которая заключается в высокой чувствительности волновых и колебательных свойств к изменению модельных параметров. В частности, ниже в работе показано, что повсеместно применяемая в литературе процедура построения дискретных моделей путем замены непрерывных производных конечными разностями приводит к физически неприемлемым результатам – см. Приложение Б. Для построенных на основе указанного критерия дискретных моделей в данной работе выведены конечно-разностные уравнения и получены их решения для свободных и вынужденных колебаний под действием как силового, так и кинематического возбуждения. Между параметрами непрерывных и соответственных дискретных моделей установлены аналитические соотношения, позволяющие без труда переходить от непрерывных моделей к дискретным и наоборот. Отмечено одно из примечательных свойств дискретных моделей – это специальная структура их конечно-разностных уравнений. Она делает чрезвычайно простым построение самой модели экспериментально без предварительного знания соответственных непрерывных моделей и с использованием весьма ограниченного объема данных измерений. В работе приведен пример такого построения.

Отметим особую роль, которую в данной научной работе играет известная теорема отсчетов Котельникова [91] (в западной литературе она известна под названием теорема Найквиста-Шеннона). Теорема гласит: любая непрерывная функция $x(t)$ с ограниченным спектром ($\omega < \omega_c$) может быть точно представлена своим дискретным временным рядом $x[nT]$ с интервалом дискретизации T , равным $0 < T \leq \pi/\omega_c$, и восстановлена с помощью разложения

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \operatorname{sinc} \left[\pi \left(\frac{t}{T} - n \right) \right],$$

где $\text{sinc}(z) = \sin(z)/z$, n – целое число. Она, таким образом, означает, что два представления временной зависимости, в виде непрерывной функции времени и в виде временного ряда, являются при выполнении определенных условий эквивалентными. По существу, но в другой форме, теорема была получена математиками ранее в рамках решения задачи интерполяции функций [92]. Однако ее пришлось заново переоткрывать в 30-х годах прошлого века для нужд теории связи, где она, в силу ее фундаментальной важности, получила название, связанное с выдающимися учеными этой области науки и техники. В настоящее время теорема отсчетов лежит в основе современных численных методов обработки сигналов, теории управления и других областях науки. Поскольку данная глава диссертационной работы посвящена установлению аналитической связи между эквивалентными непрерывными и дискретными моделями колебательных систем, то теорема отсчетов и здесь предполагается выполненной во всех приводимых соотношениях, и, таким образом, также лежит в основе предложенной в работе теории.

Подчеркнем, что данная работа рассматривает дискретизацию колебательных процессов по времени и совсем не затрагивает дискретизацию по пространственным координатам, хотя она столь же актуальна и важна из-за широкого применения методов конечных и граничных элементов. Эти два научных направления, основанные на временной и на пространственной дискретизации, развивались независимо, решая разные физические задачи и используя разные математические аппараты. Важное отличие между ними заключается, в частности, в том, что все временные зависимости, в отличие от зависимостей от пространственных координат, подчиняются принципу причинности. С некоторыми имеющимися методами и результатами решения современных пространственно-дискретных или, иначе, сетевых и решетчатых задач читатель может ознакомиться, например, в статье [93].

Приведем перечень и краткую характеристику известных [70] временных дискретных моделей, которые используются в данной работе. Это прежде всего ARMA-модель⁴ или авторегрессионная модель скользящего среднего (AutoRegressive Moving Average model). Она описывается конечно-разностным уравнением вида

⁴ В данной работе будет идти речь о «чистой» ARMA-модели (2.1) с одним МА-входом и одним AR-выходом, которая в настоящее время является составной частью ряда более сложных моделей, применяемых в современной теории управления, идентификации динамических систем, эконометрике и других разделах науки (например, модели ARX и ARMAX). Все дело в том, что со временем развития дискретных моделей появилось множество новых задач, и для удобства в отдельных отраслях данную модель стали дифференцировать, в результате чего в ряде источников часть скользящего среднего (МА-часть) перестали рассматривать как явный способ учета внешних факторов, а стали использовать для описания влияния некоторых случайных возмущений.

$$x[n] + \sum_{p=1}^P a_p x[n-p] = \sum_{q=0}^{Q-1} b_q w[n-q], \quad (2.1)$$

где $x[n]$ – подлежащая определению скалярная величина, например, смещение; $w[n]$ – заданное внешнее воздействие, например, сила; квадратные скобки указывают на принадлежность временному ряду, т.е. на значение функций x и w в дискретные моменты времени $t = nT$, где T – интервал дискретизации, например, $x[n] = x(nT)$; n, p, q, P и Q – целые числа. Коэффициенты a_p и b_q являются параметрами модели, а пара чисел (P, Q) называется порядком модели.

Модель (2.1) является объединением двух моделей – авторегрессионной модели (AR-модели), которая получается из (2.1) при $P \geq 1$ и $Q = 1$ или 0 , и модели скользящего среднего (MA-модели), которая соответствует уравнению (2.1) при $P = 0$ и $Q \geq 1$. Эти две модели независимы, но при отдельном использовании требуют большого, часто бесконечного, числа параметров, в то время как порядок ARMA-модели, как правило, невелик. Одна из часто применяемых в литературе разновидностей MA-модели, которая используется и в данной работе, носит название «модели черного ящика» или «фильтра с одним входом и одним выходом» и характеризуется конечно-разностным уравнением типа

$$x[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k] w[n-k], \quad (2.2)$$

где временной ряд $h[n]$, называемый импульсной передаточной функцией, представляет собой выходной сигнал фильтра (черного ящика) при действии на его вход дискретной δ -последовательности Кронекера

$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 0, \\ 0 & \text{при } n \neq 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

В разных разделах науки ряд $h[n]$ имеет и другие названия, например, в акустике – это дискретная функция Грина. В соответствии с принципом причинности импульсная передаточная функция тождественно равна нулю при отрицательных n .

Большой класс составляют ARMA-модели с векторными переменными $\mathbf{x}[n]$ и $\mathbf{w}[n]$, которые описываются конечно-разностными уравнениями (2.1) с матричными коэффициентами. Ниже в работе будет использоваться одна такая модель – так называемая SS-модель (State Space model), т.е. модель в пространстве состояний. Ее конечно-разностное уравнение записывается как

$$\mathbf{x}[n] + A\mathbf{x}[n-1] = B\mathbf{w}[n]. \quad (2.4)$$

Для колебательных систем с N степенями свободы вектор $\mathbf{x}[n]$ имеет размерность $2N$, его компонентами являются комплексные амплитуды N смещений и N скоростей, а A и B – это $2N \times 2N$ -матрицы. SS-модель является наиболее общей моделью для динамических систем. Она широко применяется в общих теоретических исследованиях, а в теории управления считается основной моделью [76].

Что касается непрерывных моделей систем с N степенями свободы, в данной работе используется хорошо известная m - c - k -модель конечно-элементного типа, состоящая из сосредоточенных масс m , демпферов c и упругостей k , описываемая системой N обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка; непрерывная SS-модель (State Space), описываемая системой $2N$ обыкновенных уравнений первого порядка, а также модель черного ящика, которая описывается импульсной передаточной функцией $h(t)$, т.е. откликом на δ -функцию Дирака, и интегральным уравнением

$$x(t) = \int_0^{\infty} h(\tau) w(t - \tau) d\tau, \quad (2.5)$$

описывающим вынужденные колебания системы и являющимся непрерывным аналогом уравнения (2.2).

2.2 Механический осциллятор

2.2.1. *Непрерывный подход.* Классической непрерывно временной моделью произвольной линейной колебательной системы с одной степенью свободы общепринято считать механический осциллятор (см. рис. 2.1), т. е. структуру, состоящую из трех сосредоточенных элементов – массы m , пружины с жесткостью k и вязкого демпфера с коэффициентом демпфирования c , которая описывается обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка,

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = \begin{cases} f(t), \\ c\dot{u}_0(t) + ku_0(t). \end{cases} \quad (2.6a)$$

$$(2.6b)$$

Здесь t – время, $u(t)$ – смещение массы, $f(t)$ – внешняя сила, приложенная к массе, $u_0(t)$ – внешнее кинематическое возбуждение (смещение), приложенное к пружине и демпферу со стороны основания, которое имеет место, например, при испытаниях на вибрационных стендах, точка означает производную по времени.

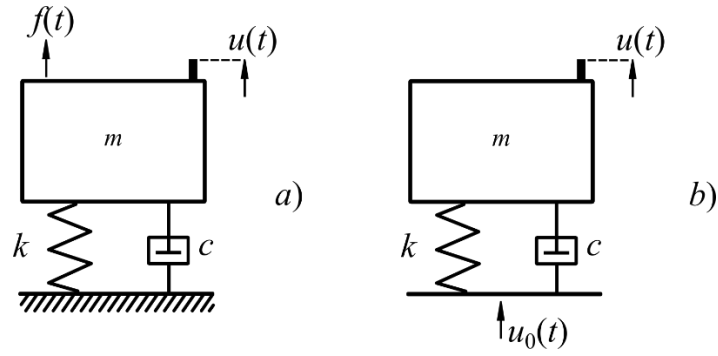


Рис. 2.1 Общая механическая модель колебательной системы с одной степенью свободы при (a) силовом и (b) кинематическом внешнем воздействии.

Механические параметры модели m - c - k выбраны произвольно в качестве основных представителей для всего класса колебательных систем с одной степенью свободы. Реальные системы могут иметь физически другие инерционные, упругие и демпфирующие элементы. Однако, результаты, полученные для модели (2.6), будут верны и для других представителей этого класса после соответственной замены параметров. Для удобства дальнейшего рассмотрения уравнение (2.6) поделим на m и представим в виде

$$\ddot{u}(t) + 2\gamma\dot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = \begin{cases} \frac{1}{m} f(t), & (2.7a) \\ 2\gamma\dot{u}_0(t) + \omega_0^2 u_0(t), & (2.7b) \end{cases}$$

где введены следующие обозначения:

$$\gamma = \frac{c}{2m} \text{ — коэффициент затухания,}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ — собственная частота недемпфированной системы.}$$

Вспомним некоторые известные свойства колебаний этой структуры. Прежде всего рассмотрим собственные или свободные колебания осциллятора, которые соответствуют решениям однородного уравнения (2.7) без правой части. Разыскивая его решение в стандартном виде $u(t) = e^{\lambda t}$, получим характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0 \quad (2.8)$$

и два его корня

$$\lambda_{1,2} = \begin{cases} -\gamma \pm i\omega_d, & \text{если } 4km > c^2 \quad (\text{или } \gamma < \omega_0), \\ -\gamma = -\omega_0, & \text{если } 4km = c^2 \quad (\gamma = \omega_0), \\ -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}, & \text{если } 4km < c^2 \quad (\gamma > \omega_0), \end{cases} \quad \begin{matrix} (2.9a) \\ (2.9b) \\ (2.9c) \end{matrix}$$

где $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ – собственная частота демпфированной системы.

В большинстве практических случаев количество демпфирования в системах невелико, и комплексно-сопряженные корни (2.9a) встречаются чаще всего, а два независимых собственных колебания являются гармоническими функциями частоты ω_d с экспоненциально затухающими амплитудами

$$u_1(t) = e^{-\gamma t + i\omega_d t}, \quad u_2(t) = e^{-\gamma t - i\omega_d t}. \quad (2.10a)$$

Существует немало и сильно демпфированных систем с большими значениями параметра c , близкими или превышающими критическое значение $c = 2\sqrt{km}$, при котором имеет место один корень двойной кратности (2.9b). При большем демпфировании рассматриваемая система перестает быть колебательной и все ее собственные движения становятся экспоненциально затухающими. В случае кратного корня (2.9b) собственные функции равны

$$u_1(t) = e^{-\omega_0 t}; \quad u_2(t) = te^{-\omega_0 t}, \quad (2.10b)$$

а в случае (2.9c) – это две затухающие экспоненты вида

$$u_1(t) = e^{-\gamma t - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t}, \quad u_2(t) = e^{-\gamma t + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} t}. \quad (2.10c)$$

Произвольные свободные движения системы для всех значений демпфирования являются линейными комбинациями собственных функций (2.10) с амплитудами, однозначно определяемыми по начальным условиям.

Вынужденные колебания механического осциллятора определяются его *импульсной передаточной функцией* $h(t)$:

$$u(t) = \int_{-\infty}^t h(t-\tau) f(\tau) d\tau = \int_0^{\infty} h(\tau) f(t-\tau) d\tau. \quad (2.11)$$

Функция $h(t)$ является по определению откликом системы на мгновенный единичный импульс, действующий в момент $t = 0$, и удовлетворяет уравнению (2.7) с правой частью в виде δ -функции Дирака, $f(t) = \delta(t)$ или $u_0(t) = \delta(t)$. В силу принципа причинности, $h(t) = 0$ при $t < 0$. Во всех дальнейших выкладках для краткости мы будем предполагать, что $\gamma < \omega_0$, т.е. что

осциллятор имеет докритическое демпфирование и комплексно сопряженные корни (2.9a). Вычисления для сильно демпфированного осциллятора производятся аналогично и далее будут опущены.

Импульсная передаточная функция для силового возбуждения при $t > 0$ равна:

$$h_f(t) = \frac{1}{m\omega_d} e^{-\gamma t} \sin(\omega_d t), \quad (2.12a)$$

а для кинематического возбуждения $u_0(t) = \delta(t)$ имеет вид:

$$h_k(t) = \frac{e^{-\gamma t}}{\omega_d} \left[(\omega_d^2 - \gamma^2) \sin(\omega_d t) + 2\gamma\omega_d \cos(\omega_d t) \right]. \quad (2.12b)$$

При анализе и проектировании колебательных систем важное значение имеют также их спектральные характеристики. Приведем поэтому классическое преобразование Фурье от импульсных передаточных функций (2.12)

$$H_f(\omega) = \left(-\frac{1}{2\pi m} \right) \frac{1}{\omega^2 - 2i\omega\gamma - \omega_0^2} = |H_f(\omega)| e^{i\theta_f(\omega)}, \quad (2.13a)$$

$$H_k(\omega) = \left(-\frac{1}{2\pi} \right) \frac{2i\omega\gamma + \omega_0^2}{\omega^2 - 2i\omega\gamma - \omega_0^2}. \quad (2.13b)$$

Их принято называть *частотными характеристиками* системы (frequency response function или FRF): при этом модуль $|H(\omega)|$ называется амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ), а угол $\theta(\omega)$ – фазово-частотной характеристикой (ФЧХ) системы. Частотная характеристика, как функция частоты, определена на всей комплексной плоскости ω и обладает свойством симметрии: $H(-\omega) = \bar{H}(\omega)$, где черта сверху означает комплексное сопряжение. Другими словами, ее действительная часть $\text{Re}[H(\omega)]$ является четной функцией частоты, а мнимая часть $\text{Im}[H(\omega)]$ – нечетной. При действии на осциллятор произвольного силового $f(t)$ или кинематического $u_0(t)$ возбуждения спектр его смещения равен, согласно (2.11), произведению частотной характеристики (2.13) и спектра Фурье воздействия.

2.2.2 Дискретизация и ARMA-модель. Пусть теперь представленные выше непрерывные по t свободные и вынужденные колебания механического осциллятора рассматриваются только в дискретные равноотстоящие моменты времени $t = nT$, где n – целое число, T – интервал дискретизации, равный обратному значению частоты дискретизации. Выясним, как при этом изменяются уравнения движения, импульсные функции и спектры осциллятора.

Рассмотрим сначала свободные колебания. Дискретизация двух независимых собственных колебаний осциллятора (2.10) превращает их в два независимых бесконечных временных ряда

$$u_1[n] = u_1(nT) = e^{\lambda_1 T n}, \quad u_2[n] = u_2(nT) = e^{\lambda_2 T n}. \quad (2.14)$$

В соответствии с общей теорией [92], они должны удовлетворять однородному конечно-разностному уравнению, имеющему порядок два, равный числу независимых решений. Запишем это уравнение в следующем авторегрессионном виде

$$u[n] + a_1 u[n-1] + a_2 u[n-2] = 0, \quad (2.15)$$

где a_1 и a_2 – неизвестные пока постоянные коэффициенты. В литературе часто находят эти коэффициенты непосредственно из однородного непрерывного уравнения (2.7) путем замены в нем производных по времени конечными разностями. Однако, в данном случае этого делать нельзя, т.к. такая замена приводит к физически неоправданным последствиям – см. Приложение Б.

Чтобы найти нужные значения коэффициентов a_1 и a_2 , два независимых решения уравнения (2.15) представим [92] в стандартном виде как $(u_1)^n$ и $(u_2)^n$, где n – целое, а u_1 и u_2 являются корнями характеристического уравнения

$$u^2 + a_1 u + a_2 = 0, \quad (2.16)$$

и сравним их с рядами (2.14). Чтобы эти решения совпадали, требуется, очевидно, выполнение следующих равенств

$$u_1 = e^{\lambda_1 T}, \quad u_2 = e^{\lambda_2 T}, \quad (2.17)$$

где λ_1 и λ_2 – корни «непрерывного» характеристического уравнения (2.8). Тогда, по известной теореме Виета, искомые коэффициенты уравнения (2.15) равны

$$a_1 = -(e^{\lambda_1 T} + e^{\lambda_2 T}), \quad a_2 = e^{(\lambda_1 + \lambda_2)T}, \quad (2.18a)$$

или после подстановки значений (1.9a)

$$a_1 = -2e^{-\gamma T} \cos(\omega_d T), \quad a_2 = e^{-2\gamma T}. \quad (2.18b)$$

Нетрудно найти и обратные зависимости. Если известны коэффициенты (2.18) конечно-разностного уравнения (2.15), то относительные значения двух коэффициентов соответственного непрерывного уравнения (2.6) выражаются через них как

$$\frac{c}{m} = -\frac{1}{T} \ln(a_2), \quad \frac{k}{m} = \left[\frac{1}{T} \ln(\sqrt{a_2}) \right]^2 + \left[\frac{1}{T} \arccos\left(-\frac{a_1}{2\sqrt{a_2}}\right) \right]^2, \quad (2.19a)$$

или в более компактной записи

$$\frac{c}{m} = -\frac{1}{T} \ln(u_1 u_2), \quad \frac{k}{m} = \frac{1}{T^2} \ln(u_1) \ln(u_2), \quad (2.19b)$$

где u_1 и u_2 – корни характеристического уравнения (2.16). Для нахождения третьего коэффициента уравнения (2.6), т.е. массы m механического осциллятора, нужно рассмотреть его вынужденные колебания.

В непрерывной постановке вынужденные колебания осциллятора при различных типах возбуждения полностью характеризуются импульсными передаточными функциями (2.12), которые после дискретизации превращаются во временные ряды:

$$h_f[n] = \frac{e^{-\gamma T n}}{m \omega_d} \sin(\omega_d T n), \quad (2.20a)$$

$$h_k[n] = \frac{e^{-\gamma T n}}{\omega_d} \left[(\omega_d^2 - \gamma^2) \sin(\omega_d T n) + 2\gamma \omega_d \cos(\omega_d T n) \right]. \quad (2.20b)$$

Найдем теперь конечно-разностные уравнения, которым удовлетворяют ряды (2.20) при $t \geq 0$. Эти уравнения должны иметь один и тот же вид ARMA-уравнения (2.1):

$$h[n] + a_1 h[n-1] + a_2 h[n-2] = b_0 \delta[n] + b_1 \delta[n-1], \quad (2.21)$$

отличаясь только значениями МА-коэффициентов в правой части. Действительно, левая часть (2.21) должна совпадать с левой AR-частью уравнения (2.15) с коэффициентами (2.18), т.к. при $n > 1$ оба ряда (2.20) по своему определению удовлетворяют (2.15). Однако, правая часть (2.21) зависит от типа возбуждения. Для силового возбуждения нужен только один коэффициент, а в случае кинематического возбуждения правая часть (2.21), имитируя непрерывную дельта-функцию Дирака и ее производную, должна содержать дельта-последовательность Кронекера (2.3), приложенную в два начальных момента времени $n = 0$ и 1 с неизвестными пока

коэффициентами b_0 и b_1 . Эти коэффициенты мы определим, найдя частное решение уравнения (2.21) и приравняв его поочередно рядам (2.20).

Поскольку при $n > 1$ уравнение (2.21) является однородным, его решение равно комбинации двух решений уравнения (2.15):

$$h[n] = C_1 (u_1)^n + C_2 (u_2)^n,$$

где u_1 и u_2 – корни характеристического уравнения (2.16), а C_1 и C_2 – неизвестные константы. Подставив это решение в (2.21) и положив $n = 0$ и $n = 1$, с учетом $h[n < 0] = 0$ в силу принципа причинности, найдем C_1 и C_2 и частное решение уравнения (2.21) в виде:

$$h[n] = (b_1 - a_1 b_0) \frac{(u_1)^n - (u_2)^n}{u_1 - u_2} - b_0 \frac{(u_1)^n u_2 - u_1 (u_2)^n}{u_1 - u_2} \quad (2.22a)$$

или после подстановки в него (2.13) и (2.14)

$$h[n] = (b_1 - a_1 b_0) e^{-\gamma T(n-1)} \frac{\sin(\omega_d T n)}{\sin(\omega_d T)} - b_0 e^{-\gamma T n} \frac{\sin[\omega_d T (n-1)]}{\sin(\omega_d T)}, \quad (2.22b)$$

а также соотношения

$$b_0 = h[0], \quad b_1 = h[1] + a_1 h[0]. \quad (2.23)$$

Если теперь подставить в (2.13) значения элементов рядов (2.20) в начальные моменты времени $n = 0$ и 1 , то найдем искомые коэффициенты b_0 и b_1 уравнения (2.21). Они оказываются равными:

для силового возбуждения, как и ожидалось, отличен от нуля только один коэффициент

$$b_0 = 0, \quad b_1 = \frac{T}{m} e^{-\gamma T} \frac{\sin(\omega_d T)}{\omega_d T}, \quad (2.24a)$$

а для кинематического возбуждения оба коэффициента отличны от нуля

$$b_0 = 2\gamma, \quad b_1 = \frac{e^{-\gamma T}}{\omega_d} \left[(\omega_d^2 - \gamma^2) \sin(\omega_d T) - 2\gamma \omega_d \cos(\omega_d T) \right]. \quad (2.24b)$$

Таким образом, временные ряды (2.20) удовлетворяют одному и тому же конечно-разностному ARMA-уравнению (2.21), но с разными коэффициентами правой части. Автор проверил, что

решения (2.22) уравнения (2.21) с коэффициентами (2.24) в точности и для всех n совпадают с рядами (2.20) дискретизированных непрерывных импульсных функций (2.12).

Произвольные вынужденные колебания осциллятора в дискретной постановке вычисляются по его импульсным передаточным функциям (2.20) с помощью дискретной конволюции (2.2) с функциями возбуждения.

2.2.3. Спектральный анализ. Рассмотрим, как дискретизация изменяет спектр колебаний осциллятора, в частности, как меняются его частотные характеристики (2.13). Воспользуемся следующей известной теоремой [65], играющей важную роль в теории дискретных систем: дискретизация любой непрерывной функции приводит к периодическому продолжению ее спектра с периодом, равным частоте дискретизации. В нашем случае это означает, что спектр Фурье $H_d(\omega)$ дискретной импульсной функции (2.20) равен (см. Приложение В)

$$H_d(\omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} H(\omega - m\Omega), \quad (2.25)$$

где $H(\omega)$ – спектр непрерывной импульсной функции (2.13), $\Omega = 2\pi/T$ – круговая частота дискретизации. Из этого результата следует одно практически важное ограничение, накладываемое при дискретном анализе колебательных систем на частоту дискретизации, ширину частотной характеристики исследуемой системы и спектра возбуждения $f[n]$ или $u_0[n]$. Оно называется теоремой отсчета Котельникова и заключается в том, что спектр Фурье исследуемого сигнала в непрерывной постановке не должен выходить за рамки частотного интервала $[-\Omega/2, \Omega/2]$. В противном случае, соседние слагаемые в (2.25) накладываются друг на друга, делая невозможным точное восстановление спектра $H(\omega)$ непрерывного сигнала по спектру $H_d(\omega)$ дискретного сигнала.

Например, при спектральном анализе смещения механического осциллятора с силовым возбуждением и умеренным демпфированием его частотная характеристика (2.13) является быстро убывающей функцией частоты (убывает как ω^{-2} при $\omega \rightarrow \infty$), так что в интервале $[-2\omega_0, 2\omega_0]$, где ω_0 – это собственная частота осциллятора, содержится, как нетрудно проверить, более 95% энергии сигнала. Частоту $2\omega_0$ поэтому можно считать верхней граничной частотой спектра непрерывного сигнала. Чтобы теорема Котельникова выполнялась, частота дискретизации Ω должна в этом случае быть выбрана выше так называемой частоты Найквиста $\Omega_N = 4\omega_0$, равной удвоенной частоте граничной частоты спектра.

Однако, если механический осциллятор возбуждается кинематически, как показано на рис. 2.1b, или в нем измеряется не смещение, а ускорение, ширина его частотной

характеристики увеличивается. Одновременно должна увеличиться частота дискретизации и, как следствие, число вычислений. Еще более широкие спектры имеют сложные колебательные системы с большим числом степеней свободы и собственных частот. В таких случаях следует ограничивать спектры внешнего возбуждения. Подробное обсуждение ограничений при дискретном спектральном анализе приведено в книгах по цифровой обработке сигналов, например, в [65, 80].

Формула (2.25) полезна для теоретического анализа. Для практических вычислений удобнее применять z -преобразование – см. Приложение В. Например, чтобы вычислить спектры временных рядов (2.20), воспользуемся непосредственно уравнением (2.21) и легко проверяемым свойством z -преобразования: сдвиг временного ряда на один шаг назад эквивалентен умножению z -спектра на z^{-1} . Умножив уравнение (2.21) на z^{-n} и просуммировав результат, получим формулу

$$H_d(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}, \quad (2.26)$$

которая после подстановки $z = e^{i\omega T}$ с точностью до множителя Ω совпадает с (2.25). Было проверено, что обращение z -спектра (2.26) с помощью второй формулы (B13) в Приложении В после взятия интеграла вычетами дает дискретные импульсные функции (2.20). Также проверено, что, если рассматривать (2.26) как функцию частоты ω и взять классическое обратное преобразование Фурье в бесконечных пределах, то получим непрерывные импульсные функции (2.12), умноженные на функцию дискретизации – см. Приложение В.

Подведем итоги исследования механического осциллятора. Переход от непрерывного подхода к анализу свободных и вынужденных колебаний осциллятора к дискретному подходу требует существенного изменения математических и физических средств анализа: непрерывные функции заменяются временными рядами; вместо обыкновенных дифференциальных уравнений должны решаться уравнения в конечных разностях; спектры дискретных колебаний всегда являются бесконечными и периодическими независимо от того, каков спектр при непрерывном анализе. Устанавливая соответствие между непрерывным и дискретным подходами, исходили из условия, что временные ряды, описывающие колебания осциллятора, должны совпадать со значениями дискретизированных соответственных непрерывных функций времени. При этом между параметрами непрерывных и дискретных моделей были установлены взаимно однозначные аналитические связи, позволяющие переходить от одной модели к другой и обратно. Было в то же время показано, что это можно делать не всегда и корректный переход от непрерывной модели к дискретной модели возможен

только для колебательных систем, спектры колебаний которых ограничены сверху по частоте, т.е. когда выполняется теорема отсчетов Котельникова. Эти выводы верны и для более сложных колебательных систем.

2.3 Колебательная система с N степенями свободы

В этом подразделе результаты, полученные при исследовании механического осциллятора, распространены и на случай линейных колебательных систем с N степенями свободы. Для этих систем существует довольно много векторных моделей, как непрерывных, так и дискретных [42, 94], которые отличаются друг от друга числом используемых переменных. Ниже будут рассмотрены две наиболее распространенные модели – SS-модель и модель черного ящика (фильтра с одним входом и одним выходом). SS-модель использует максимально возможное количество переменных $2N$ в пространстве состояний и удобна для теоретических исследований. Модель черного ящика использует одну переменную и удобна в экспериментальных исследованиях. Следуя принятой в работе общей схеме исследования, ниже для обоих случаев сначала формулируется непрерывная модель, а затем по ней строится соответствующая дискретная модель. Как и для механического осциллятора, между дифференциальными и конечно-разностными уравнениями, их параметрами и решениями будут установлены аналитические связи.

2.3.1. *Общая непрерывная модель.* Для описания колебательных и волновых процессов сложных систем в акустике традиционно применяются две основные модели – пространственно непрерывные упругие среды, описываемые уравнениями в частных производных и граничными условиями, а также структуры, состоящие из сосредоточенных элементов и описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями. Время в обеих моделях считается непрерывным. В последние годы, благодаря повсеместному применению метода конечных элементов, эти модели сближаются, отличаясь количеством степеней свободы. Поэтому в качестве наиболее общей непрерывной акустической модели колебательных систем примем здесь вторую модель, т.е. дискретную структуру, состоящую из N масс, соединенных между собой (и с основанием) сосредоточенными упругостями и вязкими демпферами. Модель хорошо изучена и описывается практически во всех учебниках и справочниках по акустике [55 т.1, 95]. Как и в случае механического осциллятора, выбор M - C - K в качестве параметров модели является условным, вместо них могут подразумеваться физически другие сосредоточенные элементы. Модель описывается системой N обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$M\ddot{\mathbf{u}}(t) + C\dot{\mathbf{u}}(t) + K\mathbf{u}(t) = \begin{cases} \mathbf{f}(t), \\ \hat{K}\mathbf{u}_0(t) + \hat{C}\dot{\mathbf{u}}_0(t), \end{cases} \quad (2.27)$$

где $\mathbf{u}(t) = [u_1(t), \dots, u_N(t)]^T$, $\mathbf{u}_0(t) = [u_{01}(t), \dots, u_{0N}(t)]^T$ и $\mathbf{f}(t) = [f_1(t), \dots, f_N(t)]^T$ – это N -векторы обобщенных смещений масс, смещений основания и внешних сил, приложенных к массам, инерционная $N \times N$ – матрица M действительна, симметрична и положительно определена, упругая матрица K и матрица C вязких демпферов действительны, симметричны и неотрицательны, $\hat{K} = \text{diag}\{K_{11}, K_{22}, \dots, K_{NN}\}$ и $\hat{C} = \text{diag}\{C_{11}, C_{22}, \dots, C_{NN}\}$. Уравнения (2.27) описывают колебания широкого класса колебательных систем с N степенями свободы, в том числе конечно-элементные модели. Уравнения отличаются от общепринятых добавлением варианта с кинематическим возбуждением $\mathbf{u}_0(t)$. Примерами задач с таким возбуждением могут служить колебания зданий во время землетрясений, а также стендовые испытания конструкций на вибрационных столах.

2.3.2. *SS-модели.* Для представления модели (2.27) в виде непрерывной SS-модели в пространстве состояний нужно удвоить количество переменных, например, приняв скорости масс $\dot{\mathbf{u}}(t)$ в качестве дополнительных N переменных. Система (2.27) N уравнений второго порядка запишется тогда в виде следующей системы $2N$ уравнений первого порядка:

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = U\mathbf{y}(t) + V\mathbf{g}(t), \quad (2.28)$$

где введены обозначения

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_\alpha(t) \\ \mathbf{y}_\beta(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}(t) \\ \dot{\mathbf{u}}(t) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{g}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_\alpha(t) \\ \mathbf{g}_\beta(t) \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0, & \mathbf{f}(t) \end{bmatrix}^T & \text{– для силового возбуждения,} \\ \begin{bmatrix} 0, & \hat{K}\mathbf{u}_0(t) + \hat{C}\dot{\mathbf{u}}_0(t) \end{bmatrix}^T & \text{– для кинематического возбуждения,} \end{cases}$$

$$U = \begin{bmatrix} U_{\alpha\alpha} & U_{\alpha\beta} \\ U_{\beta\alpha} & U_{\beta\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & M^{-1} \end{bmatrix},$$

индексы α и β в блочном представлении векторов и матриц соответствуют значениям $\alpha = \{1, 2, \dots, N\}$ и $\beta = \{N+1, \dots, 2N\}$.

Положим, что при $t < 0$ система уже совершала свободные колебания, так что в момент времени $t = 0$ она приобрела смещение и скорости $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$, которые примем за начальные условия задачи. Кроме того, будем считать, при $t < 0$ внешнее возбуждение отсутствует,

начинает действовать в момент $t = 0$ и продолжает действовать в последующее время. При таких условиях решение системы (2.28) записывается в виде суммы двух слагаемых – общего решения однородной системы и частного решения неоднородной системы уравнений

$$\mathbf{y}(t) = e^{U_t} \mathbf{y}_0 + \int_0^t e^{U(t-\tau)} V \mathbf{g}(\tau) d\tau. \quad (2.29)$$

Это решение взято из книги Ф.Р. Гантмахера [96], где также подробно разъяснено, как вычислять функции от матриц.

Как и в случае механического осциллятора, вынужденные колебания рассматриваемой системы удобно выразить через импульсную передаточную вектор-функцию $\mathbf{h}(t)$ – см. (2.11). Она описывается вторым слагаемым в (2.29), если в него вместо N -вектора $\mathbf{f}(t)$ или $\mathbf{u}_0(t)$ подставлять вектор $\mathbf{e}\delta(t)$, где $\mathbf{e} = [1, 1 \dots, 1]^T$ – это N -вектор с единичными элементами, $\delta(t)$ – это дельта-функция Дирака. В результате для силового возбуждения получим

$$\mathbf{h}_f(t) = e^{U_t} V \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{e} \end{bmatrix}. \quad (2.30a)$$

Для кинематического возбуждения нужно сначала с помощью интегрирования по частям преобразовать слагаемое с производной от дельта-функции и затем произвести интегрирование. В результате имеем:

$$\mathbf{h}_k(t) = e^{U_t} \left(V \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{K}\mathbf{e} \end{bmatrix} + UV \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{C}\mathbf{e} \end{bmatrix} \right), \quad (2.30b)$$

где $N \times N$ – матрицы $\hat{K}$ и $\hat{C}$ даны в (2.27). Дискретизация полученных решений (2.29), (2.30) сводится к замене $t = nT$, T – интервал дискретизации, превращая эти непрерывные векторные функции во временные векторные ряды.

Рассмотрим теперь дискретный подход к анализу колебательной системы с N степенями свободы и покажем, каким конечно-разностным уравнениям удовлетворяют временные ряды дискретизированных непрерывных решений и установим аналитическую связь между параметрами непрерывной и дискретной моделей. Как и при непрерывном подходе, воспользуемся для этого дискретной SS-моделью как наиболее общей среди всех дискретных моделей. В данном случае эта модель описывается следующей системой $2N$ конечно-разностных уравнений первого порядка

$$\mathbf{x}[n] = A\mathbf{x}[n-1] + B\mathbf{w}[n], \quad (2.31)$$

где $\mathbf{x}[n]$ и $\mathbf{w}[n]$ – это $2N$ -векторы состояния и внешних воздействий, A – матрица порядка $2N$ параметров рассматриваемой системы и B – это $2N \times 2N$ – матрица, зависящая от особенностей внешнего воздействия, например, силового или кинематического, и учитывающая формальные особенности модели, такие как умножение возбуждения на обратную инерционную матрицу или V в (2.28) и другие. Порядок этой модели определен количеством переменных, необходимых для полного описания всех степеней свободы, т.е. равен $2N$. При тех же условиях, что и в непрерывном подходе, т.е. при начальных условиях $\mathbf{x}[0] = \mathbf{x}_0$ и при отсутствии внешнего возбуждения при отрицательных $n < 0$, решение системы уравнений находится стандартным способом [92] и равно

$$\mathbf{x}[n] = A^n \mathbf{x}_0 + \sum_{k=0}^n A^{n-k} B \mathbf{w}[k]. \quad (2.32)$$

Первое слагаемое описывает свободные колебания, второе – вынужденные.

Найдем связь между параметрами A и B дискретной SS-модели (2.31) и материальными параметрами U и V непрерывной SS-модели (2.28), исходя из условия равенства $2N$ -векторов состояния решений (2.29) и (2.32) во всех дискретных моментах времени nT при свободных и при вынужденных колебаниях, иначе говоря, из равенства $\mathbf{x}[n] = \mathbf{y}(nT)$.

Приравнявая свободные колебания (первые слагаемые в (2.29) и (2.32)), непосредственно получаем соотношение:

$$A = e^{UT}, \quad (2.33)$$

которое позволяет вычислить авторегрессионные параметры дискретной SS-модели рассматриваемой колебательной системы по известным материальным параметрам M , C , K непрерывной модели, точнее по их отношениям $M^{-1}K$ и $M^{-1}C$. Верно и обратное утверждение: если известна авторегрессионная матрица A колебательной системы, то по ней можно найти отношения матриц материальных параметров:

$$U = \frac{1}{T} \ln(A) \quad \text{или} \quad M^{-1}K = U_{\beta\alpha}, \quad M^{-1}C = U_{\beta\gamma}. \quad (2.34)$$

Чтобы связать с материальными параметрами вторую матрицу дискретной SS-модели (2.31) – матрицу B , достаточно приравнять соответственные векторы импульсных переходных временных рядов. Для непрерывной модели этот вектор равен (2.30) для $t = nT$, а для дискретной модели он равен второму слагаемому решения (2.32), в котором внешнее

воздействие отлично от нуля только в момент времени $kT = 0$ и соответствует $2N$ -вектору $\mathbf{w}[0]$, в котором каждый элемент равен единице, точнее:

$$\mathbf{h}[n] = A^n B \begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix}. \quad (2.35)$$

В результате, приравнявая (2.35) и $\mathbf{h}_f(nT)$ в (2.30a), получим, что для силового возбуждения системы искомая матрица равна:

$$B_f = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & M^{-1} \end{bmatrix}. \quad (2.36a)$$

А приравнявая (2.35) и $\mathbf{h}_k(nT)$ в (2.30b), для кинематического возбуждения получим:

$$B_k = \begin{bmatrix} 0 & U_{\alpha\beta} M^{-1} \hat{C} \\ 0 & M^{-1} \hat{K} + U_{\beta\beta} M^{-1} \hat{C} \end{bmatrix}. \quad (2.36b)$$

Формулы (2.36) дают возможность определить матрицу B в дискретной модели (2.31), если известны все материальные параметры непрерывной модели. В случае силового возбуждения верно и обратное: зная матрицу B_f , можно вычислить инерционную матрицу системы:

$$M = (B_{\beta\beta})^{-1},$$

которая вместе с формулами (2.34) определяет все материальные параметры колебательной системы M , C , K . Однако, для кинематического возбуждения это не так: по известным матрицам A и B_k можно найти только некоторые отношения материальных матриц. Чтобы определить все материальные матрицы колебательной системы в отдельности, включая матрицы $\hat{C}$ и $\hat{K}$, которые характеризуют соединение системы с вибрирующим основанием, необходимо знание матрицы A и обеих матрицы (2.36).

Нетрудно проверить, что для случая $N = 1$, т.е. для колебательной системы с одной степенью свободы, полученные в этом подразделе результаты в точности совпадают с результатами, полученными выше для механического осциллятора. В этом случае для непрерывной SS-модели (2.28) имеем следующие параметры

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2\omega_0^2 & -2\gamma \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/m \end{bmatrix},$$

а для дискретной модели (2.31) они равны

$$A = e^{UT} = e^{-\gamma T} \begin{bmatrix} \cos(\omega_d T) + \frac{\gamma}{\omega_d} \sin(\omega_d T) & \frac{1}{\omega_d} \sin(\omega_d T) \\ -\frac{\omega_0^2}{\omega_d} \sin(\omega_d T) & \cos(\omega_d T) - \frac{\gamma}{\omega_d} \sin(\omega_d T) \end{bmatrix},$$

$$B_f = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & m^{-1} \end{bmatrix}, \quad B_k = \begin{bmatrix} 0 & 2\gamma \\ 0 & \omega_0^2 - 4\gamma^2 \end{bmatrix}.$$

Проверено, что, исключив из векторов состояния $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ вторую компоненту (скорость), из этих уравнений можно получить все соотношения, приведенные в п.2.2.1.

2.3.3 Одномерная модель черного ящика. Векторные SS-модели колебательных систем со многими степенями свободы и соответственные уравнения и их решения удобны для теоретического анализа свободных и вынужденных колебаний. Однако, они содержат много переменных и неудобны для экспериментального анализа сложных систем. Современные эксперименты, как правило, ограничиваются измерениями в небольшом числе точек и для их описания требуются более простые модели. В этом подразделе рассматривается простейший случай, когда колебания системы измеряются только в одной точке и возбуждение производится тоже в одной точке, этой же или другой. Для описания такого эксперимента, очевидно, достаточно модели черного ящика с одной скалярной переменной. Как будет показано далее, в непрерывном варианте модель описывается одним обыкновенным дифференциальным уравнением порядка $2N$ с правой частью, содержащей помимо самого возбуждения также множество его производных. А соответственная дискретная модель является в общем случае ARMA-моделью (2.1) порядка $(2N, 2N)$, конечно-элементное уравнение которой содержит $2N$ авторегрессионных коэффициентов и $2N$ коэффициентов скользящего среднего для кинематического возбуждения и $2N - 1$ для силового возбуждения. Для этих моделей ниже будут установлены аналитические связи между коэффициентами и решениями их уравнений, которые, как и в случае механического осциллятора и SS-моделей, позволяют строить дискретную модель по известной непрерывной модели и, наоборот, непрерывную модель по известной дискретной модели. Начнем с вывода дифференциального уравнения для непрерывной модели.

Рассмотрим снова систему уравнений (2.27) с силовым возбуждением и преобразуем ее следующим образом. Введя для краткости обозначение для производной по времени $\partial = \frac{d}{dt}$, перепишем систему (2.27) в виде: $D(\partial)\mathbf{u}(t) = \mathbf{f}(t)$, где каждый элемент $N \times N$ - матрицы $D(\partial)$ является полиномом второй степени относительно оператора ∂ . Формальным решением

системы является $\mathbf{u}(t) = D^{-1}(\partial)\mathbf{f}(t)$, в котором j -ая компонента смещения удовлетворяет соотношению [96]

$$|D(\partial)|u_j(t) = \sum_{k=1}^N A_{jk}(\partial)f_k(t). \quad (2.37)$$

Здесь $|D(\partial)|$ – определитель матрицы $D(\partial)$, а $A_{jk}(\partial)$ – алгебраическое дополнение ее элемента $D_{kj}(\partial)$. Определитель $|D(\partial)|$ есть полином по ∂ степени $2N$, а определитель $A_{jk}(\partial)$ – полином степени $(2N - 2)$. Поэтому соотношение (2.37) фактически является обыкновенным дифференциальным уравнением $2N$ -го порядка для смещения $u_j(t)$ с правой частью в виде заданных внешних сил и их производных по времени. Очевидно, что другие компоненты смещения удовлетворяют тому же дифференциальному уравнению, что и (2.37), отличаясь друг от друга правыми частями.

Физический смысл уравнения (2.37) состоит в том, что оно описывает передачу колебаний от N источников (сил) на j -ую массу N различными путями. Если источник только один, например, $f_k(t)$, то уравнение (2.37) описывает один такой путь передачи колебаний от силы $f_k(t)$, приложенной к массе с номером k , на массу с номером j . Этот путь, очевидно, ветвистый и объединяет множество «дорожек», проходящих через всю колебательную систему и соединяющих эти две массы. В уравнении (2.37) этот факт отражается в виде производных различного порядка от $f_k(t)$. Для одного пути передачи колебаний, т.е. для колебаний в одной точке колебательной системы, вызванных возбуждением в другой точке, уравнение (2.37) записывается после деления на коэффициент при старшей производной как

$$\left(\partial^{2N} + \sum_{l=1}^{2N} \alpha_l \partial^{2N-l} \right) u_j(t) = \sum_{m=0}^{2N-2} \beta_m \partial^m f_k(t).$$

Если к k -ой массе вместо силы $f_k(t)$ приложено кинематическое возбуждение $u_{k0}(t)$ аналогично тому, как показано на рис. 2.1б для механического осциллятора, число производных в правой части уравнения увеличивается на единицу. Далее в этом подразделе не будем указывать, какой именно путь и какое возбуждение имеется в виду, так как они однотипны, и рассмотрим одно общее уравнение, верное для всех этих случаев:

$$u^{(2N)}(t) + \alpha_1 u^{(2N-1)}(t) + \dots + \alpha_{2N-1} u^{(1)}(t) + \alpha_{2N} u(t) = \beta_0 f(t) + \beta_1 f^{(1)}(t) + \dots + \beta_{2N-1} f^{(2N-1)}(t), \quad (2.38)$$

где $u(t)$ означает смещение какой-либо массы, а $f(t)$ – силу или смещение основания, действующие на эту или другую массу рассматриваемой колебательной системы. Верхние индексы в круглых скобках обозначают производные по времени соответственных порядков.

Отметим основные особенности уравнения (2.38). Главная из них это то, что для всех путей передачи, т.е. для всех $u_j(t)$, левая часть дифференциального уравнения (2.38) одна и та же. Это линейный дифференциальный оператор, порядок которого равен удвоенному числу степеней свободы колебательной системы. Физически это вполне объяснимо, т.к. свободные колебания системы, описываемые однородным уравнением (2.38), определяются только внутренними параметрами системы в целом и не зависят от того, где их наблюдают или как их возбуждают. Эта особенность дает теоретическое обоснование положения о том, что по измерениям колебаний в нескольких или даже в одной точке сложной колебательной системы можно получить полную информацию о собственных частотах, потерях и некоторых других свойствах системы в целом.

Еще одна важная особенность уравнения (2.38) – это структура его правой части, которая помимо силы $f_k(t)$ или смещения основания $u_{0k}(t)$ содержит множество их производных. Наличие производных связано с тем, что, как отмечалось выше, передача колебаний по системе происходит по многим дорожкам вязко-упруго соединенных масс. Чем больше связей между массами, тем больше дорожек, соединяющих источник с точкой наблюдения и тем больше слагаемых с производными. В общем же случае число коэффициентов $\{\alpha_j\}$ дифференциального уравнения (2.38) и коэффициентов $\{\beta_j\}$ его правой части одинаково и равно удвоенному числу степеней свободы системы.

Дискретным аналогом дифференциального уравнения (2.38) является конечно-разностное уравнение типа ARMA-уравнения (2.1), у которого число авторегрессионных коэффициентов совпадает с числом коэффициентов скользящего среднего и равно удвоенному числу степеней свободы исследуемой системы:

$$x[n] + a_1 x[n-1] + a_2 x[n-2] + \dots + a_{2N} x[n-2N] = b_0 w[n] + b_1 w[n-1] + \dots + b_{2N-1} w[n-2N+1], \quad (2.39)$$

где $x[n]$ – скалярный временной ряд (в данном случае смещение какой-либо массы), $w[n]$ – внешнее возбуждение. Число ненулевых коэффициентов скользящего среднего в случае силового возбуждения равно $2N - 1$, т.е. на единицу меньше. Результаты (2.38), (2.39) для силового возбуждения были получены другим методом в работе [97].

Найдем связь между коэффициентами $\{\alpha_j, \beta_j\}$ дифференциального уравнения (2.38) и коэффициентами $\{a_k, b_k\}$ ARMA-уравнения (2.39). Однородное непрерывное уравнение (2.38) имеет $2N$ независимых решений вида

$$u_1(t) = e^{\lambda_1 t}, \quad \dots, \quad u_{2N}(t) = e^{\lambda_{2N} t}, \quad (2.40)$$

где λ_k – это корни характеристического уравнения

$$\lambda^{2N} + \sum_{k=1}^{2N} \alpha_k \lambda^{2N-k} = 0. \quad (2.41)$$

Так как коэффициенты этого уравнения действительны, то все его мнимые и комплексные корни состоят из сопряженных пар.

Однородное ARMA-уравнение (2.39) также имеет $2N$ независимых решений вида [92]:

$$x_1[n] = (x_1)^n, \quad \dots, \quad x_{2N}[n] = (x_{2N})^n, \quad (2.42)$$

где x_k – это корни характеристического уравнения

$$x^{2N} + \sum_{m=1}^{2N} a_m x^{2N-m} = 0. \quad (2.43)$$

Приравнивая ряды (2.42) и временные ряды, полученные дискретизацией непрерывных решений (2.40), $u_k(nT) = x_k[n]$, $k=1, 2, \dots, 2N$, найдем аналитическую связь между корнями характеристических уравнений (2.41) и (2.43)

$$x_k = e^{\lambda_k T}, \quad k=1, \dots, 2N. \quad (2.44)$$

А так как коэффициенты характеристических уравнений равны коэффициентам $\{\alpha_k\}$, $\{a_k\}$ уравнений (2.38) и (2.39) и, по теореме Виета, аналитически выражаются через корни этих уравнений, то соотношения (2.44) позволяют установить следующую связь между коэффициентами $\{\alpha_k\}$ и $\{a_k\}$. Если известно уравнение (2.38) и, следовательно, известны его коэффициенты $\{\alpha_k\}$ и корни $\{\lambda_k\}$, то авторегрессионные коэффициенты $\{a_k\}$ выражаются через них как

$$\begin{aligned}
a_1 &= -(x_1 + x_2 + \dots + x_{2N}) = e^{\lambda_1 T} + e^{\lambda_2 T} + \dots + e^{\lambda_{2N} T}, \\
a_2 &= x_1 x_2 + x_1 x_3 + \dots + x_{2N-1} x_{2N} = e^{(\lambda_1 + \lambda_2) T} + \dots + e^{(\lambda_{2N-1} + \lambda_{2N}) T}, \\
&\dots \\
a_{2N} &= \prod_{k=1}^{2N} x_k = e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{2N}) T} = e^{-a_1 T}.
\end{aligned} \tag{2.45}$$

Обратно, если известно ARMA-уравнение (2.39) и, соответственно, известны коэффициенты a_k и корни x_k , то коэффициенты дифференциального уравнения (2.38) равны

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= -(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{2N}) = -\frac{1}{T} \ln(x_1 x_2 \dots x_{2N}) = -\frac{1}{T} \ln(a_{2N}), \\
\alpha_2 &= \frac{1}{T^2} [\ln(x_1) \ln(x_2) + \dots + \ln(x_{2N-1}) \ln(x_{2N})], \\
&\dots \\
\alpha_{2N} &= \frac{1}{T^{2N}} \prod_{k=1}^{2N} \ln(x_k).
\end{aligned} \tag{2.46}$$

Связь коэффициентов (2.45) и (2.46), очевидно, неявная и выражена через корни характеристических уравнений $\{\lambda_k\}$ и $\{x_k\}$, которые между собой связаны функционально в (2.44). Но если удастся корни исключить из уравнений (2.44), (2.45) и (2.46), то связь становится явной как, например, в случае механического осциллятора – см. (2.18) и (2.19).

Связь между правыми частями уравнений (2.38) и (2.39) получим, как и в случае механического осциллятора, приравняв их импульсные передаточные функции. Импульсную функцию для непрерывного случая получим, применив преобразование Фурье к уравнению (2.38), положив в нем в качестве внешнего воздействия дельта функцию Дирака, $f(t) = \delta(t)$. Прямое Фурье-преобразование дает следующую частотную характеристику системы

$$H(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \frac{\beta_0 + \beta_1 \lambda + \dots + \beta_{2N-1} \lambda^{2N-1}}{\lambda^{2N} + \alpha_1 \lambda^{2N-1} + \dots + \alpha_{2N}} = \frac{1}{2\pi} \frac{B(\lambda)}{A(\lambda)}, \quad \lambda = i\omega, \tag{2.47}$$

представленную в виде отношения двух полиномов от частоты. Вычисление вычетами обратного Фурье-преобразования после подстановки $t = nT$ дает искомую импульсную передаточную функцию, дискретизированную по времени

$$h[n] = h(nT) = \sum_{k=1}^{2N} \frac{B(\lambda_k)}{\frac{dA(\lambda_k)}{d\lambda}} e^{\lambda_k T n}, \tag{2.48}$$

где λ_k – это корни характеристического уравнения (2.41).

Импульсную функцию для дискретного случая получим, применив z -преобразование к ARMA-уравнению (2.39), в котором в качестве внешнего возбуждения использована дельта-последовательность Кронекера (2.3). Прямое z -преобразование дает частотную характеристику системы

$$H_d(z) = z \frac{b_0 z^{2N-1} + b_1 z^{2N-2} + \dots + b_{2N-1}}{z^{2N} + a_1 z^{2N-1} + \dots + a_{2N}} = z \frac{Q(z)}{P(z)}, \quad z = e^{i\omega T}, \quad (2.49)$$

которая, как и (2.47), представлена в виде отношения двух полиномов с той лишь разницей, что в (2.49) переменной полиномов является экспоненциальная функция $\exp(i\omega T)$, периодическая с частотой дискретизации $\Omega = 2\pi/T$. Вычисление вычетами обратного z -преобразования (см. Приложение В) дает искомую импульсную передаточную функцию в виде временного ряда

$$h_d[n] = \sum_{k=1}^{2N} \frac{Q(z_k)}{P'(z_k)} z_k^n, \quad (2.50)$$

где z_k – корни характеристического уравнения (2.43), совпадающие со значениями x_k , штрих означает производную по z .

По принятому условию, временные ряды (2.48) и (2.50) должны совпадать, и равенство

$$h(nT) = h_d[n] \quad (2.51)$$

должно выполняться при любых n . Выше уже была установлена связь (2.44) между корнями характеристических уравнений (2.41) и (2.43), а также связь (2.46), (2.47) между коэффициентами дифференциального уравнения (2.38) и авторегрессионными коэффициентами уравнения (2.39). Поэтому все эти величины будем считать известными, а равенство (2.51) используем для установления прямой связи между коэффициентами $\{\beta_k\}$ и $\{b_k\}$ в правых частях уравнений (2.38) и (2.39). Поскольку число этих коэффициентов равно $2N$, то, положив число n в (2.51) равным $2N$ независимым значениям, например, $n = 1, 2, \dots, 2N$, получим систему $2N$ алгебраических линейных уравнений, которая устанавливает требуемую связь между векторами коэффициентов $\mathbf{\beta} = [\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{2N-1}]^T$ и $\mathbf{b} = [b_0, b_1, \dots, b_{2N-1}]^T$:

$$R\mathbf{\beta} = S\mathbf{b}, \quad (2.52)$$

где элементы $2N \times 2N$ матриц R и S равны $R_{nm} = \sum_{k=1}^{2N} \frac{\lambda_k^{m-1} e^{\lambda_k T(n-1)}}{A'(\lambda_k)}$ и $S_{nm} = \sum_{k=1}^{2N} \frac{z_k^{2N+n-m-1}}{P'(z_k)}$, $z_k = e^{\lambda_k T}$.

Если известны коэффициенты β , т.е. известно дифференциальное уравнение (2.38), то коэффициенты $\mathbf{b}$ скользящего среднего в ARMA-уравнении (2.39) равны $\mathbf{b} = S^{-1}R\beta$, и наоборот.

В частности, для механического осциллятора $N = 1$ имеем:

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{e^{\lambda_1 T} - e^{\lambda_2 T}}{\lambda_1 - \lambda_2} & \frac{\lambda_1 e^{\lambda_1 T} - \lambda_2 e^{\lambda_2 T}}{\lambda_1 - \lambda_2} \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ e^{\lambda_1 T} + e^{\lambda_2 T} & 1 \end{bmatrix}, \quad (2.53)$$

где $\lambda_{1,2}$ даны в (2.9). Нетрудно проверить, что соотношение (2.52) с матрицами (2.53) верны как для силового (вектор $\beta = [0, \quad 1/m]^T$ дан в (2.7a); $\mathbf{b}$ даны в (2.24a)), так и для кинематического возбуждения ($\beta = [\omega_0^2, \quad 2\gamma]^T = [\lambda_1 \lambda_2, \quad -(\lambda_1 + \lambda_2)]^T$ дан в (2.7b); $\mathbf{b}$ дан в (2.24b)).

Результаты Главы 2

Основным результатом Главы 2 является установленное взаимно обозначенное соответствие между непрерывными и дискретными моделями, описывающими временные зависимости для колебаний линейных систем с N степенями свободы. Получены аналитические связи между коэффициентами дифференциальных уравнений, их решениями и спектрами непрерывных моделей и коэффициентами конечноразностных уравнений, их решениями и спектрами дискретных моделей. В качестве критерия эквивалентности дискретных и непрерывных моделей предложено использовать равенство их колебаний в дискретные моменты времени. Подробно исследованы два типа моделей: SS-модель, т.е. модель в пространстве состояний (Space State model), и модель черного ящика, т.е. в виде фильтра с одним входом и одним выходом. Дискретный вариант модели черного ящика используется в качестве рабочей модели исследуемой системы предложенного в диссертации экспериментального метода определения потерь.

Следующие результаты Главы 2 являются новыми:

- Показана некорректность применения к акустическим задачам метода построения дискретных моделей по известным непрерывным моделям с помощью простой замены производных конечными разностями.
- Вместо этого предложен критерий эквивалентности непрерывных и дискретных моделей, основанный на равенстве колебаний в дискретные моменты времени.

- Все изложенные в Главе 2 соотношения между непрерывными и дискретными моделями, относящиеся к системам с N степенями свободы с кинематическим возбуждением, получены впервые и опубликованы в статье [A2].

ГЛАВА 3

Описание предложенного экспериментального метода определения потерь

Введение

В этой главе приведены теоретическое обоснование и описание основных положений разработанного экспериментального метода определения коэффициента потерь в колебательных системах. Он основан на построении по данным измерений рабочей математической модели системы и на последующем вычислении ее коэффициентов потерь и собственных частот по найденным модельным параметрам. Как и в других методах, например, в экспериментальном модальном анализе, потери здесь определяются только на собственных частотах, т.е. находятся только их максимальные значения. Параллельно вычисляются собственные частоты системы без потерь.

3.1 Рабочая модель колебательной системы и обоснование метода

В качестве математической модели исследуемой линейной колебательной системы в предлагаемом методе выбрана известная дискретная по времени модель типа ARMA, т.е. авторегрессионная модель скользящего среднего (Auto Regressive model of Moving Average). Основным достоинством этой параметрической модели, определившим ее выбор в качестве рабочей модели метода, является линейная зависимость колебаний системы, например, ее смещений, от модельных параметров – свойство, которое существенно облегчает построение модели по данным измерения – см. далее п. 3.3. В работе используется простейший (скалярный) вариант ARMA-модели, который описывает произвольную линейную колебательную систему с конечным числом степеней свободы и с одним входом и одним выходом – см. п. 2.3.3 Главы 2. Модель записывается в следующем стандартном виде

$$u[n] + \sum_{p=1}^P a_p u[n-p] = \sum_{q=0}^{Q-1} b_q w[n-q], \quad (3.1)$$

где $u[n]$ – подлежащая определению скалярная величина, например, смещение на выходе системы; $w[n]$ – заданное входное воздействие, силовое или кинематическое; квадратные скобки указывают на принадлежность временному ряду, т.е. на значение функций u и w в дискретные моменты времени $t = nT$, где T – интервал дискретизации, например, $u[n] = u(nT)$; n, p, q, P и Q – целые числа. Коэффициенты a_p и b_q конечно-разностного уравнения являются параметрами модели, а пара чисел (P, Q) является порядком модели.

ARMA-модель является комбинацией двух других моделей – авто-регрессионной AR-модели, описываемой левой частью уравнения (3.1), и MA-модели скользящего среднего, описываемой правой частью (3.1). Каждая из этих двух моделей является самодостаточной и может отдельно использоваться для полного описания колебательной системы. Соответственно, любая AR-модель может быть представлена некоторой эквивалентной MA-моделью и наоборот. Их недостатком является то, что при отдельном использовании требуются очень большие порядки, чаще всего бесконечные. В то же время применение комбинированной ARMA-модели дает возможность существенно уменьшить общий порядок модели и таким образом значительно упростить анализ колебательной системы. Платой за это упрощение является неоднозначность выбора оптимального порядка ARMA-модели и необходимость использовать для этой цели какой-либо независимый критерий адекватности модели – см. далее п. 3.3.

Покажем, что ARMA-модель (3.1) непосредственно, т.е. без каких-либо упрощающих допущений и, следовательно, без потери точности модели выводится из конечно-элементной модели (2.27) и, следовательно, имеет такие же модальные параметры – собственные частоты и коэффициент потерь. Доказательство этого положения основано на двух теоретических результатах главы 2 настоящей диссертации, которые ниже приводятся без доказательства.

Первый результат состоит в том, что если при возбуждении k -ой массы системы (2.27) силой $f_k(t)$, внешней или вызванной колебаниями опор, рассмотреть отклик (смещение) j -ой массы $u_j(t)$, то они оказываются связанными следующим обыкновенным дифференциальным уравнением:

$$\left(\partial^{2N} + \sum_{l=1}^{2N} \alpha_l \partial^{2N-l} \right) x_j(t) = \sum_{m=0}^{2N-1} \beta_m \partial^m f_k(t), \quad (3.2)$$

в котором введено обозначение $\partial = \partial/\partial t$, а коэффициенты α_l и β_m являются функциями материальных параметров системы, т.е. коэффициентов уравнений (2.27). При смене индексов $j, k \in \{1, 2, \dots, N\}$ левая часть уравнения (3.2) остается неизменной, а изменяются только коэффициенты β_m в правой части. При переходе в частотную область ($\partial = i\omega$) левая часть уравнения (3.2) в точности совпадает с характеристическим (частотным) уравнением конечно-элементной системы (2.27). Следовательно, уравнение (3.2), независимо от значения индексов j и k , описывает все $2N$ комплексных собственных частот рассматриваемой колебательной системы.

Второй теоретический результат главы 2 диссертации состоит в построении конечно-разностного уравнения типа ARMA, эквивалентного непрерывному уравнению (3.2). Эквивалентность уравнений означает, что все их решения для свободных и вынужденных

колебаний совпадают для всех дискретных моментов времени. Таким конечно-разностным уравнением, как было показано, является как раз ARMA-уравнение (3.1), порядок которого совпадает с порядком непрерывного уравнения (3.2) и равен удвоенному числу степеней свободы колебательной системы

$$P = Q = 2N. \quad (3.3)$$

При этом корни так называемого z -характеристического уравнения для конечно-разностного уравнения (3.1) связаны с корнями частотных характеристических уравнений для непрерывных уравнений (2.27) и (3.2) следующими простыми соотношениями

$$z_k = e^{i\omega_k T}, \quad k = 1, 2, \dots, 2N. \quad (3.4)$$

Кроме того, между коэффициентами уравнений (3.1) и (3.2) найдены аналитические соотношения, позволяющие легко переходить от непрерывного уравнения к дискретному и наоборот. Таким образом, доказано, что для экспериментального измерения собственных частот и коэффициентов потерь произвольной линейной колебательной системы с конечным числом N степеней свободы достаточно измерить отклик какой-либо одной массы на действие одной внешней силы и по данным измерения построить ARMA-модель (3.1).

Результат (3.3) полезен для аналитических исследований систем с небольшим числом степеней свободы, когда исследуемый рабочий диапазон частот содержит все собственные частоты системы и весь спектр внешних воздействий и когда число степеней свободы известно. На практике колебательные системы непрерывны и сложны, а их конечно-элементные модели имеют, как правило, огромное число степеней свободы. Для них прямое использование результатов (3.1) – (3.3) слишком громоздко и нецелесообразно. Поэтому в этом случае предлагаемый метод предусматривает использование частотной декомпозиции, когда широкий диапазон собственных частот системы разбивается на два или несколько поддиапазонов и для каждого из них проводится свой тестовый эксперимент и строится своя отдельная ARMA-модель.

Рассмотрим, например, распространенный на практике случай, когда известно, что исследуемая сложная система в обычных эксплуатационных условиях работы совершает колебания на частотах ниже некоторой граничной частоты ω_b , или, иначе говоря, когда естественные источники вибраций возбуждают в системе не все N собственных частот, а только часть из них, $N_1 < N$. Естественно в этом случае рассмотреть отдельно поддиапазон $\omega < \omega_b$, выбрав его в качестве рабочего диапазона частот метода. Тогда, заменив в полной ARMA-модели системы AR-параметры мод, не входящих в рабочий диапазон частот, МА-

параметрами (а их, как известно, бесконечное число, см., например, [65]), получим, что система в рассматриваемом частотном поддиапазоне описывается ARMA-моделью (3.1), имеющей порядок

$$P = 2N_1, \quad Q \rightarrow \infty. \quad (3.5)$$

В ней, как и в полной модели системы (3.3), число AR-коэффициентов a_p равно удвоенному числу «рабочих» степеней свободы, но число MA-коэффициентов b_q , которые учитывают влияние исключенных из рабочего диапазона $N - N_1$ мод, остается неизвестным и должно определяться независимо.

Таким образом, доказано, что задача экспериментального определения потерь сводится к построению ARMA-модели (3.1) также и в случае, когда рассматривается неполная модель системы в ограниченном частотном диапазоне. Что касается порядка ARMA-модели, то, учитывая отмеченную выше его принципиальную неоднозначность, приведенные теоретические значения (3.3) и (3.5) следует считать ориентировочными, а оптимальные значения порядка в методе предлагается находить в окрестности теоретических значений с помощью изложенного далее энергетического критерия адекватности модели.

3.2 Выбор порядка ARMA-модели, энергетический критерий EC

Энергетический критерий адекватности моделей EC был предложен в работе [A2] для решения «проблемы порядка» в акустических задачах. В отличие от большинства существующих аналогичных критериев, например, критерия Акаике AIC, критерия Байеса BIC и других [42], основанных на оценке количества информации в сигналах или на прогностической способности моделей, критерий EC оценивает адекватность модели по близости мощности ее колебаний к мощности колебаний моделируемой системы. Как показал опыт работы с этим критерием, чем меньше значение EC для данной ARMA-модели, т.е. чем лучше она аппроксимирует мощность колебаний системы, тем, как правило, точнее предлагаемый метод измеряет собственные частоты и модальные коэффициенты потерь.

Энергетический критерий определяется как относительная разность мощностей реального сигнала и сигнала на выходе ARMA-модели

$$EC = \frac{\int |\text{PSD}_{\text{system}} - \text{PSD}_{\text{model}}| d\omega}{\int \text{PSD}_{\text{system}} d\omega} \quad (3.6)$$

Здесь PSD – это спектральная плотность мощности (Power Spectral Density). Интегрирование производится по рабочему диапазону частот метода. Как видно из (3.6), критерий EC — это

положительная величина, принимающая близкие к нулю значения, когда модель адекватна: чем меньше EC , тем лучше модель.

В качестве примера на рис. 3.1 изображен типичный график критерия EC для одной из линейных систем с тремя степенями свободы, построенный для различных значений порядка (P, Q) ее ARMA-модели: на рис. 3.1а для большого числа возможных порядков, чтобы проиллюстрировать общие свойства критерия, а на рис. 3.1б для небольшого их числа, близких к теоретическому значению (3.3), для удобства выбора одного (оптимального) значения порядка.

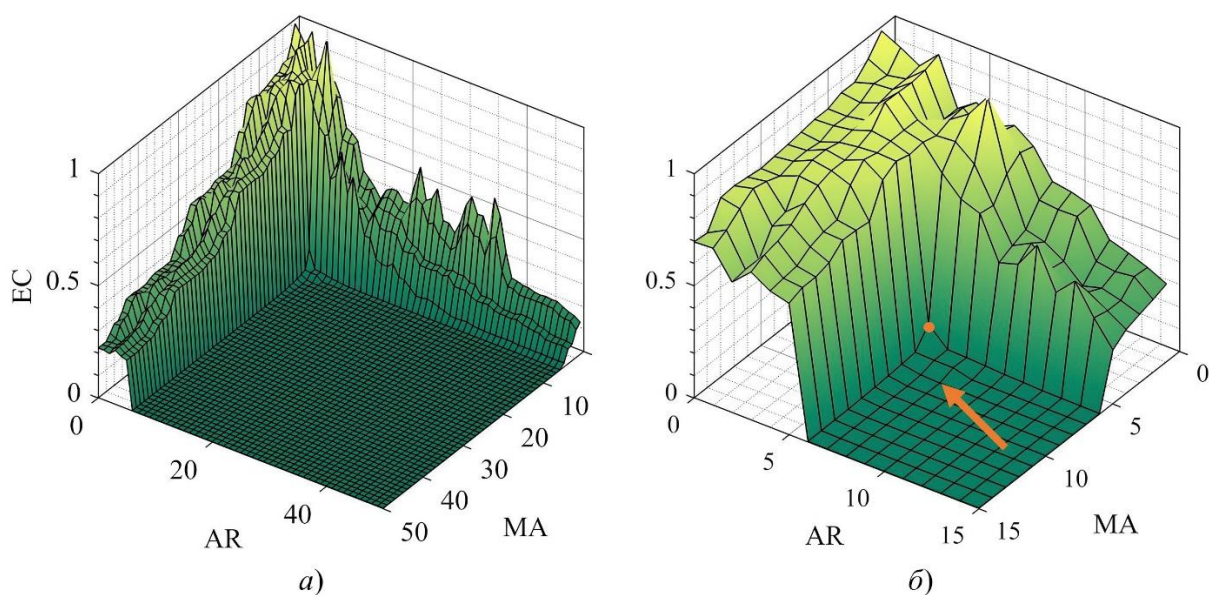


Рис. 3.1 Графики энергетического критерия (а) для больших значений порядка модели и (б) в окрестности теоретического значения (3.3), отмеченного точкой. Стрелкой указано оптимальное значение модели.

Как видно из рис. 3.1а, EC имеет большие значения близкие к единице при малых значениях порядка P и Q , не превышающих теоретическое значение (3.3). При увеличении порядка значение EC сначала резко уменьшается в районе значений (3.3), а затем выходит на широкое плато с постоянным значением $EC = 0.0031$, равным абсолютной ошибке вычисления EC , определяемой в основном точностью вычисления PSD в (3.6). На рис. 3.1а можно также видеть тенденцию к монотонному убыванию EC , когда один из показателей порядка P или Q увеличивается, а другой остается постоянным.

На рис. 3.1б также хорошо видно, что теоретическое значение порядка (3.3) не является наилучшим, т.к. $EC(6, 6) = 0.107$, что значительно превышает значение EC на плато и, как следствие, ошибка определения коэффициента потерь здесь оказывается сравнительно большой, в среднем $\sim 20\%$. Оптимальным значением порядка модели в этом и подобных

случаях предлагается считать порядок, который лежит на плато в непосредственной близости к теоретическому значению. В данном случае был выбран порядок (8, 8). Для него критерий равен $EC(8, 8) = 0.0031$, а ошибка определения коэффициентов потерь снизилась до 0.1 %.

Здесь важно заметить, что выбранная как оптимальная ARMA-модель в данном случае описывает колебательную систему с четырьмя степенями свободы, вместо реальных трех. Однако, анализ показывает, что две из восьми собственных частот здесь оказываются чисто мнимыми и соответствуют локальному чисто экспоненциальному движению модели, не являющемуся колебательным. В то же время, остальные три пары комплексно-сопряженных собственных частот, соответствующих трем колебательным степеням свободы и, соответственно, их модальные коэффициенты потерь вычисляются за счет этого с заметно более высокой точностью. Таким образом, энергетический критерий допускает использование в оптимальной ARMA-модели дополнительных колебательных степеней свободы для компенсации модальной неточности ARMA-моделей, не нарушая при этом общей колебательной структуры исследуемой колебательной системы.

3.3 Построение ARMA-модели по данным измерения

После того, как выбран рабочий диапазон частот и определен необходимый порядок ARMA-модели (3.1), требуется найти ее параметры, т.е. коэффициенты a_p , b_q , используя данные экспериментальных измерений. Эксперимент в предлагаемом методе проводится традиционными для акустики средствами возбуждения и измерения и мало отличается, например, от тестовых экспериментов модального анализа. Места на исследуемой системе для установки источников колебаний и датчиков для их измерения, а также форма сигналов возбуждения, выбираются такими, чтобы в измеряемых откликах присутствовали все моды рабочего диапазона частот с амплитудами, удобными для анализа – см., например, [43]. В численных и лабораторных экспериментах, результаты которых приведены в диссертации, в качестве возбуждения использовались случайные сигналы со спектральной плотностью мощности, равномерно распределенной в рабочем диапазоне частот и равной нулю вне его. Практически такие сигналы формировались с помощью фильтрации белого шума.

В качестве данных измерения, необходимых для построения ARMA-модели, использовались два синхронно записанных случайных дискретно-временных сигнала $w[m]$ и $u[m]$, $m = 1, 2, \dots, M$, где число отсчетов M выбиралось достаточным для усреднения расчетов спектральных характеристик, а интервал дискретизации T назначался в соответствии с теоремой отсчетов Котельникова [91]. Подставляя эти дискретные функции в уравнение (3.1) последовательно для каждого $n = l, l+1, \dots, M$, начиная с некоторого отсчета l , превышающего

P и $Q-1$, можно получить систему $M-l+1$ линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных параметров модели. Представив эту систему в векторном виде

$$\mathbf{u} = Z\boldsymbol{\theta}, \quad (3.7)$$

где $\boldsymbol{\theta} = [a_1, a_2, \dots, a_p, b_0, b_1, \dots, b_{Q-1}]^T$ – это $(P+Q)$ –вектор искомых коэффициентов уравнения (3.1), $\mathbf{u} = [u[l], u[l+1], \dots, u[M]]^T$ – это $(M-l+1)$ –вектор измеренных временных отсчетов отклика исследуемой системы, Z – это $(M-l+1) \times (P+Q)$ –матрица, равная

$$Z = \begin{bmatrix} -u[l-1] & -u[l-2] & \vdots & -u[l-P] & w[l] & w[l-1] & \vdots & w[l-Q+1] \\ -u[l] & -u[l-1] & \vdots & -u[l-P+1] & w[l+1] & w[l] & \vdots & w[l-Q+2] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -u[M-1] & -u[M-2] & \vdots & -u[M-P] & w[M] & w[M-1] & \vdots & w[M-Q+1] \end{bmatrix}.$$

Минимизируя квадратичную невязку системы (3.7), равную

$$J = (\mathbf{u}^T - \boldsymbol{\theta}^T Z^T)^T (\mathbf{u} - Z\boldsymbol{\theta}),$$

из условия $\partial J / \partial \boldsymbol{\theta}^T = 0$, получим искомое решение в виде

$$\boldsymbol{\theta} = (Z^T Z)^{-1} Z^T \mathbf{u}. \quad (3.8)$$

Как нетрудно видеть, здесь все элементы квадратной матрица $Z^T Z$ порядка $P+Q$ и $(P+Q)$ –вектора $Z^T \mathbf{u}$ выражаются через авто- и кросс-корреляционные функции экспериментальных сигналов $u[m]$ и $w[m]$ для различных задержек времени. Решение (3.8) является одним из возможных обобщений известного решения Юла-Уолкера [65] на произвольные внешние воздействия $w[m]$. Отметим, что поскольку все данные измерений действительны, то из (3.8) следует, что и все параметры ARMA-модели также являются действительными величинами.

3.4 Нахождение собственных частот и коэффициентов потерь

В предлагаемом методе вычисления собственных частот и коэффициентов потерь исследуемой колебательной системы производится по построенной выше ARMA-модели в два этапа: сначала находятся решения однородного конечно-разностного уравнения (3.1), т.е. определяется z -спектр свободных колебаний системы, а затем, пользуясь ранее установленной аналитической связью с решениями непрерывных уравнений, вычисляются комплексные собственные частоты Фурье системы и, соответственно, ее коэффициенты потерь.

Разыскивая решение однородного ($w = 0$) уравнения (3.1) в стандартном виде $u[n] = z^n$, получим, что оно имеет P независимых решений, в которых значения z являются корнями z -характеристического уравнения в форме полинома

$$z^P + a_1 z^{P-1} + \dots + a_{P-1} z + a_P = 0. \quad (3.9)$$

Так как все коэффициенты a_p действительны, то, в силу основной теоремы алгебры, корнями этого полинома могут быть либо действительные числа, либо пары комплексно-сопряженных чисел. Действительные корни, как отмечалось выше, отвечают чисто мнимым частотам и не создают отдельных колебательных мод. Реальные колебательные моды любой линейной системы создаются только парами комплексно-сопряженных корней характеристических уравнений типа (3.9), которые только и следует учитывать при расчете модальных параметров.

Пусть, например, числа z_k и $\bar{z}_k$ (черта сверху означает комплексное сопряжение) является такой парой для уравнения (3.9). Тогда, как можно показать с помощью соотношения (3.4), эта пара описывает реальную колебательную моду, имеющую модальную частоту ω_{0k} , т.е. собственную частоту рассматриваемой недемпфированной системы, и ее модальный (максимальный) коэффициент потерь η_k , равные

$$\begin{aligned} \omega_{0k} &= \frac{1}{T} \sqrt{\ln(z_k) \ln(\bar{z}_k)}, \\ \eta_k &= -\frac{1}{\omega_{0k} T} \ln(z_k \bar{z}_k). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Число пар комплексно-сопряженных корней z -характеристического уравнения (3.9) должно, в соответствии с теорией – см. (3.5), точно совпадать с числом «рабочих» колебательных мод и степеней свободы исследуемой системы в выбранной рабочей полосе частот. Отметим, что с вычислительной точки зрения корни уравнения (3.9) удобнее находить как собственные значения так называемой сопровождающей (companion) матрицы

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & \vdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 1 \\ -a_P & -a_{P-1} & \vdots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}.$$

В заключение данного пункта напомним, что используемая в методе «чистая» ARMA-модель (3.1) с одним MA-входом и одним AR-выходом является составной частью ряда более сложных моделей, которые широко применяются в современной теории управления, идентификации динамических систем, эконометрике и других разделах науки, для расчета

которых в Matlab создан целый раздел стандартных программ System Identification Toolbox. Все дело в том, что со временем появилось множество новых задач, и для удобства в отдельных отраслях данную модель стали дифференцировать: в результате в ряде источников часть скользящего среднего уже не рассматривается как явный способ учета внешних факторов, а используется для описания влияния случайных возмущений. Поэтому некоторые, но далеко не все, результаты данной диссертационной работы, полученные с использованием написанных автором специальных программ, в принципе, могут быть найдены с помощью функций Matlab. Таков, например, результат (3.8), который интегрирован в стандартные программы, предназначенные для идентификации параметров моделей ARX и ARMAX [98, 99].

3.5 Нахождение спектральной плотности мощности с помощью параметров ARMA-модели

В этом разделе приведены выражения для нахождения спектральной плотности мощности (СПМ), которые учитывают специфику задачи.

Рассмотрим безразмерное дискретное преобразование Фурье (ДПФ):

$$\begin{cases} X[k] = \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-\frac{i2\pi}{N}kn}, & k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (\text{прямое}) \\ x[n] = \frac{1}{\Delta t \cdot N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{\frac{i2\pi}{N}kn}, & n = 0, 1, \dots, N-1. \quad (\text{обратное}) \end{cases}$$

или в безразмерном виде:

$$\begin{cases} X[k'] = \sum_{n'=1}^N x[n'] e^{-\frac{i2\pi}{N}(k'-1)(n'-1)}, & k' = 1, 2, \dots, N. \quad (\text{прямое}) \\ x[n'] = \frac{1}{N} \sum_{k'=1}^N X[k'] e^{\frac{i2\pi}{N}(k'-1)(n'-1)}, & n' = 1, 2, \dots, N. \quad (\text{обратное}) \end{cases}$$

У ДПФ имеются два важных свойства:

Запаздывание

$$x[n-m] \rightarrow S_x[k] e^{-\frac{i2\pi}{N}km};$$

Смещение

$$S_x[k-m] \rightarrow x[n] e^{\frac{i2\pi}{N}mn}.$$

Перепишем свойства в более привычных для непрерывного преобразования Фурье обозначениях ($T = 1/Fs$ — это временной интервал дискретизации в [с], $t_{\text{зап}} = T \cdot N$ — это

длина рассматриваемого сигнала, $\Delta f = \frac{1}{t_{\text{зап}}} = \frac{1}{T \cdot N} = \frac{Fs}{N}$ – интервал частотной дискретизации в [Гц]):

$$\text{Запаздывание} \\ x[n-m] \rightarrow S_x[k] e^{-i2\pi f_k m T}.$$

Возьмем в качестве простого примера ARMA–модель порядка $\{2, 2\}$:

$$x[n] = -a_1 x[n-1] - a_2 x[n-2] + b_0 w[n] + b_1 w[n-1],$$

которую можем записать в следующем векторном виде:

$$\mathbf{v}_x[N] = -a_1 \mathbf{v}_x[N-1] - a_2 \mathbf{v}_x[N-2] + b_0 \mathbf{v}_w[N] + b_1 \mathbf{v}_w[N-1],$$

где

$$\mathbf{v}_x[N] = \begin{bmatrix} x[3] \\ x[4] \\ \vdots \\ x[N] \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_x[N-2] = \begin{bmatrix} x[1] \\ x[2] \\ \vdots \\ x[N-2] \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_w[N] = \begin{bmatrix} w[3] \\ w[4] \\ \vdots \\ w[N] \end{bmatrix}.$$

Взяв от левой и правой частей ДПФ по каждому слагаемому и используя свойство запаздывания

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_x[N] &\longleftrightarrow S[k] \\ \mathbf{v}_x[N-1] &\longleftrightarrow S[k] e^{-i2\pi f_k T} \\ \mathbf{v}_x[N-2] &\longleftrightarrow S[k] e^{-i2\pi f_k 2T} \end{aligned} \quad \begin{aligned} \mathbf{v}_w[N] &\longleftrightarrow W[k] \\ \mathbf{v}_w[N-1] &\longleftrightarrow W[k] e^{-i2\pi f_k T} \end{aligned}$$

получаем ДПФ входа $w[n]$ и выхода $x[n]$ системы:

$$S[k] \cdot (1 + a_1 e^{i2\pi f_k T} + a_2 e^{i2\pi f_k 2T}) = W[k] (b_0 + b_1 e^{i2\pi f_k T}). \quad (3.11)$$

Спектральная плотность мощности P пропорциональна квадрату модуля спектра СПМ $_{h(t)} \cong H(\omega) \cdot H^*(\omega)$. Исходя из чего, получаем:

$$P_{\text{ARMA}}[k] = P_w[k] \frac{|b_0 + b_1 e^{-i2\pi f_k T}|^2}{|1 + a_1 e^{-i2\pi f_k T} + a_2 e^{-i2\pi f_k 2T}|^2} \quad (3.12)$$

Если в качестве возбуждающего сигнала $w[n]$ берется белый шум с нулевым средним значением и дисперсией ρ_w , то амплитуда СПМ такого сигнала будет пропорциональна его дисперсии, деленной на полосу спектра, т.е. на $2Fs$:

$$P_{\text{ARMA}}[k] = \frac{\rho_w}{2Fs} \frac{|b_0 + b_1 e^{i2\pi f_k T}|^2}{|1 + a_1 e^{i2\pi f_k T} + a_2 e^{i2\pi f_k 2T}|^2} \quad (3.13)$$

Если же мы берется белый шум, фильтрованный в полосе частот, ширина которой определяется по $2 \times \Delta f_{\text{полоса}}$, то

$$P_{\text{ARMA}}[k] = \frac{\rho_w}{2\Delta f_{\text{полоса}}} \frac{|b_0 + b_1 e^{i2\pi f_k T}|^2}{|1 + a_1 e^{i2\pi f_k T} + a_2 e^{i2\pi f_k 2T}|^2}. \quad (3.14)$$

Причем P_{ARMA} будет равна нулю вне полосы фильтрации возбуждающего сигнала.

При рассмотрении любых других более сложных моделей в выражениях (3.11) – (3.14) появятся отношения полиномов по AR– и MA–коэффициентам, так что выражения примут следующий вид:

$$\begin{aligned} P_{\text{ARMA}}(f) &= \frac{\rho_w}{2\Delta f_{\text{полоса}}} \frac{|B(f)|^2}{|A(f)|^2}; \\ A(f) &= 1 + \sum_{k=1}^p a_k e^{-i2\pi f k T}; \\ B(f) &= \sum_{k=0}^{q-1} b_k e^{-i2\pi f k T}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Отметим, что во многих программных пакетах СПМ по умолчанию считается только для положительных частот. Формулы выше приведены для двухсторонней СПМ, из-за чего содержат множитель $1/2$.

Заключение к Главе 3

Новизна и законченность предложенного нового метода измерения потерь является следствием гармонического объединения двух его основных составляющих – ARMA-модели и энергетического критерия ее адекватности. ARMA-модель, благодаря универсальности и простоте своего построения по данным измерения, обеспечивает практически неограниченную область применимости метода, а энергетический критерий обеспечивает

решение «проблемы порядка» и контроль точности метода. Важную роль в этой связке играет и теория, разработанная в Главе 2 диссертации. Результатом явились необычно высокие свойства метода, которые изложены в следующей главе настоящей диссертации.

ГЛАВА 4

Основные свойства метода: численные эксперименты

Введение

В данной главе приведены результаты исследования некоторых ключевых свойств предложенного метода, касающихся различных аспектов его области применимости и точности. Исследование проведено в нескольких численных экспериментах, проведенных на простых колебательных системах, для которых были заданы их модальные модели. По этим моделям были сконструированы искусственные входные и выходные «экспериментальные» случайные сигналы, по которым изложенным выше методом были построены ARMA-модели и определены модальные параметры – частоты и коэффициенты потерь систем. По результатам сравнения этих параметров с первоначально заданными точными их значениями сделаны выводы о наличии того или иного свойства метода. Все численные эксперименты проводились в среде Matlab.

4.1 Схема построения искусственных сигналов

Модальные модели исследуемых систем представлялись в виде частотных характеристик типа (1.17) или (2.13), то есть в виде частотных откликов смещения, скорости или ускорения одной из масс систем на действие внешней силы, приложенной к той же или другой массе или на кинематическое возбуждение. Сигнал возбуждения, который в методе является входным сигналом $w[n]$, формировался с помощью пропускания белого шума через полосовой фильтр с равномерной характеристикой, которая соответствовала выбранному рабочему диапазону частот метода. Наконец, выходной сигнал $u[n]$ метода строился путем последовательного применения ко входному случайному сигналу следующих трех операций – прямого БПФ, умножения его на частотную характеристику отклика и обратного БПФ. Полученные таким образом входной и выходной сигналы имитировали «данные измерения», которые далее использовались предлагаемым методом для построения ARMA-моделей и определения модальных параметров.

4.2 Широкая область применимости

Цель описываемого ниже численного эксперимента 1, проведенного на простейшей колебательной системой с одной степенью свободы – механическом осцилляторе, показать, что предлагаемым методом можно измерять с высокой точностью:

- любое допустимое значение коэффициента потерь ($0 < \eta < 2$),

- при любом возбуждении – силовом или кинематическом,
- при любом измеряемом отклике системы – смещении, скорости или ускорении.

Пусть имеется механический осциллятор с материальными параметрами $\{m, c, k\}$ и модальными параметрами $\{\omega_0, \eta\}$, где $\omega_0 = 2\pi f_0 = (k/m)^{1/2}$, $f_0 = 500$ Гц – собственная частота недемпфированного осциллятора и $\eta = c / m\omega_0$ – максимальный коэффициент потерь, принимающий в эксперименте три значения $\eta = 0.1; 1.0; 1.9$, характеризующие весь возможный динамический диапазон. Осциллятор возбуждается случайной силой $F(t)$ с постоянной спектральной плотностью мощности $\text{PSD}[F(t)] = \text{const Н}^2 / \text{Гц}$ в рабочем диапазоне частот 20 – 2000 Гц.

Рассмотрим сначала случай, когда откликом осциллятора является *смещение* $u(t)$ и модальная частотная характеристика которого описывается формулой (1.18), точнее как

$$H_u(\omega) = \frac{A_u}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\omega_0\eta_0}.$$

где A_u – постоянная.

По этой характеристике для каждого из трех заданных значений коэффициента потерь были построены входной и выходной сигналы, которые далее использовались как «данные измерения». Они были представлены в дискретном виде с частотой дискретизации $F_s = 6.4$ кГц. Затем по этим данным были построены графики энергетического критерия (рис. 4.1), выбраны по ним необходимые порядки дискретных моделей и с помощью алгоритма (3.7), (3.8) построены ARMA-модели. Адекватность этих моделей проверялась по значению энергетического критерия и по близости форм графиков спектральных плотностей мощности «реального» и модельных выходных сигналов (см. рис. 3, где эти кривые практически неразличимы). Наконец, по ARMA-моделям с помощью формул (3.10) были найдены искомые модальные параметры – собственные частоты недемпфированных систем и их максимальные коэффициенты потерь. Они приведены в таблице 4.1 вместе со значениями ошибок, с которыми они были определены предложенным методом по отношению к заданным точным значениям. Из таблицы 4.1 следует хорошая работоспособность предложенного метода в случае, когда в нем использовано колебательное смещение в качестве отклика исследуемой системы на случайное силовое воздействие: ошибка определения модальных параметров не превышает 1%.

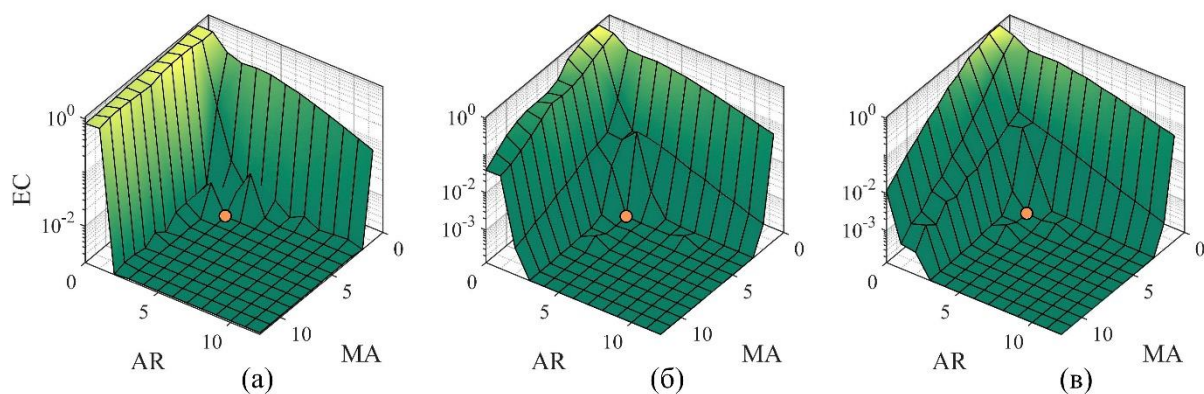


Рис. 4.1 Графики энергетического критерия EC для *смещения* механического осциллятора с модальной частотой $f_0 = 500$ Гц и тремя значениями коэффициента потерь: а) $\eta = 0.1$, б) $\eta = 1.0$, в) $\eta = 1.9$. Точками обозначены оптимальные значения порядка ARMA-моделей.

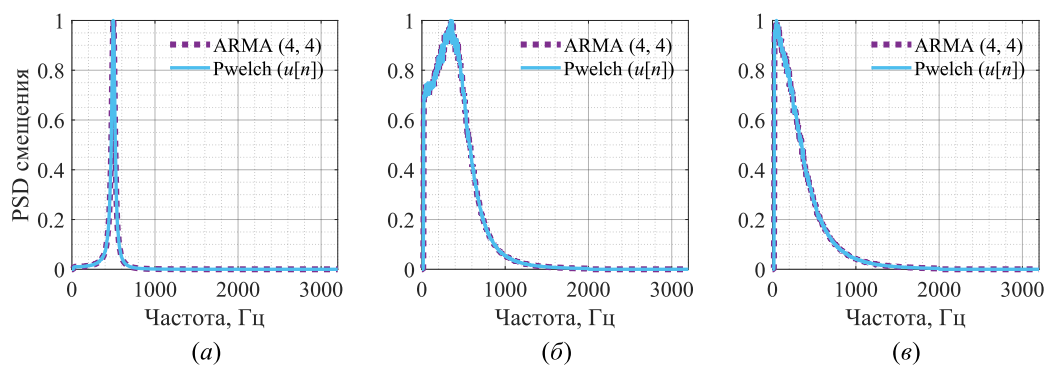


Рис. 4.2 Спектральная плотность мощности (PSD), вычисленная методом Pwelch, *смещения* механического осциллятора с модальными параметрами как на рис. 4.1. Пунктирные линии соответствуют спектру на выходе ARMA-модели.

Таблица 4.1 – Точность измерения модальных параметров предложенным методом при использовании *смещения* в качестве отклика

Заданные модальные параметры	Параметры, измеренные предложенным методом, и их ошибки		Значение энергетического критерия и порядок ARMA-модели: EC (AR, MA)
	f_0 , Гц η , б/р	$\Delta f_0 / f_0$, % $\Delta \eta / \eta$, %	
Образец 1 $f_0 = 500$ Гц, $\eta = 0.1$	500.0 0.100	0.003 0.006	0.002 (4, 4)
Образец 2 $f_0 = 500$ Гц, $\eta = 1.0$	499.9 1.000	0.018 0.001	0.0002 (4, 4)
Образец 3 $f_0 = 500$ Гц, $\eta = 1.9$	500.0 1.900	0.008 0.010	0.0002 (4, 4)

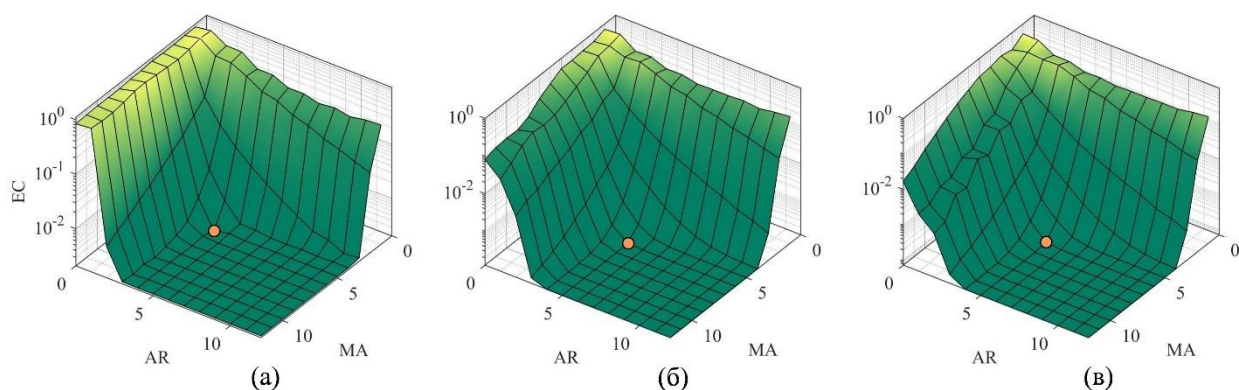


Рис. 4.3 То же самое, что и рис. 4.1, но для *скорости*.

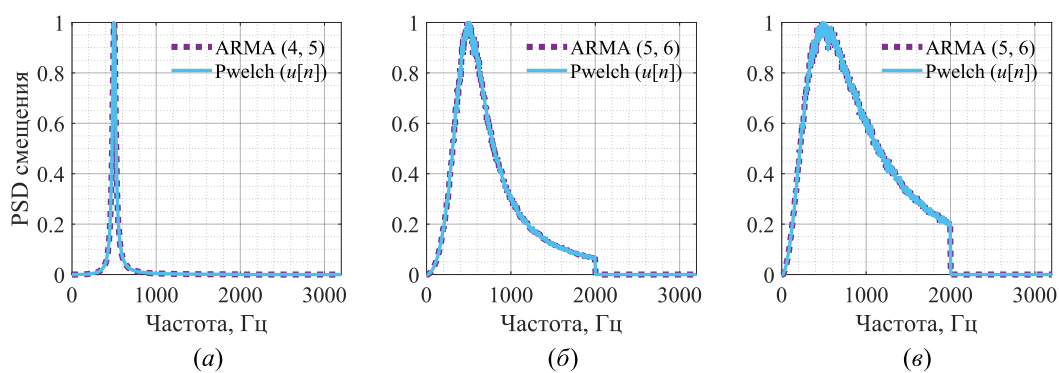


Рис. 4.4 Спектральная плотность мощности (PSD) по *скорости* механического осциллятора с модальными параметрами как на рис. 4.3 и рис. 4.1.

Таблица 4.2 – Как таблица 4.1, но для *скорости*

Заданные модальные параметры	Параметры, измеренные предложенным методом, и их ошибки		Значение энергетического критерия и порядок ARMA-модели: EC (AR, MA)
	f_0 , Гц η , б/р	$\Delta f_0 / f_0$, % $\Delta \eta / \eta$, %	
Образец 1 $f_0 = 500$ Гц $\eta = 0.1$	500.0 0.100	0.002 0.076	0.002 (4, 5)
Образец 2 $f_0 = 500$ Гц $\eta = 1.0$	500.0 1.000	0.008 0.006	0.0001 (5, 6)
Образец 3 $f_0 = 500$ Гц $\eta = 1.9$	500.2 1.901	0.040 0.029	0.0001 (5, 6)

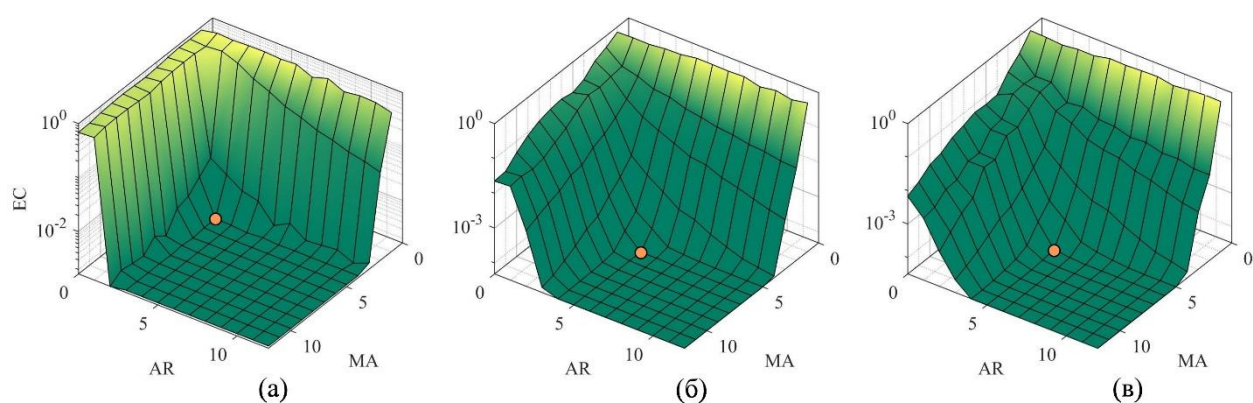


Рис. 4.5 То же самое, что и рис. 4.1, но для ускорения.

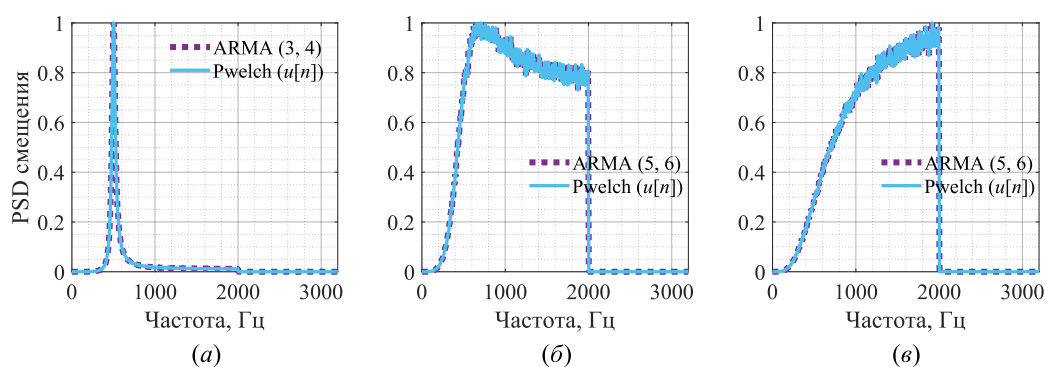


Рис. 4.6 Спектральная плотность мощности (PSD) по ускорению механического осциллятора с модальными параметрами как на рис. 4.5 и рис. 4.1.

Таблица 4.3 – Как таблица 4.1, но для ускорения

Заданные модальные параметры	Параметры, измеренные предложенным методом, и их ошибки		Значение энергетического критерия и порядок ARMA-модели: EC (AR, MA)
	f_0 , Гц η , б/р	$\Delta f_0 / f_0$, % $\Delta \eta / \eta$, %	
Образец 1 $f_0 = 500$ Гц $\eta = 0.1$	500.0 0.100	0.001 0.010	0.002 (3, 4)
Образец 2 $f_0 = 500$ Гц $\eta = 1.0$	500.0 1.000	0.0004 0.001	0.00005 (5, 6)
Образец 3 $f_0 = 500$ Гц $\eta = 1.9$	500.1 1.901	0.019 0.061	0.00004 (5, 6)

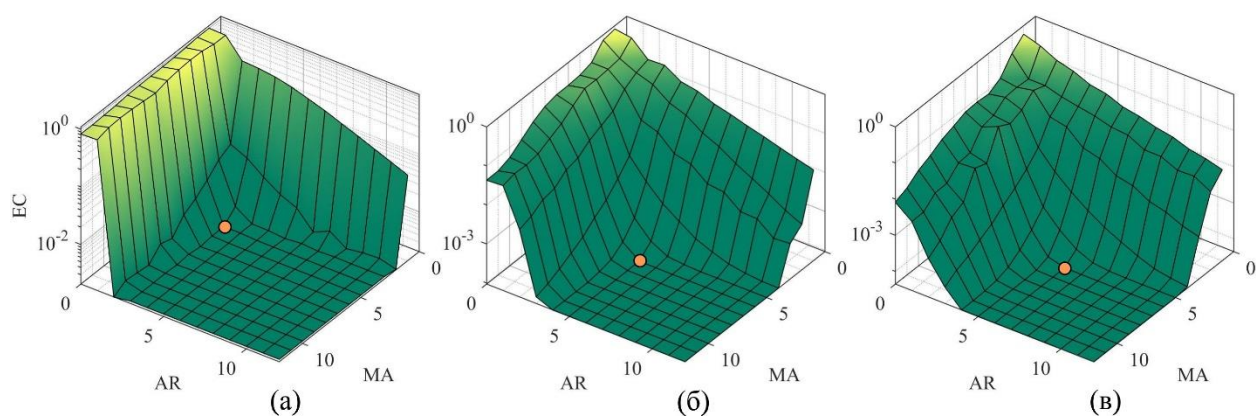


Рис. 4.7 То же самое, что и рис. 4.1, но для *кинематического источника*.

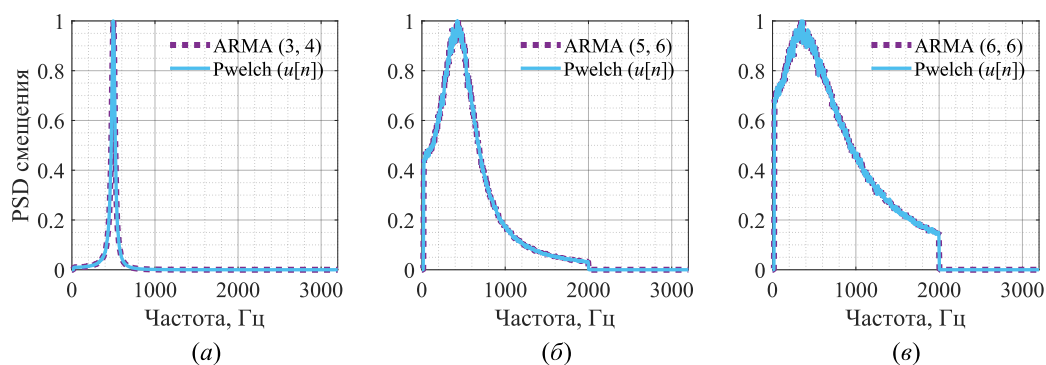


Рис. 4.8 Спектральная плотность мощности (PSD) по *кинематическому источнику* механического осциллятора с модальными параметрами как на рис. 4.7 и рис. 4.1.

Таблица 4.4 – Как таблица 4.1, но для *кинематического возбуждения*

Заданные модальные параметры	Параметры, измеренные предложенным методом, и их ошибки		Значение энергетического критерия и порядок ARMA-модели: EC (AR, MA)
	f_0 , Гц η , б/р	$\Delta f_0 / f_0$, % $\Delta \eta / \eta$, %	
Образец 1 $f_0 = 500$ Гц $\eta = 0.1$	500.0 0.100	0.001 0.010	0.002 (3, 4)
Образец 2 $f_0 = 500$ Гц $\eta = 1.0$	500.0 1.000	0.00004 0.014	0.0001 (5, 6)
Образец 3 $f_0 = 500$ Гц $\eta = 1.9$	500.0 1.900	0.013 0.023	0.00005 (6, 6)

Аналогичное исследование было проведено для двух случаев силового возбуждения осциллятора, когда в качестве отклика использовались *скорость* или *ускорение* массы, равные

$$H_v(\omega) = i\omega H_u(\omega) \quad \text{и} \quad H_a(\omega) = -\omega^2 H_u(\omega),$$

а также для случая кинематического возбуждения осциллятора случайным смещением его основания $u_0(t)$, а откликом являлось смещение массы. Как показано в [A2], модальная модель осциллятора в этом случае описывается частотной характеристикой

$$H_k(\omega) = A_k \frac{\omega_0^2 + i\omega\omega_0\eta_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\omega_0\eta_0}.$$

Результаты исследования этих трех случаев представлены на рисунках рис. 4.3 – рис. 4.8 и в таблице 4.2 – таблице 4.4, аналогичных рис. 4.1 и рис. 4.2 и таблице 4.1. Из этих результатов следует, что характер спектров отклика осциллятора существенно зависит от типа возбуждения и отклика. В частности, они отличаются наличием или отсутствием резонансного пика и поведением на низких и высоких частотах. Однако, независимо от этого, во всех рассмотренных случаях и для всех значений коэффициента потерь предложенный метод обеспечивал измерение модальных параметров с высокой точностью (менее 1 %). В этом состоит основной результат проведенного численного эксперимента 1. Отметим, что такой широкой области применимости и независимости от того, как возбуждается исследуемая система и что на ней измеряется, похоже, нет ни у одного из известных методов.

4.3 Разделение близких собственных частот

При исследовании сильно демпфированных колебательных систем и систем с большой плотностью собственных частот соседние резонансы могут накладываться друг на друга и становиться плохо различимыми, а простые и удобные методы модального анализа типа RRM становятся неприменимыми. Цель описываемого ниже численного эксперимента 2 – показать на простом примере, что предложенный метод обладает удивительно высокой разрешающей способностью и может различать близкие собственные частоты, даже когда накладывающиеся друг на друга резонансные пики визуально неразличимы.

В численном эксперименте 2 рассмотрена система с двумя степенями свободы, возбуждаемая силой, и ее отклик в виде смещения. Модальная модель системы состоит из двух мод и описывается двумя слагаемыми вида (1.17). Положим, что обе моды имеют одинаковый коэффициент потерь η , первая мода имеет фиксированную частоту $f_1 = 1$ кГц, а частота второй моды f_2 может принимать различные значения. Как и в численном эксперименте 1, по этой

модели строились входные и выходные случайные сигналы, по ним с помощью предложенного метода находились ARMA-модели, модальные параметры и допущенные при этом ошибки. Исследовалась связь между величиной этих ошибок и разностью $\Delta f = f_1 - f_2$ собственных частот, а также определялась минимальная разность частот $\Delta f_{\min}$, ниже которой предлагаемый метод не может уверенно различать близкие собственные частоты и, соответственно, не может определять нужные коэффициенты потерь.

Как главный результат численного эксперимента 2 на рис. 4.9 представлен график зависимости минимальной разности частот $\Delta f_{\min}$ от коэффициента потерь η . Под минимальной разностью $\Delta f_{\min}$ здесь было принято такое Δf , выше которого максимальная ошибка определения η предложенным методом не превышает 5%. Из рис. 4.9 видно, что эта разность мала и сильно зависит от потерь.

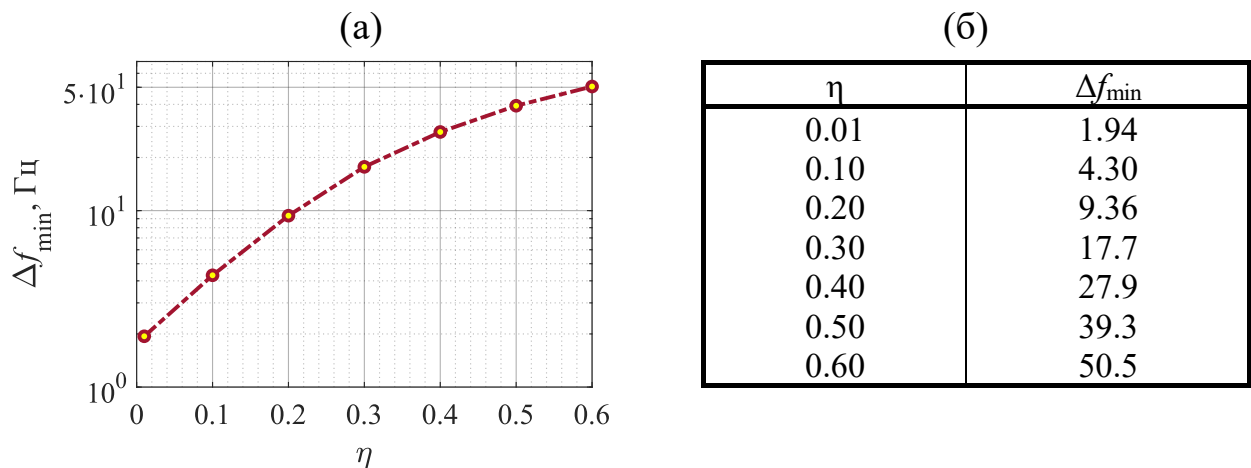


Рис. 4.9 Предельная разрешимость близких собственных частот $\Delta f_{\min}$ как функция коэффициента потерь η (а) и табличное представление графика (б).

Интересно было посмотреть, как выглядит спектр колебаний рассматриваемой системы, который соответствует минимальной разности $\Delta f_{\min}$ ее собственных частот. Возьмем, например, точку на графике рис. 4.9, отвечающую коэффициенту потерь $\eta = 0.1$. Величина соответственной минимальной разности частот здесь равна $\Delta f_{\min} = 4.3$ Гц, а ширина каждого из двух модальных пиков в спектре выходного сигнала составляет $100 \text{ Гц} = \eta \times 1 \text{ кГц}$. Сумма этих пиков, отстоящих друг от друга на 4.3 Гц, показана на рис. 4.10а. Визуально невозможно определить по этому графику, что он состоит из двух отдельных пиков. Тем не менее, метод их различает с ошибкой не хуже 5%. Для сравнения на рис. 4.10б показана сумма этих резонансных пиков, отстоящих друг от друга на 60 Гц, т.е. в ~ 15 раз дальше. Визуально только здесь становится заметным двойной максимум, а метод различает моды с ошибкой менее 1 %.

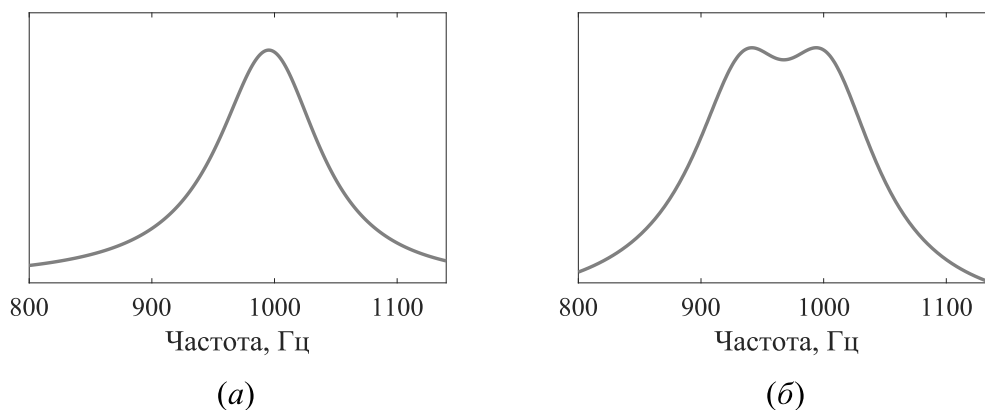


Рис. 4.10 Спектр (PSD) двух накладывающихся резонансных пиков при разности собственных частот, равной а) $\Delta f_{min} = 4.3$ Гц и б) $\Delta f = 60$ Гц.

Таким образом, в численном эксперименте 2 на конкретном примере показано, что предлагаемый метод хорошо разделяет и измеряет близкие собственные частоты, отстоящие на величину Δf_{min} , малую ($< 5\%$) по сравнению с шириной накладывающихся друг на друга резонансных пиков. Справедливость этого результата была проверена и на других конкретных примерах. Столь высокая разрешающая способность метода является, вероятно, следствием применения ARMA-моделей и потому имеет общий характер.

4.4 Частотная декомпозиция

В случаях, когда импульсная колебательная система имеет слишком широкий диапазон частот, содержит в себе много собственных частот и/или система сильно демпфирована, для упрощения расчетов предложенный метод допускает использовать *частотную декомпозицию*, то есть разбиение широкого частотного диапазона на ряд более узких поддиапазонов и применение метода к каждому поддиапазону независимо. Важным здесь является вопрос о влиянии частотной декомпозиции, т. е. ширины рабочего поддиапазона частот, на точность метода. Чтобы ответить на этот вопрос, в диссертационной работе был проведен численный эксперимент 3, из результатов которого следует, что точность определения частоты и коэффициента потерь любой конкретной моды системы остается неизменной при изменении рабочего диапазона частот.

В эксперименте 3 рассматривалась колебательная система с пятью модами, имеющими модальные собственные частоты $f_1 = 500, f_2 = 600, f_3 = 700, f_4 = 800$ и $f_5 = 900$ Гц, и одинаковые коэффициенты потерь $\eta_{1-5} = 0.1$. Было выбрано пять рабочих диапазонов (РД) частот:

- РД1 = 300-525 Гц, в который входит только первая мода,
- РД2 = 300-630 Гц с двумя первыми модами,
- РД3 = 300-735 Гц с тремя модами,

- РД4 = 300-850 Гц с четырьмя модами,
- РД5 = 300-1000 Гц с пятью модами.

Таблица 4.5 – Точность измерения модальных частот и коэффициента потерь для различного диапазона частот

Рабочий Диазон частот и порядок модели	Ошибка измерения собственных частот и коэффициента потерь, %									
	f_1	η_1	f_2	η_2	f_3	η_3	f_4	η_4	f_5	η_5
РД1 (2, 11)	0.006	1.950								
РД2 (6, 12)	0.013	0.278	0.029	3.290						
РД3 (10,13)	0.012	0.189	0.051	0.797	0.028	3.886				
РД4 (11, 13)	0.004	0.056	0.004	0.289	0.020	0.186	0.006	0.166		
РД5 (12, 13)	0.003	0.033	0.001	0.207	0.009	0.264	0.021	0.051	0.005	0.256

Соответственно, было проведено пять независимых численных экспериментов с каждым из этих диапазонов. Как и в предыдущих экспериментах, для каждой их модальной модели были построены входной и выходной сигналы, по которым предлагаемым методом были найдены собственные частоты и коэффициенты потерь и посчитаны ошибки метода. При этом первая мода системы измерялась в пяти экспериментах с различными рабочими диапазонами частот, вторая мода – в четырех экспериментах, и т.д. Основным результатом численного эксперимента 3 следующий (см. таблицу 4.5): во всех пяти экспериментах ошибка определения собственных частот и коэффициентов потерь всех мод была примерно одной и той же, не превышающей четыре процента. Иначе говоря, было показано, что точность предложенного метода не сильно зависит от ширины рабочего диапазона частот, и, соответственно, от применения частотной декомпозиции.

4.5 Другие свойства

Помимо отмеченных выше в этой главе ключевых свойств предложенного метода, были выполнены и другие численные эксперименты, имеющие целью выяснение влияния различных параметров на точность определения потерь, а также сравнение с другими методами.

Так, на рис. 4.11 представлен результат сравнения предлагаемого метода с классическим методом peak picking method (PPM), измеряющего коэффициент потерь по ширине резонансной кривой на плоскости $\{\eta, \Delta f\}$, где Δf – это расстояние в Гц между соседними резонансами, показаны две области применимости: в светлой зеленой области предложенный метод измеряет коэффициент потерь с точностью не хуже 10%, а темная

область соответствует классическому методу, где он может измерять коэффициент потерь с той же точностью.

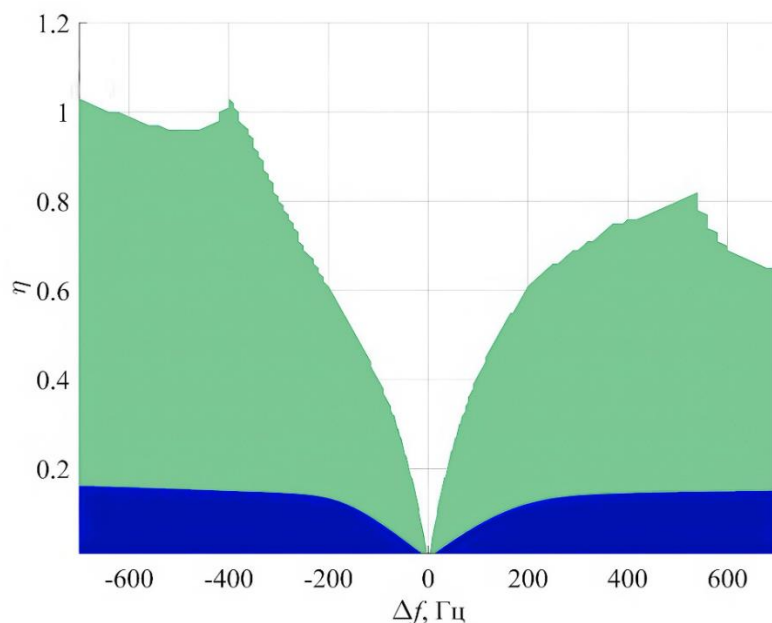


Рис. 4.11 Области применимости предложенного метода (зеленая светлая область) и классического метода РРМ (темная синяя область).

Как видно из рис. 4.11, область применимости у предложенного метода значительно шире, чем у классического метода, в то время как РРМ применим только к слабо демпфированным системам ($\eta < 0.2$).

На рис. 4.12 показаны границы применимости предложенного метода на плоскости (η_0 , F_s), где F_s – частота дискретизации выходного случайного сигнала, серым представлена область, где ошибки определения собственной частоты и коэффициента потерь предложенным методом не превышают 5%. Как видно из рис. 4.12, метод применим к колебательным системам практически с любым демпфированием, включая закритические ($\eta_0 > 2$) и отрицательные ($\eta_0 < 0$) значения коэффициента потерь. Закритические значения относятся к вязким неколебательным системам, а отрицательные – к активным системам. Для более детального изучения этих систем предлагаемым методом требуются дополнительные исследования вне данной диссертации.

Численно было также подтверждено свойство экономичности предложенного метода, обусловленное малым объемом требуемой экспериментальной информации и простотой построения ARMA-модели по данным измерения.

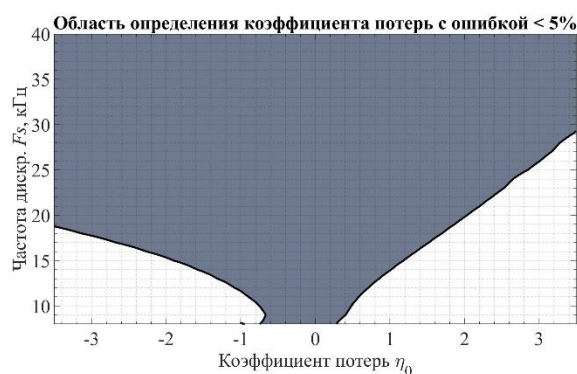
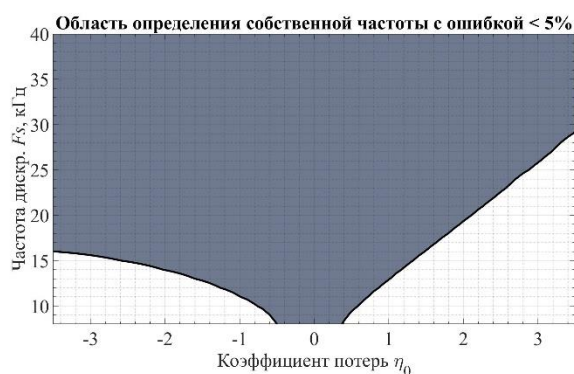


Рис. 4.12 Область применимости предложенного метода определения модальных параметров.

Заключение к Главе 4

В Главе 1 диссертации в процессе аналитического обзора отмечалось, что в рамках модального анализа создано довольно много методов измерения потерь в колебательных системах, различающихся областью применимости, точностью, динамическим диапазоном измерения, типом колебаний и другими особенностями систем. Фактически, существование множества методов для решения одной и той же задачи означает, что не существует одного общего универсального метода и общего решения, а вместо него есть методы для получения ряда частных решений.

Разработанный в рамках данной диссертации метод является хорошим кандидатом на создание общего *универсального* метода. Как показано в данной главе 4, его областью применимости являются *любые* линейные механические и акустические колебательные системы независимо от типа их колебаний, от того, как их возбуждают и чем измеряют. Методу доступен для измерения весь динамический диапазон коэффициента потерь, а свойство частотной декомпозиции позволяет его успешно применять в любом звуковом частотном диапазоне. Особо можно выделить уникальную способность метода разделять близкие собственные частоты с 95%-ым перекрытием резонансных пиков. Насколько известно автору, ни один из существующих методов измерения потерь не обладает столь продвинутыми свойствами.

ГЛАВА 5

Экспериментальная проверка метода

Введение

Для экспериментальной проверки метода было проведено два типа лабораторных экспериментов. Первый был проведен на двух простейших колебательных системах с одной степенью свободы для концептуальной проверки применимости метода. Эксперименты второго типа были проведены уже на сложной системе со многими степенями свобод (лабораторная установка ИМАШ РАН).

5.1 Эксперименты на простейших колебательных системах

Эксперименты проводились на вибрационной установке, состоящей из электродинамического вибростенда и его системы управления. Функциональная схема установки представлена на рис. 5.1.



Рис. 5.1 Функциональная схема экспериментальной установки.

Исполнительным элементом виброустановки является электродинамический вибростенд, на рабочем столе которого закрепляется оснастка с исследуемым образцом. Система управления вибростендом представляет собой программно-аппаратный комплекс, реализованный на основе персонального компьютера. Аппаратная часть комплекса содержит два акселерометра V&K Type 4393, блок согласования сигналов – усилитель NEXUS, устройство генерации и сбора динамических сигналов NI USB – 4431 и управляющий компьютер. Включение в состав системы управления устройства NI USB – 4431 позволяет использовать компьютер одновременно как для генерации, так и для регистрации сигналов.

Специализированное программное обеспечение системы управления — это разработанный в среде MATLAB пакет программ для генерации, сбора, обработки и визуализации данных.

В экспериментах исследовались два образца в виде простейших механических колебательных систем-осцилляторов, отличающихся своей добротностью (рис. 5.2).

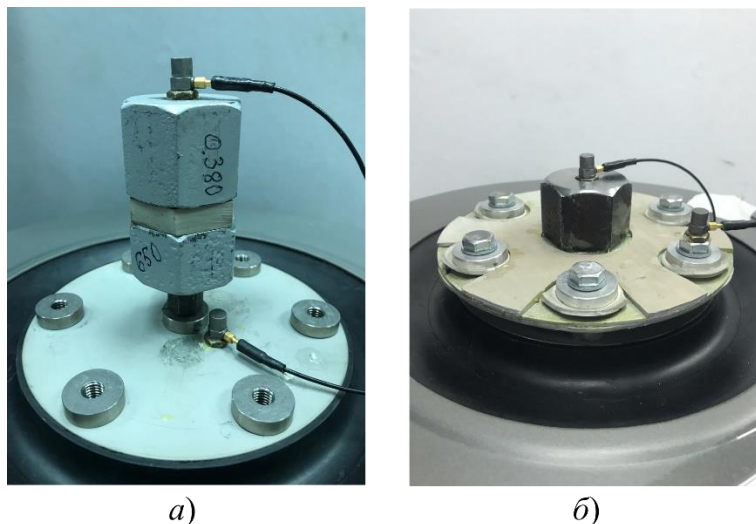


Рис. 5.2 Образец 1 (а) и образец 2 (б).

Образец 1 с низкой добротностью ($Q < 10$) состоял из слоя резины и массы (рис. 5.2а). Образец 2 ($Q > 40$) был выполнен в виде массы, закрепленной на специально спроектированной стальной задемпфированной пластине (рис. 5.2б). Два акселерометра измеряли ускорение массы осциллятора $a(t)$ и вибростола $a_0(t)$ — см. рис. 5.3. Задача состояла в определении по этим данным коэффициента потерь осцилляторов двумя методами — классическим и предложенным и в сравнении этих двух методов.

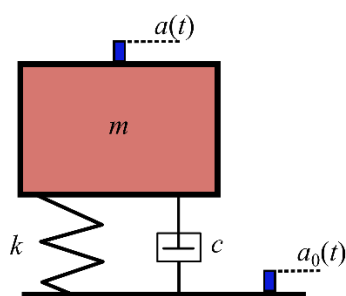


Рис. 5.3 Расчетная схема образца.

При определении коэффициента потерь классическим методом [68] стенд возбуждался гармоническим сигналом переменной частоты и с постоянной амплитудой ускорения $a_0 = 3 \text{ м/с}^2$. По измеренному сигналу $a(t)$ строилась амплитудно-частотная характеристика (АЧХ), коэффициент потерь рассчитывался также и по ширине резонансной кривой (1.19). Измерения дали следующие значения для собственных частот и коэффициента потерь — см. таблицу 5.1.

Таблица 5.1 – Модальные параметры, определенные классическим методом

	Собственная частота f_0 , Гц	Коэффициент потерь η , б/р
Образец 1 (рис. 5.2а)	280.7	0.0958
Образец 2 (рис. 5.2б)	401.2	0.0223

При определении коэффициента потерь предлагаемым методом стенд возбуждался случайным шумом $a_0(t)$. $a_0(t)$ – это гауссов сигнал, с постоянной спектральной плотностью мощности (СПМ) в полосе частот, содержащей собственную частоту резонатора (пример такого сигнала см. на рис. 5.4). В качестве модели ускорения $a(t)$ использовалась обычная авторегрессионная модель скользящего среднего $x[n]$

$$x[n] = -a_1x[n-1] - a_2x[n-2] + b_0w[n] + b_1w[n-1],$$

с четырьмя неизвестными параметрами $\theta = \{a_1, a_2, b_0, b_1\}$.

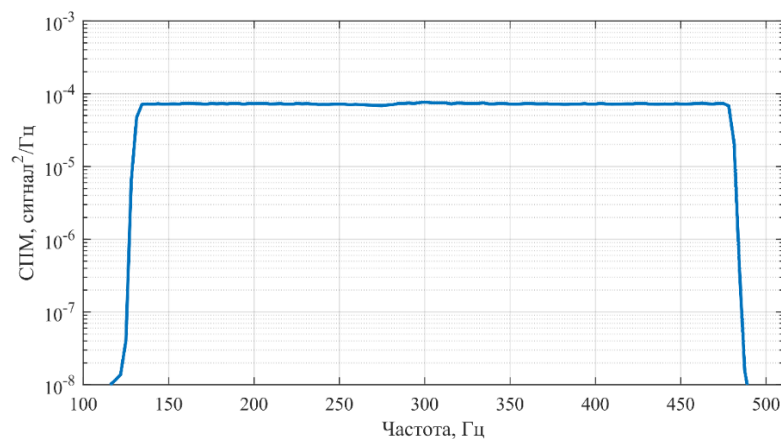


Рис. 5.4 Спектральная плотность мощности случайного сигнала возбуждения $a_0(t)$

Для удобства для сигналов $a(t)$ и $a_0(t)$ введены принятые в литературе стандартные обозначения $x(t)$ и $w(t)$. В развернутом виде это система линейных алгебраических уравнений с четырьмя неизвестными. Выше было показано (3.7) – (3.8), как можно найти вектор параметров θ :

$$\theta = (Z^T Z)^{-1} Z^T \mathbf{x}_1$$

Отсюда по AR-модели второго порядка с помощью (3.10) можно найти искомые собственную частоту f_0 и коэффициент потерь η . Результаты определения собственных частот и коэффициента потерь предлагаемым методом представлены в таблице 5.2.

Таблица 5.2 – Модальные параметры, определенные предлагаемым методом

	Собственная частота f_0 (Гц) и отличие от результата таблицы 5.1		Коэффициент потерь η и отличие от значений таблицы 5.1	
Образец 1 (рис. 5.2а)	277.7	1.1 %	0.0966	0.9 %
Образец 2 (рис. 5.2б)	398.1	0.8 %	0.0225	1 %

Сравнение этих результатов с результатами, полученными классическим методом (таблица 5.1), показывает, что разница между ними невелика (порядка одного процента). По точности результатов эти два метода, таким образом, сравнимы.

Однако, по другим критериям – они отличаются значительно. Особенно, относительно времени измерения и объема необходимых данных измерения. Исследования классическими методами, связанные со спектральным анализом, требуют измерения длинных реализаций сигналов, в то время как для предлагаемого метода достаточно коротких реализаций. Например, в частотном диапазоне проведенного эксперимента для классического метода требовались записи сигналов продолжительностью в несколько минут, в то время как для предлагаемого метода достаточно было записей сигналов длиной в доли секунды.

5.2 Эксперименты на лабораторной установке ИМАШ РАН

Эксперимент проводился на лабораторной установке, созданной в Институте машиноведения им. А.А. Благонравова (ИМАШ РАН) для исследования и тестирования метаматериальных структур, предназначенных для разработки новых эффективных звукопоглощающих покрытий (ЗП-покрытий), работающих в коротких волноводах в условиях скользящего распространения звука.

Основные технические характеристики установки ИМАШ следующие: рабочий диапазон частот – 80...1500 Гц; работает при комнатных температурах без скоростного потока воздуха; поле давления в волноводе не превышает 140 дБ и описывается линейными уравнениями акустики. Принципиальная схема установки показана на рис. 5.5а, фото установки приведено на рис. 5.5б. Главная часть установки – волновод квадратного сечения с внутренними размерами сечения 200 × 200 мм и отношением длина/поперечный размер, равным 2.84. Волновод имеет твердые стенки. У правого (открытого) торца он содержит две секции длиной 200 мм каждая, в которых стенки состоят из открытых ячеек. В эти ячейки вставляются съемные кассеты – твердые или выполненные из материала покрытия – каждая размером 200 × 200 мм, по четыре кассеты на секцию. Толщина кассеты может быть 50 мм или меньше.

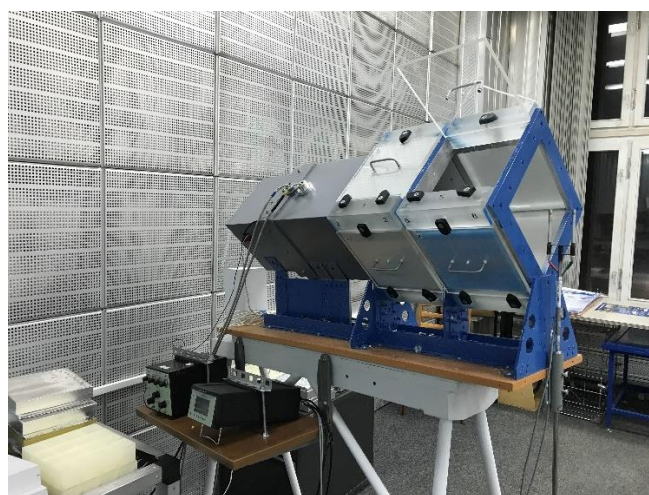
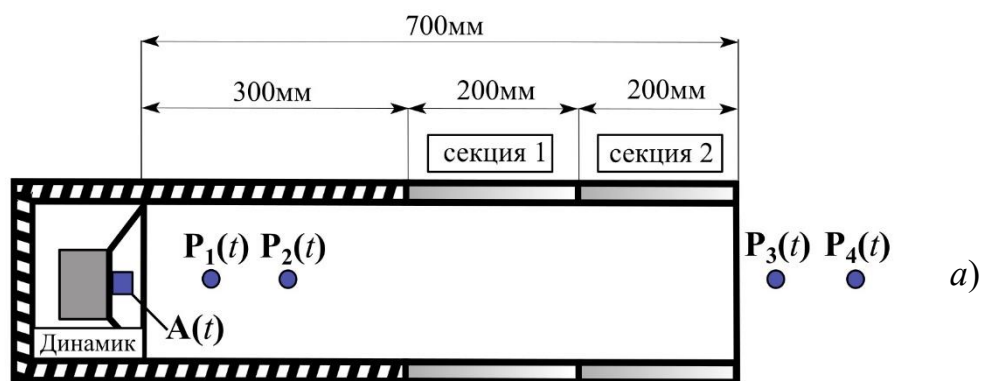


Рис. 5.5 Схема (а) и фото (б) лабораторной установки ИМАШ РАН.

Измерительная часть установки содержит две пары микрофонов P_1P_2 и P_3P_4 (показаны на рис. 5.5а), акселерометр A , устройство генерации и сбора динамических сигналов NI USB – 4431, компьютер и необходимые согласующие устройства (усилители, вольтметры, осциллографы и другие) – на схеме не показаны. Сигналы с микрофонов поступают на устройство сбора и далее в компьютер, где синхронно записываются для последующей обработки.

Сигналы с микрофона P_1 и акселерометра A считаем сигналом возбуждения $w[n]$, а сигнал с микрофона P_3 считаем выходным сигналом $x[n]$. Таким образом, здесь возможно применить ARMA-метод и исследовать волновод.

Суть эксперимента заключается в том, чтобы проверить принципиальную возможность применения разработанного метода к сложным акустическим системам. Для этого в установку были вставлены твердые кассеты, что имитирует волновод с твердыми стенками. Звуковое поле в волноводе создавалось электродинамическим преобразователем (динамиком) на левом торце, который возбуждался случайными сигналами.

Пример типичных результатов измерения предлагаемым методом приведены ниже на рис. 5.6 – рис. 5.9 для двух видов возбуждения установки – силового P_1 и кинематического A . Рабочий диапазон был выбран ниже 1 кГц, частота дискретизации равнялась 3200 Гц.

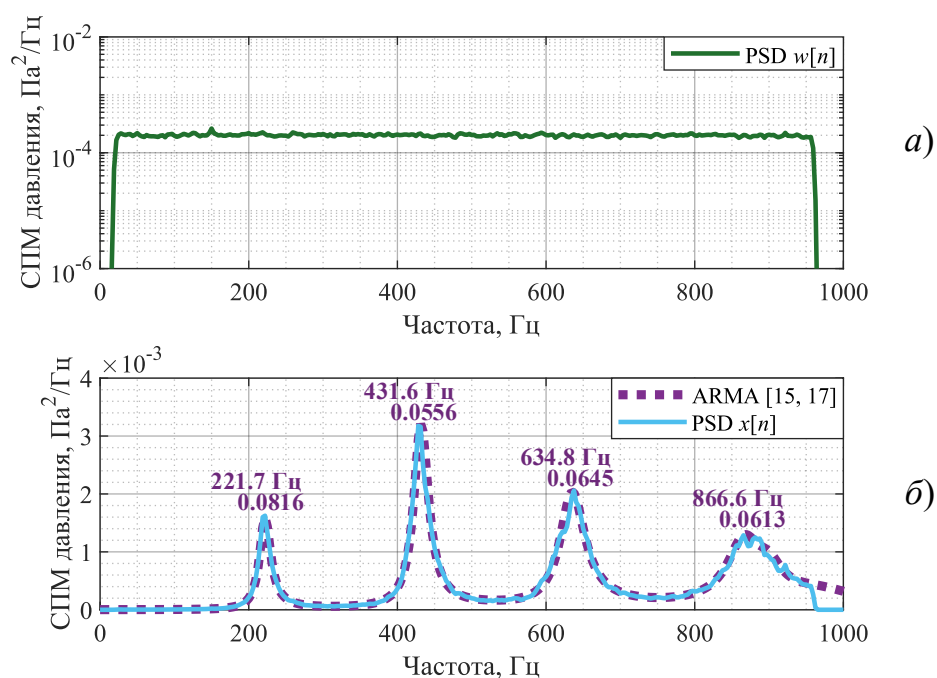


Рис. 5.6 Спектр силового возбуждения, измеренного микрофоном P_1 (а) и отклика установки, измеренного микрофоном P_3 (б). Пунктиром изображен спектр ARMA-модели. Числа около резонансных пиков равны значениям модальных параметров – частоты и коэффициента потерь, определенных предложенным методом.

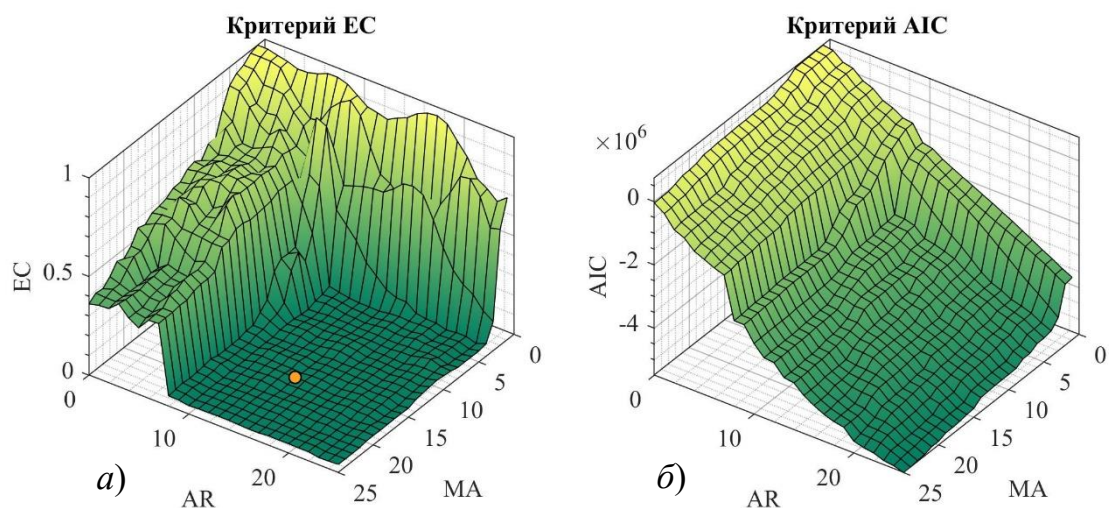


Рис. 5.7 Энергетический критерий (EC) адекватности ARMA-модели (а) и информационный критерий Акаике [100] (б), построенные для измеренных сигналов $P_1 - P_3$.

Рис. 5.6 и рис. 5.7 соответствуют силовому возбуждению. В этом случае в качестве входного (возбуждающего) сигнала $w[n]$ используется давление, измеренное микрофоном P_1 и представляющего собой случайный сигнал с равномерным спектром в рабочей полосе частот (рис. 5.6а). На рис. 5.6б представлен спектр отклика установки в виде давления, измеренного у правого торца микрофоном P_3 . По этим двум сигналам, используя энергетический критерий EC , изображенный на рис. 5.7а, была построена ARMA-модель установки, а по ней найдены ее модальные параметры (частоты недемпфированной установки и соответственные коэффициенты потерь, которые написаны на рис. 5.6б поверх резонансных пиков). На этом же рисунке пунктиром нанесен спектр колебаний ARMA-модели, который в данном случае практически не отличается от спектра измеренного сигнала отклика. Для сравнения с предложенным в диссертации энергетическим критерием адекватности ARMA-модели на рис. 5.7б приведен информационный критерий Акаике [100], наиболее часто используемый в литературе. Как ясно из сравнения критериев, AIC , несмотря на его популярность, для данной задачи мало полезен при выборе оптимального порядка ARMA-модели.

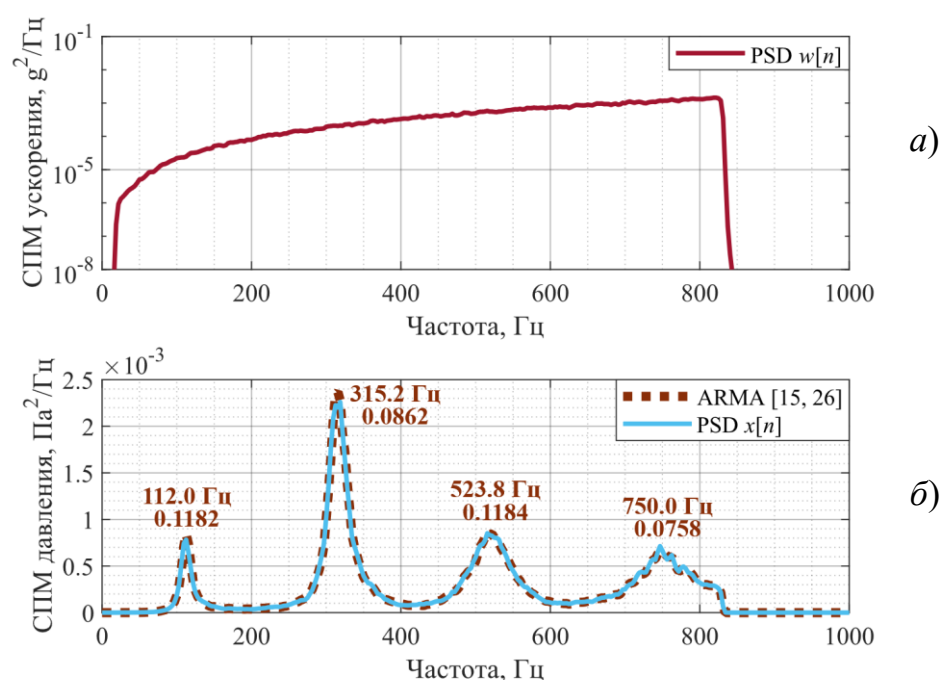


Рис. 5.8 Спектр кинематического возбуждения, измеренного акселерометром А на динамике (а) и отклика установки, измеренного микрофоном P_3 (б). Другие обозначения как на рис. 5.6.

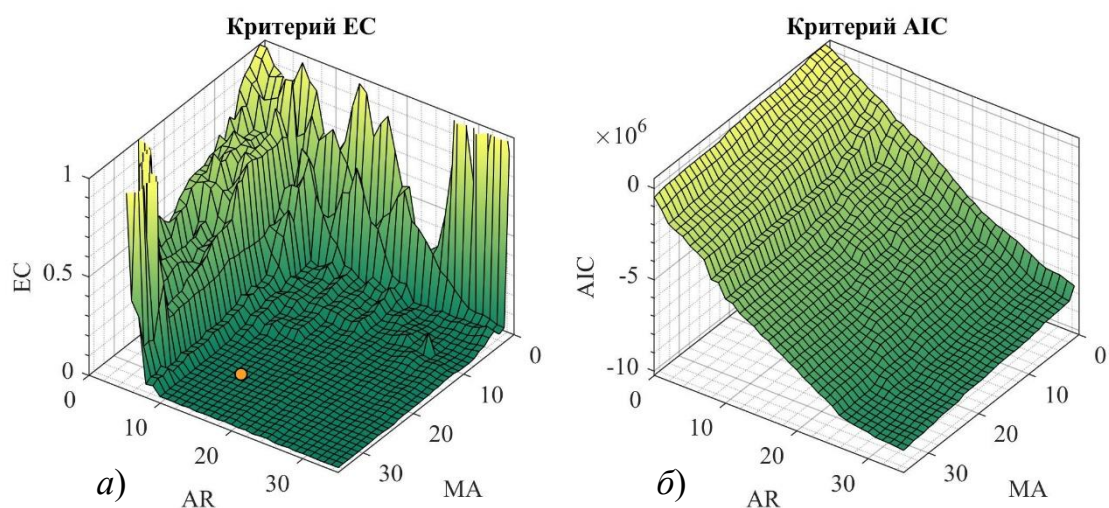


Рис. 5.9 Энергетический критерий (EC) адекватности ARMA-модели (a) и информационный критерий Акаике [100] (b), построенные для измеренных сигналов $A - P_3$.

Аналогичные результаты приведены на рис. 5.8 и рис. 5.9 для кинематического возбуждения. В этом случае в качестве возбуждающего сигнала $w[n]$ использовался случайный сигнал ускорения, измеренный акселерометром A на динамике в левом торце установки – см. схему на рис. 5.5а. Для повышения отношения сигнал / шум на высоких частотах спектр ускорения был выбран возрастающим. Рис. 5.9 полностью аналогичен рис. 5.7. Как следует из приведенных результатов, коэффициент потерь на всех частотах близок к 0.1, т.е. добротность Q резонансных колебаний исследуемой установки ИМАШ РАН с твердыми стенками 10.

Представляет интерес сравнить приведенные на рис. 5.6 и рис. 5.8 значения модальных собственных частот и коэффициентов потерь установки ИМАШ РАН с аналогичными результатами, полученными другими методами. Некоторые результаты сравнения приведены в таблице 5.3. Как видно из сравнения, наиболее близкие результаты были получены методом PPM (peak picking method). Из таблицы 5.3 следует, что измеренные коэффициенты потерь первых шести мод установки, измеренные этим методом, практически полностью совпадают с коэффициентами потерь, найденными методом диссертации (исключение составляет первая мода, где расхождение результатов завышено, по-видимому, из-за влияния низкочастотных помех, к которым PPM очень чувствителен). На более высоких частотах, начиная с 7-ой и 8-ой моды, результаты становятся все более отличающимися т.к. здесь PPM становится неприменимым вследствие наложения соседних резонансов (в таблице 5.3 они не показаны).

Таблица 5.3 – Модальные параметры установки ИМАШ РАН – собственные частоты недемпфированной системы и коэффициенты потерь, измеренные тремя различными методами

Параметры Метод	f_1 η_1	f_2 η_2	f_3 η_3	f_4 η_4	f_5 η_5	f_6 η_6	f_7 η_7	f_8 η_8
Метод диссертации	112 0.118	222 0.082	315 0.086	432 0.056	524 0.118	635 0.065	750 0.076	867 0.061
PPM	111 0.153	220 0.082	315 0.095	430 0.056	521 0.121	638 0.071	755 0.113	875 0.103
По собственным частотам модели	103 0.027	205 0.062	312 0.082	419 0.091	529 0.101	641 0.110	756 0.118	875 0.121

Хорошее совпадение результатов PPM и метода диссертации в частотной области применимости PPM объясняется тем, что оба эти метода основаны на использовании непосредственно реальных, т.е. измеренных, данных. Этим они выгодно отличаются от других методов, опробованных автором, которые в той или иной мере зависят от использования расчетной модели установки.

По поводу модели можно сказать следующее. Как было показано в работе [A4], посвященной описанию установки ИМАШ, в волноводе установки в диапазоне частот 0 – 1700 Гц может существовать только одна распространяющаяся нормальная волна нулевого порядка, т.е. плоская волна с равномерным распределением давления по сечению и волновым вектором, параллельным оси волновода. Поэтому естественно было предположить, что по крайней мере в диапазоне до 1 кГц для рассматриваемого волновода верна «плосковолновая модель», т.е. модель, в которой существуют только прямые и обратные плоские волны. Для такой модели были аналитически получены уравнения собственных колебаний и найдены комплексные собственные частоты волновода, по которым были рассчитаны модальные параметры. Они приведены в последней строке таблицы 5.3. Здесь отличие от результатов диссертации значительное. Причиной большого расхождения, по-видимому, являются ошибки плосковолновой модели. Эта модель хорошо работает в длинных волноводах, где возбуждаемые на торцах неоднородные волны успевают быстро затухнуть. В коротких же волноводах (а в установке ИМАШ РАН длина волновода не превышает трех его поперечных размеров) это не так. В них неучтенные моделью неоднородные волны не успевают затухнуть, искажая поле и внося неконтролируемые ошибки в расчеты. Автор убедился в этом, измерив распределение давления по сечению на правом торце, которое оказалось далеко не равномерным.

Еще большие отклонения от результатов диссертации давали другие методы, основанные на плосковолновой модели. Так, при попытке найти коэффициент потерь непосредственно по его определению

$$\eta = \frac{I}{\omega E},$$

где I – это поток мощности излучения из волновода в зал, т.е. мощности потерь, и E – это средняя по времени полная энергия волновода. Причина та же – неточная модель, которая не позволила восстановить правильные значения потока мощности и энергии волновода по измерениям этих величин в отдельных фиксированных на установке точках. Такие результаты в таблицу 5.3 не были внесены.

5.3 Применение метода при испытании космического прибора

Разработанный в диссертации метод также был успешно апробирован и применен при проведении натурных вибромеханических испытаний конструкции научного прибора «БТН-М2», разработанного ИКИ РАН для эксперимента на Российском Сегменте МКС [54].

Метод позволяет в процессе испытаний прибора определять текущие значения первых собственных частот и коэффициентов потерь конструкции прибора. Это дает возможность проконтролировать интегральную целостность механической конструкции испытуемого прибора, так как именно эти параметры отвечают за ее механическую прочность, жесткость и податливость внешним воздействиям. Изменение этих параметров, например, в 10%, позволяет сформулировать количественно предел допустимой целостности при испытаниях.

В качестве примера на рис. 5.10 показан квадрат коэффициента передачи «БТН-М2», полученный при проведении испытаний на воздействие случайной вибрационной нагрузки в направлении одной из осей прибора. Для идентификации одной из первых наиболее «энергетических» собственных частот была выбрана рабочая полоса 120-355 Гц. Используя разработанный метод, была построена дискретная модель для конструкции испытуемого образца и найдены ее модальные параметры для «наиболее энергетической» моды ~280 Гц (пик на рисунке). Частоты образца и соответствующие коэффициенты потерь были определены по двум коротким интервалам (5 секунд) в записи временного сигнала, соответствующим началу и концу испытаний (на рис. 5.10 написаны с двух сторон от пика).

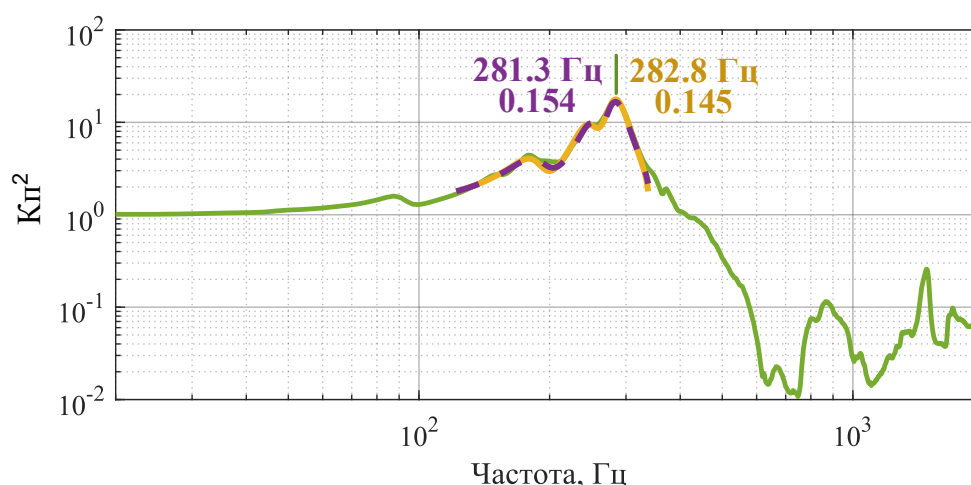


Рис. 5.10 Квадраты коэффициента передачи ($K_{п}^2$): полученный при испытаниях прибора (сплошная зеленая линия), полученные с помощью диссертационного метода (пунктирная фиолетовая линия – «до испытаний», сплошная желтая линия – «после испытаний»).

Максимальное отличие модальных параметров до и после испытаний прибора составило 6.5%, что позволяет говорить о механической целостности испытанного образца. Прибор успешно прошел летные испытания и в настоящее время штатно работает в космосе.

Выводы

Лабораторные эксперименты, проведенные для исследования предложенного метода измерения потерь, дали следующие результаты:

1. Применительно к простым колебательным системам предложенный метод дает столь же точные результаты измерения, как и известные проверенные методы (отличие около одного процента).
2. Показана точность и широкая применимость предложенного метода к исследованию сложной акустической системы.
3. Продемонстрировано свойство экономичности предложенного метода, обусловленное малым объемом требуемой экспериментальной информации и простотой построения предлагаемых дискретных моделей по данным измерения.

Заключение

Коэффициент потерь – важнейший параметр всех акустических и механических колебательных систем. Его особая роль в науке и технике обусловлена тем, что максимальные амплитуды свободных и вынужденных колебаний систем напрямую определяются именно этим параметром. Соответственно, от коэффициента потерь в материалах и средах зависят уровни шума и вибраций в городах, на транспорте, на производстве – везде, где есть источники звука, природные или технические. Недостаточные потери и все возрастающее число и мощность технических источников (машин, механизмов, различных устройств) явились причиной возникновения одной из самых актуальных современных проблем – проблемы снижения уровней шума и вибраций. В течение 20-го века было создано немало методов и средств решения этой проблемы. Основанные на звукоизоляции и звукопоглощении, все они при использовании требуют для себя довольно существенных дополнительных масс и объемов, что нежелательно для изделий ракетно-космической техники, самолетостроения и других областей. Поэтому в настоящее время во всех мировых научных центрах проводятся интенсивные исследования по созданию новых искусственных структур – материалов (метаматериалов), обладающих повышенными потерями при минимальной массе и минимальном объеме. В свете этого становится очевидной актуальность и своевременность представленной в настоящей диссертации работы по созданию нового эффективного метода экспериментального определения потерь в конструктивно сложных и в сильно демпфированных системах, так как потери можно определить только экспериментальным способом.

Главным результатом представленной диссертационной работы является разработка (т.е. научное обоснование, выявление основных свойств и особенностей, а также экспериментальная проверка) нового экспериментального метода определения коэффициента потерь. Исследования показали, что метод является универсальным, т. к. обладает практически неограниченной областью применимости и максимально возможным динамическим диапазоном измерения коэффициента потерь, а также высокой точностью, простотой и экономичностью, т. к. не требует специальных условий для проведения эксперимента, используя стандартную аппаратуру, малое количество измеряемой информации и стандартные методы ее обработки.

Метод основан на моделировании исследуемых колебательных систем с N степенями свободы с помощью дискретных по времени моделей типа ARMA, которые описываются конечно-разностными уравнениями. Ввиду отсутствия в литературе каких-либо данных об использовании таких моделей в акустике и теории колебаний, автору диссертации для

обоснования своего метода потребовалось провести дополнительные аналитические исследования связи между известными механическими и акустическими непрерывными моделями и дискретными ARMA-моделями. Наиболее важными новыми результатами этих исследований являются следующие.

- В диссертации сформулирован критерий эквивалентности дискретной и непрерывной моделей колебательной системы: они должны иметь одинаковые решения во все дискретные моменты времени. На основе этого критерия для нескольких непрерывных моделей системы с N степенями свободы (модели в пространстве состояний, модели черного ящика) построены соответственные дискретно-временные модели, конечно-разностные уравнения и их решения.

- Получены аналитические соотношения между коэффициентами дифференциальных уравнений непрерывных моделей и коэффициентами соответственных конечно-разностных уравнений дискретных моделей; эти соотношения позволяют однозначно строить дискретно-временную модель системы по известной непрерывной модели и, наоборот, непрерывную модель по дискретной.

- Теоретически показано, что дискретная ARMA-модель системы с N степенями свободы, совершающей вынужденные колебания под действием кинематического возбуждения, имеет порядок $(2N, 2N)$, а под действием силового возбуждения – порядок $(2N, 2N - 1)$.

Одним из центральных результатов диссертации является формулировка энергетического критерия адекватности ARMA-моделей. Без этого критерия предложенный метод не мог бы считаться законченным и надежным, т. к. с его помощью определяется оптимальный порядок ARMA-модели и оценивается точность моделирования.

Важным результатом диссертации является также способ и процедура численного исследования ключевых свойств предложенного метода с помощью численных экспериментов. В каждом таком эксперименте для конкретной колебательной системы с заданным коэффициентом потерь и заданными другими механическими параметрами рассчитывались колебания на случайные внешние воздействия, которые затем использовались в качестве «экспериментальных данных» метода. По разнице между заданными значением коэффициента потерь и значением, определенным предложенным методом, делалось заключение о наличии того или иного свойства. В результате проведения ряда численных экспериментов были выявлены следующие основные свойства предложенного метода.

- Было показано, что метод одинаково точно измеряет любые значения коэффициента потерь во всем его динамическом диапазоне $0 \leq \eta \leq 2$.

- Метод одинаково хорошо работает при любом способе внешнего возбуждения колебаний исследуемой системы – силовом или кинематическом.

- Метод одинаково хорошо работает при измерении любого типа колебательного отклика системы – смещения, скорости, ускорения или давления.

- Имеет место поразительно высокая разрешающая способность метода близких собственных частот.

- Показано, что точность метода не зависит от ширины выбранного рабочего диапазона частот, и, таким образом, допускает применение частотной декомпозиции.

Эти свойства, а также высокая точность и экономичность метода были подтверждены в нескольких лабораторных экспериментах: при испытании простейших структур (механических осцилляторов) на вибростенде и при исследовании сложной акустической установки ИМАШ РАН.

В заключение отметим, что ни один из существующих экспериментальных методов измерения потерь не обладает столь продвинутыми свойствами, благодаря чему он имеет общенаучное значение и будет полезен при решении широкого класса конкретных задач проблемы снижения уровней шума и вибраций современной техники.

Список литературы

1. Вибрации в технике. Справочник в 6 томах / Под ред. В.Н. Челомея, К.В. Фролова, Э.И. Григолюка, 2-ое изд. – М.: Машиностроение, 1995–1999. ISBN 5-217-02727-4.
2. *Ганиев Р.Ф.* Нелинейные резонансы и катастрофы. Надежность, безопасность, бесшумность / Р.Ф. Ганиев. – М.: R&C Dynamics, 2013. – 592 с.
3. Справочник по технической акустике / Под ред. М. Хекла и Х.А. Мюллера. – Л.: Судостроение, 1980. – 440 с.
4. *Bell L.H.* Industrial noise control: fundamentals and applications / L.H. Bell. – NY: Marcel Decker, 1982.
5. Handbook of noise and vibration control / Ed. by M.J. Crocker. Hoboken. – NJ: John Wiley & Sons, Inc., 2007. – 1570 p.
6. Колебания, излучение и демпфирование упругих структур / Под. ред. А.В. Римского-Корсакова. – М.: Наука, 1973. – 734 с.
7. *Lazan B.* Damping of materials and members in structural mechanics / B. Lazan. – NY: Pergamon Press, 1968.
8. *Филиппов А.П.* Методы расчета сооружений на колебания / А.П. Филиппов. – М.-Л.: Гостехиздат, 1941.
9. Авиационная акустика / Под ред. А.Г. Мунина и В.Е. Квитки. – М.: Машиностроение, 1973. – 448 с.
10. Справочник по судовой акустике / Под ред. И.И. Клюкина и И.И. Боголепова. – Л.: Судостроение, 1978. – 504 с.
11. *Никифоров А.С.* Вибропоглощение на судах / А.С. Никифоров. – Л.: Судостроение, 1979. – 184 с.
12. Снижение шума в зданиях и жилых районах / Под. Ред. Г.Л. Осипова и Е.Я. Юдина. – М.: Стройиздат, 1987. – 560 с.
13. *Заборов В.И.* Защита от шума и вибраций в горной металлургии / В.И. Заборов, Л.Н. Клячко, Г.С. Росин. – М.: Металлургия, 1976.
14. *Шубов И.Г.* Шум и вибрации электрических машин / И.Г. Шубов – Л.: Энергия, 1974.
15. *Артоболевский И.И.* Введение в акустическую динамику машин / И.И. Артоболевский Ю.И. Бобровницкий, М.Д. Генкин – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1979. – 296 с.
16. *Нашиф А.* Демпфирование колебаний / А. Нашиф, Д. Джоунс, Дж. Хендерсон. – М.: Мир, 1988. – 448 с.
17. *Ферри Д.* Вязкоупругие свойства полимеров / Д. Ферри – М.: ИЛ, 1963. – 536 с.

18. Эластомерные и композиционные материалы в шумопоглощающих судовых конструкциях / Под ред. Ионова А.В. – СПб: Изд. ГНЦ РФ ЦНИИ им. акад. А.Н. Крылова, 2005.
19. Фавстов Ю.К. Сплав с высокими демпфирующими свойствами / Ю.К. Фавстов, Ю.Н. Шульга. – М.: Металлургия. 1973.
20. Makris N. Time domain viscoelastic analysis of Earth structures / N. Makris, J. Zhang // Earthquake Engineering and Structural Dynamics. – 2000. – V. 29. – P. 745–768.
21. Wang J. Intrinsic damping: modeling technique for engineering systems / J. Wang, A.M. Acce // Journal of structural Engineering. – 2009. – V. 135. – P. 282–291.
22. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле / С.П. Тимошенко, Д.Х. Янг, У. Уивер; пер. с англ. под ред. Э.И. Григолюка. – М.: Машиностроение, 1985. – 472 с.
23. Bishop R.E.D. Mechanics of Vibration / R.E.D. Bishop, D.C. Johnson. – Cambridge: Cambridge University, Press, 1960. – 592 p.
24. Скучик Е. Простые и сложные колебательные системы / Е. Скучик; пер. с англ. под ред. Л.М. Лямшева. – М: Мир, 1971. – 558 с.
25. Cremer L. Structure-Borne Sound / L. Cremer, M. Heckl, B.A.T. Petersson. – Berlin: Springer, 2005. – 608 p.
26. Junger M.C. Sound, structures and their Interactions / M.C. Junger, D. Feit. – NY: ASA Publisher, 1998. – 452 p.
27. Кочнева Л.Ф. Внутреннее трение в твердых телах при колебаниях / Л.Ф. Кочнева. – М.: Наука, 1979.
28. Пановко Я.Г. Внутреннее трение при колебаниях упругих систем / Я.Г. Пановко. – М.: Физматлит, 1960. – 194 с.
29. Давиденков Н.Н. О рассеянии энергии при вибрации / Н.Н. Давиденков // ЖТФ. – 1938. – Т. 8. – № 6. – С. 483–492.
30. Kimball A.B. Internal friction in solids / A.B. Kimball, D.E. Lovell // Phys. Rev., Ser. 2. – 1927. – V. 2. – P. 948–959.
31. Crandall S.H. The role of damping in vibration theory / S.H. Crandall // JSV. – 1970. – V. 11. № 1. – P. 3–18.
32. Bert C.W. Material damping: an introduction review of methamaterial models, measures and experimental techniques / C.W. Bert // JSV. – 1973. – V. 29. – № 2. – P. 129–153.
33. Писаренко Г.С. Применение методов нелинейной механики для учета рассеяния энергии в материале / Г.С. Писаренко // ЖТФ. – 1949. – Т. 19. – № 12.
34. Сорокин Е.С. Внутреннее и внешнее сопротивление при колебаниях твердых тел / Е.С. Сорокин. – М.: Гос. изд. лит. по строительству и архитектуре, 1957.

35. *Беранек Л.* Акустические измерения / Л. Беранек – М.: ИЛ, 1952. 430 с.
36. Handbook of acoustical measurements and noise control. Ed. / C.M. Harris Woodburg. – NY: ASA, 1998. – 1480 p.
37. *Клюкин И.И.* Акустические измерения в судостроении / И.И. Клюкин, А.Е. Колесников. – Л.: Судостроение, 1968. – 404 с.
38. *Цвикер К.* Звукопоглощающие материалы / К. Цвикер, К. Костен. – М.: ИЛ, 1952. – 370 с.
39. *Balint J.* Measuring sound absorption: the hundred-year debate on the reverberation room method / J. Balint, M. Berzborn, M. Nolan, M. Vorländer // *Acoustics Today*. – 2023. – Vol. 19. – № 3. – P. 13–21.
40. ISO-10534-2. Acoustics-Determination of sound absorption coefficients and impedance in impedance tubes. Part 1: method using standing wave ratio. Part 2: transfer function method, 1998.
41. ISO-534. Acoustics – Measurement of sound absorption in a reverberation room, 1985.
42. *Льюнг Л.* Идентификация систем. Теория для пользователя / Л. Льюнг, перевод с английского под ред. Я.З. Цыпкина. – М.: Наука. гл. ред. физ.-мат. лит., 1991. – 432 с.
43. *Ewins D.J.* Modal Testing: Theory and Practice / D.J. Ewins. – Letchworth, England: Research Studies Press., 1986. – 562 p.
44. *Бобровницкий Ю.И.* Импедансная теория поглощения звука: наилучший поглотитель и черное тело / Ю.И. Бобровницкий // *Акустический журнал*. – 2006. – Т. 52. – № 6. – С. 742–752.
45. *Min Yang* Acoustic metamaterial absorbers: path to commercialization / Yang Min, Sheng Ping // *Applied Physical Letters*. – 2023. – V. 122. – 260504.
46. *Gao N.* Acoustic metamaterials for noise reduction: a review / N. Gao, Z. Zhang, J. Deng, et al // *Advanced materials Technologies*. – 2022. – 2100698.
47. *Krushynska A.O.* Fundamentals and applications of metamaterials: breaking the limits / A.O. Krushynska, S. Janbaz, J.H. Oh, M. Wegener, N.X. Fang // *Applied Physics Letters*. – 2023. – V. 123. – 240401.
48. *Lu Q.* Perspective acoustic metamaterials in future engineering / Q. Lu, X. Li, X. Zhang, et al // *Engineering*. – 2022. – V. 17. – P. 22–30.
49. *Dykstra D.M.J.* The extreme mechanics of viscoelastic metamaterials / D.M.J. Dykstra, S. Janbaz, C. Coulais // *APL Materials*. – 2022. – V. 10. – 080702.
50. *Zhang J.* Review and perspective on acoustic metamaterials: from fundamentals to applications / J. Zhang, B. Hu, S. Wang // *Applied Physics Letters*. – 2023. – V. 123. – 010502.

51. Acoustic metamaterials: negative refraction, imaging, lensing and cloaking / Ed. R.V. Craster, S. Guenneau. – Dordrecht: Springer, 2013.
52. Special issue on acoustic metamaterials of J. Acoust. Soc. Am. – 2012. – V. 132. – № 4. – P. 2783–2945.
53. Бобровницкий Ю.И. Метаматериалы и поглощение звука (обзор) / Ю.И. Бобровницкий, Т.М. Томилина // Акустический журнал. – 2018. – Т. 64. – № 5. – С. 517–525.
54. Мокроусов М.И. Второй этап космического эксперимента «БТН Нейтрон» на борту российского сегмента международной космической станции: аппаратура БТН-М2 / М.И. Мокроусов, И.Г. Митрофанов, А.А. Аникин, Д.В. Головин, Н.Е. Карпушкина, А.С. Козырев, М.Л. Литвак, А.В. Малахов, А.Н. Пеков, А.Б. Санин, В.И. Третьяков // Космические исследования. – 2022. – Т. 60. – № 5. – С. 426–436.
55. Стретт Дж.В. (Лорд Рэлей). Теория звука. В двух томах. / Дж.В. Стретт, изд. второе под ред. С.М. Рытова. – М.: ГИТТЛ, 1955. – 504 с. & 476 с.
56. Исакович М.А. Общая акустика / М.А. Исакович. – М.: Наука. Глав. ред. физ.-мат. лит., 1973. – 496 с.
57. He J. Modal analysis / J. He, Z. Fu. – Oxford, UK: Butterworth Heinemann, 2001. – 296 p.
58. Heylen W. Modal analysis: theory and testing / W. Heylen, S. Lammens, P. Sas. – Leuven, Belgium: Katholieke Universiteit Leuven, 1998. – 170 p.
59. Maia N.M.M. Theoretical and experimental modal analysis / N.M.M. Maia, J.M.M. Silva. – Baldock, UK: Research Studies Press, Ltd. 1997. – 460 p.
60. Бобровницкий Ю.И. Гистерезисное демпфирование и причинность / Ю.И. Бобровницкий // Акустический журнал. – 2013. – Т. 59. – № 3. – С. 291–295.
61. Хорн Р. Матричный анализ / Р. Хорн, Ч. Джонсон, пер. с англ. под ред. Х.Д. Икрамова. – М.: Мир, 1989. – 656 с.
62. Ibrahim S.R. The experimental determination of vibration parameters from time responses / S.R. Ibrahim, E.C. Mikulcik // The shock and Vibration Bulletin. – 1976. – Vol. 46. – № 5. – P. 187–196.
63. Budwantord B. Comparisen of time domain modal identification methods / B. Budwantord, L. Jezequel // Proceedings of the 8th International modal analysis conference. Kissimmee, Fl., 1990. – P. 540–546.
64. Riche G. (Baron de Prony). Essai experimental et analytique: sur les lois de la delatabilite de fluides elastiques sur celles de la force expansive de la vapeur de l'eau et de la vapeur l'alcool, a differentes temperatures / G. Riche // Journal de L'ecole Polytechnique. – 1795. – Vol. 1. – № 2. – P. 24–76.

65. Марпл мл. С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения / С.Л. Марпл. мл., перевод с английского под ред. И.С. Рыжака. – М.: Мир, 1990. – 584 с.
66. Бейкер Дж. Аппроксимация Паде / Дж. Бейкер, П. Грейвс-Моррис, пер. с англ. под ред. Гонгара А.А. – М.: Мир, 1986.
67. Cadzow J.A. High performance spectral estimation – a new ARMA method / J.A. Cadzow // IEEE Trans. on acoustics, speech and signal processing. – 1980. – Vol. ASSP – 28. – № 5. – P. 524–529.
68. Бобровницкий Ю.И. Развитие и экспериментальная проверка метода оценки энергетических характеристик колеблющейся упругой конструкции по ее входному импедансу / Ю.И. Бобровницкий, М.П. Коротков // Акустический Журнал – 2000. – Т. 46. – № 6. – С. 748–755.
69. Springer handbook of acoustics / Ed. by T.D. Rossing. – NY: Springer, 2007. – 1182 p.
70. Бокс Дж. Анализ временных рядов. Прогноз и управление. В 2-х томах / Дж. Бокс, Г.Д. Дженкинс, перевод с английского под ред. В.Ф. Писаренко. – М.: Мир, 1974. – 604 с.
71. Бриллинджер Ф. Временные ряды. Обработка данных и теория / Ф. Бриллинджер, перевод с английского под ред. А.Н. Колмогорова. – М.: Мир, 1980. – 536 с.
72. Jury E.I. Sampled data control systems / E.I. Jury – NY: Wiley, 1958. – 453 p.
73. Цыпкин Я.З. Основы теории автоматических систем / Я.З. Цыпкин. – М.: Наука. гл. ред. физ.-мат. лит., 1977. – 510 с.
74. Åström K.J. Computer controlled systems. Theory and Design / K.J. Åström, B. Wittenmark. – Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1984. – 558 p.
75. Systems and control Encyclopedia / Ed. M.G. Singh. – Oxford: Pergamon Press, 1987. – 464 p.
76. Поляк Б.Т. Математическая теория автоматического управления / Б.Т. Поляк, М.В. Хлебников, Л.Б. Рапопорт. – М.: ЛЕЛАНД, 2019. – 500 с.
77. Эйкхофф П. Основы идентификации систем управления. Оценивание параметров и состояний. / П. Эйкхофф, перевод с английского под ред. Н.С. Райбмана. – М.: Мир, 1975. – 681 с.
78. Söderström T. System identification / T. Söderström, P. Stoica. – NY: Prentice-Hall, 1989. – 620 p.
79. Pintelon R. System identification. A frequency domain approach / R. Pintelon, J. Schoukens. – NY: IEEE Press, 2001. – 750 p.
80. Оппенгейм А.В. Цифровая обработка сигналов. 3-е издание. / А.В. Оппенгейм, Р.В. Шафер, перевод с английского под ред. С.Ф. Боева. – М.: Техносфера, 2019. – 1048 с.
81. IFAC Proceedings Volumes in ScienceDirect.com by Elsevier.

82. IFAC Papers On Line in ScienceDirect.com by Elsevier.

83. *Markel J.* Linear prediction of speech / J. Markel, A. Gray. – NY: Springer, 1976.

84. *Айвазян Г.А.* Эконометрика: продвинутый курс с приложениями в финансах / Г.А. Айвазян, Д. Фантаццини. – М.: Магистр: Инфра-М, 2014. – 944 с.

85. *Hoel S.* Optimal selection of autoregressive model coefficients for early damage detectability with an application to wind turbine blades / S. Hoel, P. Omenzetter // *Mechanical Systems and Signal Processing*. – 2016. – V. 70–71. – P. 557–577.

86. *Sakellariou J.S.* Vibration-based damage localization and estimation via the stochastic function model-based method: an overview / J.S. Sakellariou, S.D. Fassois, C.S. Sakaris // *Structural Health Monitoring*. – 2018. – V. 17(6). – P. 1335-1438.

87. *Candy J.V.* Multichannel spectral estimation in acoustics: a state-space approach / J.V. Candy, K.A. Fisher, J.E. Case, T.W. Goodrich // *J. Acoust. Soc. Amer.* – 2020. – V. 148(2). – P. 759–779.

88. *Spiridonakos M.D.* Non-stationary random vibration modelling and analysis via functional series time-dependent ARMA (FS-TARMA) models – A critical survey / M.D. Spiridonakos, S.D. Fassois // *Mechanical Systems and Signal Processing*. – 2014. – V. 47. – P. 175–224.

89. *Pi Y.L.* Modal identification of vibrating structures using ARMA model / Y.L. Pi, N.C. Mickleborough // *Journal of Engineering Mechanics*. – 1989. – V. 115. – P. 2232–2250.

90. *Fassois S.D.* Identification, model-based methods / S.D. Fassois // *Encyclopedia of Vibration*, Elsevier. – 2001. – P. 673–685.

91. *Котельников В.А.* О пропускной способности “эфира” и проволоки в электросвязи / В.А. Котельников, перепечатка статьи 1933 года // *УФН*. – 2006. – Т. 176. – № 7. – С. 762–770.

92. *Гельфонд А.О.* Исчисление конечных разностей. 2-е изд / А.О. Гельфонд. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1959. – 400 с.

93. *Макаров О.И.* Интеграл Зоммерфельда в задачах моделирования дифракции акустических волн с помощью треугольной сетки / О.И. Макаров, А.В. Шанин, А.И. Корольков // *Акустический журнал*. – 2023. – Т. 69. – № 2. – С. 129–145.

94. *Reinders E.* System identification methods for (operational) modal analysis: review and comparison / E. Reinders // *Archives of Computational Methods in Engineering*. – 2012. – V. 19. – № 1. – P. 51–124.

95. *Скучик Е.* Простые и сложные колебательные системы / Е. Скучик, пер с английского под ред. Л.М. Лямшева. – М.: Мир, 1971. – 552 с.

96. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. – М.: Наука, 1966. – 576 с.
97. Lin C.-Sh. Extended time series algorithm for model identification from nonstationary ambient response data only / C.-Sh. Lin, D.-Y. Chiang, T.-C. Tseng // Mathematical Problems in Engineering. – 2014. – Article ID 391815. – P. 12.
98. <https://www.mathworks.com/help/ident/ref/arx.html>
99. <https://www.mathworks.com/help/ident/ref/armax.html>
100. Akaike H. A new look at the statistical model identification / H. Akaike // IEEE Transactions on Automatic Control. – 1974. – V. AC-19. – № 6. – P. 716–723.
101. Корн Г. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). Определения, теоремы, формулы / Г. Корн, Т. Корн. – М.: Наука, 1984. – 832 с.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Список публикаций автора по теме диссертации

- A1. Карпов И.А., Бобровницкий Ю.И. Экспериментальный метод определения потерь энергии в колебательных системах, основанный на ARMA-моделировании // Акустический журнал. – 2025. – Т. 71. – № 2. – С. 155–175.

DOI: 10.31857/S0320791925020018

URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=82356290>

[РИНЦ]

- A2. Бобровницкий Ю.И., Карпов И.А. Дискретная акустика: ARMA-моделирование временных процессов, теория // Акустический журнал. – 2023. – Т. 69. – № 6. – С. 665–684.

DOI: 10.31857/S0320791923600671

URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=55850053>

[РИНЦ]

Перевод:

Bobrovnikskii Y.I., Karpov I.A. Discrete acoustics: ARMA-modeling of time processes, theory // *Acoustical Physics*. – 2023. – V. 69. № 6. – P. 749–767.

DOI: 10.1134/S106377102360095X

URL: <https://link.springer.com/article/10.1134/S106377102360095X>

[WoS, Q2]

- A3. Карпов И.А., Гребенников А.С., Ким. А.А. Применение параметрического моделирования случайных процессов для определения потерь в линейных колебательных системах. // Известия РАН. Серия физическая. – 2021. – Т. 85. – № 6. – С. 889–894.

DOI: 10.31857/S0367676521060120

URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=45795001>

[РИНЦ]

Перевод:

Karpov I.A., Grebennikov A.S., Kim A.A. Application of autoregressive moving average modeling of random processes to identify the loss factor of linear oscillatory systems // *Acoustical Physics*. – 2021. – V. 67. – № 6. – P. 694–699.

DOI: 10.1134/S1063771021330034

URL: <https://link.springer.com/article/10.1134/S1063771021330034>

[WoS, Q2]

- A4. Бобровницкий Ю.И., Томилина Т.М., Бахтин Б.Н., Гребенников А.С., Асфандияров Ш.А., Карпов И.А., Ким А.А. Лабораторная установка для исследования звукопоглощающих покрытий из метаматериалов при скользящем распространении звука и влияние типа источника на их эффективность // Акустический журнал. – 2020. – Т. 66. – № 3. – С. 332–341.

DOI: 10.31857/S0320791920030016

URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=42636195>

[РИНЦ]

Перевод:

Bobrovnikskii Y.I., Tomilina T.M., Bakhtin, B.N., Grebennikov A.S., Asfandiyarov S.A., Karpov I.A., Kim A.A. Laboratory experimental facility for studying metamaterial sound-absorbing duct linings with grazing sound propagation and how the type of source influences their efficiency // *Acoustical Physics*. – 2020. – V. 66. – № 3. – P. 324–332.

DOI: 10.1134/S106377102003001X

URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=43285180>

[WoS, Q2, РИНЦ]

- A5. Бобровницкий Ю.И., Карпов И.А. Применение дискретных моделей в механике и акустике // Сборник аннотаций 51 школы-конференции «Актуальные проблемы механики» памяти Д.А. Индейцева – Великий Новгород: Издательство Новгородского государственного университета им. Ярослава Мудрого, 2024. – С. 109–110.

URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=77540105>

[РИНЦ]

- A6. Карпов И.А. Новый критерий для определения порядка ARMA- и ARX-моделей колебательных систем // Динамика и виброакустика машин: сборник докладов седьмой международной научно-технической конференции – Самара: Самарский университет, 2024. – С. 38–39.

URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=80346383>

[РИНЦ]

- A7. Карпов И.А. Особенности использования ARMA и ARX моделей на примере исследования акустических поглотителей метаматериального типа // Акустический журнал. – 2024. – Т. 70. – № S5. – С. 30.

URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=76094228>

[РИНЦ]

A8. Карпов И.А., Гребенников А.С. Применение ARMA-моделирования для оценки эффективности поглощения акустических метаматериалов резонансного типа // Сборник трудов XXXV сессии Российского акустического общества – Москва: Издательство ГЕОС, 2023. – С. 997.

DOI: 10.34756/GEOS.2023.17.38565

URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=53741571>

[РИНЦ]

A9. Карпов И.А. Дискретно-временное моделирование колебаний упругих тел в проблеме экспериментальной идентификации демпфирования // Сборник трудов Международной научной конференции «Машины, технологии и материалы для современного машиностроения», посвященной 85-летию ИМАШ РАН – Москва: ИМАШ РАН, 2023. – С. 213.

URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=60013062>

[РИНЦ]

A10. Карпов И.А. Измерение количества демпфирования с помощью дискретных ARX-моделей: построение модели, область применимости метода, примеры // Тезисы докладов XX научно-технической конференции по аэроакустике – Жуковский: ЦАГИ, 2023. – С. 233–234.

URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=54888177>

[РИНЦ]

A11. Карпов И.А. К вопросу об идентификации потерь в линейных колебательных системах путем применения параметрического моделирования, основанного на ARX-моделях // Динамика и виброакустика машин: материалы шестой международной научно-технической конференции – Самара: Самарский университет, 2022. – С. 210-211.

URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=50390711>

[РИНЦ]

A12. Карпов И.А. Исследование особенностей и границ применимости параметрического метода измерения потерь в колебательных системах // Сборник трудов XXXIV сессии Российского акустического общества – Москва: Издательство ГЕОС, 2022. – С. 1151.

URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=54227282>

[РИНЦ]

A13. Карпов И.А., Гребенников А.С. Параметрический метод измерения потерь в колебательных системах // Сборник тезисов Всероссийского Аэроакустического форума – Жуковский: ЦАГИ, 2021. – С. 134.

URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=49325393>

[РИНЦ]

- A14. Карпов И.А. Параметрическое моделирование виброакустических дискретно-временных случайных процессов и применение для идентификации колебательных систем // Ученые Записки Физического Факультета Московского Университета. – 2020. – № 1. – 2011701.

URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=42605687>

[РИНЦ]

- A15. Карпов И.А., Гребенников А.С., Ким А.А. Применение параметрического моделирования случайных процессов для определения потерь в линейных колебательных системах // Труды III Всероссийской акустической конференции – СПб: Политех-Пресс, 2020. – С. 545–549.

URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=44052342>

[РИНЦ]

Доклады автора по теме диссертации на конференциях

- K1. Международная 52 школа-конференция «Актуальные проблемы механики» памяти Н.Ф. Морозова, 23-27 июня 2025, г. Санкт-Петербург.

Карпов И.А. – Особенности применения дискретных моделей типа ARMA и ARX в механике и акустике.

- K2. Всероссийская научная политематическая конференция «XXXVI сессия Российского акустического общества», 21-25 октября 2024, г. Москва.

Карпов И.А. – Особенности использования ARMA- и ARX-моделей на примере исследования акустических поглотителей метаматериального типа.

- K3. Международная 51 школа-конференция «Актуальные проблемы механики» памяти Д.А. Индейцева, 19-21 июня 2024, г. Великий Новгород.

Бобровницкий Ю.И., Карпов И.А. – Применение дискретных моделей в механике и акустике.

- K4. Международная научно-техническая конференция «Динамика и виброакустика машин» (ДВМ`2024), 4-6 сентября 2024, г. Самара.

Карпов И.А. – Новый критерий для определения порядка ARMA- и ARX-моделей колебательных систем.

- K5. Всероссийская научная политематическая конференция «XXXV сессия Российского акустического общества», 13-17 февраля 2023, г. Москва.

Карпов И.А., Гребенников А.С. – Применение ARMA-моделирования для оценки эффективности поглощения акустических метаматериалов резонансного типа.

- К6. XX Научно-техническая конференция по аэроакустике. 24-29 сентября 2023, г. Суздаль.
Карпов И.А. – Измерение количества демпфирования с помощью дискретных ARX-моделей: построение модели, область применимости метода, примеры.
- К7. Международная научная конференция «Машины, технологии и материалы для современного машиностроения», посвященная 85-летию ИМАШ РАН. 23 ноября 2023, г. Москва.
Карпов И.А. – Дискретно-временное моделирование колебаний упругих тел в проблеме экспериментальной идентификации демпфирования.
- К8. Всероссийская научная политематическая конференция «XXXIV сессия Российского акустического общества», 14-18 февраля 2022, г. Москва.
Карпов И.А. – Исследование особенностей и границ применимости параметрического метода измерения потерь в колебательных системах.
- К9. Международная научно-техническая конференция «Динамика и виброакустика машин» (ДВМ'2022), 21-23 сентября 2022, г. Самара.
Карпов И.А. – К вопросу об идентификации потерь в линейных колебательных системах путем применения параметрического моделирования, основанного на ARX-моделях.
- К10. Всероссийский Аэроакустический Форум, 20-25 сентября 2021, г. Геленджик.
Карпов И.А., Гребенников А.С. – Параметрический метод измерения потерь в колебательных системах.
- К11. III Всероссийская акустическая конференция, 21-25 сентября 2020, г. Санкт-Петербург.
Карпов И.А., Гребенников А.С., Ким. А.А. – Применение параметрического моделирования случайных процессов для определения потерь в линейных колебательных системах.
- К12. Всероссийская научная политематическая конференция «XXXII сессия Российского акустического общества», 14-18 октября 2019, г. Москва.
Карпов И.А. – Параметрическое моделирование виброакустических дискретно-временных случайных процессов и применение для идентификации колебательных систем.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Замена производных конечными разностями

Одним из часто используемых в литературе методов построения дискретных конечно-разностных уравнений по известному непрерывному дифференциальному уравнению является метод, основанный на простой замене производных соответственными конечными разностями. В этом приложении на примере механического осциллятора показано, что этот метод может приводить к существенному изменению колебательных свойств осциллятора и, следовательно, не может применяться к решению акустических задач.

Пусть имеется механический осциллятор без потерь (рис. 2.1, $c = 0$), который описывается однородным обыкновенным дифференциальным уравнением (2.7):

$$\frac{d^2 u(t)}{dt^2} + \omega_0^2 u(t) = 0 \quad (\text{Б1})$$

и совершает свободные колебания с заданной частотой ω_0 и начальными условиями:

$$u(0) = u_0, \quad \frac{du(0)}{dt} = 0. \quad (\text{Б2})$$

Нетрудно получить решение задачи (Б1) – (Б2). Оно равно

$$u(t) = u_0 \cos(\omega_0 t) \quad (\text{Б3a})$$

или после дискретизации с частотой $\Omega = 2\pi/T$

$$u[n] = u(nT) = u_0 \cos(\omega_0 nT). \quad (\text{Б3b})$$

Решение (Б3) описывает незатухающие гармонические колебания с амплитудой u_0 и частотой ω_0 .

Построим теперь для этого осциллятора конечно-разностное уравнение, заменив формально в уравнении (Б1) вторую производную известным конечно-разностным выражением, и сравним его решение с решением (Б3). Положив в (Б1) $u(t) = u[n]$ и заменив вторую производную так называемой нисходящей конечной разностью второго порядка [101]

$$\frac{1}{T^2} (u[n+2] - 2u[n+1] + u[n]), \quad (\text{Б4})$$

получим следующее однородное конечно-разностное уравнение для дискретных колебаний механического осциллятора:

$$u[n+2] - 2u[n+1] + [1 + (\omega_0 T)^2] u[n] = 0 \quad (\text{Б5})$$

и его общее решение [92], равное

$$u[n] = C_1 (1 + i\omega_0 T)^n + C_2 (1 - i\omega_0 T)^n,$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные. Наложив на него начальные условия $u[0] = u_0, u[1] - u[0] = 0$, аналогичные условиям (Б2), получим $C_1 = C_2 = u_0/2$ и окончательное решение задачи

$$u[n] = u_0 r^n \cos(\omega T n), \quad (\text{Б6})$$

где $r = [1 + (\omega_0 T)^2]^{1/2}$ и $\omega = \frac{1}{T} \arctg(\omega_0 T)$, описывающее свободные дискретные колебания рассматриваемого механического осциллятора с начальным смещением u_0 и нулевой начальной скоростью.

Сравнение двух решений (Б3) и (Б6), полученных для одной и той же структуры, показывает, что они близки по форме и численно только при малых интервалах дискретизации T и небольших значениях количества отсчетов n . Однако с физической (колебательной) точки зрения они различаются принципиально. Во-первых, амплитуда колебаний (Б6) не остается постоянной, а растет экспоненциально со временем, т.к. $r > 1$. Физически это означает, что осциллятор обладает отрицательным демпфированием и является, следовательно, неустойчивой колебательной системой, что, очевидно, не соответствует действительности. Во-вторых, согласно (Б6), осциллятор колеблется с частотой ω , которая не равна заданной ω_0 .

Для наглядности рассмотрим пример, когда частота дискретизации Ω в 10 раз превышает частоту колебаний осциллятора ω_0 . В этом случае $\omega_0 T = \pi/5 \approx 0.628$ и амплитуда колебаний (Б6) возрастает более чем в 5 раз через каждые 10 отсчетов, а частота колебаний уменьшается почти в два раза, $\omega/\omega_0 = 0.56$.

Таким образом, метод получения дискретного AR-уравнения из непрерывного уравнения путем замены производной по времени конечной разностью превратило обычный механический осциллятор без потерь в совершенно другую структуру, обладающую качественно отличными акустическими свойствами.

Отметим, что, если вторую производную по времени в уравнении (Б1) заменить, вместо (Б4), восходящей конечной разностью второго порядка [101],

$$\frac{1}{T^2} (u[n] - 2u[n-1] + u[n-2]),$$

то вместо (Б6) получится уравнение

$$\left[1 + (\omega_0 T)^2\right] u[n] - 2u[n-1] + u[n-2] = 0,$$

имеющее решение

$$u[n] = u_0 r^{-n} \cos(\omega T n), \quad (\text{Б7})$$

с теми же значениями r и ω , что и в (Б6). Но в отличие от (Б6), решение (Б7) экспоненциально убывает по амплитуде, что физически эквивалентно наличию положительного демпфирования в осцилляторе.

Таким образом, показано, что общепринятый способ перехода от непрерывных уравнений к дискретным конечно-разностным уравнениям с помощью замены производных конечными разностями может приводить к большим отличиям от соответственных непрерывных решений, вплоть до изменения типов колебательного или волнового движения, сопровождаясь изменением собственных частот и появлением ложных потерь. Из проведенного анализа следует, что для решения акустических задач применение рассмотренного метода некорректно и нужно использовать другие методы, которые не изменяют колебательных или волновых свойств исследуемых сред и структур, например, метод данной диссертации, основанный на равенстве решений непрерывного и дискретного уравнений в дискретных точках.

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Вывод формулы (2.25), ее связь с временными рядами и z -преобразованием

Когда говорят о спектре какого – либо непрерывного временного сигнала $x(t)$, то чаще всего подразумевают классическое преобразование Фурье в бесконечных пределах, уточняя при этом величину постоянных множителей перед прямым и обратным преобразованием. Однако, существуют и другие определения спектра, например, спектр временного ряда (т.е. дискретно- временное преобразование Фурье), спектр периодического сигнала (ряд Фурье), конечный ряд Фурье. Наконец, существует z -преобразование и z -спектр дискретных сигналов, тесно связанный с рядом Фурье. Подробный анализ и связь между этими спектральными вариантами можно найти в книге [65]. В данном приложении в качестве главного используется определение спектра, основанного на классическом преобразовании Фурье в следующей традиционной форме:

$$X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i\omega t} dt, \quad x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (B1)$$

Таковыми, например, являются спектры (2.13) и (2.25). Доказательство теоремы (2.25), которое дано в этом Приложении, также производится в рамках преобразования (B1). Однако, в конце Приложения приведена связь со спектрами временных рядов, а также с z -спектрами, использование которых во многих практических задачах оказывается технически эффективнее.

Пусть в соответствии с (B1) имеется непрерывный сигнал $x(t)$ и его спектр Фурье $X(\omega)$. Требуется найти спектр Фурье дискретизированной функции $x_d(t)$ и показать, что он равен (2.25). Адекватным представлением дискретизированной функции является в этом случае произведение непрерывной функции $x(t)$ и так называемой функции дискретизации (Time Sampling function) или «гребенки Дирака» $TS_T(t)$:

$$x_d(t) = x(t) TS_T(t). \quad (B2)$$

Она определяется через дельта-функции Дирака как

$$TS_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\frac{t}{T} - n\right) = T \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT), \quad (B3)$$

где T – интервал дискретизации. Функция дискретизации – это периодическая функция времени с периодом T , отличная от нуля в дискретных точках $t = nT$, n – целое. В силу периодичности, она может быть представлена также в виде ряда Фурье [101]:

$$TS_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i2\pi nt/T} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\Omega t}, \quad (B4)$$

где $\Omega = 2\pi/T$ – круговая частота дискретизации.

Для доказательства равенства (2.25) нам потребуется спектр Фурье $S_{TS}(\omega)$ функции дискретизации, т.е. ее прямое преобразование (B1). Воспользовавшись ее представлениями (B3) и (B4), с помощью первой формулы (B1) получим для него

$$S_{TS}(\omega) = \frac{1}{\Omega} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i2\pi n\omega/\Omega} = \frac{1}{\Omega} FS_{\Omega}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\Omega). \quad (B5)$$

Здесь функция $FS_{\Omega}(\omega)$ – это частотная гребенка Дирака (Frequency Sampling function), равная временной гребенке после замены t и T на ω и Ω . Таким образом, спектр временной гребенки Дирака пропорционален гребенке Дирака в частотной области.

Найдем теперь классический спектр Фурье дискретной функции (B2):

$$X_d(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) TS_T(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{T}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) e^{-i\omega Tn}. \quad (B6)$$

Из теории преобразования Фурье [65] известно, что спектр произведения двух функций времени равен свертке их спектров, т.е.

$$X_d(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega - \varphi) S_{TS}(\varphi) d\varphi.$$

Подставляя сюда спектры (B1) и (B5), получим

$$X_d(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega - n\Omega), \quad (B7)$$

что и доказывает справедливость теоремы (2.25).

Нетрудно проверить правильность этого результата, взяв от (B7) обратное преобразование Фурье. Действительно, в результате элементарных преобразований имеем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega - n\Omega) e^{i\omega t} d\omega = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\Omega t} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega - n\Omega) e^{i(\omega - n\Omega)t} d(\omega - n\Omega) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\Omega t} = x_d(t),$$

что и должно быть. Здесь было использовано представление (B4) для функции дискретизации.

Укажем теперь на связь классического спектра Фурье (B7) со спектром временного ряда и z -спектром. В теории временных рядов [70, 71] спектр временного ряда $x[n]$ определяется как

$$S_x(e^{j\omega T}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega T n}. \quad (B8)$$

Сравнение определения (B8) с соотношением (B6) приводит к равенству

$$S_x(e^{j\omega T}) = \Omega X_d(\omega), \quad (B9)$$

которое означает, что спектр $S_x(e^{j\omega T})$ временного ряда как функция частоты ω равен с точностью до множителя Ω классическому спектру $X_d(\omega)$ дискретизированной функции $x(nT)$. Как и спектр $X_d(\omega)$, спектр временного ряда является периодической функцией частоты ω с периодом Ω и потому представим в виде ряда Фурье в частотной области:

$$S_x(e^{j\omega T}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-j\omega T n}. \quad (B10)$$

Соотношение (B8) как раз и является таким представлением, причем коэффициенты ряда Фурье равны соответственным значениям временного ряда. Покажем это также напрямую, исходя из общей теории рядов Фурье. Действительно, по определению [101], n -ый коэффициент разложения равен:

$$c_n = \frac{1}{\Omega} \int_{-\Omega/2}^{\Omega/2} S_x(e^{j\omega T}) e^{j\omega T n} d\omega = \int_{-\Omega/2}^{\Omega/2} X_d(\omega) e^{j\omega T n} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega T n} d\omega = x(nT), \quad (B11)$$

т.е. n -ому значению временного ряда $x[n]$. Таким образом, спектр временного ряда полностью определяется соотношениями (B8) – (B11), которые фактически являются обычным рядом Фурье в частотной области.

Важной особенностью спектра временного ряда, как это видно из (B8) и (B10), является то, что он представляет собой так называемую сложную функцию частоты, т.е. он является функцией некоторой промежуточной переменной, которая в свою очередь является функцией частоты. Эта промежуточная переменная в данном случае равна z -переменной:

$$z = e^{j\omega T}. \quad (B12)$$

Нетрудно видеть, что именно z -переменная обеспечивает периодичность спектра по частоте ω с периодом $\Omega = 2\pi/T$, в то время как сама спектральная функция $S_x(z)$ периодической по z не является. Как показано в тексте работы (см., например, (2.26)), для дискретных ARMA-сигналов она представляет собой отношение двух полиномов по z .

В теории временных рядов [70, 71] вместо ряда Фурье (B10), (B11) обычно используется т.н. z -преобразование, которое получается из него с помощью замены переменной (B12). Формально z -преобразование характеризуется соотношениями

$$\begin{aligned} S_x(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}, \\ x[n] &= \frac{1}{2\pi i} \oint S_x(z) z^{n-1} dz, \end{aligned} \tag{B13}$$

которые эквивалентны (B10) и (B11). Интегрирование в обратном z -преобразовании (B13) производится в комплексной плоскости z по единичной окружности против часовой стрелки. «Свертывание» периодичности спектров временных рядов с помощью замены (B12) существенно упрощает спектральный анализ благодаря компактности и простоте, что сделало z -преобразование незаменимым в теории дискретных систем и превратило его в самостоятельный хорошо развитый раздел математической теории цифровой обработки сигналов [71, 80].