

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
«Институт машиноведения им. А. А. Благонравова Российской академии наук»

На правах рукописи



Исполков Егор Михайлович

**РАЗРАБОТКА И ИССЛЕДОВАНИЕ ТРЕХПОДВИЖНЫХ МЕХАНИЗМОВ
ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ С ИНТЕГРИРОВАННЫМ СХВАТОМ**

Специальность 2.5.2. Машиноведение

диссертация на соискание ученой степени

кандидата технических наук

Научный руководитель:
доктор технических наук, доцент
Ларюшкин Павел Андреевич

Москва 2026

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	4
Глава 1. Обзор конструкций и применений механизмов параллельной структуры, использование избыточности для расширения их функциональных возможностей.....	12
1.1. Общие сведения о последовательных и параллельных механизмах	12
1.2. Конструкции и применения механизмов параллельной структуры	14
1.3. Избыточность в механизмах параллельной структуры.....	24
1.4. Результаты и выводы по главе.....	30
Глава 2. Синтез и анализ плоского механизма с кинематической избыточностью	32
2.1. Структура и кинематическая схема.....	32
2.2. Решение задачи о положениях и анализ рабочей зоны	36
2.3. Скоростной и силовой анализ, исследование особых положений.....	45
2.4. Результаты и выводы по главе.....	58
Глава 3. Синтез и анализ пространственного поступательно-направляющего механизма с кинематической избыточностью	59
3.1. Структура и кинематическая схема.....	59
3.2. Решение обратной задачи о положениях и анализ рабочей зоны.....	63
3.3. Решение прямой задачи о положениях	70
3.4. Скоростной и силовой анализ, исследование особых положений.....	82
3.5. Результаты и выводы по главе.....	96
Глава 4. Разработка и исследование физических прототипов механизмов	98
4.1. Разработка прототипа плоского механизма	98

4.2. Разработка прототипа пространственного механизма	104
4.3. Экспериментальное исследование силы на схвате плоского механизма ...	109
4.4. Результаты и выводы по главе.....	116
Заключение	117
Список литературы	119
Приложение А. Акты внедрения научных результатов	130

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы диссертации

Автоматизация и роботизация технологических процессов, бесспорно, является одним из главных трендом последних десятилетий в области техники и технологии. Повсеместное внедрение промышленных роботов позволяет существенно ускорить производственные процессы, повысить качество продукции и максимально снизить влияние человеческого фактора. Все это способствует росту производительности и конкурентоспособности как отдельных предприятий, так и целых отраслей промышленности, и, как следствие, повышению устойчивости реального сектора экономики страны.

Практическое внедрение современных робототехнических систем невозможно без развития научных методов синтеза и анализа их механической составляющей. При этом одним из перспективных направлений является разработка структурных схем механизмов роботов, имеющих параллельную кинематическую структуру, то есть включающих несколько кинематических цепей, соединяющих выходное звено механизма с неподвижным основанием. Такая структура, в отличие от традиционной последовательной, позволяет размещать все приводы на основании, что существенно снижает массу подвижных частей механизма и, как следствие, значительно повышает его динамические характеристики. Кроме того, распределение внешних нагрузок между несколькими кинематическими цепями позволяет обеспечивать высокую жесткость механизма.

Решению задач синтеза и анализа механизмов параллельной структуры посвящены труды таких ученых, как В.А. Глазунов, Ф.М. Диментберг, А.Ф. Крайнев, Г.В. Рашоян, Г.С. Филиппов, П.А. Ларюшкин, А.С. Фомин, А.В. Антонов, С.В. Хейло, С.В. Палочкин, М.Н. Захаров, К.Г. Эрастова, Л.А. Рыбак, В.Н. Пащенко, И.А. Несмиянов, П.Г. Мудров, Э. Гоф, Д. Стюарт, К. Хант, К. Госслен, Х. Анджелес, Д. Златанов, С. Брио, С. Кун, Л. Цай, Дж. Дуффи, Ф. Венгер, Ю. Такеда, К. Сугимото, Ж.-П. Мерле, Г. Гогу, Р. Клавель,

И. Бонев, Ж. Эрве, М. Лариби, М. Чекарелли, Д. Карбоне, В. Паренти-Кастелли, А. Мюллер и многих других.

Наряду с очевидными достоинствами, механизмы параллельной структуры обладают и рядом недостатков. Так, размеры их рабочей зоны меньше, чем у механизмов с последовательной структурой, ввиду большего количество конструктивных ограничений, накладываемых несколькими кинематическими цепями одновременно. Еще одним серьезным недостатком является более широкий спектр так называемых особых положений. При попадании в такое положение, механизм может потерять степень свободы, либо может возникнуть неконтролируемое движение выходного или промежуточных звеньев механизма.

Одним из способов увеличения рабочей зоны и избегания особых положений для механизмов параллельной структуры является использование избыточности, которая может быть приводной, либо кинематической. Приводная избыточность подразумевает, что приводов в механизме больше, чем степень его подвижности, в то время как в кинематически избыточном механизме степень подвижности и число приводов одинаково, однако, больше, чем необходимо для реализации заданных законов движения выходного звена. При этом введение любого типа избыточности также может быть сопряжено с определенными сложностями. Например, при приводной избыточности требуется точная синхронизация приводов, для предотвращения их взаимного влияния на работу друг друга, а у кинематически избыточных механизмов увеличивается количество звеньев и шарниров, что может негативно отразиться на их точности.

Помимо увеличения размеров рабочей зоны и избегания особых положений, кинематическая избыточность также может быть использована для расширения функциональных возможностей механизмов, в частности для реализации возможности захвата объектов манипулирования непосредственно выходным звеном без использования дополнительных устройств. В то же время количество примеров реализации данной концепции, описанных в научной литературе, крайне мало. В этой связи, тема настоящей диссертации, посвященной разработке механизмов с интегрированным схватом и их исследованию, представляется

актуальной. При этом акцент делается на трехподвижные плоские и поступательно-направляющие механизмы, поскольку указанные типа движения выходного звена являются одними из самых распространенных среди механизмов параллельной структуры.

Область исследования

Область исследования диссертации соответствует следующим пунктам паспорта научной специальности 2.5.2. Машиноведение:

Пункт 1. Синтез структурных и кинематических схем механизмов и обобщенных структурных схем машин, оптимизация параметров;

Пункт 2. Теория и методы проектирования машин и механизмов, систем приводов, узлов и деталей машин;

Пункт 3. Методы кинематического и динамического анализа, в том числе математического моделирования, анимационного и экспериментального исследования механизмов.

Цель работы – разработка трехподвижных механизмов параллельной структуры с интегрированным схватом и исследование их функциональных характеристик.

Для достижения поставленной цели в диссертации решаются следующие **задачи**:

1. Синтез структурных схем плоского и поступательно-направляющего механизмов параллельной структуры с кинематической избыточностью и составным выходным звеном, дополнительная подвижность которого может быть использована для реализации функции захвата объектов манипулирования;

2. Разработка математических моделей предложенных механизмов, в том числе вывод уравнений связи, решение прямой и обратной задачи о положениях, а также анализ рабочей зоны, скоростных и силовых характеристик этих механизмов;

3. Анализ особых положений механизмов, включая оценку близости к особым положениям разных типов с использованием условий максимизации скоростей и усилий в приводных шарнирах, а также анализ максимального усилия,

развиваемого на схвате механизма для заданной внешней нагрузки при известных предельно допустимых значениях усилий на приводах;

4. Разработка конструкции, трехмерное моделирование, изготовление, сборка и отладка физических прототипов механизмов, экспериментальная проверка их работоспособности и аналитической методики расчета максимальной силы на схвате.

Научная новизна:

1. Предложены структурные схемы новых трехподвижных плоского и поступательно-направляющего механизмов параллельной структуры с кинематической избыточностью, которая может быть использована для реализации функции захвата объектов манипулирования непосредственно выходным звеном механизма;

2. Разработаны математические модели предложенных механизмов, основанные на аналитическом решении задачи о положениях в общем виде и дифференцировании уравнений связи, что позволяет проводить анализ кинематических и силовых характеристик этих механизмов, а также исследовать их особые положения

3. Предложена расчетная методика вычисления максимального значения усилия, развиваемого на схвате механизма, для заданной внешней нагрузки при известных значениях максимально допустимых усилий на приводах механизма.

Практическая значимость:

1. На примере трехподвижных плоского и поступательно-направляющего механизмов параллельной структуры обоснована возможность использования составного выходного звена в качестве интегрированного схвата, что позволяет избежать необходимости применения отдельного захватного устройства и, как следствие, увеличения массы подвижных частей механизма;

2. Разработаны прикладные программы, реализующие аналитические алгоритмы расчета кинематики и статики предложенных механизмов с интегрированным схватом, а также итерационные алгоритмы анализа и визуализации рабочей зоны и особых положений механизмов;

3. Созданы компьютерные твердотельные модели и физические прототипы разработанных механизмов, а также с использованием прототипа плоского механизма получены новые экспериментальные данные, подтверждающие применимость предложенной аналитической методики для расчета силы на схвате.

Реализация результатов работы

Полученные результаты применяются в АО «Композит» при создании технологического оборудования, предназначенного для изготовления армирующих каркасов нетканой структуры, а также в учебном процессе МГТУ им. Н. Э. Баумана при подготовке магистров по направлению 15.04.01 «Машиностроение», что подтверждается соответствующими актами (Приложение А).

Методы исследования

В работе использованы методы теоретической механики, теории механизмов и машин, линейной алгебры и математического анализа, численные методы, а также методы и приемы математического и компьютерного моделирования.

Основные положения, выносимы на защиту

1. Новые структурные схемы плоского и поступательно-направляющего механизмов параллельной структуры с функцией захвата объекта манипулирования непосредственно выходным звеном механизма, реализованной за счет кинематической избыточности;

2. Математические модели предложенных механизмов и полученные с использованием указанных моделей результаты анализа рабочей зоны этих механизмов, их кинематических и силовых характеристик, а также анализа особых положений разных типов и близости к ним с использованием условий максимизации приводных скоростей и усилий;

3. Методика расчета максимальной силы, развиваемой на схвате механизмов при заданных значениях внешней нагрузки и предельно допустимой нагрузки на приводы, а также результаты экспериментального исследования плоского механизма, подтверждающие применимость разработанной расчетной методики.

Достоверность полученных результатов

Достоверность результатов подтверждается использованием общепринятых расчетных методик и допущений, характерных для работ в области теоретической механики и теории механизмов и машин, применением современного программного обеспечения, а также проверкой теоретических результатов компьютерным моделированием и натурным экспериментом.

Апробация работы

Основные результаты, изложенные в диссертации, были представлены на следующих конференциях:

- 14-я Международная научно-практическая конференция «Современное машиностроение: Наука и образование MMESE-2025», Санкт-Петербург, 2025;
- 20-я Всероссийская научно-техническая конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Измерения, автоматизация и моделирование в промышленности и научных исследованиях» (ИАМП-2025), Бийск, 2025;
- 37-я Международная инновационная конференция молодых учёных и студентов по современным проблемам машиноведения (МИКМУС-2025), Москва, 2025.

Личный вклад

В работе лично автором предложены новые схемы плоского и поступательно-направляющего механизмов параллельной структуры с интегрированным схватом, разработаны математические модели кинематики и статики указанных механизмов, с использованием которых проведен анализ механизмов, включая исследование их особых положений и расчет максимальной силы на схвате. Также лично автором разработаны САД-модели физических прототипов механизмов, осуществлена их сборка и проведен натурный эксперимент.

Публикации

По теме проведенных исследований опубликовано 7 работ: 2 статьи в периодических изданиях, включенных в Перечень ВАК РФ, 2 статьи в изданиях, индексируемых в базах Scopus и Web of Science (в том числе статья в журнале первого квартиля базы Scopus), 3 работы, индексируемые в РИНЦ.

Объем и структура диссертации

Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы из 106 наименований и приложения. Объем диссертации составляет 131 страницы, включая 63 рисунка и 3 таблицы.

В первой главе представлен обзор научной литературы и примеров практического использования механизмов параллельной структуры в различных областях техники и технологии с указанием их основных достоинств и недостатков по сравнению с механизмами последовательной структуры. При этом акцент делается на примерах использования избыточности в механизмах данного класса для устранения указанных недостатков и расширения функциональных возможностей механизмов, в частности, увеличения рабочей зоны или избегания особых положений.

Во второй главе предлагается схема нового плоского механизма параллельной структуры с кинематической избыточностью, наличие которой позволяет реализовывать функцию захвата объекта манипулирования непосредственно выходным звеном механизма. Для предложенного механизма приводится аналитическое решение прямой и обратной задачи о положениях, а также результаты скоростного и силового анализа, анализа его рабочей зоны, включая исследование особых положений разных типов и близости к ним. Кроме того, предлагается методика расчета максимального усилия на схвате для заданной внешней нагрузки и максимально допустимых значений усилий на приводах. Результаты, полученные в данной главе, отражены в работах [7, 9, 55].

Во третьей главе предлагается схема нового поступательно направляющего механизма параллельной структуры с интегрированным схватом, основанного на схеме Delta с линейными приводами. При этом предлагается два возможных исполнения механизма. Для каждого исполнения механизма приводится аналитическое решение прямой и обратной задачи о положениях, а также результаты скоростного и силового анализа, анализа его рабочей зоны, включая исследование особых положений разных типов и близости к ним, и результаты

расчета максимального значения силы на схвате. Результаты, полученные в данной главе, отражены в работах [5, 15, 63].

В четвертой главе представлены твердотельные САД-модели механизмов, а также созданные по указанным моделям их физические прототипы с описанием конструкции их составных частей. Кроме того, представлены результаты экспериментального исследования по определению максимального усилия на схвате плоского механизма, подтверждающие применимость предложенной методики расчета указанной силы. Результаты, полученные в данной главе, отражены в работе [6].

ГЛАВА 1. ОБЗОР КОНСТРУКЦИЙ И ПРИМЕНЕНИЙ МЕХАНИЗМОВ ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ, ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ИЗБЫТОЧНОСТИ ДЛЯ РАСШИРЕНИЯ ИХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ВОЗМОЖНОСТЕЙ

1.1. Общие сведения о последовательных и параллельных механизмах

В последние десятилетия мир совершает стремительный шаг в сторону автоматизации и роботизации, компьютерные технологии становятся неотъемлемой частью нашей повседневной жизни и производственных процессов. От роботизированных манипуляторов на производственных линиях до автономных дронов, выполняющих сложные задачи, технологии роботизации изменили представление о том, как мы работаем, общаемся и взаимодействуем с окружающим миром. Крайне важным стало развивать и усовершенствовать различные механизмы и, как следствие, технологические процессы, в которых они задействуются. Так, например, современные технологии позволяют проектировать и рассчитывать крайне сложные промышленные автоматизированные конвейерные линии. Основной задачей, решаемой при проектировании таких линий, часто является не управление или настройка, а проработка кинематики, динамики и повышение надёжности и точности входящих в их состав механизмов, роботизированных и мехатронных систем.

Механизмы манипуляторов можно классифицировать по типу кинематики на механизмы последовательной и параллельной структуры. Существуют также механизмы гибридной структуры, считающие в себе оба типа: и последовательную и параллельную кинематику. Разберем основные особенности последовательных и параллельных механизмов.

В механизмах с последовательной кинематикой движение передается от одного звена к другому последовательно, то есть положение каждого звена зависит

от положения предыдущего [34]. Это типичная архитектура для классических роботов-манипуляторов середины прошлого столетия. В механизмах с параллельной кинематической структурой сразу несколько кинематических цепей соединяют подвижную платформу (выходное звено) с неподвижным основанием. Таким образом, движение выходного звена последовательного механизма зависит от положения всех его промежуточных звеньев механизма, а значит имеет место накопление погрешностей в процессе передачи движения. В параллельном механизме движение выходного звена осуществляется за счет работы всех параллельных цепей одновременно, что обеспечивает более точное позиционирование. Еще одним преимуществом параллельных механизмов над последовательными является большая жесткость и устойчивость, меньшая чувствительность к деформациям и вибрациям, что позволяет сохранять лучшие показатели точности позиционирования даже при высоких нагрузках [103]. В то же время последовательные механизмы, как правило, имеют большую рабочую зону, хотя и занимают больше пространства. Рабочая же зона параллельных механизмов ограничена, поэтому часто рассчитывается и оптимизируется под конкретные задачи. Сами механизмы параллельной структуры могут занимать меньше места благодаря особенностям своей структуры. В общем случае параллельные механизмы имеют более сложную конструкцию, требуют более детального проектирования, настройки и калибровки. Последовательные механизмы в свою очередь имеют более простую конструкцию, благодаря чему предъявляются меньшие требования к точности изготовления их компонентов, а также упрощается их проектирование и обслуживание. Благодаря более простой конструкции и структуре управление последовательными механизмами проще, нежели управление параллельными манипуляторами. Однако при быстрых перемещениях более высокая масса таких механизмов приводит к снижению стабильности движения, в то время как механизмы параллельной структуры, наоборот, показывают отличные динамические характеристики при высоких скоростях [102]. В результате последовательные механизмы находят основное применение в сферах, где требуется высокая маневренность, большое рабочее пространство, и важна

простота эксплуатации. Параллельные же механизмы применяются в областях, где требуется высокая точность позиционирования, высокая скорость работы и предъявляются повышенные требования к динамическим характеристикам манипулятора.

Таким образом, последовательные и параллельные манипуляторы имеют свои преимущества и недостатки. На сегодняшний день программное обеспечение для компьютерных вычислений и моделирования достигло уровня развития, позволяющего значительно упростить и ускорить разработку конструкций роботов, а возможности современных производств позволяют создавать более сложные детали и системы управления. В этой связи, по совокупности вышеизложенных параметров параллельные механизмы все чаще становятся наиболее целесообразным выбором при проектировании промышленных робототехнических систем, и с каждым новым изобретением и продвижением в исследованиях открываются дополнительные варианты практического применения подобных механизмов и модернизации существующих роботизированных систем.

1.2. Конструкции и применения механизмов параллельной структуры

Как уже было отмечено, параллельные механизмы обладают уникальной кинематической структурой, обеспечивающей высокую точность, стабильность движения и жесткость, что делает их идеальными для различного промышленного и научного применения [93]. Использование параллельных механизмов охватывает широкий спектр областей, включая высокоточные и высокоскоростные манипуляционные системы [72, 2], но не ограничиваясь ими [72].

Механизмы со сложной кинематикой начинают свою историю с давних времен. Так, с античности известны многочисленные изобретения Архимеда, жившего в III веке до н. э., а в эпоху Возрождения различные сложные механические устройства изучал Леонардо да Винчи. Возникновение же сформировавшей науки о механизмах относится к XIX веку – эпохе первой

промышленной революции. При это первые механизмы, которые могут быть однозначно отнесены к механизмам параллельной структуры в современном понимании были синтезированы только в первой половине XX века.

Первым промышленным применением параллельных кинематических машин сала платформа Гофа-Стюарта (Рисунок 1.1.), разработанная в 1957 году для испытания шин [56] инженером Э. Гофом.

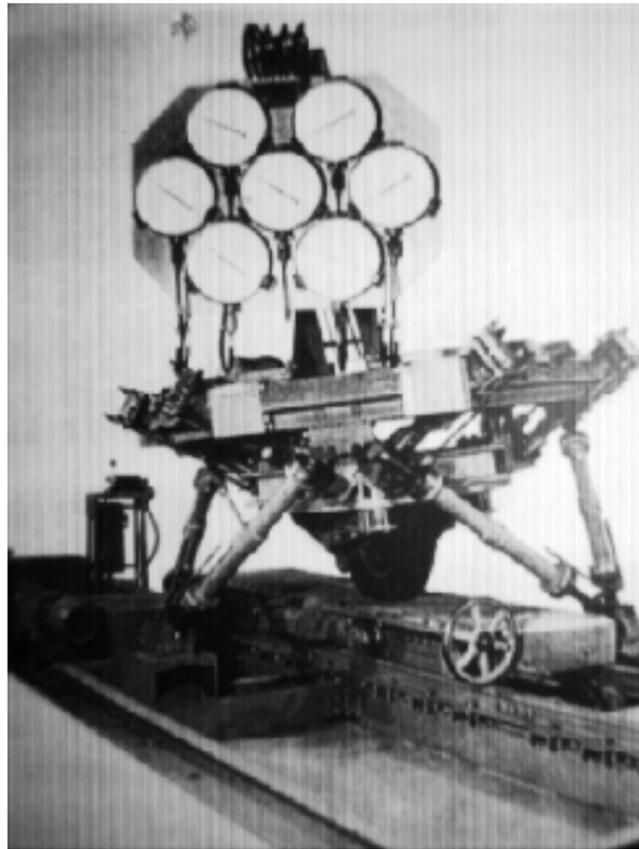


Рисунок 1.1. Оригинальная платформа Гофа

Платформа Гофа-Стюарта привлекла к себе большое внимание, благодаря простоте конструкции и нашла применение в многочисленных отраслях техники. Преимуществом данной платформы является конструкция звеньев, соединяющих выходное звено с основанием, благодаря которой они подвергаются только растягивающим и сжимающим нагрузкам, что позволяет гораздо эффективнее использовать пространство и минимизировать количество деталей с увеличением грузоподъемности механизма. Механизмы, построенные на основе платформы Гофа-Стюарта применяются для имитации движения и ориентирования объектов в пространстве. Конструкция, как правило, состоит из платформы поддерживаемой

шестью пневматическими или механическими приводами, которые управляют положением выходного звена с шестью степенями свободы. Данный механизм способен с высокой скоростью и точностью перемещать тяжелые объекты в пространстве, а одним из его основных применений являются авиационные симуляторы (Рисунок 1.2).



Рисунок 1.2. Авиационный тренажер на платформе Гофа-Стюарта

В начале 1980-х швейцарским ученым Р. Клавелем было запатентовано устройство для перемещения и позиционирования элемента в пространстве, более известно, как «дельта-робот» (Рисунок 1.3). Механизм включает следующие части: 1 – верхнее основание; 2 – приводной вал двигателя; 3 – двигатель; 4 – верхнее плечо, жестко соединённое с двигателем 3 через вал 2; 5 – нижнее плечо, представляющее из себя параллелограмм; 6, 7 – универсальные шарниры (шарниры Гука), установленные на плече 5; 8 – нижняя платформа; 9 – исполнительный механизм; 10 – ось крепления исполнительного механизма; 11 – дополнительный двигатель вращения штанги 14; 13, 15 – крепления, обеспечивающие вращение плеча 4 с помощью вала 2; 16 – шарнир, соединяющий параллелограмм 5 с плечом 4 таким образом, чтобы его верхняя сторона всегда оставалась перпендикулярной своему рычагу и параллельной плоскости верхнего основания. Благодаря особенностям кинематики подвижная платформа робота, прикрепленная к нижним сторонам параллелограммов, всегда остается параллельной верхнему

основанию. Управлять положением платформы осуществляется изменением углов поворота верхних рычагов относительно основания робота при помощи двигателей. Данный механизм, как правило, относят к поступательно-направляющим несмотря на то, что дополнительный привод позволяет рабочему органу вращаться вокруг собственной оси.

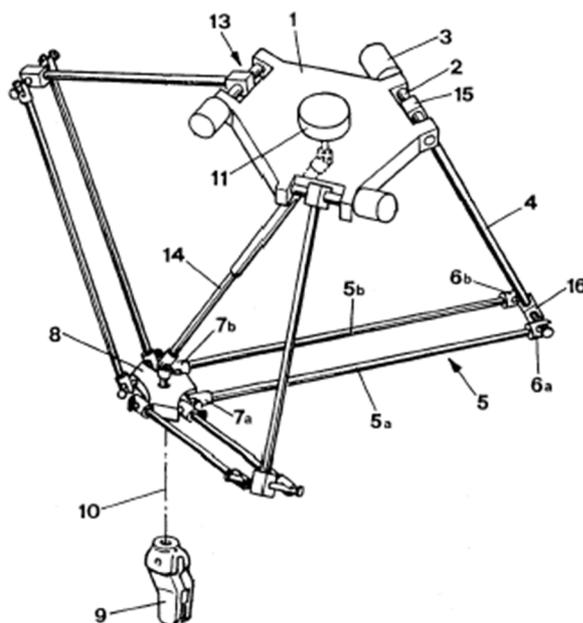


Рисунок 1.3. Схема механизма Р. Кавелера их патента

Важным преимуществом данного механизма является возможность размещения тяжелых двигателей на неподвижном основании, то есть в движении находятся только промежуточные звенья и нижняя платформа (выходное звено), что позволяет уменьшить моменты инерции, тем самым увеличив предельно допустимые ускорения механизма [89].

Дельта-роботы нашли различные применения, однако наиболее широкое распространение получили в качестве исполнительной части роботов-манипуляторов, в составе сортировочных или упаковочных линий [80]. В процессе развития технологий и адаптации кинематических схем под требуемые задачи были разработаны различные производные схемы, но основные части манипулятора остаются неизменными. Так, например, механизм ABB FlexPicker (Рисунок 1.4.а) нашел коммерческое применение в пищевой, упаковочной и сортировочных промышленности [30]. Данный робот существует в различных

модификациях, с тремя или четырьмя степенями свободы и применяется для захвата и перемещения малогабаритных предметов. Анализ различных применений дельта-роботов показывает, что возможности использования данных механизмов необычайно широки в том числе и за пределами промышленности [86]. Так, например, известен дельта-робот, предназначенный для игры в настольный теннис с человеком (Рисунок 1.4.б).



а.



б.

Рисунок 1.4. Механизмы на основе схемы дельта: ABB FlexPicker (а), прототип роботизированной теннисной системы (б)

Кроме практического применения дельта-механизмы широко используются в различных научных исследованиях в области теории механизмов. Помимо изучения кинематики и особенностей динамики дельта-механизмов крайне важной задачей является разработка новых структур и модернизирование текущих решений. Так, с помощью анализа и научных изысканий находят все более и более совершенные конструкции, которые позволяют добиться расширения функциональных возможностей механизмов, а также находить применение в новых областях техники и технологии, в которых ранее это казалось невозможным или не целесообразным [62, 101]. В качестве примера можно отметить исследованный институтом промышленны технологий ИТPI механизм станка на

основе трипода со структурой PRS (Рисунок 1.5.а). Другим примером может служить схема перспективного высокоскоростного трехосевого станка с линейными приводами (Рисунок 1.5.б), разработанного в компании Renault Automation [20, 86].

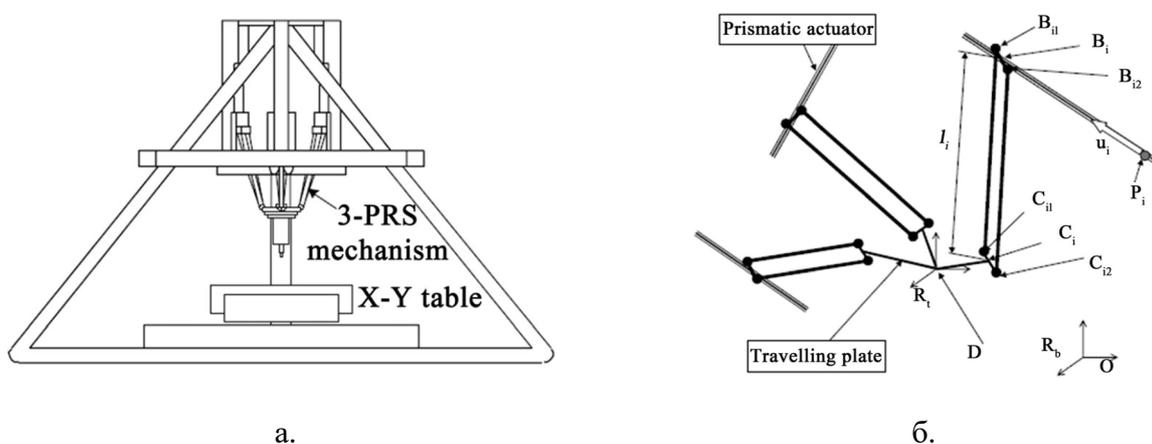
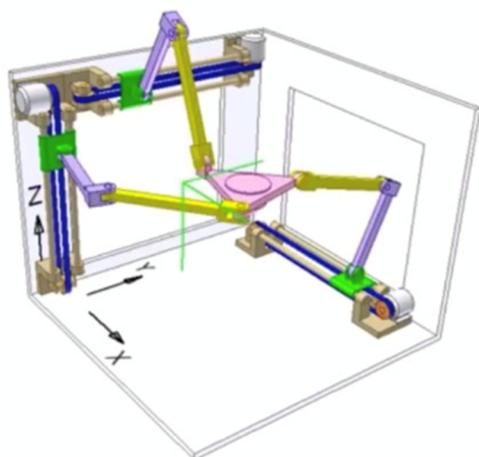
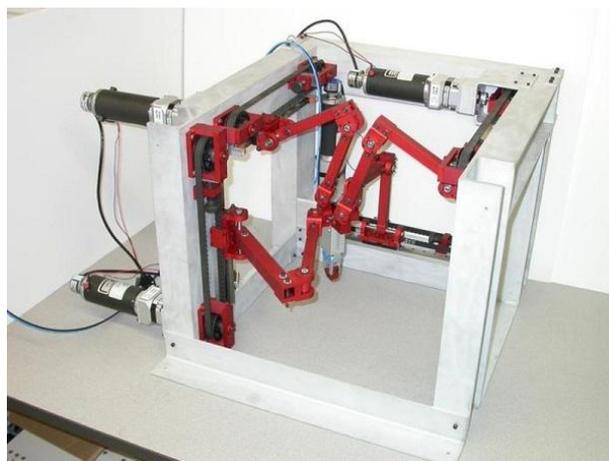


Рисунок 1.5. Схемы механизмов, вдохновленные архитектурой Delta: механизм станка компании ITRI (а), перспективный станок компании Renault Automation (б)

С развитием технологий и повышением требований к технологическим процессам повышается требование и к оборудованию [92]. Так в погоне за большей автоматизацией процессов требуются все более сложные механизмы с улучшенными характеристиками [29]. Однако в некоторых случаях объединение простых структур цепей в составе механизма параллельной структуры может давать хороший результат. Примером реализации такого подхода является механизм Tripteron (Рисунок 1.6.а), кинематические цепи которого представляют собой простейшие диады RRR, закрепленные на каретке, перемещающейся по линейной направляющей. Благодаря особенностям своей конструкции, а именно трем направляющим, попарно скрещивающимся под прямыми углами, обеспечивается высокая точность позиционирования и простота настройки калибровки, что позволяет применять данный механизм в различных областях, например, для обработки изделий, требующих послойного снятия или добавления материала с фиксированным шагом по любой оси [57]. Так, данный механизм удобен для применения в различных 3D-принтерах (Рисунок 1.6.б). Помимо всего прочего у данного механизма отсутствуют особые положения [71].



а.



б.

Рисунок 1.6. Механизм Tripteron: трехмерная модель (а), 3D-принтер на базе механизма (б)

Одельного внимания заслуживают механизмы параллельной структуры, синтезированные в ИМАШ РАН, например, устройство позиционирования лазерной головки в процессе селективного лазерного плавления, разработанное группой В. А. Глазунова [22,14]. Механизм имеет четыре кинематических цепи, объединенных в структуру 4-RPR для повышения жесткости (Рисунок 1.7). За счет использования дополнительных приводов на выходном звене механизм имеет пять степеней свободы: три поступательных и две вращательных.

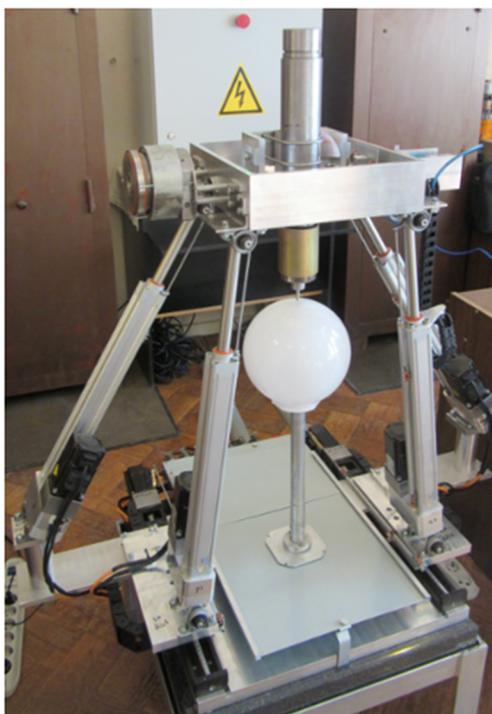


Рисунок 1.7. Механизм позиционирования лазерной головки

Еще одним интересным примером является механизм-трипод, разработанный в ИМАШ РАН Л. И. Тывесом и П. О. Данилиным. В данном механизме реализован принцип кинематической развязки между поступательным и вращательным движением выходного звена (Рисунок 1.8.). Так, для осуществления поступательного перемещения в каждой кинематической цепи имеется линейный привод, соединённый с выходным звеном посредством параллелограмма. При этом условным выходным звеном данного поступательно-направляющего механизма с параллелограммами является сферический механизм, который, в свою очередь, приводится в движение посредством вращательных приводов, установленных на основании. Вращение приводов передается сферическому механизму через дополнительную штангу, закрепленную на соответствующем параллелограмме и имеющую возможность поворота вокруг собственной оси. Таким образом достигается независимость движения сферической и поступательной частей манипулятора.



Рисунок 1.8. Манипулятор-трипод ИМАШ РАН с шестью степенями свободы

Помимо классических конструктивных элементов, таких как жесткие звенья и шарниры, в механизмах параллельной структуры могут применяться гибкие элементы, например, тросы, ремни, податливые элементы со специальной геометрией и т.д. Начало исследований подобных механизмов относится к 70-м годам прошлого века, однако значительно внимание со стороны исследователей появилось уже в начале XXI века.

Тросовые параллельные механизмы представляют собой вид параллельных манипуляторов, в кинематической структуре и конструкции которых используются тросы или кабели, передающие движение на выходное звено [84]. Применение таких механизмов наиболее целесообразно в тех случаях, когда необходимо минимизировать массу движущихся частей, либо в условиях, когда другие типы приводов не могут быть использованы по тем или иным причинам [54, 60]. Основные преимущества тросовых параллельных механизмов: гибкость конструкции, малая масса подвижных элементов, работа тросов только на растяжение-сжатие, высокая скорость и манёвренность [99]. В качестве примера можно привести механизм, вдохновленный платформой Гофа-Стюарта, предназначенный для обработки грузов (Рисунок 1.9).



Рисунок 1.9. Робот с тросовой подвеской.

В ИМАШ РАН был разработан плоский механизм (Рисунок 1.10.), имеющий структуру 3-PRR, в качестве приводов которого используются пьезоактуаторы, а

классические кинематические пары заменены на гибкие шарниры [37]. Данное устройство предназначено для реализации микроперемещений выходного звена.

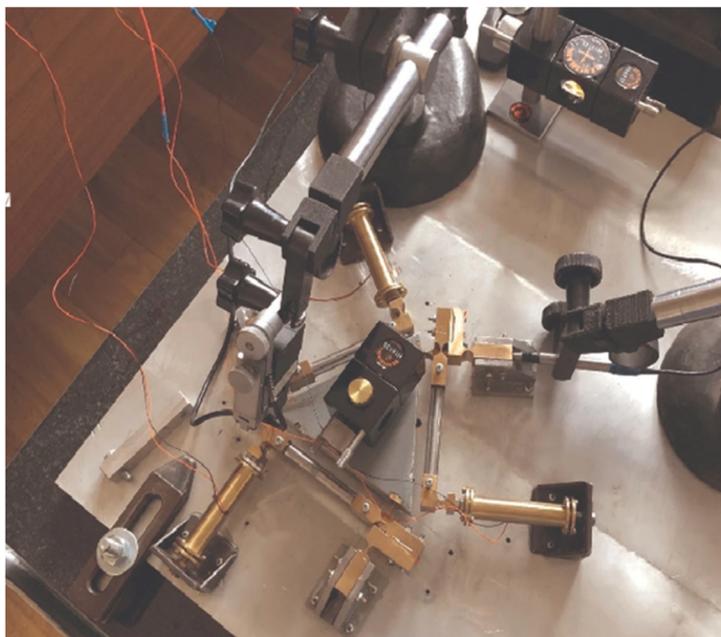


Рисунок 1.10. Механизм 3-PRR для микроперемещений

Приведенные примеры механизмов параллельной структуры, безусловно, не отражают всего спектра применений и конструкций механизмов данного класса. Так, например, даже при наличии такого характерного общего признака, как размещение приводов на круговой направляющей, число возможных схем и конструкций механизмов с различным количеством и сочетанием степеней свободы выходного звена достаточно велико [90]. При этом в большинстве случаев каждый механизм может иметь какие-либо особенности, требующие адаптации существующих расчетных методов [21]. Кроме того, если механизмы предполагается использовать в каких-либо конкретных промышленных системах, то помимо решения стандартных задач может потребоваться, например, анализ отказоустойчивости устройства [19].

Таким образом, параллельные механизмы имеют широкое применение в самых разных областях техники и технологии, их структуры и конструкции отличаются разнообразием и оригинальностью, а синтез новых схем, их моделирование и анализ является актуальной задачей современной теории механизмов и машин.

1.3. Избыточность в механизмах параллельной структуры

Одним из главных недостатков механизмов параллельной структуры помимо конструктивно ограниченной рабочей зоны, является наличие так называемых особых положений или сингулярностей [50]. Попадание в такое положение может приводить к потере степени свободы или потере контроля над движением выходного звена, а вблизи особых положений возрастают нагрузки на конструктивные элементы механизма [68]. Благодаря использованию современных вычислительных систем становится возможным учитывать влияние особых положений на характеристики создаваемых устройств уже на начальных этапах проектирования [95]. Тем не менее, проблема избегания особых положений по-прежнему остается одной из главных при разработке и эксплуатации параллельных механизмов [58].

Для решения указанной проблемы применяют следующие решения: введение ограничений на перемещение выходного звена, структурный синтез механизмов без особых положений и использование различных типов избыточности путем введения в механизм дополнительных приводов и звеньев [45]. Последний вариант в настоящее время активно исследуется научным сообществом [77], поэтому рассмотрим его более подробно.

При наличии избыточности количество приводов механизма превышает их минимально количество необходимое для достижения требуемого типа движения и позиционирования выходного звена [44]. В механизмах избыточность может использоваться также для улучшения характеристик, таких как точность, стабильность параметров движения и отказоустойчивость [70]. Однако наличие избыточности также может приводить к возникновению определенных сложностей в управлении механизмом, а также усложнению процесса его проектирования [51].

В современной теории механизмов параллельной структуры принято выделять два основных типа избыточности: кинематическую, приводную. Кинематическая избыточность возникает, когда степень подвижности механизма

превышает количество степеней свободы, минимально необходимое для выполнения требуемой задачи [104, 67]. Для этого в механизм добавляются дополнительные приводы и промежуточные звенья. При этом количество приводов равно степени подвижности механизма. Приводная же избыточность характеризуется использованием дополнительных приводов без изменения изначальной степени подвижности механизма [26, 98]. В таком случае, очевидно, степень подвижности будет меньше количества приводов, а на выходное звено будут накладываться избыточные связи [35].

Можно выделить следующие основные особенности механизмов с приводной избыточностью:

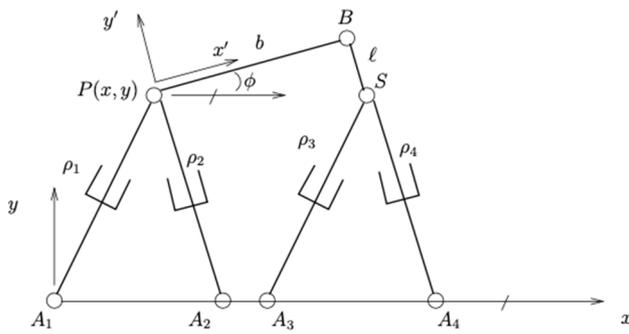
- Увеличенная надежность: в случае выхода из строя одного из приводов другие приводы могут компенсировать его функции, что повышает устойчивость механизма к отказам;
- Повышенная точность: избыточные приводы могут использоваться для выполнения подстроечных движений с большим передаточным отношением, что позволяет достичь более высокой точности позиционирования [25];
- Стабильность: приводная избыточность может улучшить динамическое поведение системы, за счет увеличения ее жесткости, что позволяет ей лучше справляться с внешними воздействиями [88].

Параллельные механизмы с приводной избыточностью используют в ситуациях, где важна высокая надежность и стабильность движения, например, в медицинских роботах, симуляторах или высокоточных манипуляторах. Однако наличие дополнительных приводов приводят к появлению такой проблемы, как циркуляция мощности, то есть ситуации, при которой в случае неидеальной синхронизации движений двигателя мешают работе друг друга. Это, в свою очередь, требует создания более сложных систем управления и необходимости предусматривать системы безопасности, предотвращающие возникновение перегрузок на приводных устройствах. Таким образом, приводная избыточность в параллельных механизмах может быть как преимуществом, так и недостатком, в зависимости от задачи и условий эксплуатации. Правильное использование

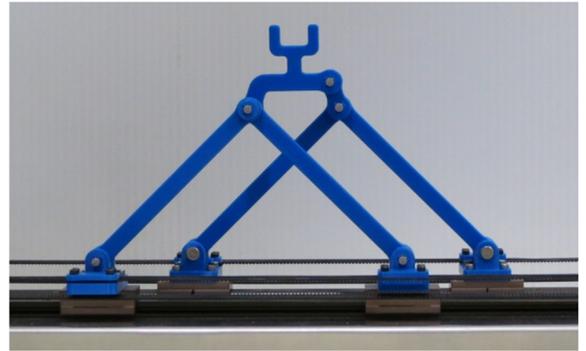
избыточных приводов может значительно улучшить характеристики механизма, но требует тщательного проектирования и корректного управления для минимизации риска возникновения указанных выше проблем. Инженер-проектировщик должен учитывать эти аспекты при разработке и реализации параллельных механизмов для достижения оптимального сочетания производительности и надежности [49].

В контексте решения задачи расширения функциональных возможностей механизма большой интерес представляет кинематическая избыточность. Ее использование имеет как ряд неоспоримых преимуществ, так и ряд недостатков. Как и в случае с приводной избыточностью, увеличение числа приводов усложняет алгоритмы управления, хотя и отсутствует проблема циркуляции мощности [69, 85]. При этом, в отличие от приводной избыточности, проблема попадания в особые положения может оставаться актуальной в том случае, если кинематическая избыточность используется для расширения функциональных возможностей [50]. Механизмы с любым типом избыточности, как правило, более сложны в проектировании [57, 75], а также могут требовать нестандартных подходов при решении типовых задач [81], в том числе прямой и обратной задачи о положениях [70], а также динамических исследованиях [87]. Наличие кинематической избыточности также влечет за собой вариативность в расположении промежуточных звеньев, что приводит к появлению весьма сложной задачи выбора оптимальной конфигурации указанных звеньев [91]. Таким образом, можно видеть, что кинематическая избыточность имеет определенные недостатки, которые, однако, в большинстве случаев будут скомпенсированы получаемыми преимуществами.

Одним из направлений расширения функциональных возможностей параллельных механизмов путем введения кинематической избыточности может являться реализация функции захвата и удержания объекта манипулирования. Модификации плоских механизмов 4-RPR и 4-PRR, реализующих данную функцию, были предложены группой К. Госслена (Рисунок 1.11) [40]. Похожий механизм обладающий приводной избыточностью вместо кинематической также рассматривался П. А. Ларюшкиным с соавторами [10].



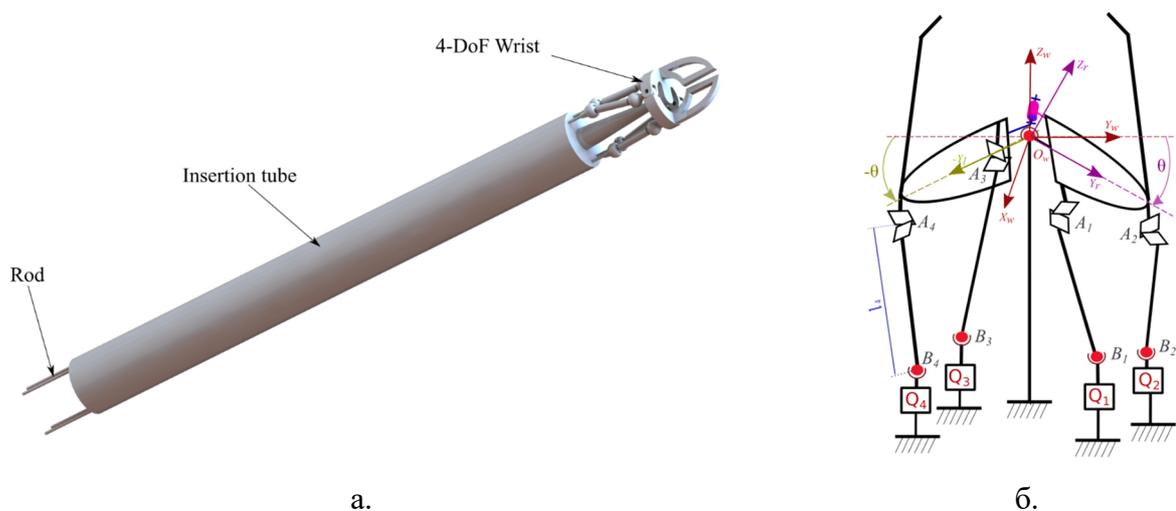
а.



б.

Рисунок 1.11. Плоские механизмы с кинематической избыточностью:
схема механизма 4-RPR (а), прототип механизма 4-PRR (б)

Важным применением параллельных механизмов является имитация работы человеческой руки, путем выполнения функции захвата, перемещения и поворота объекта манипулирования [47, 80, 98]. Главным преимуществом использования параллельных механизмов для этих задач является их высокая жесткость, и, как следствие, возможность проектировать роботы маленьких размеров. Так, для определенных микрохирургических операций необходимы роботы, диаметр которых не превышает 5-10 мм, а функционал позволяет как резать, так и захватывать предметы. Рассмотрим одно из таких устройств – сферическое запястье для малоинвазивной хирургии, обладающее кинематической избыточностью (Рисунок 1.12) [46].



а.

б.

Рисунок 1.12. Сферическое запястье с параллельной структурой: 3D-модель механизма (а), структурная схема (б)

Диаметр запястья не превышает 10 мм, что делает данный механизм идеальным для решения задач микрохирургии. Данный миниатюрный робот обладает высокой точностью, и способен обеспечивать вращение вокруг трех независимых осей, а также разрезание тканей или захват в качестве четвертой степени подвижности. Возможность захвата объектов, а также непосредственно поворота рабочего органа реализованы с помощью внешних приводов, расположенных вне основной конструкции робота. Управление данным механизмом реализовано с помощью джойстика.

Развитием данного четырехподвижного механизма стало восьмиподвижное кинематически избыточное устройство (Рисунок 1.13) [48]. В новом манипуляторе шесть основных степеней свободы соответствуют трем перемещения и трем вращениям выходного звена, а за счет дополнительной подвижности реализуется возможность захвата объекта манипулирования и его поворота с помощью интегрированного рабочего органа. Авторами продемонстрировано, что благодаря такому функционалу и достаточно высокой точности позиционирования механизм способен откручивать мелкие винты резьбовых соединений, а также перемещать небольшие объекты с особой плавностью и аккуратностью.

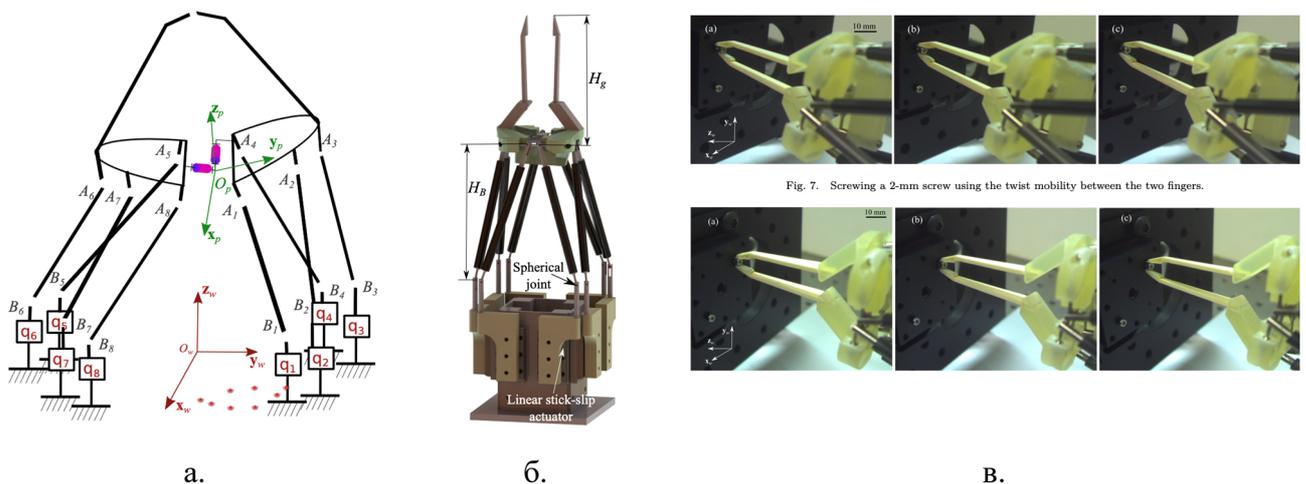


Рисунок 1.13. Восьмиподвижный манипулятор: структурная схема (а), 3D-модель (б), фотографии механизма в процессе откручивания винтов (в)

Заслуживает отдельного внимания механизм, основанный на схеме Delta, предложенный М. Левезилем [66]. Данный механизм синтезирован путем введения в классическую схему Delta дополнительной цепи и кинематической избыточности.

Четыре цепи механизма расположены в плане под прямыми углами, при этом одна пара противопоставленных цепей соединяется непосредственно с жесткой рамой выходного звена, а вторая пара соединяется с данной рамой через вращательный шарнир. Кроме того, вторая пара цепей соединяется между собой за счет зубчатого зацепления, а на промежуточных звеньях, соединяющих между собой параллелограммы данной пары цепей и раму выходного звена, расположены элементы интегрированного схвата (Рисунок 1.14). В результате выходное звено механизма способно перемещаться по трем осям, а за счет дополнительной подвижности реализуется функция захвата объекта манипулирования.

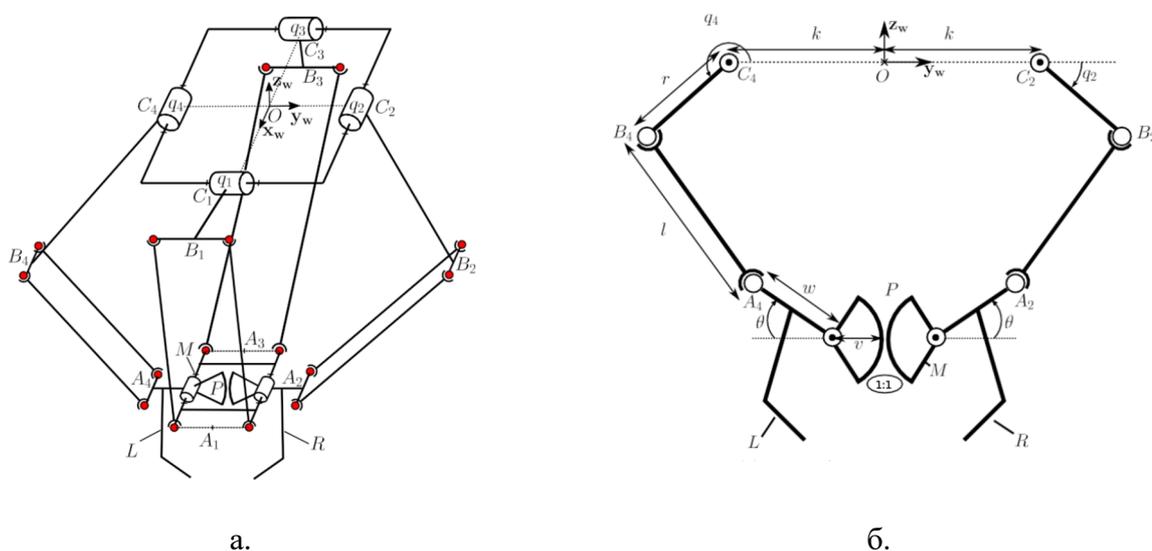
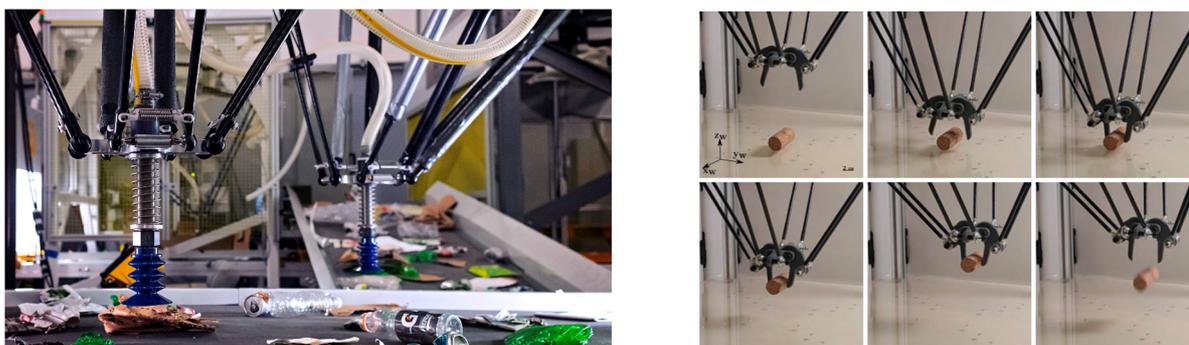


Рисунок 1.14. Механизм для сортировки мусора: общая схема (а), вид сбоку (б)

Разработка данного механизма выполнялась в рамках более широких поисковых исследований в области механизмов для сортировки отходов. При этом автор утверждает, что по результатам анализа уже известных механизмов не было найдено такого, который бы идеально подходил для выполнения задачи по быстрой и точной сортировке мусора, движущегося по конвейерной ленте. В результате были предложены новые структурные схемы и, в частности, рассмотренный выше четырехподвижный механизм. Особенностью его конструкции является то, что помимо интегрированного захвата возможно исполнение с жесткой платформой для установки отдельного исполнительного органа (например, пневмозахвата), для чего достаточно заблокировать дополнительную подвижность (Рисунок 1.15.).



а.

б.

Рисунок 1.15. Варианты исполнения механизма: с пневмозахватом (а), с интегрированным схватом (б)

Таким образом, можно видеть, что избыточные механизмы требуют значительных затрат на разработку и анализ, и, как следствие, являются более дорогими и сложными в производстве, но на данный момент использование избыточности является одним из основных способов избегания особых положений, повышения надежности механизмов, а также улучшения их динамических характеристик [28, 31]. Кроме того, использование кинематической избыточности позволяет расширить функциональные возможности механизмов, в частности, реализовать возможность захвата объектов манипулирования с помощью интегрированных в кинематическую схему схватов. Несмотря на некоторый рост сложности решения прямой или обратной задачи о положениях [74], а также исследования кинематики и динамики в целом [72], задача синтеза новых механизмов с кинематической избыточностью является актуальной в рамках современной теории механизмов и машин.

1.4. Результаты и выводы по главе

1. Выполнен аналитический обзор научных исследований и практических применений механизмов параллельной структуры с основным фокусом на

применении различных типов избыточности для расширения функциональных возможностей механизмов данного класса;

2. Использование приводной избыточности позволяет повысить нагрузочную способность устройств с параллельной кинематикой и избежать попадания в особые положения, однако приводит к уменьшению рабочей зоны ввиду конструктивных ограничений и требует высокой точности в управлении приводами;

3. Кинематическая избыточность помимо избегания особых положений и увеличения рабочей зоны может быть использована для реализации дополнительной функциональности, в частности, захвата объекта манипулирования без необходимости использования отдельных захватных устройств, устанавливаемых на выходное звено механизма;

4. Актуальной задачей является разработка новых механизмов параллельной структуры с интегрированным схватом и широко используемым типом движения выходного звена, в частности плоских и поступательно-направляющих механизмов.

ГЛАВА 2. СИНТЕЗ И АНАЛИЗ ПЛОСКОГО МЕХАНИЗМА С КИНЕМАТИЧЕСКОЙ ИЗБЫТОЧНОСТЬЮ

2.1. Структура и кинематическая схема

Решение задачи синтеза плоского механизма параллельной структуры с кинематической избыточностью, которая могла бы быть использована для операций захвата тех или иных объектов, начнем с рассмотрения кинематических схем устройств захвата. Поскольку в данном случае речь идет только о плоских механизмах, целесообразно считать, что в механизме могут использоваться только одноподвижные вращательные (обозначаются «R») и призматические (обозначаются «P») кинематические пары [73]. В общем случае устройство захвата представляет собой два подвижных звена механизма, управляемое сближение которых, позволяет зафиксировать между ними объект манипулирования. Простейшие варианты, не подразумевающие использование дополнительных передач или механизмов непосредственно в захватном устройстве, могут быть реализованы с помощью одной призматической (Рисунок 2.1.а) либо одной вращательной пары (Рисунок 2.1.б).

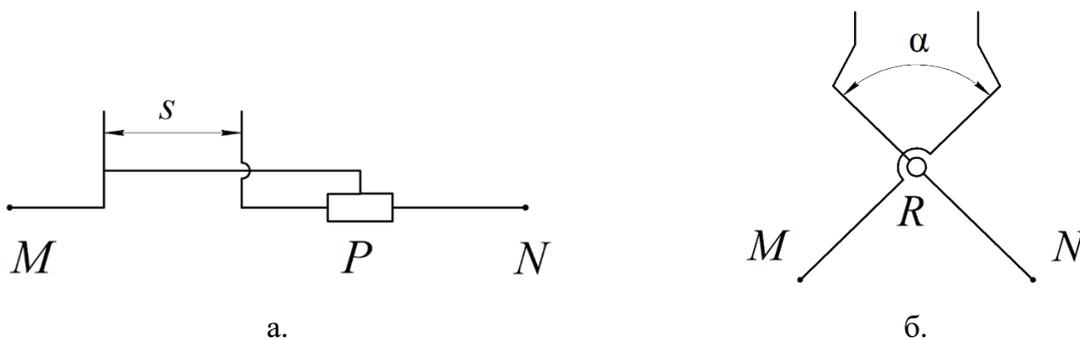


Рисунок 2.1. Кинематические схемы простейших механизмов захвата: с призматической парой (а), с вращательной парой (б)

В первом случае сближение точек M и N осуществляется за счет перемещения в паре P и напрямую изменяет расстояние s . Во втором случае сближение данных

точек возможно за счет поворота в паре R и приводит к изменению угла α . При этом во втором случае относительная ориентация схватывающих поверхностей также изменяется, что требует применения дополнительных пассивных механизмов для сохранения их параллельности.

Для работы схвата в составе некоторого механизма, реализующего плоское движение (два перемещения и одно вращение) выходного звена, необходимо, чтобы точки M и N могли независимо перемещаться в плоскости [32]. Иными словами, отрезок MN должен иметь возможность линейно перемещаться в рабочей плоскости механизма, поворачиваться вокруг оси, перпендикулярной данной плоскости, а также изменять свою длину. Для этого в каждой из указанных точек можно разместить вращательную пару, связанную с выходным звеном двухподвижного механизма параллельной структуры, например, классического пятизвенного механизма RRRRR (Рисунок 2.2.а). В частном случае данная пара может располагаться соосно с одной из вращательных пар указанного механизма (Рисунок 2.2.б).

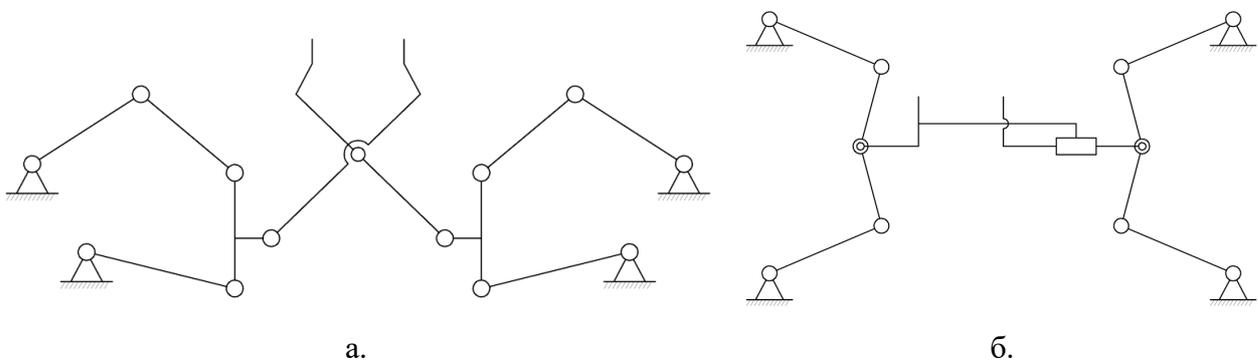


Рисунок 2.2. Примеры возможных плоских механизмов на основе двух пятизвенных механизмов RRRRR: с вращательной парой в схвате (а), с призматической парой в схвате и соосными шарнирами (б)

Вариант с соосными вращательными парами представляется более предпочтительным, поскольку позволяет сделать итоговый механизм более компактным. Также стоит отметить, что к схватывающей части могут присоединяться любые плоские двухподвижные механизмы. В частности, в упомянутой ранее работе К. Госслена [40] используются механизмы, состоящие из двух плоских диад $\underline{P}RR$ с общей вращательной парой (здесь и далее подчеркивание

обозначает приводную пару). Использование линейных приводов, расположенных на основании, дает как плоским, так и пространственным механизмам параллельной структуры определенные преимущества. Главное достоинство такого решения – это возможность получения сколь угодно большой рабочей зоны вдоль направления движения приводов, ограниченной только длиной направляющих. Кроме того, уменьшается масса подвижных частей механизма, а сама кинематическая схема является наиболее простой для практической реализации [35]. В качестве примера можно привести 3D-принтеры на основе механизмов типа Delta с линейными приводами, подавляющее большинство которых имеет линейные приводы, именно благодаря указанным преимуществам.

С учетом вышеизложенного для дальнейших исследований был выбран механизм, включающий четыре кинематических цепи \underline{PRR} , объединенных попарно в плоские двухподвижные лямбда-механизмы с общей вращательной кинематической парой (Рисунок 2.3). При этом для реализации механизма захвата используется вариант с призматической парой, поскольку он не требует дополнительных передач для обеспечения параллельности схватывающих поверхностей [40].

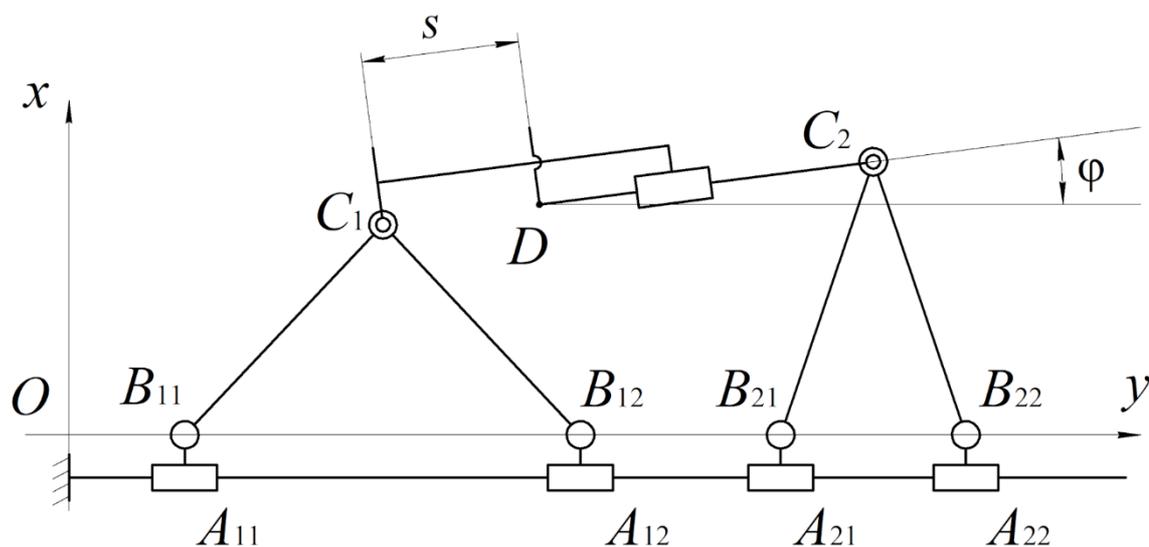


Рисунок 2.3. Схема плоского кинематически избыточного механизма с захватом, использующим призматическую пару

Каждая кинематическая цепь \underline{PRR} исследуемого механизма содержит одну призматическую кинематическую пару (шарнир) A_{ij} и две вращательных

кинематических пары B_{ij} и C_i ($i = 1 \dots 2$ – номер плоского двухподвижного лямбда-механизма, $j = 1 \dots 2$ – номер цепи \underline{PRR} в составе этого механизма), причем пара C_i является общей для двух цепей. Как уже было отмечено, оси вращательных шарниров, расположенных на выходном звене (механизме захвата), совпадают с осями общих вращательных шарниров цепей \underline{PRR} плоских лямбда-механизмов, то есть в каждой точке C_i расположено два вращательных шарнира. В свою очередь призматические пары всех цепей имеют общую ось.

Оценить подвижность механизма W можно с помощью известной формулы Чебышева для плоских механизмов:

$$W = 3n - 2p_1 - p_2,$$

где n – число подвижных звеньев механизма; p_1 – число одноподвижных кинематических пар; p_2 – число двухподвижных кинематических пар.

Число подвижных звеньев в рассматриваемом механизме равно десяти: четыре звена $A_{ij}B_{ij}$, четыре звена $B_{ij}C_i$, а также две части раздвижного выходного звена. Количество одноподвижных пар в данном случае равно тринадцати, поскольку физически в точках C_1 и C_2 находится по два вращательных шарнира с совпадающими осями. Двухподвижные пары в механизме отсутствуют. Подставив данные значения в формулу Чебышева, получим

$$W = 3 \cdot 10 - 2 \cdot 13 - 0 = 4.$$

Таким образом, подвижность рассматриваемого механизма равна четырем. При этом очевидно, что всего его звенья могут перемещаться только в плоскости Oxy , а значит данный механизм является кинематически избыточным. Основными степенями свободы выходного звена механизма являются два линейных перемещения в указанной плоскости, а также поворот вокруг оси, перпендикулярной ей. Положение выходного звена удобно описывать координатами x_D , y_D точки D , а поворот платформы – углом φ . Дополнительной степенью свободы будет являться изменение расстояния между противоположными поверхностями механизма схвата, то есть расстояния s между точками C_1 и D .

2.2. Решение задачи о положениях и анализ рабочей зоны

Параметры x_D, y_D, φ, s полностью описывают конфигурацию выходного звена механизма в плоскости Oxy и называются выходными координатами. Входными координатами механизма будут являться перемещения приводных кинематических пар вдоль своей оси, т.е. координаты $x_{Aij} = x_{Bij}$. Решение задачи о положениях подразумевает установление зависимости между входными и выходными координатами, позволяющие при заданных входных координатах определить выходные (прямая задача) [24] и наоборот (обратная задача) [10].

Для механизмов параллельной структуры, в отличие от классических последовательных механизмов, именно обратная задача о положениях, как правило, имеет аналитическое решение, поэтому целесообразно начать рассмотрение именно с нее [53].

На первом этапе решения обратной задачи о положениях найдем координаты точек C_1 и C_2 :

$$\begin{aligned} x_{C1} &= x_D - s \cos \varphi, & y_{C1} &= y_D - s \sin \varphi, \\ x_{C2} &= x_D + l_{C2D} \cos \varphi, & y_{C2} &= y_D + l_{C2D} \sin \varphi, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где l_{C2D} – длина звена C_2D .

Далее рассмотрим отдельно один плоский лямбда-механизм (Рисунок 2.4).

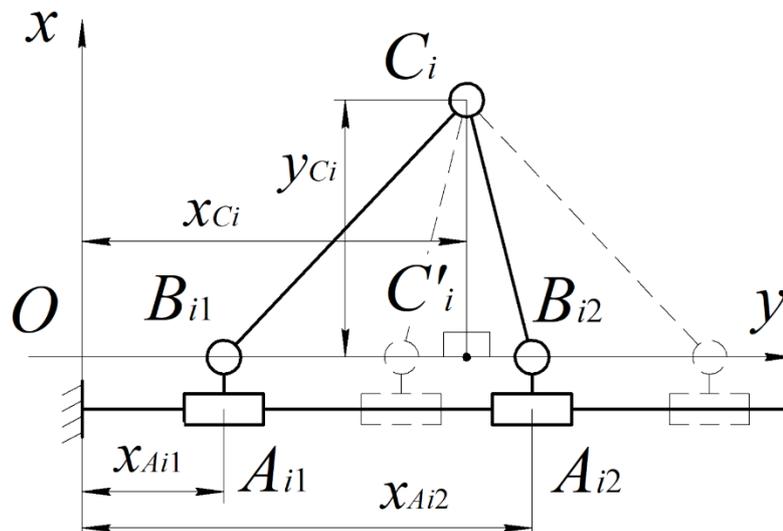


Рисунок 2.4. Схема плоского лямбда-механизма для решения обратной задачи о положениях

Поскольку длина любого из звеньев $B_{ij}C_i$ постоянна, координата $x_{A_{ij}}$ соответствующей точки A_{ij} может быть определена как координата точки пересечения окружности, радиус которой равен длине звена $B_{ij}C_i$, а центр находится в точке C_i , с осью Ox . В общем случае существует две таких точки, а значит для каждой кинематической цепи \underline{PRR} будет существовать два решения обратной задачи о положениях. Для любого из двух возможных вариантов расположения точки A_{ij} в рамках отдельной кинематической цепи можно выделить прямоугольный треугольник, гипотенузой которого будет служить звено $B_{ij}C_i$, одним из катетов – отрезок, проведенный из точки C_i до пересечения с осью в некоторой точке C'_i , а вторым катетом – отрезок C'_iB_{ij} . При этом для одной цепи решения будут симметричны относительно оси, задаваемой отрезком C'_iB_{ij} (Рисунок 2.4, штриховыми линиями другие возможные положения цепей \underline{PRR} , для одной и той же точки C_i) [76]. Используя теорему Пифагора для упомянутых прямоугольных треугольников, можно записать

$$x_{A_{i1}} = x_{C_i} \mp \sqrt{l_{B_{i1}C_i}^2 - y_{C_i}^2}, \quad x_{A_{i2}} = x_{C_i} \pm \sqrt{l_{B_{i2}C_i}^2 - y_{C_i}^2}, \quad (2.2)$$

где $l_{B_{i1}C_i}$ и $l_{B_{i2}C_i}$ — длины звеньев $B_{i1}C_i$ и $B_{i2}C_i$ соответственно.

Знак «плюс» или «минус» перед корнем в выражении (2.2) определяет выбор решения обратной задачи о положениях для конкретной цепи. При этом каждый из вариантов имеет как свои достоинства, так и недостатки. Так, изображенный ранее вариант (Рисунок 2.4), соответствует знаку «минус» в выражении для $x_{A_{i1}}$ и знаку «плюс» в выражении для $x_{A_{i2}}$. Данный вариант, как и симметричный ему, представляется более удачным для реальных применений, т.к. позволяет получить большую жесткость цепей в вертикальном направлении. С другой стороны, вариант, при котором обе цепи окажутся с одной стороны от отрезка C'_iB_{ij} , теоретически, может позволить добиться большего возможного сближения кареток противопоставленных пар цепей, а значит увеличить рабочую зоны механизма. В частном случае, при котором $l_{B_{i1}C_i} = l_{B_{i2}C_i}$ выбор решения обратной задачи не имеет

принципиального значения, поскольку треугольник $B_{i1}C_iB_{i2}$ будет равнобедренным, а решения двух рассматриваемых цепей, соответственно, эквивалентны друг другу.

Подставив (2.1) в (2.2) для каждого i и j получим окончательные выражения для решения обратной задачи о положениях для всех цепей:

$$\begin{aligned} x_{A11} &= x_D - s \cos \varphi \mp \sqrt{l_{B11C1}^2 - (y_D - s \sin \varphi)^2}, \\ x_{A12} &= x_D - s \cos \varphi \pm \sqrt{l_{B12C1}^2 - (y_D - s \sin \varphi)^2}, \\ x_{A21} &= x_D + l_{C2D} \cos \varphi \mp \sqrt{l_{B21C2}^2 - (y_D + l_{C2D} \sin \varphi)^2}, \\ x_{A22} &= x_D + l_{C2D} \cos \varphi \pm \sqrt{l_{B22C2}^2 - (y_D + l_{C2D} \sin \varphi)^2}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Таким образом, выражение (2.3) является аналитическим решением обратной задачи о положениях рассматриваемого механизма.

Для решения прямой задачи снова рассмотрим отдельный плоский лямбда-механизм (Рисунок 2.5).

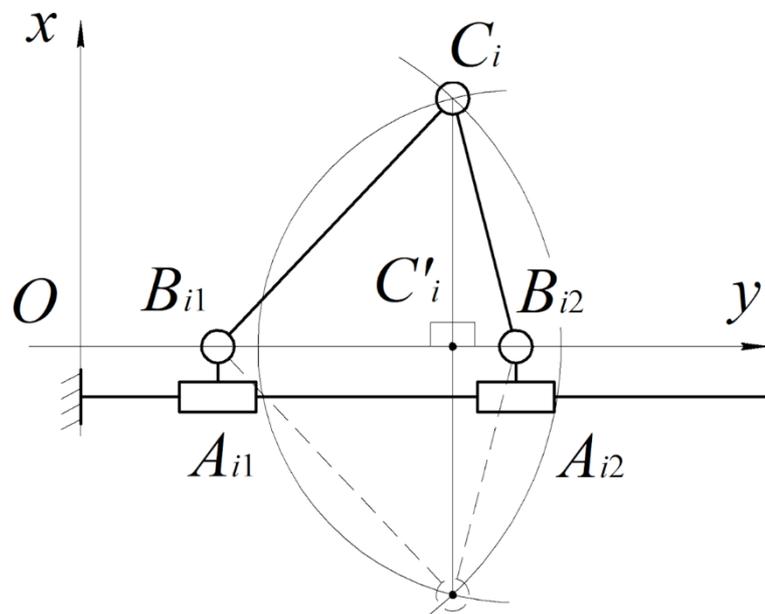


Рисунок 2.5. Схема плоского лямбда-механизма для решения прямой задачи о положениях

Легко видеть, что для заданного положения точек B_{ij} , точка C_i может находиться на пересечении двух окружностей с центрами в точках B_{ij} и радиусами $l_{B_{i1}C_i}$ и $l_{B_{i2}C_i}$. При этом одна из точек пересечения будет находиться под направляющей, по которой движется каретки призматических кинематических пар,

что в реальном механизме, как правило, невозможно, т.к. для этого потребуется, чтобы звенья $B_{ij}C_i$ пересекали основание механизма [43]. По этой причине такую конфигурацию звеньев (Рисунок 2.5, показана штриховыми линиями), в дальнейшем можно не рассматривать.

Запишем уравнения окружностей, упомянутых выше, в виде системы с учетом того, что $y_{B_{ij}} = 0$:

$$\begin{cases} (x_{C_i} - x_{A_{i1}})^2 + y_{C_i}^2 = l_{B_{i1}C_i}^2, \\ (x_{C_i} - x_{A_{i2}})^2 + y_{C_i}^2 = l_{B_{i2}C_i}^2. \end{cases} \quad (2.4)$$

Решением данной системы будут искомые координаты точки C_i . Вычитая второе уравнение из первого, получим:

$$(x_{C_i} - x_{A_{i1}})^2 - (x_{C_i} - x_{A_{i2}})^2 = l_{B_{i1}C_i}^2 - l_{B_{i2}C_i}^2.$$

Раскрывая скобки, приводя подобные слагаемые и выражая x_{C_i} , можно получить выражение для вычисления значения данной координаты:

$$x_{C_i} = \frac{l_{B_{i1}C_i}^2 - l_{B_{i2}C_i}^2 - x_{A_{i1}}^2 + x_{A_{i2}}^2}{2(x_{A_{i2}} - x_{A_{i1}})}. \quad (2.5)$$

После вычисления x_{C_i} , координата y_{C_i} может быть найдена путем использования любого из двух уравнений системы (2.4). В общем виде:

$$y_{C_i} = \pm \sqrt{l_{B_{ij}C_i}^2 - (x_{C_i} - x_{A_{ij}})^2}. \quad (2.6)$$

При этом знак «минус» будет означать, что точка C_i находится ниже основания механизма, что, как уже было отмечено, невозможно.

Таким образом, используя выражения (2.5) и (2.6) можно однозначно определить координаты точек C_1 и C_2 (если они находятся выше оси Ox), а затем и выходные координаты механизма. Для этого сначала вычислим значение s :

$$s = l_{C_1C_2} - l_{C_2D}, \quad (2.7)$$

где

$$l_{C_1C_2} = \sqrt{(x_{C_2} - x_{C_1})^2 + (y_{C_2} - y_{C_1})^2}.$$

Угол φ может быть определен следующим образом:

$$\varphi = \text{atan2}(y_{C_2} - y_{C_1}, x_{C_2} - x_{C_1}). \quad (2.8)$$

Функция atan2 широко распространена в вычислительной математике и программировании [36], а ее область значений характеризуется интервалом $(-\pi, \pi]$, в отличие от классической функции арктангенса с областью значений $(-\pi/2, \pi/2]$:

$$\text{atan2}(y, x) = \begin{cases} \arctg\left(\frac{y}{x}\right) & \text{при } x > 0, \\ \arctg\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & \text{при } x < 0, y \geq 0, \\ \arctg\left(\frac{y}{x}\right) - \pi & \text{при } x < 0, y < 0, \\ \frac{\pi}{2} & \text{при } x = 0, y > 0, \\ -\frac{\pi}{2} & \text{при } x = 0, y < 0, \\ \text{не определен} & \text{при } x = 0, y = 0. \end{cases}$$

После вычисления значений s и φ координаты x_D и y_D могут определены согласно выражению (2.1), например:

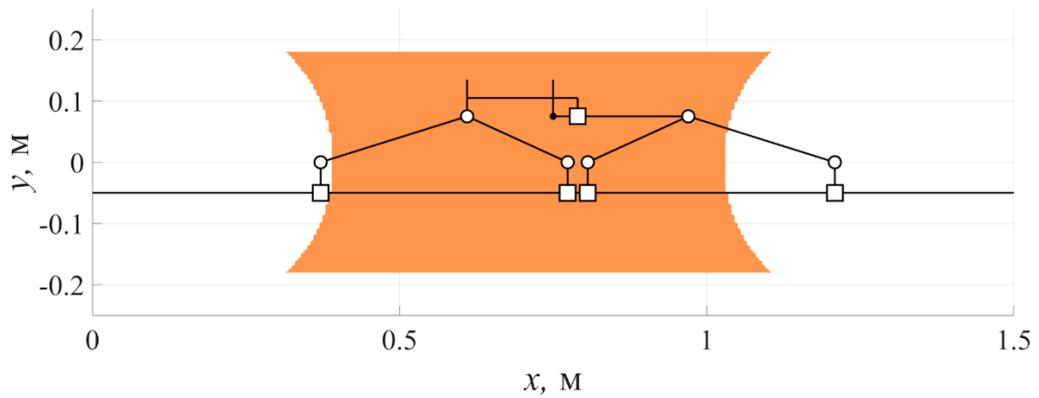
$$x_D = x_{C_1} + s \cos \varphi, \quad y_D = y_{C_1} + s \sin \varphi. \quad (2.9)$$

Таким образом, выражения (2.7), (2.8) и (2.9) позволяют решить прямую задачу о положениях для рассматриваемого механизма аналитически, что для механизмов параллельной структурой, в особенности обладающих тем или иным типом избыточности, является редкостью. При этом, если точки C_i могут находиться только строго выше оси Ox , такое решение единственно. В противном случае, количество теоретических решений данной задачи будет равно четырем (по два для каждого плоского лямбда-механизма).

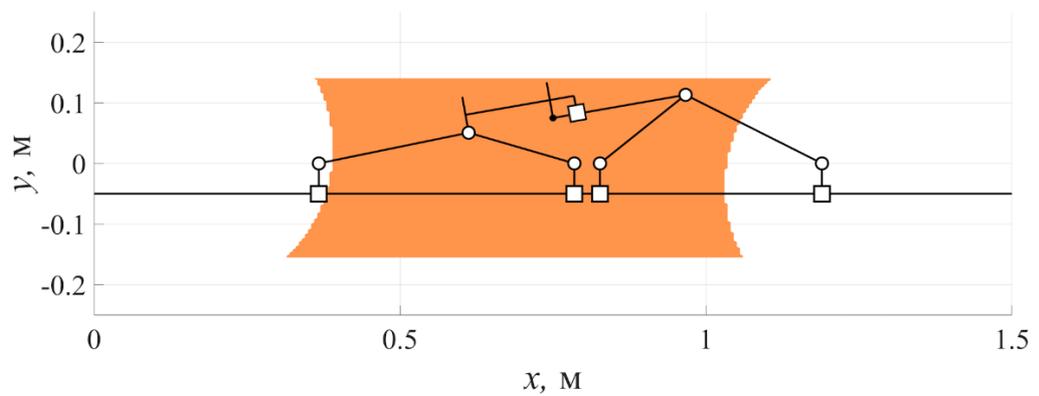
После аналитического решения задачи о положениях становится возможной оценка формы и размеров рабочей зоны механизма – важнейших характеристик любого манипуляционного устройства. Для этого могут применяться различные методы, такие как простое геометрическое построение, интервальный анализ [72], метод хорд [1] и т.д., однако наиболее универсальным является итерационный подход. При проведении итерационного анализа сначала задаются нижний и верхний пределы изменения координат выходного звена, и тем самым формируется некоторый анализируемый объем (в общем случае), либо площадь (в случае анализа плоского механизма). Указанные границы задаются таким образом, чтобы рабочая зона механизма гарантированно находилась в их пределах. После этого внутри сформированного объема (площади) с определенным шагом производится перебор точек, в каждой из которых решается обратная задача о положениях. Если в исследуемой точке существует решение данной задачи в действительных числах, то точка принадлежит теоретической рабочей зоне. Если же такого решения не существует, то точка лежит за пределами рабочей зоны. Кроме того, при определении принадлежности точки рабочей зоне могут вводиться дополнительные условия, как правило связанные с конструктивными ограничениями: запрет на пересечение звеньев, ограничения допустимых углов поворота в шарнирах и т.д. Рабочая зона, определенная с учетом подобных ограничений, называется конструктивной [16].

Рассмотрим пример анализа рабочей зоны механизма со следующими геометрическими параметрами: $l_{B11C1} = l_{B22C2} = 0,25$ м; $l_{B12C1} = l_{B21C2} = 0,18$ м; $l_{C2D} = 0,22$ м. Из конструктивных ограничений задавались только пределы перемещения кареток (изменения координат x_{Aij}) $[0; 1,50]$ м, поскольку при отсутствии данных пределов рабочая зона вдоль оси перемещения кареток будет неограниченной. Перебор точек производился с шагом 0,005 м по координате x_D в пределах $[0,2; 1,2]$ м и шагом 0,0025 м по координате y_D в пределах $[-0,25; 0,25]$ м для постоянного значения $s = 0,14$ м. В рассматриваемом примере все расчеты проводились для четырех различных значений угла наклона платформы φ : 0° , 10° , 20° , 30° (Рисунок 2.6). Все вычисления, а также визуализация результатов

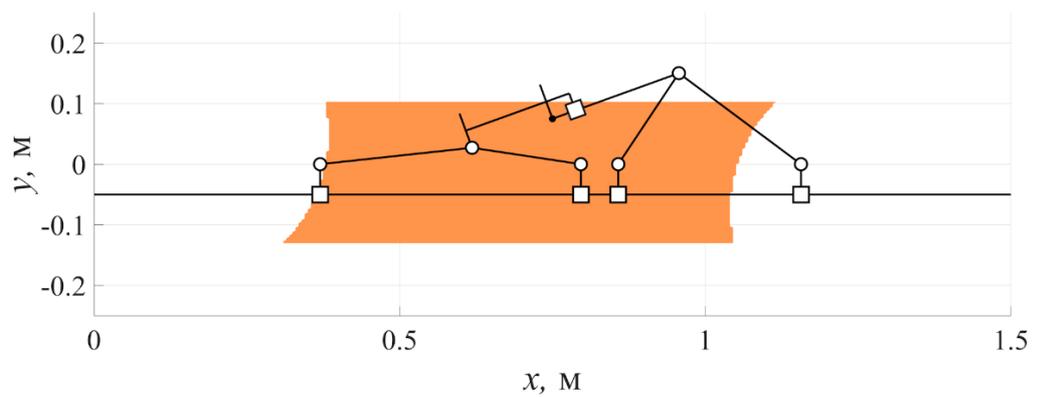
производились с использованием специально написанных для решения данной задачи прикладных программ в системе компьютерной алгебры MATLAB.



а.



б.



в.

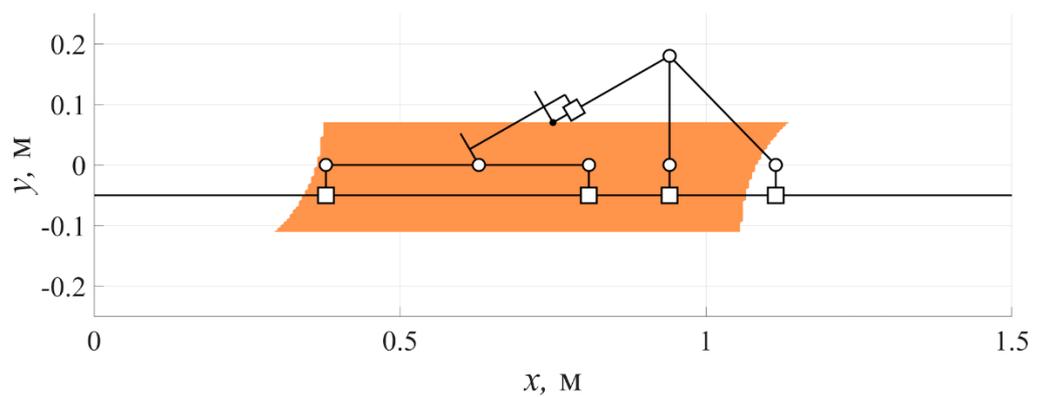


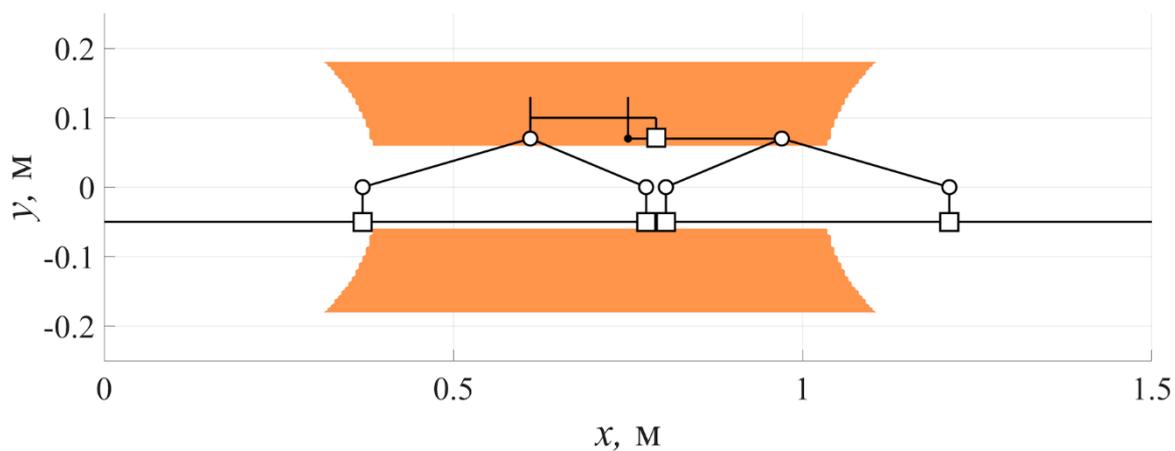
Рисунок 2.6. Рабочая зона при $s = 0,14$ м для различных углов наклона платформы φ :
 0° (а), 10° (б), 20° (в), 30° (г)

Как можно видеть, рабочая зона близка по размеру к габаритам подвижных частей механизма, что является хорошим результатом для класса механизмов параллельной структуры [78]. Кроме того, форма рабочей зоны довольно близка к прямоугольной даже при увеличении угла наклона, что также положительно сказывается на потенциальных возможностях применения данного механизма.

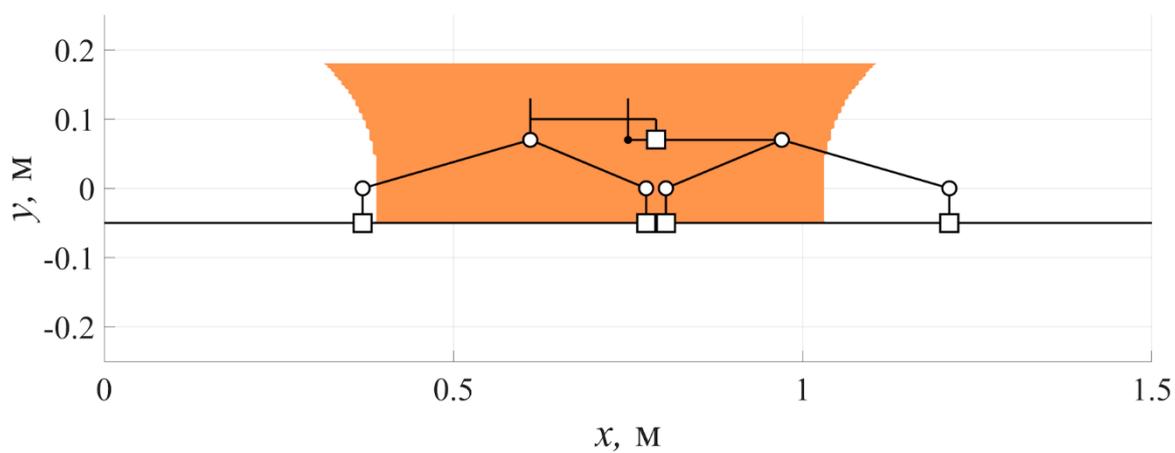
Стоит заметить, что в рассмотренном примере представлена, по сути, теоретическая рабочая зона без учета конструктивных ограничений. При этом целесообразно рассмотреть изменение формы и размера рабочей зоны при введении указанных ограничений [96]. Для примера рассмотрим влияние условия, при котором в механизме не допускается сближение кареток на расстояние меньше, чем 0,02 м (Рисунок 2.7.а), а также влияние ограничения на положения точки D по вертикали, заключающегося в том, что указанная точка может находиться только выше оси призматических пар (Рисунок 2.7.б). Также рассмотрим эффект при одновременном применении перечисленных условий (Рисунок 2.7.в).

Как можно видеть, введение конструктивных ограничений оказывает существенное влияние на размер рабочей зоны [17]. Так, при итерационном анализе рабочей зоны с учетом ограничений только на длину направляющих приводных призматических пар (Рисунок 2.6.а) количество проанализированных точек, принадлежащих рабочей зоне, было равно 19973. При введении ограничения только на сближение кареток количество точек, принадлежащих рабочей зоне, уменьшилось до 13894 (69,56 % от первоначального количества точек). При использовании только условия, ограничивающего положение точки D , количество точек рабочей зоны составило 12633 (63,25 % от первоначального количества). Наконец, при одновременном применении двух указанных ограничений количество точек рабочей зоны сократилось до 6947 (34,78 % от первоначального количества точек). Соответственно, размер рабочей зоны при применении двух

ограничений составляет порядка 54,99 % от размера рабочей зоны при ограничении только положения точки D . Из этого следует, что при проектировании реальных механизмов целесообразно располагать каретки на параллельных направляющих, чтобы обеспечить свободное перемещение каждой каретки, и, как следствие, возможность «перекрещивания» кинематических цепей \underline{PRR} соседних плоских лямбда-механизмов.



а.



б.

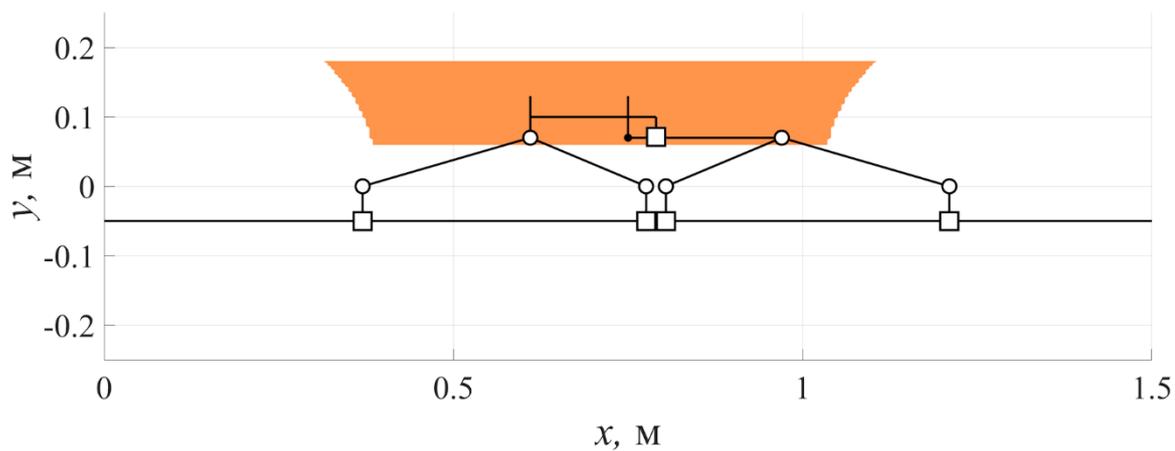


Рисунок 2.7. Рабочая зона при $s = 0,14$, $\varphi = 0^\circ$ с учетом конструктивных ограничений: сближения кареток (а), положения точки D (б), сближения кареток и положения точки D (в)

2.3. Скоростной и силовой анализ, исследование особых положений

Следующим этапом анализа механизмов параллельной структуры после решения задачи о положениях и анализа рабочей зоны является скоростной и силовой анализ, а также анализ особых положений механизма [12]. Указанные три типа исследований объединяет тот факт, что все они могут быть проведены с использованием одного комплексного метода анализа, основанного либо на изучении свойств матрицы Якоби механизма и ее составляющих, либо на изучении систем кинематических и силовых винтов механизма [33]. Первый метод является более распространенным и подходит для механизмов, у которых уравнения связи имеют достаточно простой вид, а также невозможно вырождение связей [106], накладываемых кинематическими цепями на выходное звено. Метод, основанный на винтовом исчислении, в свою очередь, больше подходит для анализа механизмов со сложными уравнениями связи, либо в том случае, когда возможно вырождение связей [82]. Кроме того, для механизмов с кинематической избыточностью использование винтового исчисления сопряжено с дополнительными неудобствами ввиду того, что кинематические винты описывают мгновенные скорости твердого тела в пространстве, но при этом неудобны для описания внутренних локальных подвижностей механизма [41]. По этой причине для анализа рассматриваемого механизма будем использовать метод, основанный на исследовании свойств его матрицы Якоби и связанных с ней матриц [39].

Для начала перепишем уравнения (2.3) в виде неявных функций – уравнений связи:

$$\begin{aligned}
F_{11} &= (x_{A11} - x_D + s \cos \varphi)^2 + (y_D - s \sin \varphi)^2 - l_{B11C1}^2 = 0, \\
F_{12} &= (x_{A12} - x_D + s \cos \varphi)^2 + (y_D - s \sin \varphi)^2 - l_{B12C1}^2 = 0, \\
F_{21} &= (x_{A21} - x_D - l_{C2D} \cos \varphi)^2 + (y_D + l_{C2D} \sin \varphi)^2 - l_{B21C2}^2 = 0, \\
F_{22} &= (x_{A22} - x_D - l_{C2D} \cos \varphi)^2 + (y_D + l_{C2D} \sin \varphi)^2 - l_{B22C2}^2 = 0.
\end{aligned}$$

После дифференцирования данных уравнений по времени, получим следующую систему линейных уравнений:

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} \dot{x}_D \\ \dot{y}_D \\ \dot{\varphi} \\ \dot{s} \end{pmatrix} + \mathbf{B} \begin{pmatrix} \dot{x}_{A11} \\ \dot{x}_{A12} \\ \dot{x}_{A21} \\ \dot{x}_{A22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.10)$$

где $\dot{x}_D, \dot{y}_D, \dot{\varphi}, \dot{s}$ – скорости изменения соответствующих выходных координат, \dot{x}_{Aij} – скорости соответствующих кареток, а \mathbf{A} и \mathbf{B} – матрицы 4×4 следующего вида:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_{11}}{\partial x_D} & \frac{\partial F_{11}}{\partial y_D} & \frac{\partial F_{11}}{\partial \varphi} & \frac{\partial F_{11}}{\partial s} \\ \frac{\partial F_{12}}{\partial x_D} & \frac{\partial F_{12}}{\partial y_D} & \frac{\partial F_{12}}{\partial \varphi} & \frac{\partial F_{12}}{\partial s} \\ \frac{\partial F_{21}}{\partial x_D} & \frac{\partial F_{21}}{\partial y_D} & \frac{\partial F_{21}}{\partial \varphi} & \frac{\partial F_{21}}{\partial s} \\ \frac{\partial F_{22}}{\partial x_D} & \frac{\partial F_{22}}{\partial y_D} & \frac{\partial F_{22}}{\partial \varphi} & \frac{\partial F_{22}}{\partial s} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_{11}}{\partial x_{A11}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial F_{12}}{\partial x_{A12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial F_{21}}{\partial x_{A21}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial F_{22}}{\partial x_{A22}} \end{pmatrix}.$$

Данные матрицы являются составляющими обратной матрицы Якоби механизма \mathbf{J}^{-1} , которая может быть получена делением каждой k -й ($k = 1 \dots 4$) строки матрицы \mathbf{A} на соответствующий элемент главной диагонали матрицы \mathbf{B} , взятый со знаком « \leftarrow »:

$$\mathbf{J}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial F_{11}}{\partial x_D} / \frac{\partial F_{11}}{\partial x_{A11}} & -\frac{\partial F_{11}}{\partial y_D} / \frac{\partial F_{11}}{\partial x_{A11}} & -\frac{\partial F_{11}}{\partial \varphi} / \frac{\partial F_{11}}{\partial x_{A11}} & -\frac{\partial F_{11}}{\partial s} / \frac{\partial F_{11}}{\partial x_{A11}} \\ -\frac{\partial F_{12}}{\partial x_D} / \frac{\partial F_{12}}{\partial x_{A12}} & -\frac{\partial F_{12}}{\partial y_D} / \frac{\partial F_{12}}{\partial x_{A12}} & -\frac{\partial F_{12}}{\partial \varphi} / \frac{\partial F_{12}}{\partial x_{A12}} & -\frac{\partial F_{12}}{\partial s} / \frac{\partial F_{12}}{\partial x_{A12}} \\ -\frac{\partial F_{21}}{\partial x_D} / \frac{\partial F_{21}}{\partial x_{A21}} & -\frac{\partial F_{21}}{\partial y_D} / \frac{\partial F_{21}}{\partial x_{A21}} & -\frac{\partial F_{21}}{\partial \varphi} / \frac{\partial F_{21}}{\partial x_{A21}} & -\frac{\partial F_{21}}{\partial s} / \frac{\partial F_{21}}{\partial x_{A21}} \\ -\frac{\partial F_{22}}{\partial x_D} / \frac{\partial F_{22}}{\partial x_{A22}} & -\frac{\partial F_{22}}{\partial y_D} / \frac{\partial F_{22}}{\partial x_{A22}} & -\frac{\partial F_{22}}{\partial \varphi} / \frac{\partial F_{22}}{\partial x_{A22}} & -\frac{\partial F_{22}}{\partial s} / \frac{\partial F_{22}}{\partial x_{A22}} \end{pmatrix}.$$

С учетом вышеизложенного выражение (2.10) можно переписать следующим образом:

$$\mathbf{J}^{-1} \begin{pmatrix} \dot{x}_D \\ \dot{y}_D \\ \dot{\varphi} \\ \dot{s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}_{A11} \\ \dot{x}_{A12} \\ \dot{x}_{A21} \\ \dot{x}_{A22} \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

Легко видеть, что для решения обратной задачи о скоростях достаточно подставить значения \dot{x}_D , \dot{y}_D , $\dot{\varphi}$, \dot{s} в выражение (2.11) и вычислить значения \dot{x}_{Aij} . Соответственно, для решения прямой задачи о скоростях необходимо найти решение данной системы линейных уравнений для заданных значений \dot{x}_{Aij} [10].

С практической точки зрения наибольший интерес представляет обратная задача о скоростях, поскольку ее решение позволяет определить минимально необходимые скорости двигателей приводов для требуемых значений скоростей выходного звена [61]. При этом значения скоростей в приводах будут зависеть не только от абсолютных значений скоростей выходного звена, но и от «направления» вектора этих скоростей [100]. Для большинства практических применений, как правило, известны только упомянутые абсолютные значения, а направление вектора скорости может быть любым. В этой связи целесообразно производить анализ из условия максимизации приводных скоростей согласно [8].

Выражение (2.11) в общем случае имеет следующий вид:

$$\mathbf{J}^{-1} \dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{q}}, \quad (2.12)$$

где $\dot{\mathbf{x}}$ и $\dot{\mathbf{q}}$, векторы-столбцы выходных и приводных скоростей соответственно.

Из выражения (2.12) легко видеть, значение k -й приводной скорости \dot{q}_k равно скалярному произведению вектора $\dot{\mathbf{x}}$ на некоторый вектор \mathbf{j}_k^{-1} , составленный из элементов k -й строки матрицы \mathbf{J}^{-1} . Тогда для некоторой заданной нормы $\|\dot{\mathbf{x}}\| = \text{const}$ максимальное значение $\dot{q}_k = \dot{q}_{k\max}$ будет соответствовать такому направлению вектора $\dot{\mathbf{x}}$, при котором он оказывается коллинеарным вектору \mathbf{j}_k^{-1} , то есть

$$|\dot{q}_{k\max}| = \|\mathbf{j}_k^{-1}\| \|\dot{\mathbf{x}}\|.$$

Для механизма с n приводами

$$|\dot{q}|_{\max} = \max_{k=1\dots n} (|\dot{q}_{k\max}|) = \max_{k=1\dots n} (\|\mathbf{j}_k^{-1}\| \|\dot{\mathbf{x}}\|). \quad (2.13)$$

Для рассматриваемого в данной главе механизма $\dot{\mathbf{x}} = (\dot{x}_D, \dot{y}_D, \dot{\phi}, \dot{s})^T$, то есть вектор выходных скоростей содержит компоненты с разным физическим смыслом: две линейных скорости выходного звена, угловую скорость выходного звена и линейную скорость сближения поверхностей механизма схвата. Применение Евклидовой нормы к данному вектору, очевидно, не имеет физического смысла. Однако в работе [8] было показано, что различные компоненты вектора скоростей могут быть рассмотрены и нормализованы отдельно. Тогда из (2.13) получим:

$$|\dot{x}_A|_{\max} = \max_{k=1\dots 4} (|\dot{x}_{A(k)\max}|) = \max_{k=1\dots 4} \left(\left(\sqrt{(j_{k,1}^{-1})^2 + (j_{k,2}^{-1})^2} \right) v_D + |j_{k,3}^{-1}| \omega + |j_{k,4}^{-1}| v_s \right), \quad (2.14)$$

где $j_{k,p}^{-1}$ – элемент k -й строки, p -го столбца матрицы \mathbf{J}^{-1} ; v_D , ω , v_s – абсолютные значения линейной скорости выходного звена, его угловой скорости и скорости раздвижения схвата соответственно; $\dot{x}_{A(1)} = \dot{x}_{A11}$, $\dot{x}_{A(2)} = \dot{x}_{A12}$, $\dot{x}_{A(3)} = \dot{x}_{A21}$, $\dot{x}_{A(4)} = \dot{x}_{A22}$.

Для примера рассмотрим результаты итерационного анализа с решением обратной задачи о скоростях согласно выражению (2.14) для значений $v_D = 1$ м/с, $\omega = 1$ рад/с, $v_s = 1$ м/с при $s = 0,14$ м, $\phi = 20^\circ$ и без ограничений на сближение кареток и положение точки D (Рисунок 2.8).

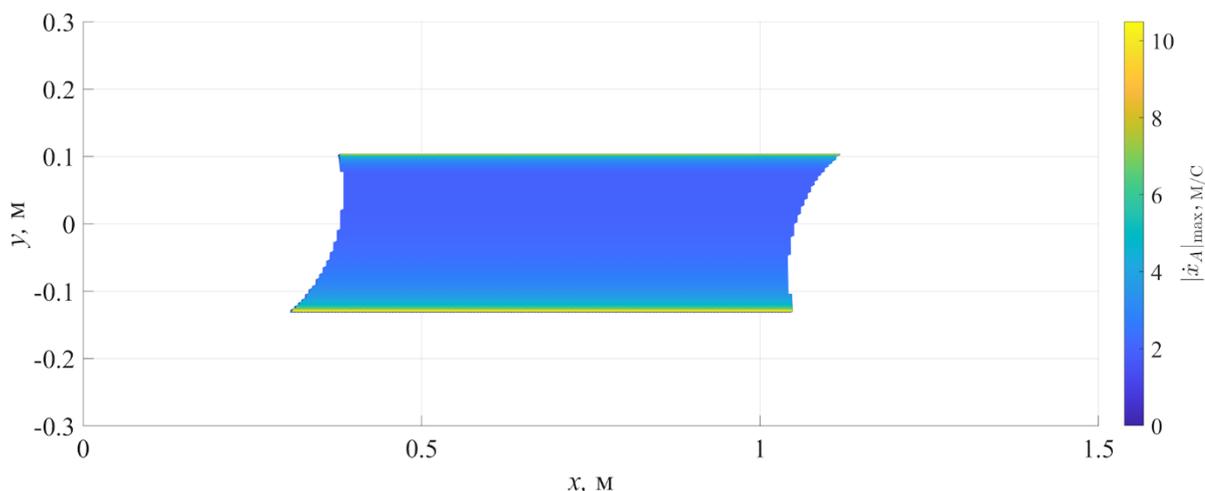


Рисунок 2.8. Распределение значения максимальной скорости кареток по рабочей зоне при $s = 0,14$ м, $\varphi = 20^\circ$

Как можно видеть, значение максимальной скорости кареток значительно возрастает при приближении к верхней и нижней границам рабочей зоны. Рост значений приводных скоростей, как правило наблюдается при приближении к особым положениям типа «ПС» (здесь и далее используется классификация особых положений, предложенная в [8]). Особые положения данного типа характеризуются потерей как минимум одной степени свободы выходным звеном и практически всегда находятся на границе теоретической рабочей зоны, поскольку связаны достижением какой-либо цепью максимального удлинения [2]. В рассматриваемом механизме для принятых геометрических размеров положение верхней и нижней границ теоретической рабочей зоны будет определяться длиной $l_{B_{12}C_1} = l_{B_{21}C_2}$, поскольку для достижения указанных границ одно из звеньев $B_{12}C_1$ или $B_{21}C_2$ должно будет принять вертикальное положение (Рисунок 2.9).

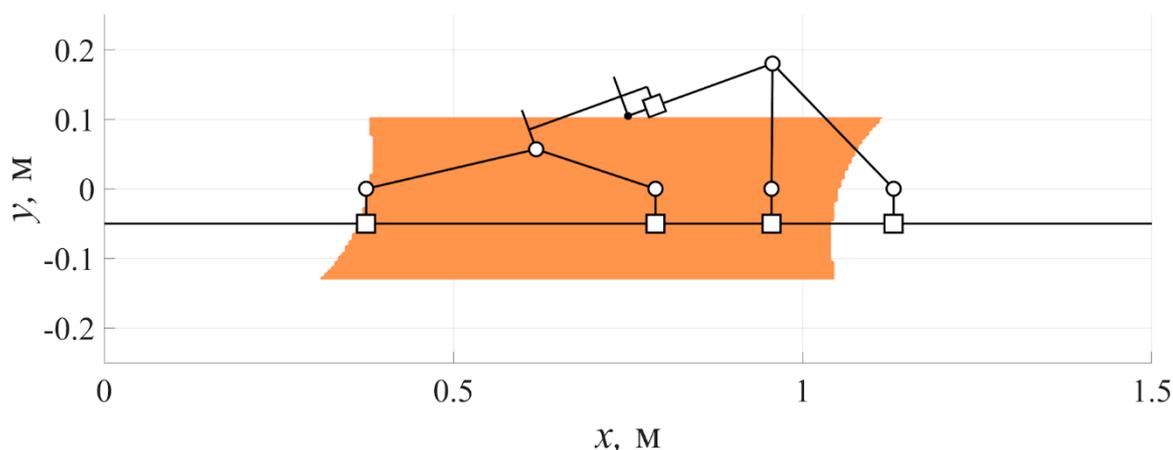


Рисунок 2.9. Механизм в особом положении типа «ПС» на верхней границе рабочей зоны

Таким образом, как и у подавляющего большинства механизмов параллельной структуры, на теоретической границе рабочей зоны исследуемого механизма находятся точки особых положений типа «ПС», при приближении к которым возрастают значения приводных скоростей. Отсутствие точек особых положений данного типа на боковых границах рабочей зоны обусловлено тем, что данные границы определяются конструктивными ограничениями на перемещение кареток, а не геометрическими размерами звеньев механизма.

Как уже было отмечено, матрица Якоби может быть использована и для статического силового анализа механизма. В общем случае вектор внешних нагрузок (сил и моментов) \mathbf{P} , действующих на выходное звено некоторого механизма параллельной структуры, связан с вектором приводных усилий \mathbf{e} через транспонированную матрицу Якоби механизма \mathbf{J}^T следующим образом [8]:

$$-\mathbf{J}^T \mathbf{P} = \mathbf{e}. \quad (2.15)$$

По аналогии со скоростями, из (2.15) следует, что усилие e_k в k -м приводе является скалярным произведением вектора \mathbf{P} на k -ю вектор-строку \mathbf{j}_k^T матрицы \mathbf{J}^T . Соответственно, для некоторой нормы $\|\mathbf{P}\| = const$ максимальное значение приводного усилия $e_k = e_{k\max}$ будет соответствовать такому направлению вектора \mathbf{P} , при котором он оказывается коллинеарным вектору \mathbf{j}_k^T , а значит

$$|e_{k\max}| = \|\mathbf{j}_k^T\| \|\mathbf{P}\|.$$

Для механизма с n приводами

$$|e|_{\max} = \max_{k=1\dots n} (|e_{k\max}|) = \max_{k=1\dots n} (\|\mathbf{j}_k^T\| \|\mathbf{P}\|). \quad (2.16)$$

Как и в случае со скоростями, именно обратная задача имеет большее практическое значение при проектировании реальных механизмов, поскольку ее решение позволяет сформулировать требования к силовым характеристикам двигателей приводов. При этом формула (2.16) позволяет производить расчет для наихудшего случая внешнего нагружения, максимизирующего приводные усилия. Проблему нормализации вектора \mathbf{P} , содержащего разных по своему физическому смыслу физические величины, можно решить рассмотрением сил и моментов по

отдельности [23]. Таким образом, для рассматриваемого механизма абсолютное значение максимальной силы F_A , возникающей в приводе кареток, может быть рассчитано следующим образом:

$$|F_A|_{\max} = \max_{k=1\dots 4} \left(|F_{A(k)\max}| \right) = \max_{k=1\dots 4} \left(\left(\sqrt{(j_{k,1}^T)^2 + (j_{k,2}^T)^2} \right) F_D + |j_{k,3}^T| T + |j_{k,4}^T| F_s \right), \quad (2.17)$$

где $j_{k,p}^T$ – элемент k -й строки, p -го столбца матрицы \mathbf{J}^T ; F_D , T , F_s – абсолютные значения силы и момента, приложенных к выходному звену, и силы на схвате соответственно; $F_{A(1)} = F_{A11}$, $F_{A(2)} = F_{A12}$, $F_{A(3)} = F_{A21}$, $F_{A(4)} = F_{A22}$ – силы на соответствующих каретках.

В качестве примера рассмотрим результаты итерационного анализа рабочей зоны с использованием выражения (2.17) для $F_D = 1$ Н, $T = 1$ Н·м, $F_s = 1$ Н. Как и в случае со скоростями анализ будем проводить для $s = 0,14$ м и $\varphi = 20^\circ$ без ограничений на сближение кареток и положение точки D . Ввиду большего, чем при анализе скоростей, перепада значений расчетной величины по рабочей зоне, для визуализации будем использовать логарифмическую шкалу (Рисунок 2.10).

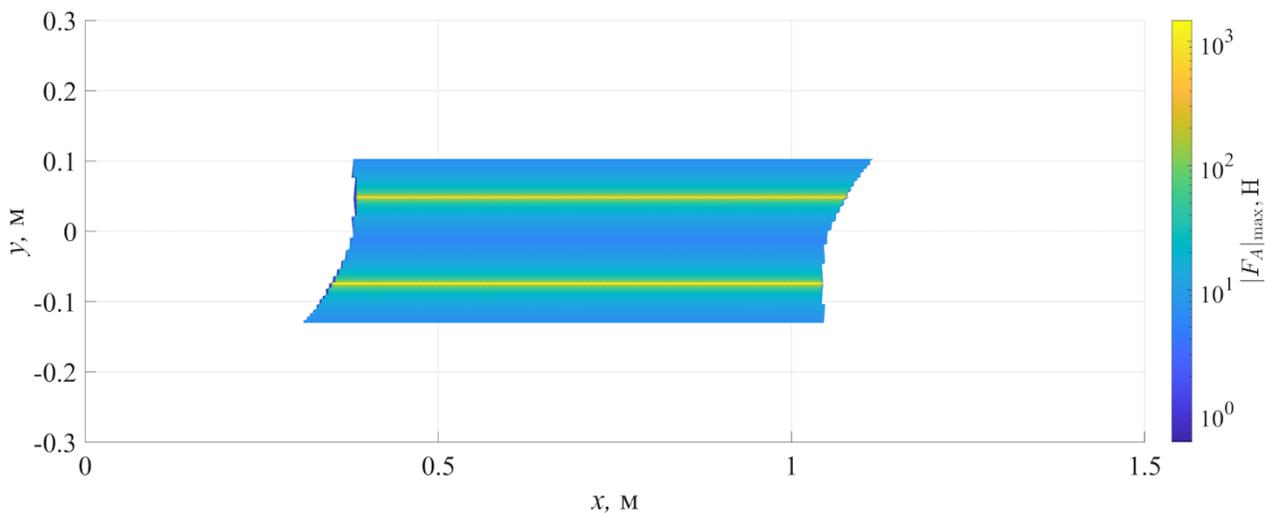


Рисунок 2.10. Распределение значения максимальной силы на каретках по рабочей зоне при $s = 0,14$ м, $\varphi = 20^\circ$

Как можно видеть, внутри рабочей зоны наблюдается значительное изменение значений приводного усилия, достигающее трех порядков. Наибольшие значения приводных усилий (около 10^3 Н) наблюдаются вдоль горизонтальных линий, проходящих через всю рабочую зону на уровнях $\approx 0,0475$ м и $\approx -0,0725$ м.

При это рост указанных значений происходит достаточно резко, что, как правило, происходит вблизи точек, соответствующих особым положениям типа «ПУ». Данный тип особых положений характеризуется возможностью неконтролируемого перемещения выходного звена в рамках одной из имеющихся у него степеней свободы [79]. В теории данное перемещение должно быть бесконечно малым, но на практике является конечным ввиду погрешностей изготовления и наличия податливости конструктивных элементов механизма.

Известно [42], что в особом положении типа «ПУ» определитель матрицы A из выражения (2.10) становится равным нулю. Этот факт позволяет при достаточно малом шаге перебора оценить положение точек особых положений данного типа по изменению знака определителя указанной матрицы: если в двух соседних анализируемых точках определитель матрицы A имеет разный знак, то между ними находится точка, соответствующая особому положению типа «ПУ». Рассмотрим результаты итерационного анализа значений $\det(A)$ при тех же условиях, что и ранее, то есть при $s = 0,14$ м, $\varphi = 20^\circ$ и без ограничений на сближение кареток и положение точки D . При этом дополнительно визуализируем конфигурацию механизма с расположением точки D на уровне $0,0475$ м (Рисунок 2.11).

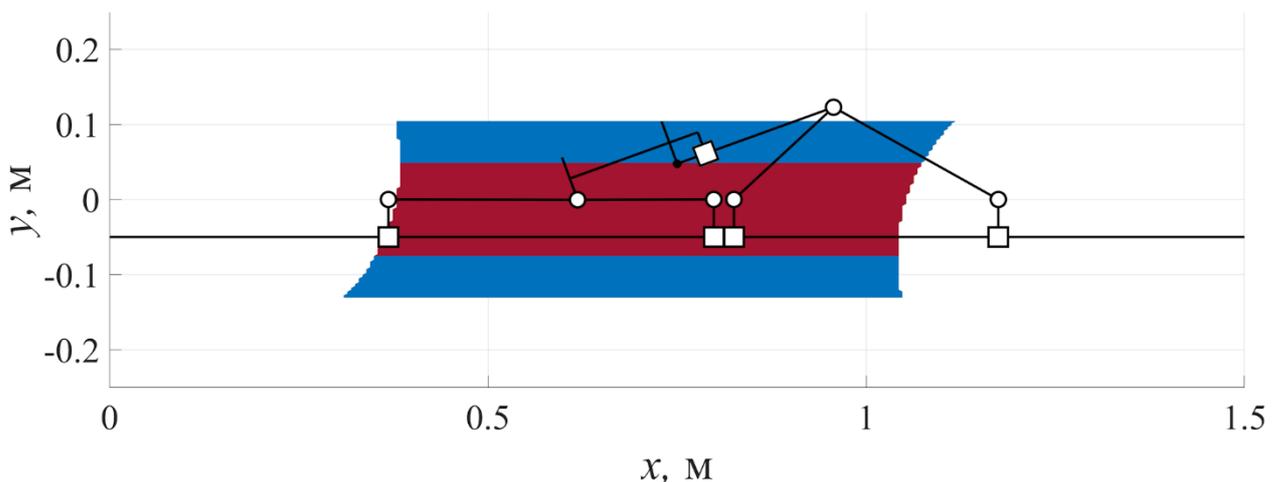
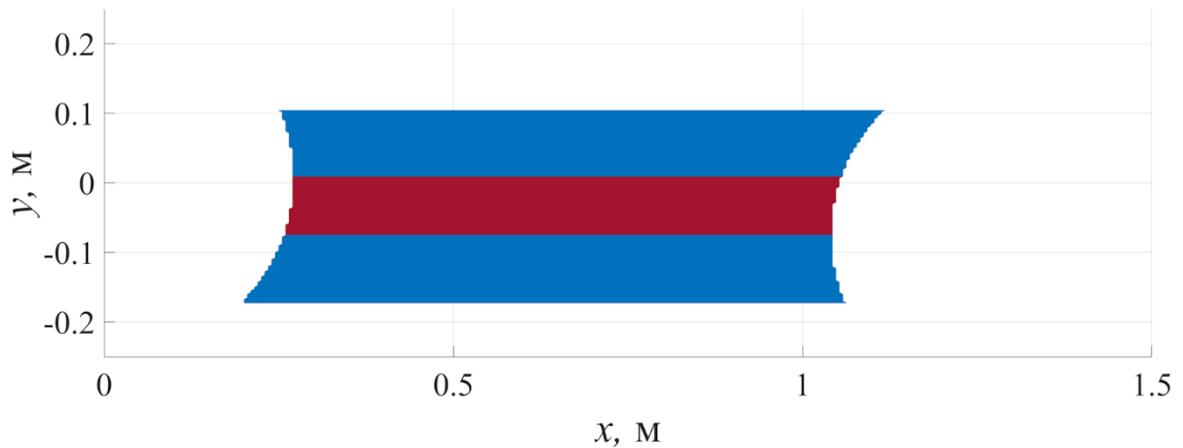


Рисунок 2.11. Знак определителя матрицы A при $s = 0,14$ м, $\varphi = 20^\circ$: красный – «+», синий – «-» и конфигурация механизма при $y_D = 0,0475$ м

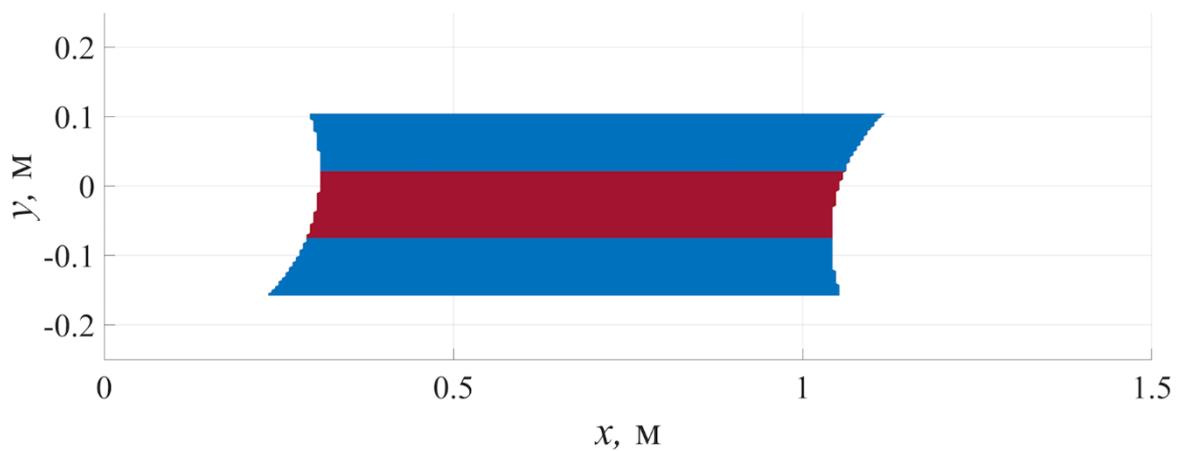
Как можно видеть границы областей положительного и отрицательного определителя в точности совпадают с горизонтальными линиями, вблизи которых наблюдается скачкообразный рост приводных усилий. Иными словами, рост

значений приводных усилий, как и предполагалось, вызван приближением к особым положениям типа «ПУ». Данный факт также подтверждается рассмотрением конфигурации механизма при $y_D = 0,0475$ м. Так, можно видеть, что в данной конфигурации в левом плоском лямбда-механизме звенья $B_{11}C_1$ и $B_{12}C_1$ занимают горизонтальное положение. Это приводит к тому, что точка C_1 будет иметь неуправляемую подвижность вдоль вертикальной прямой, что, в свою очередь, по определению является особым положением типа «ПУ».

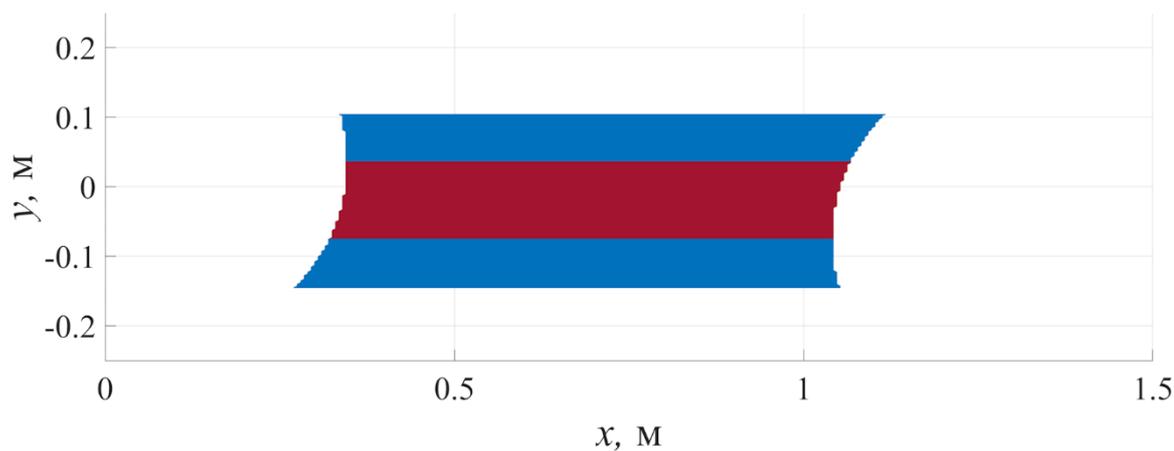
Положение линий, разделяющих зоны положительных и отрицательных значений определителя матрицы \mathbf{A} , будет зависеть от значений φ и s . Для примера рассмотрим результаты анализа для значений s , равных 0,02 м, 0,06 м и 0,10 при постоянном значении угла $\varphi = 20^\circ$ (Рисунок 2.12).



а.



б.



в.

Рисунок 2.12. Знак определителя матрицы \mathbf{A} при $\varphi = 20^\circ$ и различных значения координаты s :

$$s = 0,02 \text{ м (а)}, s = 0,06 \text{ м (б)}, s = 0,10 \text{ м (в)}$$

Результаты итерационного анализа следующие:

- Для $s = 0,02$ м всего проанализировано 18205 точек, $\det(\mathbf{A}) > 0$ в 5195 точках (28,54 % от общего количества), $\det(\mathbf{A}) < 0$ в 13010 точках (две зоны по 6505 точек, 35,73 % от общего количества в каждой зоне);
- Для $s = 0,06$ м всего проанализирована 16421 точка, $\det(\mathbf{A}) > 0$ в 5941 точках (34,78 % от общего количества), $\det(\mathbf{A}) < 0$ в 10710 точках (две зоны по 5355 точек, 32,61 % от общего количества в каждой зоне);
- Для $s = 0,10$ м всего проанализировано 14910 точек, $\det(\mathbf{A}) > 0$ в 6320 точках (42,38 % от общего количества), $\det(\mathbf{A}) < 0$ в 8590 точках (две зоны по 4295 точек, 28,81 % от общего количества в каждой зоне);
- Для $s = 0,14$ м всего проанализировано 13317 точек, $\det(\mathbf{A}) > 0$ в 6709 точках (50,38 % от общего количества), $\det(\mathbf{A}) < 0$ в 6608 точках (две зоны по 3304 точек, 24,81 % от общего количества в каждой зоне).

Как можно видеть, с увеличением величины s растет размер зоны с положительным определителем матрицы \mathbf{A} .

Следует отметить, что без применения специальных методов переход через особые положения в механизмах параллельной структуры, как правило, либо невозможен, либо может привести к превышению допустимых нагрузок на конструктивные элементы механизма и, как следствие, его преждевременному выходу из строя. Таким образом, разработанная математическая модель,

позволяющая оценивать максимальные приводные скорости и усилия, а также форму и размеры областей рабочей зоны, разделенных между собой точками особых положений, будет являться важным инструментом при проектировании реальных устройств на базе исследуемого механизма.

Поскольку кинематическая избыточность механизма предназначена для использования его выходного звена в качестве схвата, целесообразно также установить зависимость между приводными усилиями на каретках и непосредственно силой сжатия, развиваемой на схвате. Обозначим составляющие внешней силы, действующей на выходное звено в направлении осей Ox и Oy как F_x и F_y соответственно. Тогда, с учетом того, что для рассматриваемого механизма $\mathbf{P} = (F_x \ F_y \ T \ F_s)^T$ а $\mathbf{e} = (F_{A11} \ F_{A12} \ F_{A21} \ F_{A22})^T$, выражение (2.15) можно записать следующим образом:

$$\begin{pmatrix} F_{A11} \\ F_{A12} \\ F_{A21} \\ F_{A22} \end{pmatrix} = -\mathbf{J}^T \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ T \\ F_s \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

Ввиду линейности системы (2.18), ее можно разделить на две части

$$\begin{pmatrix} F_{A11} \\ F_{A12} \\ F_{A21} \\ F_{A22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{A11}^{BH} \\ F_{A12}^{BH} \\ F_{A21}^{BH} \\ F_{A22}^{BH} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_{A11}^S \\ F_{A12}^S \\ F_{A21}^S \\ F_{A22}^S \end{pmatrix} = -\mathbf{J}^T \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ T \\ 0 \end{pmatrix} - \mathbf{J}^T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ F_s \end{pmatrix}, \quad (2.19)$$

где верхний индекс «вн» обозначает часть силы на соответствующей каретке, возникающую ввиду наличия внешней нагрузки, а индекс «s» обозначает часть силы на каретке, обеспечивающую усилие схватывания.

Пусть $F_s = 1$ Н, тогда из (2.19) следует, что

$$\hat{F}_{A(k)}^s = -\mathbf{j}_k^T \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -j_{k,4}^T, \quad (2.20)$$

где $\hat{F}_{A(k)}^s$ – сила на k -й каретке, необходимая, чтобы развить 1 Н силы на схвате, \mathbf{j}_k^T – k -я вектор-строка матрицы \mathbf{J}^T , $j_{k,4}^T$ – элемент k -й строки четвертого столбца матрицы \mathbf{J}^T .

Пусть $F_{\text{пр}k}$ – сила, которую может развить k -й привод. Тогда из (2.19) и (2.20) можно найти значение максимально допустимой силы схвата, которую может обеспечить k -й привод при заданной внешней нагрузке:

$$|F_{s,k}|_{\max} = \frac{F_{\text{пр}k} - |F_{A(k)}^{\text{BH}}|}{|\hat{F}_{A(k)}^s|} \cdot 1 \text{ Н}. \quad (2.21)$$

Тогда для механизма в целом максимально допустимая сила сжатия схвата при заданной внешней нагрузке и характеристиках привода будет представлять собой минимальное из значений, определенных по формуле (2.21), то есть

$$|F_s|_{\max} = \min_{k=1..n} (|F_{s,k}|_{\max}) = \min_{k=1..n} \left(\frac{F_{\text{пр}k} - |F_{A(k)}^{\text{BH}}|}{|\hat{F}_{A(k)}^s|} \cdot 1 \text{ Н} \right). \quad (2.22)$$

В качестве примера рассмотрим результаты итерационного анализа с использованием выражения (2.22) при тех же условиях, что и ранее ($\varphi = 20^\circ$, $s = 0,14$ м) для $F_{\text{пр}} = 100$ Н без внешней нагрузки (Рисунок 2.13.а) и с внешней нагрузкой $F_x = F_y = 1$ Н, $T = 0,1$ Н·м (Рисунок 2.13.б).

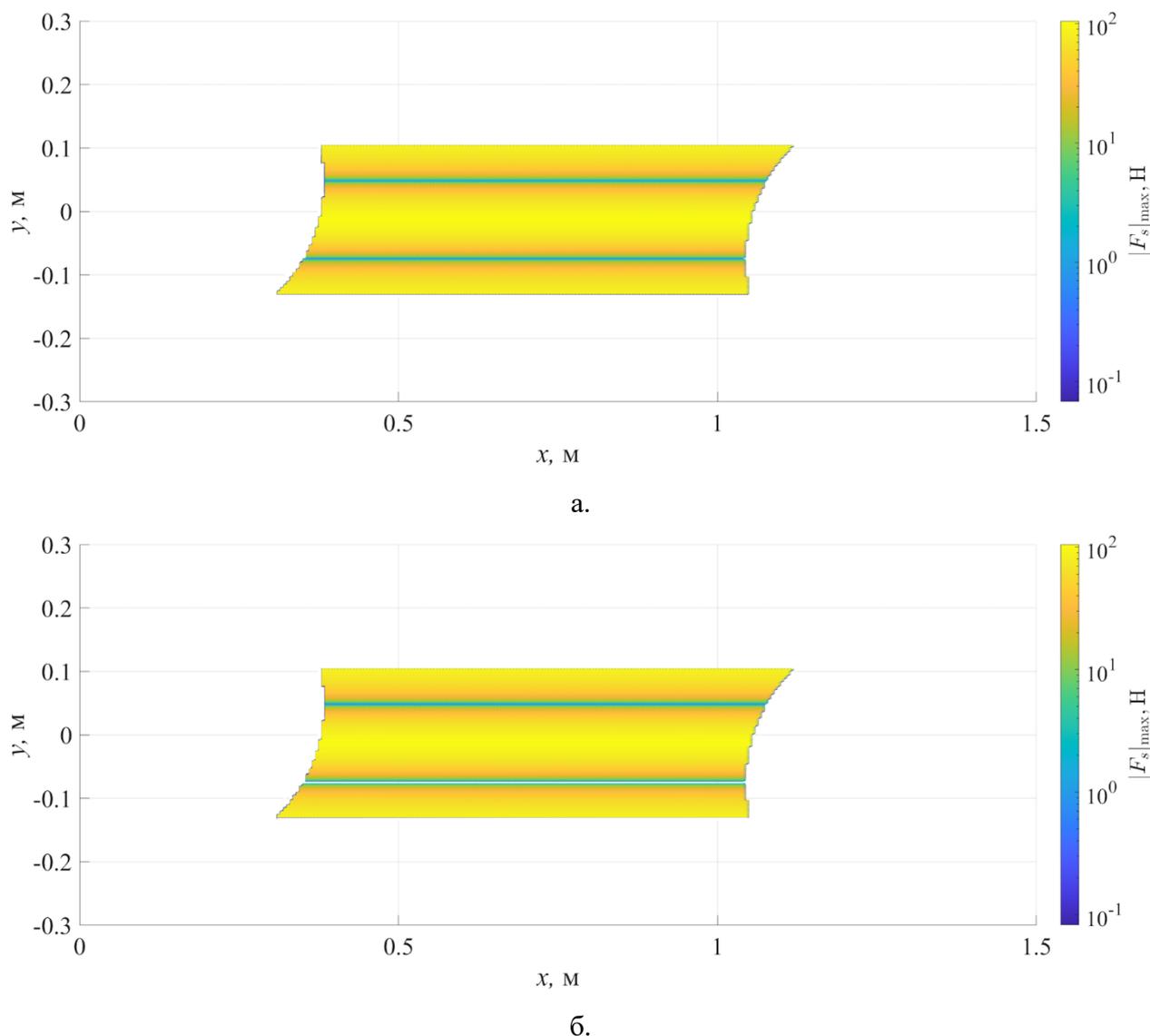


Рисунок 2.13. Распределение максимальной силы на схвате при $\varphi = 20^\circ$, $s = 0,14$ м и усилия привода 100 Н: без внешней нагрузки (а) для $F_x = F_y = 1$ Н, $T = 0,1$ Н·м

Как можно видеть, значение максимально возможной силы на схвате скачкообразно уменьшается вблизи особых положений типа «ПУ» даже при условии отсутствия внешней нагрузки. При этом можно заметить, что в примере с внешней нагрузкой рабочая зона имеет разрыв в районе нижней горизонтальной прямой, соответствующей особым положениям указанного типа. В пределах этого разрыва значение силы, вычисляемой по формуле (2.22) становилось бы отрицательным, то есть приводы механизма неспособны выдержать внешнюю нагрузку даже без приложения какой-либо силы на схвате.

Таким образом, разработанная математическая модель механизма позволяет не только проводить скоростной и силовой анализ совместно с анализом особых

положений, но и вычислять максимально развиваемое усилие на схвате по известным характеристикам двигателей приводов.

2.4. Результаты и выводы по главе

1. Предложена структурная схема плоского механизма с кинематической избыточностью, у которого выходное звено является составным, что позволяет реализовать функцию захвата объектов манипулирования;

2. Для предложенного механизма получены уравнения связи, найдено аналитическое решение прямой и обратной задачи о положениях, а также путем дифференцирования указанных уравнений определен общий вид матрицы Якоби, что позволило создать математические модели кинематики и статики механизма;

3. Разработанная математическая модель использована для итерационного анализа рабочей зоны, в том числе определения точек, соответствующих особым положениям типа «ПС» и «ПУ», а также анализа близости к особым положениям указанных типов на основе скоростных и силовых критериев;

4. Предложен способ расчета максимального усилия на схвате механизма при заданных внешней нагрузке на выходное звено и предельно допустимой нагрузке на приводы механизма;

5. Использование дополнительной (избыточной) подвижности механизма позволяет изменять расположение точек особых положений в рабочей зоне, а значит данная подвижность может быть задействована для избегания таких положений;

6. При наличии внешней нагрузки внутри рабочей зоны вблизи точек, соответствующих особым положениям типа «ПУ» будут существовать области, в которых механизм не сможет развить никакого усилия на схвате. Размеры данных областей будут определяться значениями максимально допустимых нагрузок на приводы механизма.

ГЛАВА 3. СИНТЕЗ И АНАЛИЗ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ПОСТУПАТЕЛЬНО-НАПРАВЛЯЮЩЕГО МЕХАНИЗМА С КИНЕМАТИЧЕСКОЙ ИЗБЫТОЧНОСТЬЮ

3.1. Структура и кинематическая схема

В широком смысле, задача синтеза пространственного механизма с интегрированным схватом может быть сформулирована аналогично тому, как это было сделано ранее для плоского механизма, и также решена аналогичным образом. Иными словами, работоспособность пространственного механизма может быть обеспечена путем независимого позиционирования в пространстве двух точек, расположенных на разных концах захвата. С позиции чистой кинематики, наиболее простым способом позиционирования точки в пространстве является использование механизма-трипода, включающего три сходящиеся в одну точку кинематических цепи со структурой \underline{SPS} (или \underline{UPS}). Соответственно, используя два таких трипода, можно получить пространственный механизм с шестью степенями свободы выходного звена (Рисунок 3.1.а). При этом важно отметить, что только двух триподов, обеспечивающих позиционирование точек M и N , недостаточно, поскольку в таком случае механизм будет иметь неконтролируемую подвижность, характеризующуюся вращением выходного звена вокруг оси MN . Для решения данной проблемы можно использовать дополнительную цепь с той же структурой, присоединенную к точке M' , принадлежащей выходному звену, но не располагающуюся на прямой MN . Альтернативным вариантом является закрепление общих шарниров обоих триподов на одной половине раздвижной платформы в точках M и M' (Рисунок 3.1.б). В этом случае положение ориентация платформы в пространстве будет полностью определяться указанными триподами. При этом, как и в предыдущем случае, также будет необходимо использовать

дополнительную седьмую цепь, но уже для того, чтобы управлять непосредственно избыточной подвижностью.

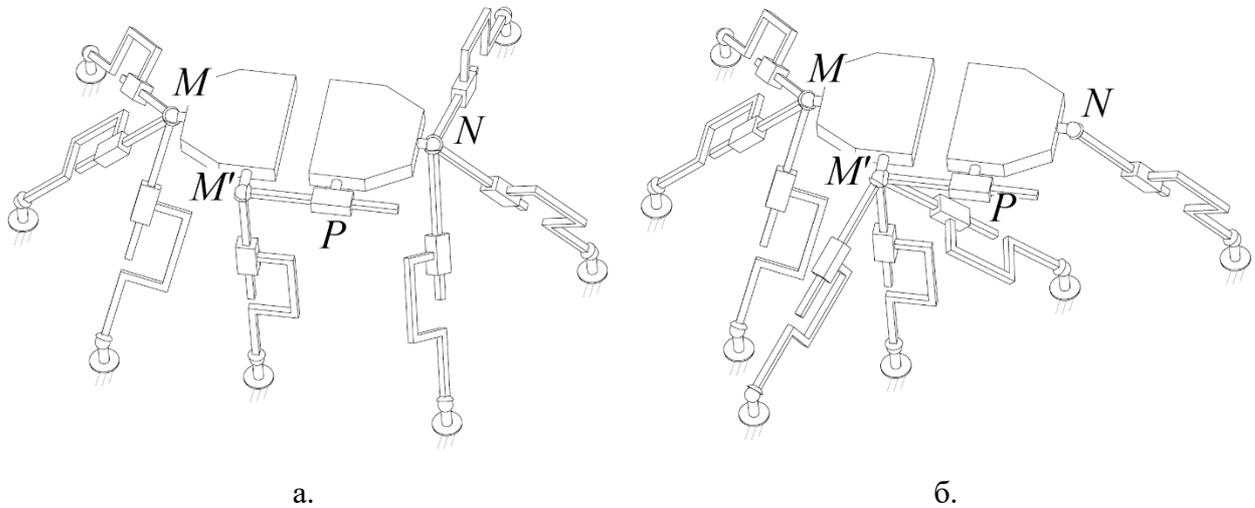


Рисунок 3.1. Варианты условного механизма 7-SPS с кинематической избыточностью: общие шарниры триподов расположены на разных половинах раздвижной платформы (а), либо на одной половине (б)

Таким образом, требуемый функционал для пространственного механизма в общем случае (то есть для шести степеней свободы выходного звена) может быть реализован с использованием схемы 7-SPS (или 7-UPS). В то же время стоит заметить, что несмотря на простоту кинематической структуры, в том виде, в котором они представлены выше, для практической реализации указанные схемы не подходят, поскольку невозможно разработать удобную конструкцию сферического шарнира, который является общим для нескольких цепей одновременно. Кроме того, наличие шести кинематических цепей подобного типа приводит к тому, что рабочая зона механизмов, схожих по структуре с платформой Гофа-Стюарта, конструктивно ограничена, если не применяются дополнительные меры, в частности, кинематическая избыточность непосредственно в кинематических цепях.

Большой практический интерес представляет синтез механизмов с числом степеней свободы меньшим, чем шесть, в частности, поступательно-направляющих механизмов. В свою очередь, из механизмов подобного типа наиболее широко применяемыми являются механизмы, относящиеся к семейству Delta, что во многом обусловлено тем фактом, что при обычных эксплуатационных условиях их

промежуточные звенья работают только на растяжение и сжатие. Это позволяет создавать конструкции механизмов данного типа легкими и, в то же время, достаточно прочными и жесткими, что является определяющим фактором для многих технологических операций.

С учетом вышеизложенного для дальнейшего анализа и проработки была выбрана базовая схема Delta с линейными приводами. При этом рассмотрены варианты обеспечения наложения связей на выходное звено как за счет присоединения кинематических цепей со степенью подвижности, меньшей, чем шесть, к двум различным составным частям выходного звена (Рисунок 3.2), так и за счет присоединения указанных цепей только к одной половине выходного звена с использованием отдельной цепи для управления дополнительной подвижностью механизма (Рисунок 3.3). В дальнейшем первый вариант будем называть исполнением «2+2», а второй – исполнением «3+1».

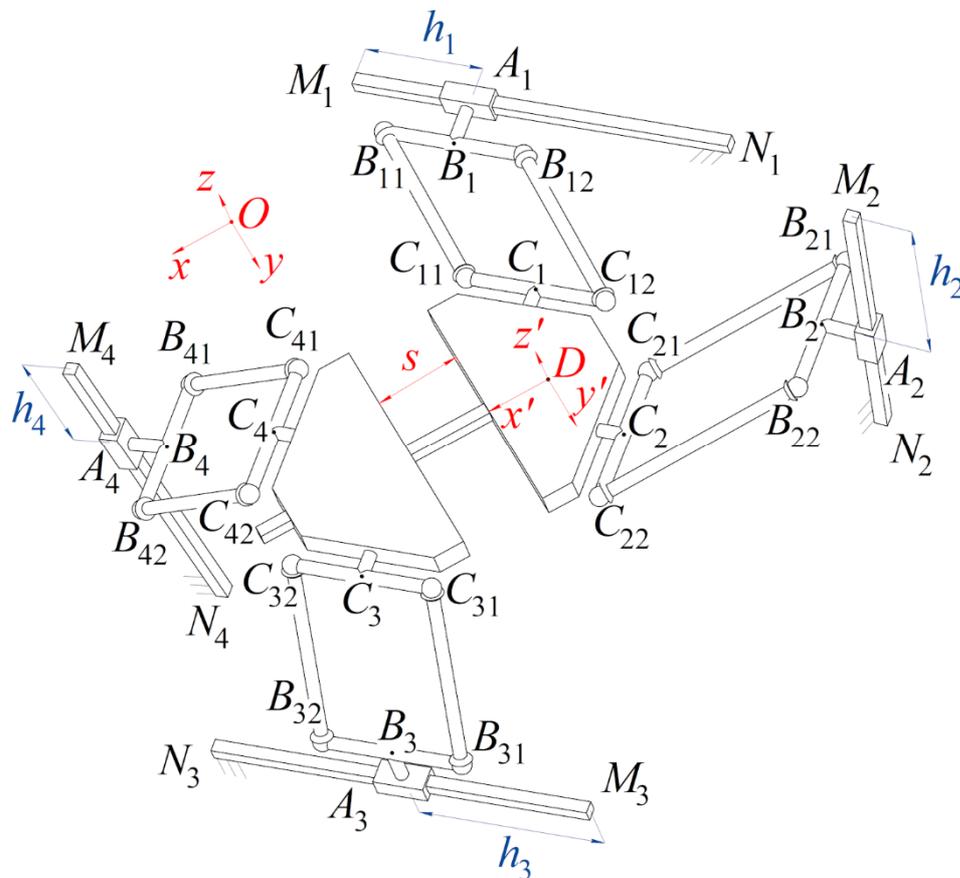


Рисунок 3.2. Схема поступательно-направляющего кинематически избыточного механизма типа Delta с захватом, использующим призматическую пару, в исполнении «2+2»

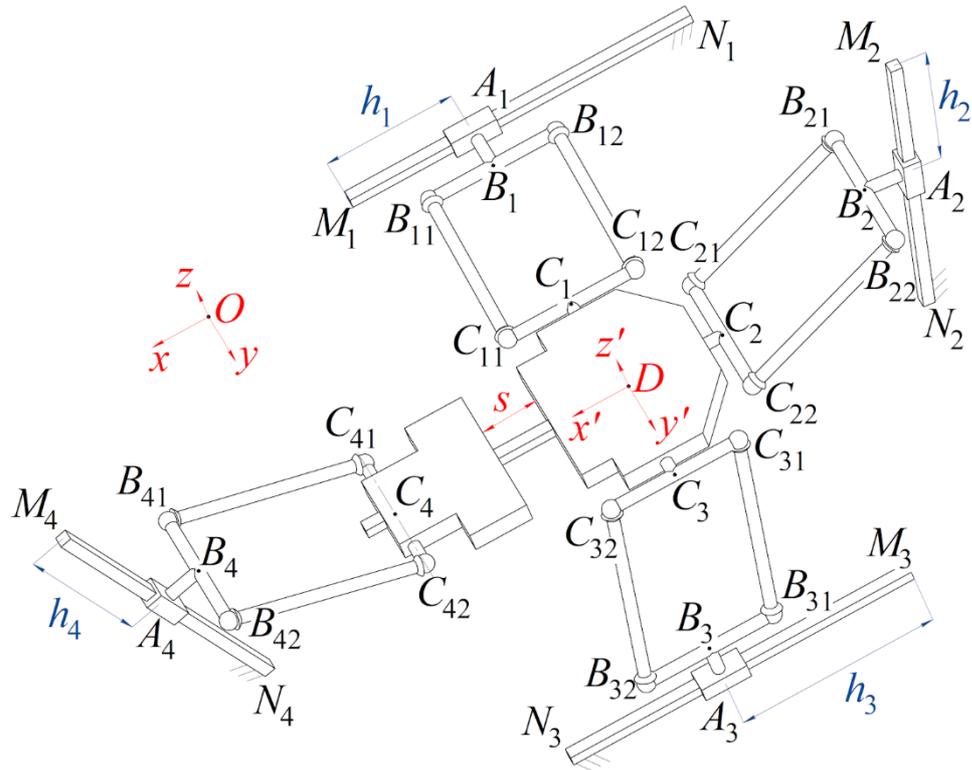


Рисунок 3.3. Схема поступательно-направляющего кинематически избыточного механизма типа Delta с захватом, использующим призматическую пару, в исполнении «3+1»

Рассматриваемый механизм вне зависимости от исполнения включает четыре идентичных кинематических цепи. В каждой i -й ($i = 1 \dots 4$) цепи имеется линейная направляющая $M_i N_i$, по которой перемещается каретка A_i , что кинематически соответствует приводной призматической паре. Положение каретки на направляющей определяется входной координатой цепи h_i , равной расстоянию от точки A_i до точки M_i . В общем случае, положение точек M_i и N_i в пространстве может быть любым. В свою очередь, к каретке присоединяется параллелограмм со сферическими шарнирами B_{i1} , B_{i2} , C_{i1} , C_{i2} в его углах. Выходное звено состоит из двух частей (половин), соединенных между собой посредством призматической пары. В исполнении «2+2» первая и вторая кинематическая цепи соединяются с одной половиной выходного звена, а третья и четвертая цепи – со второй половиной. В исполнении «3+1» с одной половиной выходного звена соединяются первые три цепи, тогда как со второй половиной – только четвертая цепь. Положение выходного звена в пространстве задается координатами x_D , y_D , z_D точки D , расположенной на одной из половин выходного звена. Точки,

находящиеся в серединах сторон параллелограмма $B_{i1}B_{i2}$ и $C_{i1}C_{i2}$ обозначим как B_i и C_i соответственно.

В отличие от плоских механизмов, структурные формулы для анализа подвижности пространственных механизмов параллельной структуры, особенно обладающих кинематической или приводной избыточностью, зачастую неприменимы [38]. Однако поскольку рассматриваемый механизм относится к семейству Delta, степень его подвижности и тип движения выходного звена можно установить с помощью простого рассмотрения структуры.

Представим, что в механизм имеет цельное выходное звено без пассивной призматической пары. Известно [64], что кинематическая цепь с приводной призматической парой и параллелограммом накладывает на выходное звено одну связь, запрещающую вращение вокруг оси, перпендикулярной плоскости параллелограмма. То есть, при наличии четырех цепей, дополнительных связей на линейное перемещение выходного звена наложено не будет, и механизм останется трехподвижным поступательно-направляющим, как и базовая схема Delta, хотя и будет иметь приводную избыточность. Введение призматической пары добавляет внутреннюю локальную подвижность, которая связана с линейным перемещением одной половины выходного звена относительно другой. Таким образом, механизм будет иметь четыре степени свободы: три поступательных степени свободы выходного звена, и одну дополнительную степень свободы, которая будет характеризоваться изменением расстояния s между двумя половинами выходного звена.

3.2. Решение обратной задачи о положениях и анализ рабочей зоны

Для рассматриваемого механизма решение задачи о положениях подразумевает установление зависимости между выходными координатами x_D , y_D , z_D , s и входными координатами h_i . Начнем с обратной задачи, в которой координаты

x_D, y_D, z_D и s являются известными, а вычисляются, соответственно, перемещения h_i кареток приводных призматических пар.

Без потери общности будем считать, что выходное звено механизма параллельно плоскости Oxy , а ось, вдоль которой происходит раздвижение указанной платформы (ось избыточной подвижности) параллельна оси Ox , причем увеличение значения s соответствует положительному направлению данной оси. Также пусть оси системы координат $Dx'y'z'$, связанной с выходным звеном, параллельны соответствующим осям системы $Oxyz$. В таком случае координаты y'_{Ci} и z'_{Ci} точки C_i в системе $Dx'y'z'$ будут постоянными и определяться геометрией выходного звена механизма. При этом для исполнения «2+2» координаты x'_{C1} и x'_{C2} , а для исполнения «3+1» координаты x'_{C1} , x'_{C2} и x'_{C3} также будут постоянны. Соответственно, либо x'_{C3} и x'_{C4} (для исполнения «2+2»), либо только x'_{C4} (для исполнения «3+1») будут зависеть от величины s . Пусть дополнительный нижний индекс «0» указывает на то, что значение координаты x'_{Ci} соответствует $s = 0$. Тогда для исполнения «2+2»

$$\begin{cases} x'_{Ci} = x'_{0Ci} & \text{если } i = 1, 2, \\ x'_{Ci} = x'_{0Ci} + s & \text{если } i = 3, 4, \end{cases} \quad (3.1)$$

а для исполнения «3+1»

$$\begin{cases} x'_{Ci} = x'_{0Ci} & \text{если } i = 1, 2, 3, \\ x'_{Ci} = x'_{0Ci} + s & \text{если } i = 4. \end{cases} \quad (3.2)$$

Алгоритм решения обратной задачи о положениях для обоих исполнений идентичен, за исключением выражений (3.1) и (3.2). Для начала, вычислим координаты точек C_i в системе $Oxyz$:

$$x_{Ci} = x_D + x'_{Ci}, \quad y_{Ci} = y_D + y'_{Ci}, \quad z_{Ci} = z_D + z'_{Ci}. \quad (3.3)$$

Далее рассмотрим одну отдельную i -ю кинематическую цепь. Легко видеть, что поскольку одна из сторон параллелограмма жестко соединяется с кареткой, точка B_i перемещается по прямой P_iQ_i , которая, в свою очередь, параллельна линейной направляющей M_iN_i этой кинематической цепи. Из этого следует, что,

во-первых, точки P_i и Q_i могут быть получены путем параллельного переноса точек M_i и N_i , а значит их координаты можно считать известными, и, во-вторых, что расстояние между точками P_i и B_i будет равно расстоянию между точками M_i и A_i , то есть, значению приводной координаты h_i .

Рассмотрим треугольник, образованный точками C_i , P_i и Q_i (Рисунок 3.4).

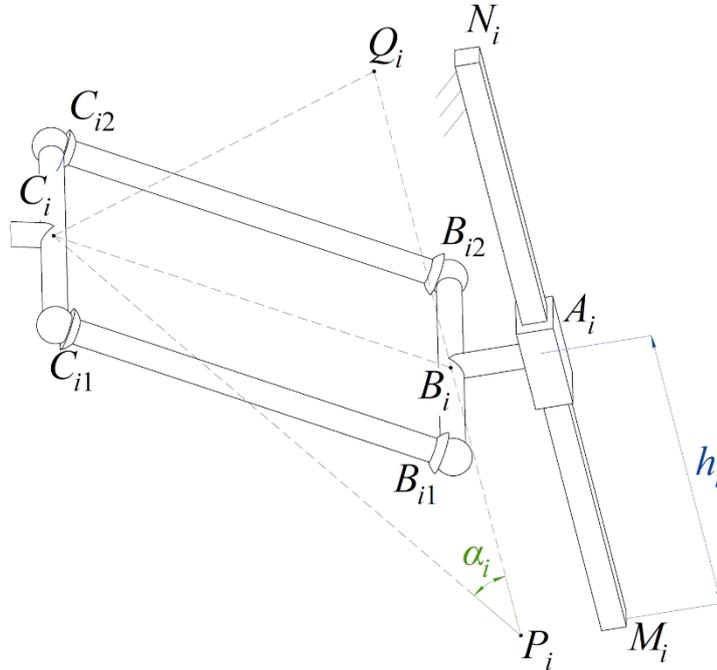


Рисунок 3.4. Расчетная схема для определения h_i

Обозначим угол между сторонами $C_i P_i$ и $P_i Q_i$ исследуемого треугольника как α_i и запишем теорему косинусов для указанного угла:

$$l_{CQ_i}^2 = l_{CP_i}^2 + l_{PQ_i}^2 - 2l_{CP_i}l_{PQ_i} \cos \alpha_i, \quad (3.4)$$

где l_{CQ_i} , l_{CP_i} и l_{PQ_i} – длины отрезков $C_i Q_i$, $C_i P_i$ и $P_i Q_i$ соответственно.

Так как координаты x_{P_i} , y_{P_i} , z_{P_i} и x_{Q_i} , y_{Q_i} , z_{Q_i} точек P_i и Q_i задаются геометрией механизма и известны, а координаты точки C_i вычисляются по формуле (3.3), длины сторон треугольника $C_i P_i Q_i$ можно легко найти следующим образом:

$$\begin{aligned} l_{CQ_i} &= \sqrt{(x_{Q_i} - x_{C_i})^2 + (y_{Q_i} - y_{C_i})^2 + (z_{Q_i} - z_{C_i})^2}, \\ l_{CP_i} &= \sqrt{(x_{P_i} - x_{C_i})^2 + (y_{P_i} - y_{C_i})^2 + (z_{P_i} - z_{C_i})^2}, \\ l_{PQ_i} &= \sqrt{(x_{Q_i} - x_{P_i})^2 + (y_{Q_i} - y_{P_i})^2 + (z_{Q_i} - z_{P_i})^2}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

С учетом того, что расстояние между точками P_i и B_i равно h_i , теореме косинусов можно записать также для треугольника $B_iC_iP_i$ в следующем виде:

$$l_{BCi}^2 = l_{CPi}^2 + h_i^2 - 2l_{CPi}h_i \cos \alpha_i, \quad (3.6)$$

где l_{BCi} – длина отрезка B_iC_i , равная длине стороны параллелограмма цепи, то есть являющаяся постоянным геометрическим параметром механизма.

Выразив $\cos \alpha_i$ из (3.4) и подставив его в (3.6), получим:

$$l_{BCi}^2 = l_{CPi}^2 + h_i^2 + \frac{l_{CQi}^2 - l_{CPi}^2 - l_{PQi}^2}{l_{PQi}} h_i,$$

что после перестановки слагаемых дает

$$h_i^2 + \frac{l_{CQi}^2 - l_{CPi}^2 - l_{PQi}^2}{l_{PQi}} h_i + l_{CPi}^2 - l_{BCi}^2 = 0. \quad (3.7)$$

Поскольку все длины, входящие в выражение (3.7), либо известны, либо могут быть рассчитаны с использованием формулы (3.5), данное выражение представляет собой квадратное уравнение относительно неизвестной h_i . Данное уравнение также является уравнением связи для i -й кинематической цепи механизма. Общее решение квадратного уравнения хорошо известно и имеет следующий вид:

$$h_i = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad (3.8)$$

где

$$\begin{aligned} a &= 1, \\ b &= \frac{l_{CQi}^2 - l_{CPi}^2 - l_{PQi}^2}{l_{PQi}}, \\ c &= l_{CPi}^2 - l_{BCi}^2. \end{aligned}$$

Таким образом, согласно (3.8) для каждой цепи в общем случае существует два возможных решения обратной задачи о положениях, а значит общее количество возможных решений данной задачи для механизма в целом равно шестнадцати. В

реальном механизме длина $l_{MN_i} = l_{PQ_i}$ направляющей M_iN_i и, соответственно, отрезка P_iQ_i будут ограничены, поэтому на значение h_i дополнительно будут наложены конструктивные ограничения: $h_i \geq 0$ и $h_i \leq l_{MN_i}$.

Для численного примера была выбрана конфигурация линейных направляющих в виде перевернутой правильной пирамиды с квадратным основанием. Такая форма представляет собой компромиссный вариант между параллельным расположением направляющих и расположением их в одной плоскости, и довольно часто используется в Delta-роботах [52, 105]. Длины всех ребер пирамиды, как боковых, так на основании, приняты равными 0,57 м, а ее вершина расположена на отрицательной стороне оси Oz . В исполнении «3+1» линейные направляющие (боковые ребра пирамиды) лежат в плоскостях Oxz и Oyz , а в исполнении «2+2» – повернуты на 45° вокруг оси Oz . Точки B_i расположены на расстоянии 0,015 м по нормали от направляющих снаружи пирамиды. Длинная сторона параллелограмма l_{BC_i} принята равной 0,32 м для всех цепей, а длины коротких сторон равны 0,08 м. При $s = 0$ точки C_i расположены на расстоянии 0,0585 м от точки D . Для демонстрации геометрии механизма в качестве примера была решена обратная задача о положениях для выходных координат $x_D = 0,1$ м, $y_D = -0,15$ м, $z_D = -0,45$ м, $s = 0,05$ м. При этом для каждого исполнения из шестнадцати решений только одно, для которого все h_i рассчитываются со знаком «минус» в выражении (3.8), удовлетворяет условию $0 \text{ м} \leq h_i \leq 0,57 \text{ м}$ (Рисунок 3.5).

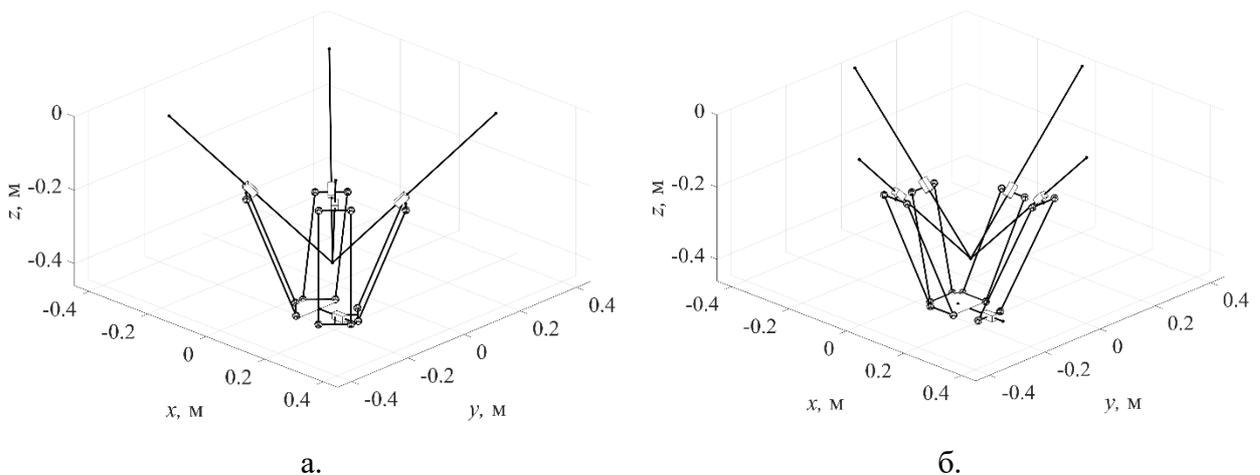


Рисунок 3.5. Визуализация решения обратной задачи о положениях для $x_D = 0,1$ м, $y_D = -0,15$ м, $z_D = -0,45$ м, $s = 0,05$ м: исполнение «2+2» (а), исполнение «3+1» (б)

Далее был проведен итерационный анализ рабочей зоны с шагом 0,01 м и пределами изменения координат $[-0,4; 0,4]$ м для x_D и y_D , $[-0,8; 0,2]$ м для z_D . Анализ проводился для трех разных значений величины s : 0 м, 0,4 м и 0,8 м. Для исполнения «2+2» количество точек в рабочей зоне составило 111041, 101958 и 91561 соответственно (Рисунок 3.6).

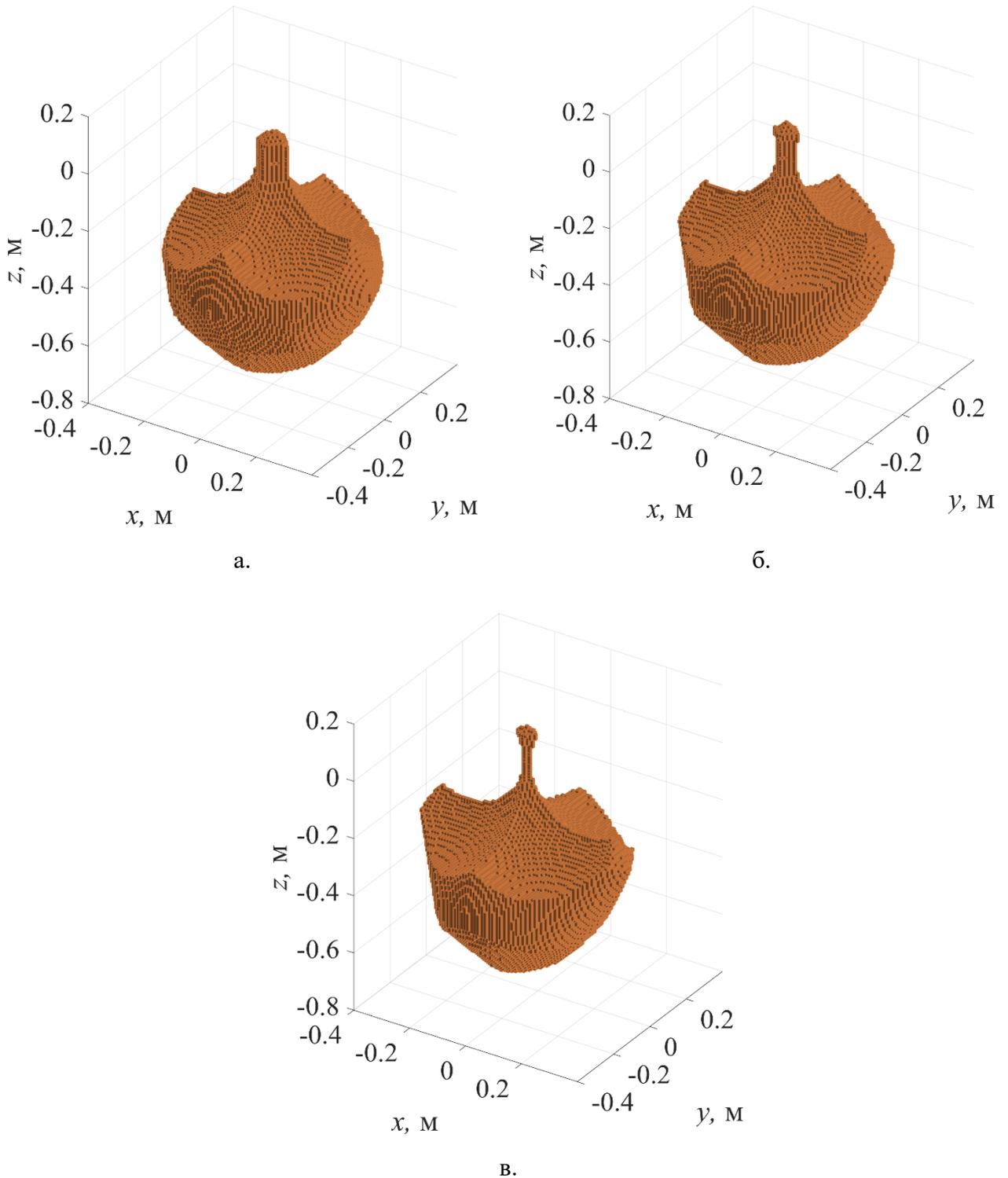


Рисунок 3.6. Рабочая зона исполнения «2+2»: при $s = 0$ м (а), $s = 0,04$ м (б), и $s = 0,08$ м (в)

Для исполнения «3+1» и тех же значений s (0 м, 0,04 м и 0,08 м) количество точек рабочей зоны составило 111378, 104622 и 96175 соответственно (Рисунок 3.7).

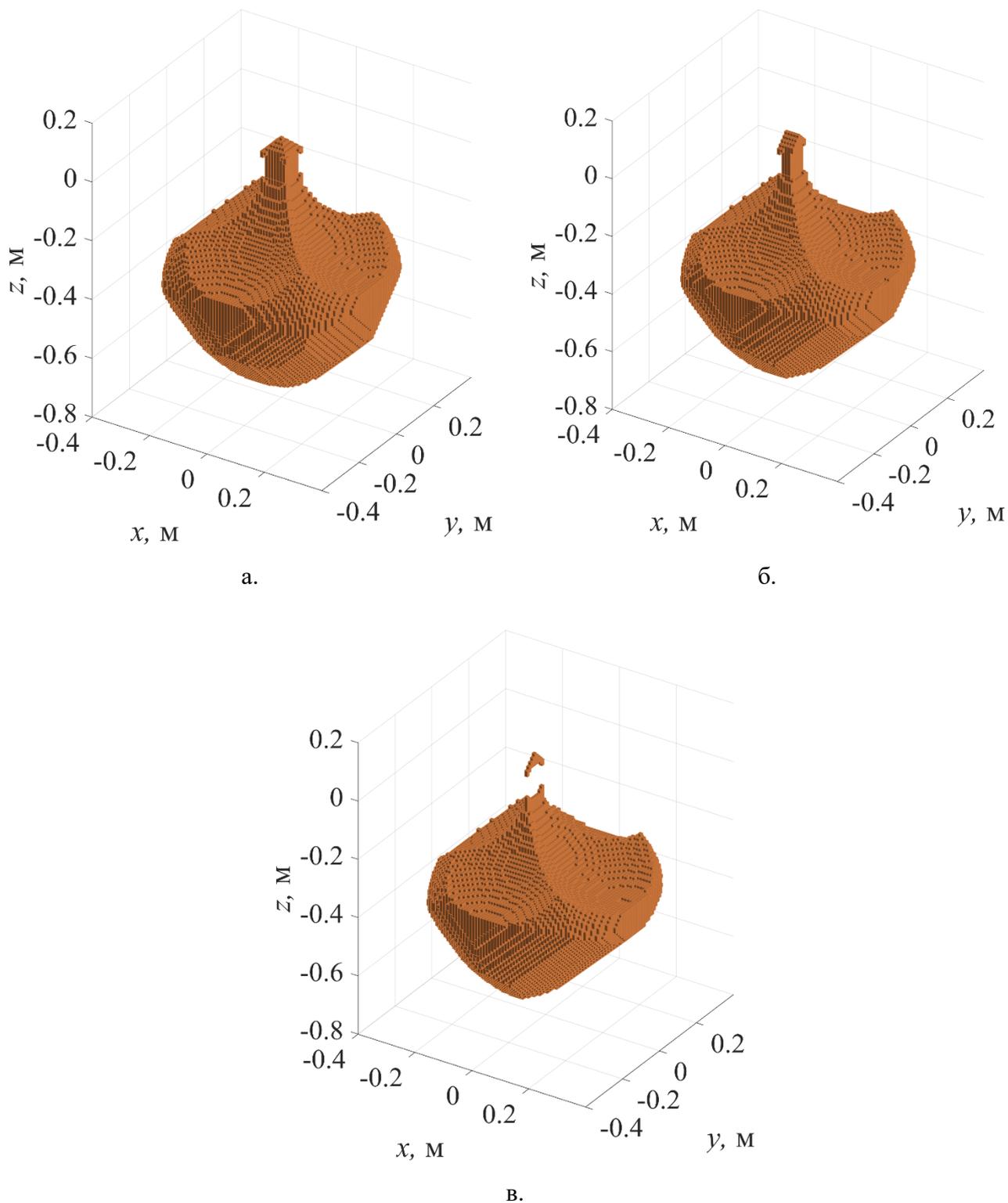


Рисунок 3.7. Рабочая зона исполнения «3+1»: при $s = 0$ м (а), $s = 0,04$ м (б), и $s = 0,08$ м (в)

Как можно видеть, рабочие пространства разных исполнений похожи по форме, а также имеют довольно близкие значения объема.

3.3. Решение прямой задачи о положениях

Решение прямой задачи о положениях для поступательно-направляющего механизма может быть получено в аналитическом виде, однако, в отличие от плоского механизма, более трудоемко и требует отдельного рассмотрения. При этом начнем с исполнения «3+1», так как алгоритм решения для данного исполнения будет более простым.

В рамках прямой задачи о положениях известными будут являться значения перемещений кареток h_i , для которых необходимо вычислить соответствующие значения координат выходного звена x_D, y_D, z_D и s . Поскольку координаты точек P_i и Q_i известны из геометрии механизма, для заданных значений можно легко вычислить координаты точек B_i :

$$\begin{bmatrix} x_{B_i} \\ y_{B_i} \\ z_{B_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{P_i} \\ y_{P_i} \\ z_{P_i} \end{bmatrix} + \frac{h_i}{l_{PQ_i}} \begin{bmatrix} x_{Q_i} - x_{P_i} \\ y_{Q_i} - y_{P_i} \\ z_{Q_i} - z_{P_i} \end{bmatrix}. \quad (3.9)$$

Далее рассмотрим отдельно первые три кинематических цепи и часть выходного звена, которая присоединяется к этим цепям, то есть, по сути, рассмотрим трехподвижный Delta-механизм с линейными приводами. Обозначим точки E_i , получаемые параллельным переносом точек B_i в направлении, параллельном отрезку C_iD на величину, равную длине этого отрезка. Координаты данных точек определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} x_{E_i} &= x_{B_i} - x'_{C_i}, \\ y_{E_i} &= y_{B_i} - y'_{C_i}, \\ z_{E_i} &= z_{B_i} - z'_{C_i}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Из выражений (3.9) и (3.10) видно, что координаты точек E_i в рамках решения прямой задачи о положениях вычисляются только с использованием известных величин. Отсюда следует, что выбор некоторого конкретного значения приводной

координаты h_i однозначно и единственным образом определяет координаты соответствующей точки E_i .

Поскольку точка E_i получена параллельным переносом точки B_i в направлении, параллельном отрезку C_iD , а также ввиду равенства длин отрезков B_iE_i и C_iD , фигура $B_iC_iDE_i$ является параллелограммом. При изменении положения выходного звена механизма длины сторон данного параллелограмма не будут изменяться. Поскольку отрезки E_iD параллельны соответствующим отрезкам B_iC_i , а также пересекаются в одной точке, решение прямой задачи о положениях для рассматриваемого трехподвижного механизма Delta сводится к определению точек пересечения трех сфер, центры которых расположены в точках E_i , а радиусы равны длинам отрезков B_iC_i (Рисунок 3.8).

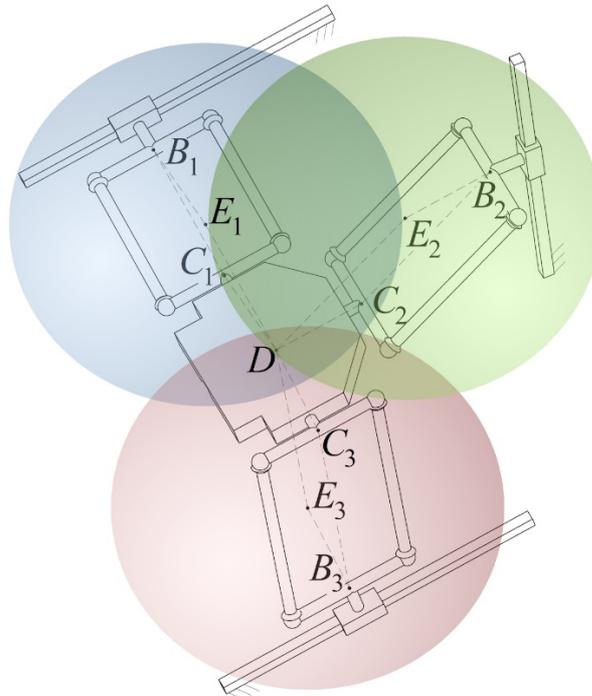


Рисунок 3.8. Часть механизма, представляющая собой трехподвижный механизм Delta

Математически это означает, что необходимо решить следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} (x_D - x_{E1})^2 + (y_D - y_{E1})^2 + (z_D - z_{E1})^2 = l_{BC1}^2, \\ (x_D - x_{E2})^2 + (y_D - y_{E2})^2 + (z_D - z_{E2})^2 = l_{BC2}^2, \\ (x_D - x_{E3})^2 + (y_D - y_{E3})^2 + (z_D - z_{E3})^2 = l_{BC3}^2. \end{cases} \quad (3.11)$$

Раскрыв скобки во всех уравнениях системы (3.11), получим

$$\begin{cases} x_D^2 - 2x_Dx_{E1} + x_{E1}^2 + y_D^2 - 2y_Dy_{E1} + y_{E1}^2 + z_D^2 - 2z_Dz_{E1} + z_{E1}^2 = l_{BC1}^2, \\ x_D^2 - 2x_Dx_{E2} + x_{E2}^2 + y_D^2 - 2y_Dy_{E2} + y_{E2}^2 + z_D^2 - 2z_Dz_{E2} + z_{E2}^2 = l_{BC2}^2, \\ x_D^2 - 2x_Dx_{E3} + x_{E3}^2 + y_D^2 - 2y_Dy_{E3} + y_{E3}^2 + z_D^2 - 2z_Dz_{E3} + z_{E3}^2 = l_{BC3}^2. \end{cases} \quad (3.12)$$

Вычитая из первого уравнения системы (3.12) второе и третье уравнения, а также приводя подобные слагаемые, получим два уравнения следующего вида:

$$\begin{cases} m_{12}x_D + n_{12}y_D + p_{12}z_D = t_{12}, \\ m_{13}x_D + n_{13}y_D + p_{13}z_D = t_{13}, \end{cases} \quad (3.13)$$

где

$$\begin{aligned} m_{12} &= 2(x_{E2} - x_{E1}), & n_{12} &= 2(y_{E2} - y_{E1}), & p_{12} &= 2(z_{E2} - z_{E1}), \\ m_{13} &= 2(x_{E3} - x_{E1}), & n_{13} &= 2(y_{E3} - y_{E1}), & p_{13} &= 2(z_{E3} - z_{E1}), \\ t_{12} &= x_{E2}^2 + y_{E2}^2 + z_{E2}^2 - x_{E1}^2 - y_{E1}^2 - z_{E1}^2 + l_{BC1}^2 - l_{BC2}^2, \\ t_{13} &= x_{E3}^2 + y_{E3}^2 + z_{E3}^2 - x_{E1}^2 - y_{E1}^2 - z_{E1}^2 + l_{BC1}^2 - l_{BC3}^2. \end{aligned}$$

Все величины, входящие в (3.13), кроме координат x_D , y_D , z_D , вычисляются с использованием известных координат точек E_1 и E_2 и длин B_1C_1 и B_2C_2 .

Выразим любую координату, например z_D , в уравнениях системы (3.13):

$$\begin{cases} z_D = \frac{t_{12}}{p_{12}} - \frac{m_{12}}{p_{12}}x_D - \frac{n_{12}}{p_{12}}y_D, \\ z_D = \frac{t_{13}}{p_{13}} - \frac{m_{13}}{p_{13}}x_D - \frac{n_{13}}{p_{13}}y_D, \end{cases} \quad (3.14)$$

Вычитая второе уравнение системы (3.14) из первого, а также выражая координату y_D , можно получить уравнение следующего вида:

$$y_D = q_y - r_y x_D, \quad (3.15)$$

где

$$q_y = \left(\frac{t_{13}}{p_{13}} - \frac{t_{12}}{p_{12}} \right) / \left(\frac{n_{13}}{p_{13}} - \frac{n_{12}}{p_{12}} \right), \quad r_y = \left(\frac{m_{13}}{p_{13}} - \frac{m_{12}}{p_{12}} \right) / \left(\frac{n_{13}}{p_{13}} - \frac{n_{12}}{p_{12}} \right).$$

Подставив (3.15) во второе уравнение системы (3.14), получим следующее выражение:

$$z_D = q_z + r_z x_D, \quad (3.16)$$

где

$$q_z = \frac{t_{13}}{p_{13}} - \frac{n_{13}}{p_{13}} q_y, \quad r_z = \frac{n_{13}}{p_{13}} r_y - \frac{m_{13}}{p_{13}}.$$

Выражения (3.15) и (3.16) можно подставить в любое из уравнений (3.12). В случае использования первого уравнения после приведения подобных слагаемых получим:

$$\begin{aligned} (1 + r_y^2 + r_z^2) x_D^2 + 2(r_y y_{E1} + q_z r_z - x_{E1} - q_y r_y - r_z z_{E1}) x_D + \\ + x_{E1}^2 + q_y^2 - 2q_y y_{E1} + y_{E1}^2 + q_z^2 - 2q_z z_{E1} + z_{E1}^2 - l_{BC1}^2 = 0. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Легко видеть, что выражение (3.17) является квадратным уравнением относительно переменной x_D . Соответственно, решение данного уравнения будет иметь следующий вид:

$$x_D = \frac{-b_x \pm \sqrt{b_x^2 - 4a_x c_x}}{2a_x}, \quad (3.18)$$

где

$$\begin{aligned} a_x &= 1 + r_y^2 + r_z^2, \\ b_x &= 2(r_y y_{E1} + q_z r_z - x_{E1} - q_y r_y - r_z z_{E1}), \\ c_x &= x_{E1}^2 + q_y^2 - 2q_y y_{E1} + y_{E1}^2 + q_z^2 - 2q_z z_{E1} + z_{E1}^2 - l_{BC1}^2. \end{aligned}$$

В общем случае с использованием выражения (3.18) может быть получено два возможных значения координаты x_D . Подставив полученные значения в формулы (3.15) и (3.16) можно вычислить соответствующие значения координат y_D и z_D . Таким образом, для трехподвижного механизма Delta с линейными приводами в общем случае существует не более двух решений прямой задачи о положениях.

Важно отметить, что если значения $p_{12} = 0$, $p_{13} = 0$ или $n_{12} = n_{13} = 0$, то в выражениях (3.14), (3.15), (3.16) возникает деление на ноль, что приводит к невозможности использования предложенного алгоритма решения в описанном выше виде. Однако если либо $p_{12} = 0$, либо $p_{13} = 0$, то зависимость между координатами x_D и y_D можно получить непосредственно из первого или второго уравнения системы (3.13) соответственно, а затем подставить в другое уравнение для того, чтобы получить зависимость между координатами x_D и z_D . Данные зависимости затем можно подставить в любое уравнение системы (3.12) и получить уравнение, аналогичное уравнению (3.17). Если оба коэффициента p_{12} и p_{13} равны нулю, то система (3.13) вырождается до системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными x_D и y_D и может быть легко решена. Полученные значения затем могут быть подставлены в любое из уравнений системы (3.12) для получения квадратного уравнения относительно неизвестной z_D . Похожая ситуация возникает в том случае, если $n_{12} = n_{13} = 0$, с той разницей, что из системы (3.13) определяются значения x_D и z_D , которые затем подставляются в любое из уравнений системы (3.12) для получения квадратного уравнения относительно неизвестной y_D . Таким образом, предложенный алгоритм может быть использован с небольшими изменениями даже в случае равенства нулю рассматриваемых коэффициентов системы (3.13).

Перейдем теперь к рассмотрению четвертой цепи. Базовым при решении прямой задачи о положениях для данной цепи будет являться следующее уравнение:

$$(x_{C4} - x_{B4})^2 + (y_{C4} - y_{B4})^2 + (z_{C4} - z_{B4})^2 = l_{BC4}^2,$$

которое с учетом (3.2) и (3.3) принимает следующий вид:

$$(x_D + x'_{0C4} + s - x_{B4})^2 + (y_D + y'_{C4} - y_{B4})^2 + (z_D + z'_{C4} - z_{B4})^2 = l_{BC4}^2. \quad (3.19)$$

С учетом того, что выше была решена прямая задача для трехподвижного механизма Delta, то есть, значения координат x_D , y_D , z_D в данном случае можно

считать известными, в уравнении (3.19) неизвестной остается только величина s . Раскрывая первую скобку, а также проводя перестановку слагаемых, получим:

$$s^2 + 2(x_D + x'_{0C4} - x_{B4})s + (x_D + x'_{0C4} - x_{B4})^2 + (y_D + y'_{C4} - y_{B4})^2 + (z_D + z'_{C4} - z_{B4})^2 - l_{BC4}^2 = 0. \quad (3.20)$$

Можно видеть, что выражение (3.20) представляет собой квадратное уравнение относительно неизвестной величины s , решение которого будет иметь следующий вид:

$$s = \frac{-b_s \pm \sqrt{b_s^2 - 4a_s c_s}}{2a_s}, \quad (3.21)$$

где

$$a_s = 1, \\ b_s = 2(x_D + x'_{0C4} - x_{B4}), \\ c_s = (x_D + x'_{0C4} - x_{B4})^2 + (y_D + y'_{C4} - y_{B4})^2 + (z_D + z'_{C4} - z_{B4})^2 - l_{BC4}^2.$$

Таким образом согласно (3.21), для каждого из двух возможных сочетаний координат x_D, y_D, z_D существует два возможных значения величины s , а значит прямая задача о положениях для рассматриваемого кинематически избыточного механизма в общем случае имеет четыре решения.

В качестве примера, а также для проверки правильности полученных аналитических выражений была решена прямая задача о положениях с использованием набора входных координат, полученных ранее в результате решения обратной задачи о положениях: $h_1 = 0,2009$ м, $h_2 = 0,3501$ м, $h_3 = 0,3675$ м, $h_4 = 0,2267$ м. В результате были получены следующие решения прямой задачи о положениях для исполнения «3+1» (Рисунок 3.9):

Решение № 1: $x_D = 0,1000$ м, $y_D = -0,1500$ м, $z_D = -0,4500$ м, $s = 0,1397$ м;

Решение № 2: $x_D = 0,1000$ м, $y_D = -0,1500$ м, $z_D = -0,4500$ м, $s = 0,0500$ м;

Решение № 3: $x_D = -0,0107$ м, $y_D = 0,0388$ м, $z_D = 0,0443$ м, $s = 0,4391$ м;

Решение № 4: $x_D = -0,0107$ м, $y_D = 0,0388$ м, $z_D = 0,0443$ м, $s = -0,0280$ м.

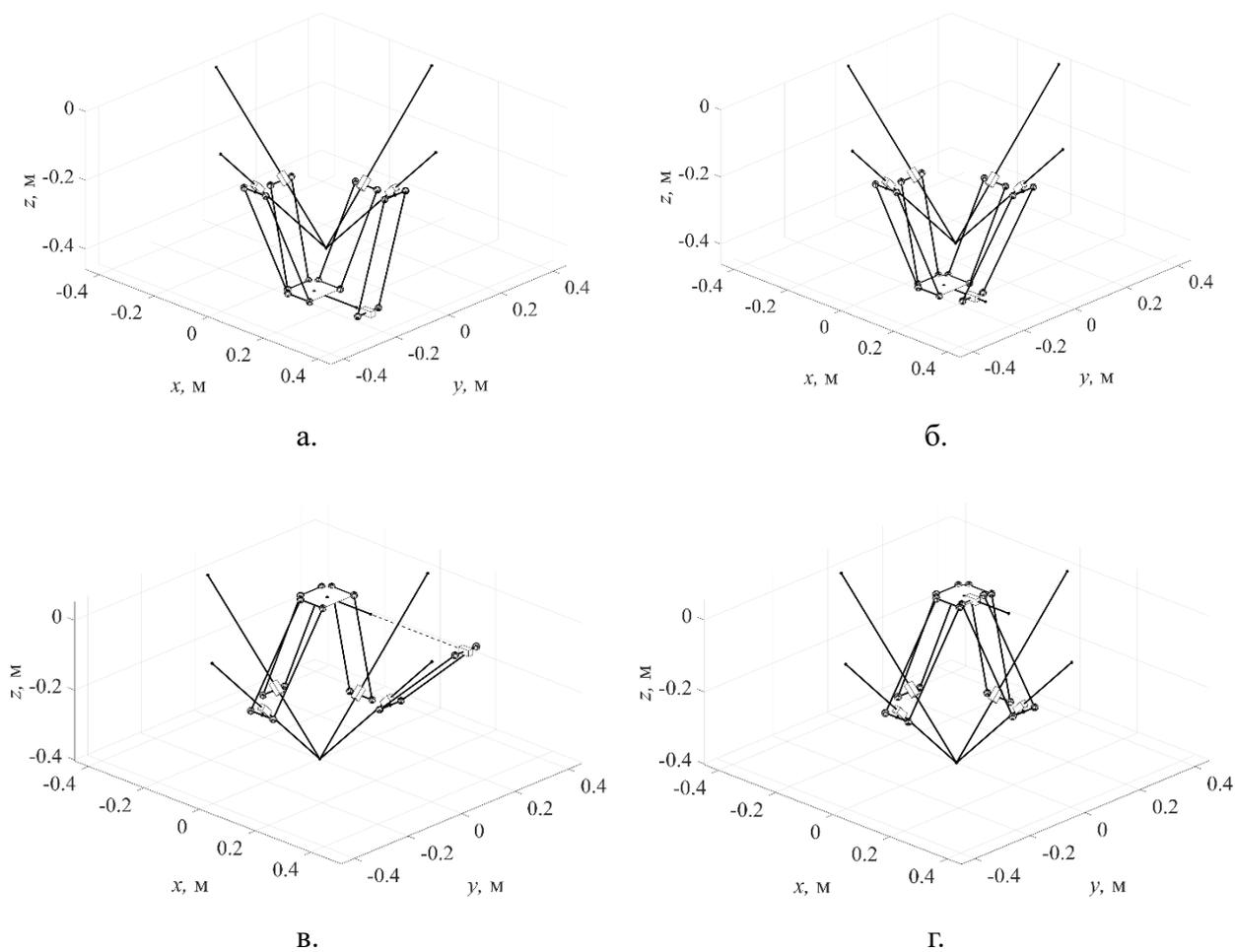


Рисунок 3.9. Визуализация решений прямой задачи о положениях для исполнения «3+1» при использовании значений координат $h_1 = 0,2009$ м, $h_2 = 0,3501$ м, $h_3 = 0,3675$ м, $h_4 = 0,2267$ м: решение № 1 (а), решение № 2 (б), решение № 3 (в), решение № 4 (г)

В рассмотренном примере все четыре решения получены в действительных числах. При этом второе решение полностью совпадает с исходными данными для обратной задачи о положениях, рассмотренной ранее, что подтверждает правильность предложенного алгоритма решения прямой задачи. Также стоит отметить, что наличие теоретического решения не означает возможность реализации соответствующей конфигурации в реальном механизме. Так, в рассматриваемом механизме были приняты ограничения на значение расстояния между половинами платформы: $0 \text{ м} \leq s \leq 0,08 \text{ м}$. Из четырех полученных решений только второе удовлетворяет данному условию.

В отличие от исполнения «3+1», для исполнения «2+2» невозможно отдельно вычислить координаты x_D , y_D , z_D , поскольку величина x_{E3} будет зависеть от s .

Поэтому в данном случае необходимо решать систему из четырех, а не трех уравнений второй степени:

$$\begin{cases} (x_D - x_{E1})^2 + (y_D - y_{E1})^2 + (z_D - z_{E1})^2 = l_{BC1}^2, \\ (x_D - x_{E2})^2 + (y_D - y_{E2})^2 + (z_D - z_{E2})^2 = l_{BC2}^2, \\ (x_D + s - x_{0E3})^2 + (y_D - y_{E3})^2 + (z_D - z_{E3})^2 = l_{BC3}^2, \\ (x_D + s - x_{0E4})^2 + (y_D - y_{E4})^2 + (z_D - z_{E4})^2 = l_{BC4}^2, \end{cases} \quad (3.22)$$

где

$$x_{0E3} = x_{B3} - x'_{0C3}, \quad x_{0E4} = x_{B4} - x'_{0C4}.$$

Раскрывая скобки в выражении (3.22) и вычитая четвертое уравнение и из первого, второго и третьего, получим:

$$\begin{cases} a_{11}x_D + a_{12}y_D + a_{13}z_D = b_1, \\ a_{21}x_D + a_{22}y_D + a_{23}z_D = b_2, \\ a_{31}x_D + a_{32}y_D + a_{33}z_D = b_3, \end{cases} \quad (3.23)$$

где

$$\begin{aligned} a_{11} &= -2s + 2(x_{0E4} - x_{E1}), & a_{12} &= 2(y_{E4} - y_{E1}), & a_{13} &= 2(z_{E4} - z_{E1}), \\ a_{21} &= -2s + 2(x_{0E4} - x_{E2}), & a_{22} &= 2(y_{E4} - y_{E2}), & a_{23} &= 2(z_{E4} - z_{E2}), \\ a_{31} &= 2(x_{0E4} - x_{0E1}), & a_{32} &= 2(y_{E4} - y_{E3}), & a_{33} &= 2(z_{E4} - z_{E3}), \\ b_1 &= s^2 - 2x_{0E4}s + x_{0E4}^2 + y_{E4}^2 + z_{E4}^2 - x_{E1}^2 - y_{E1}^2 - z_{E1}^2 + l_{BC1}^2 - l_{BC4}^2, \\ b_2 &= s^2 - 2x_{0E4}s + x_{0E4}^2 + y_{E4}^2 + z_{E4}^2 - x_{E2}^2 - y_{E2}^2 - z_{E2}^2 + l_{BC2}^2 - l_{BC4}^2, \\ b_3 &= 2(x_{0E3} - x_{0E4})s + x_{0E4}^2 + y_{E4}^2 + z_{E4}^2 - x_{0E3}^2 - y_{E3}^2 - z_{E3}^2 + l_{BC3}^2 - l_{BC4}^2. \end{aligned}$$

Обозначим следующие матрицы коэффициентов системы уравнений (3.23):

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_0 &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, & \mathbf{M}_1 &= \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{M}_2 &= \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{bmatrix}, & \mathbf{M}_3 &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Решения рассматриваемой системы относительно неизвестных x_D, y_D, z_D могут быть найдены с использованием метода Крамера:

$$x_D = \frac{\Delta_1}{\Delta_0}, \quad y_D = \frac{\Delta_2}{\Delta_0}, \quad z_D = \frac{\Delta_3}{\Delta_0}, \quad (3.24)$$

где $\Delta_0 = \det(\mathbf{M}_0)$, $\Delta_1 = \det(\mathbf{M}_1)$, $\Delta_2 = \det(\mathbf{M}_2)$, $\Delta_3 = \det(\mathbf{M}_3)$.

В матрице \mathbf{M}_0 только компоненты a_{11} и a_{21} зависят от параметра s . Поскольку при расчете определителя Δ_0 данные коэффициенты не перемножаются, Δ_0 будет представлять собой линейную функцию от s :

$$\Delta_0 = d_{01}s + d_{00}, \quad (3.25)$$

где

$$d_{01} = 2(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32} - a_{22}a_{33} + a_{23}a_{32}),$$

$$d_{00} = 2(x_{0E4} - x_{E1})(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - 2(x_{0E4} - x_{E2})(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}).$$

В матрице \mathbf{M}_1 от параметра s зависят только элементы первого столбца, причем b_{11} и b_{12} зависят от s квадратично, а b_{13} – линейно. Из этого следует, что зависимость Δ_1 от s будет квадратичной и иметь следующий вид:

$$\Delta_1 = d_{12}s^2 + d_{11}s + d_{10}, \quad (3.26)$$

где

$$d_{12} = -\frac{d_{01}}{2},$$

$$d_{11} = x_{0E4}d_{01} - a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}),$$

$$d_{10} = b'_1(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - b'_2(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}) + b'_3(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}).$$

Здесь b'_1, b'_2, b'_3 обозначают соответственно части коэффициентов b_1, b_2, b_3 , не зависящие от параметра s :

$$b'_1 = x_{0E4}^2 + y_{E4}^2 + z_{E4}^2 - x_{E1}^2 - y_{E1}^2 - z_{E1}^2 + l_{BC1}^2 - l_{BC4}^2,$$

$$b'_2 = x_{0E4}^2 + y_{E4}^2 + z_{E4}^2 - x_{E2}^2 - y_{E2}^2 - z_{E2}^2 + l_{BC2}^2 - l_{BC4}^2,$$

$$b'_3 = x_{0E4}^2 + y_{E4}^2 + z_{E4}^2 - x_{0E3}^2 - y_{E3}^2 - z_{E3}^2 + l_{BC3}^2 - l_{BC4}^2.$$

Применяя аналогичные рассуждения к матрице \mathbf{M}_2 , можно прийти к выводу, что зависимость ее определителя от параметра s будет описываться уравнением третьей степени. Однако при раскрытии скобок слагаемые, содержащие s^3 , сократятся, и Δ_2 , также как и Δ_1 , будет представлять собой квадратичную функцию от s :

$$\Delta_2 = d_{22}s^2 + d_{21}s + d_{20}, \quad (3.27)$$

где

$$\begin{aligned} d_{22} &= a_{31}(a_{13} - a_{23}) + 2a_{33}(x_{E2} - x_{E1}), \\ d_{21} &= 2a_{31}(a_{13}x_{E2} - a_{23}x_{E1}) + 2a_{33}(2x_{0E4}(x_{E1} - x_{E2}) + b'_1 - b'_2) + 2b'_3(a_{23} - a_{13}), \\ d_{20} &= a_{31}(a_{23}b'_1 - a_{13}b'_2) + 2(x_{0E4} - x_{E1})(a_{33}b'_2 - a_{23}b'_3) + 2(x_{0E4} - x_{E2})(a_{13}b'_3 - a_{33}b'_1). \end{aligned}$$

В процессе вычисления определителя матрицы \mathbf{M}_3 слагаемые, содержащие s^3 , также как и в случае с матрицей \mathbf{M}_2 , сократятся. Таким образом, зависимость Δ_3 от параметра s также будет являться квадратичной и может быть записана в следующем виде:

$$\Delta_3 = d_{32}s^2 + d_{31}s + d_{30}, \quad (3.28)$$

где

$$\begin{aligned} d_{32} &= a_{31}(a_{22} - a_{12}) + 2a_{32}(x_{E1} - x_{E2}), \\ d_{31} &= 2a_{31}(a_{22}x_{E1} - a_{12}x_{E2}) + 2a_{32}(2x_{0E4}(x_{E2} - x_{E1}) - b'_1 + b'_2) + 2b'_3(a_{12} - a_{22}), \\ d_{30} &= a_{31}(a_{12}b'_2 - a_{22}b'_1) + 2(x_{E1} - x_{0E4})(a_{32}b'_2 - a_{22}b'_3) + 2(x_{E2} - x_{0E4})(a_{12}b'_3 - a_{32}b'_1). \end{aligned}$$

Далее подставим (3.24) в первое уравнение системы (3.22). При условии, что $\Delta_0 \neq 0$, получим:

$$\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 - 2\Delta_0(\Delta_1x_{E1} + \Delta_2y_{E1} + \Delta_3z_{E1}) + \Delta_0^2(x_{E1}^2 + y_{E1}^2 + z_{E1}^2 - l_{BC1}^2) = 0. \quad (3.29)$$

Можно видеть, что все компоненты, входящие в уравнение (3.29), либо зависят от одной неизвестной – величины s , либо являются независимыми. Тогда при подстановке уравнений (3.25), (3.26), (3.27) и (3.28) в уравнение (3.29),

получим следующее полиномиальное уравнение четвертой степени, в котором неизвестным будет только параметр s :

$$k_4 s^4 + k_3 s^3 + k_2 s^2 + k_1 s + k_0 = 0, \quad (3.30)$$

где

$$\begin{aligned} k_4 &= d_{12}^2 + d_{22}^2 + d_{32}^2, \\ k_3 &= 2(d_{11}d_{12} + d_{21}d_{22} + d_{31}d_{32}) - 2d_{01}(d_{12}x_{E1} + d_{22}y_{E1} + d_{32}z_{E1}), \\ k_2 &= d_{11}^2 + d_{21}^2 + d_{31}^2 + 2(d_{10}d_{12} + d_{20}d_{22} + d_{30}d_{32}) - 2d_{00}(d_{12}x_{E1} + d_{22}y_{E1} + d_{32}z_{E1}) - \\ &\quad - 2d_{01}(d_{11}x_{E1} + d_{21}y_{E1} + d_{31}z_{E1}) + d_{01}^2(x_{E1}^2 + y_{E1}^2 + z_{E1}^2 - l_{BC1}^2), \\ k_1 &= 2(d_{10}d_{11} + d_{20}d_{21} + d_{30}d_{31}) - 2d_{00}(d_{11}x_{E1} + d_{21}y_{E1} + d_{31}z_{E1}) - \\ &\quad - 2d_{01}(d_{10}x_{E1} + d_{20}y_{E1} + d_{30}z_{E1}) + 2d_{00}d_{01}(x_{E1}^2 + y_{E1}^2 + z_{E1}^2 - l_{BC1}^2), \\ k_0 &= d_{10}^2 + d_{20}^2 + d_{30}^2 - 2d_{00}(d_{10}x_{E1} + d_{20}y_{E1} + d_{30}z_{E1}) + 2d_{00}^2(x_{E1}^2 + y_{E1}^2 + z_{E1}^2 - l_{BC1}^2). \end{aligned}$$

Известно, что для уравнений четвертой степени возможно получить решение в аналитическом виде, используя, например, метод Феррари [27]. Однако на практике, численное решение данного уравнения, либо исходной системы (3.22) может оказаться более удобным и целесообразным.

Важно отметить, что метод Крамера может быть использован только если матрица \mathbf{M}_0 невырожденная, то есть, если $\Delta_0 \neq 0$, так как в противном случае в выражении (3.24) будет иметь место деление на ноль. Согласно (3.25), значение Δ_0 всегда равно нулю независимо от значения s , если коэффициенты d_{01} и d_{00} равны нулю. При этом, по теореме Кронекера-Капелли, система (3.23) будет либо иметь бесконечное число решений, либо окажется несовместной. В том случае, если число решений бесконечно, можно условно принять $s = 0$, после чего указанная система с учетом вырожденности матрицы \mathbf{M}_0 будет представлять собой систему из двух уравнений с тремя неизвестными x_D, y_D, z_D . Тогда используя подход, аналогичный представленному ранее для системы (3.13), можно выразить одну неизвестную через две другие в виде, аналогичном выражениям (3.15) и (3.16), затем подставить полученные зависимости в первое или второе уравнение системы (3.22), решить полученное квадратное уравнение относительно данной

неизвестной, а затем найти две другие по полученным ранее зависимостям. В результате будут получены два набора значений координат x_D, y_D, z_D , которые затем могут подставлены в третье или четвертое уравнение системы (3.22) для вычисления двух возможных значений s . Если же при равенстве нулю определителя Δ_0 система (3.23) окажется несовместной, то это будет означать, что ни для какого действительного значения s невозможно подобрать подходящие значения координат x_D, y_D, z_D , то есть прямая задача не будет иметь решений в действительных числах.

В качестве примера, как и ранее для исполнения «3+1», была решена прямая задача о положениях с использованием набора входных координат, полученных ранее в результате решения обратной задачи о положениях: $h_1 = 0,2839$ м, $h_2 = 0,3756$ м, $h_3 = 0,3298$ м, $h_4 = 0,1700$ м. При этом для исполнения «2+2» были получены следующие решения прямой задачи о положениях в действительных числах (Рисунок 3.10):

Решение № 1: $x_D = 0,1000$ м, $y_D = -0,1500$ м, $z_D = -0,4500$ м, $s = 0,0500$ м;

Решение № 2: $x_D = -0,1508$ м, $y_D = 0,0971$ м, $z_D = 0,0298$ м, $s = 0,4026$ м.

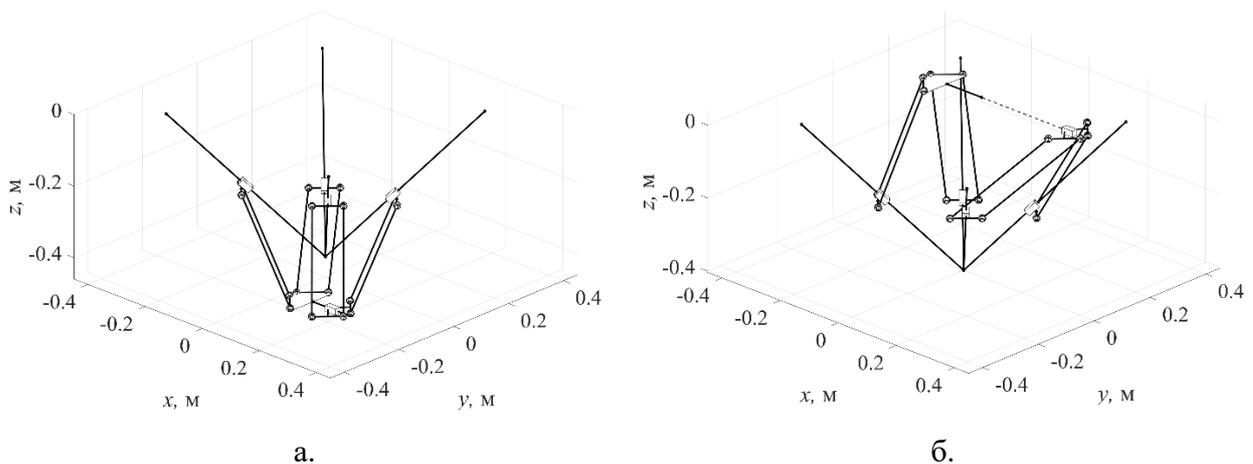


Рисунок 3.10. Визуализация решений прямой задачи о положениях для исполнения «2+2» при использовании значений координат $h_1 = 0,2839$ м, $h_2 = 0,3756$ м, $h_3 = 0,3298$ м, $h_4 = 0,1700$ м: решение № 1 (а), решение № 2 (б)

Несмотря на то, что теоретически прямая задача о положениях для исполнения «2+2» может иметь до четырех решений, в рассмотренном примере решений в действительных числах только два. При этом можно видеть, что первое

решение полностью совпадает с исходными данными, которые были использованы при решении обратной задачи о положениях, а второе решение не может быть реализовано в реальном механизме с принятыми размерами, поскольку в таком случае будет нарушено ограничение $0 \text{ м} \leq s \leq 0,08 \text{ м}$.

Таким образом, прямая задача о положениях как для исполнения «3+1», так и для исполнения «2+2» может быть решена аналитически. При этом вне зависимости от исполнения максимальное количество решений в действительных числах будет равно четырем.

3.4. Скоростной и силовой анализ, исследование особых положений

Как и для плоского механизма, первым этапом проведения скоростного и силового анализа, а также исследования особых положений является вычисление обратной матрицы Якоби механизма:

$$\mathbf{J}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial F_1}{\partial x_D} / \frac{\partial F_1}{\partial h_1} & -\frac{\partial F_1}{\partial y_D} / \frac{\partial F_1}{\partial h_1} & -\frac{\partial F_1}{\partial z_D} / \frac{\partial F_1}{\partial h_1} & -\frac{\partial F_1}{\partial s} / \frac{\partial F_1}{\partial h_1} \\ -\frac{\partial F_2}{\partial x_D} / \frac{\partial F_2}{\partial h_2} & -\frac{\partial F_2}{\partial y_D} / \frac{\partial F_2}{\partial h_2} & -\frac{\partial F_2}{\partial z_D} / \frac{\partial F_2}{\partial h_2} & -\frac{\partial F_2}{\partial s} / \frac{\partial F_2}{\partial h_2} \\ -\frac{\partial F_3}{\partial x_D} / \frac{\partial F_3}{\partial h_3} & -\frac{\partial F_3}{\partial y_D} / \frac{\partial F_3}{\partial h_3} & -\frac{\partial F_3}{\partial z_D} / \frac{\partial F_3}{\partial h_3} & -\frac{\partial F_3}{\partial s} / \frac{\partial F_3}{\partial h_3} \\ -\frac{\partial F_4}{\partial x_D} / \frac{\partial F_4}{\partial h_4} & -\frac{\partial F_4}{\partial y_D} / \frac{\partial F_4}{\partial h_4} & -\frac{\partial F_4}{\partial z_D} / \frac{\partial F_4}{\partial h_4} & -\frac{\partial F_4}{\partial s} / \frac{\partial F_4}{\partial h_4} \end{pmatrix},$$

где F_i – уравнение связи i -й цепи в виде неявной функции координат x_D, y_D, z_D, s, h_i , то есть уравнение (3.7).

Следуя той же логике, что и ранее при анализе плоского механизма, можно получить выражение, аналогичное (2.14), с использованием которого становится возможным вычисление максимизированного значения скорости в i -м приводе, то есть значения скорости в этом приводе для некоторого «наихудшего» направления

вектора скорости выходного звена (точки D), при котором данная скорость имеет максимальное значение:

$$|\dot{h}|_{\max} = \max_{i=1\dots 4} (|\dot{h}_{i \max}|) = \max_{i=1\dots 4} \left(\left(\sqrt{(j_{i,1}^{-1})^2 + (j_{i,2}^{-1})^2 + (j_{i,3}^{-1})^2} \right) v_D + |j_{i,4}^{-1}| v_s \right), \quad (3.31)$$

где $j_{i,p}^{-1}$ – элемент i -й строки, p -го столбца матрицы \mathbf{J}^{-1} ; v_D , v_s – абсолютные значения скорости выходного звена, и скорости раздвижения схвата соответственно; $|\dot{h}_{i \max}|$ – максимизированное значение скорости в i -м приводе.

Для примера рассмотрим результаты итерационного анализа с определением величины $|\dot{h}|_{\max}$ по формуле (3.31), используя те же геометрические параметры исполнений пространственного механизма, что и ранее при решении задачи о положениях. При этом примем значение s постоянным и равным 0,05 м и будем проводить анализ для значений $v_D = 1$ м/с, $v_s = 1$ м/с. Поскольку для данного типа анализа наиболее наглядна визуализация на плоскости, помимо величины s примем также постоянное значение координаты z_D , равное $-0,45$ м. Пределы изменения координат x_D и z_D оставим те же, что и при визуализации рабочей зоны, а именно $[-0,4; 0,4]$ м, но уменьшим шаг перебора до 0,005 м (Рисунок 3.11).

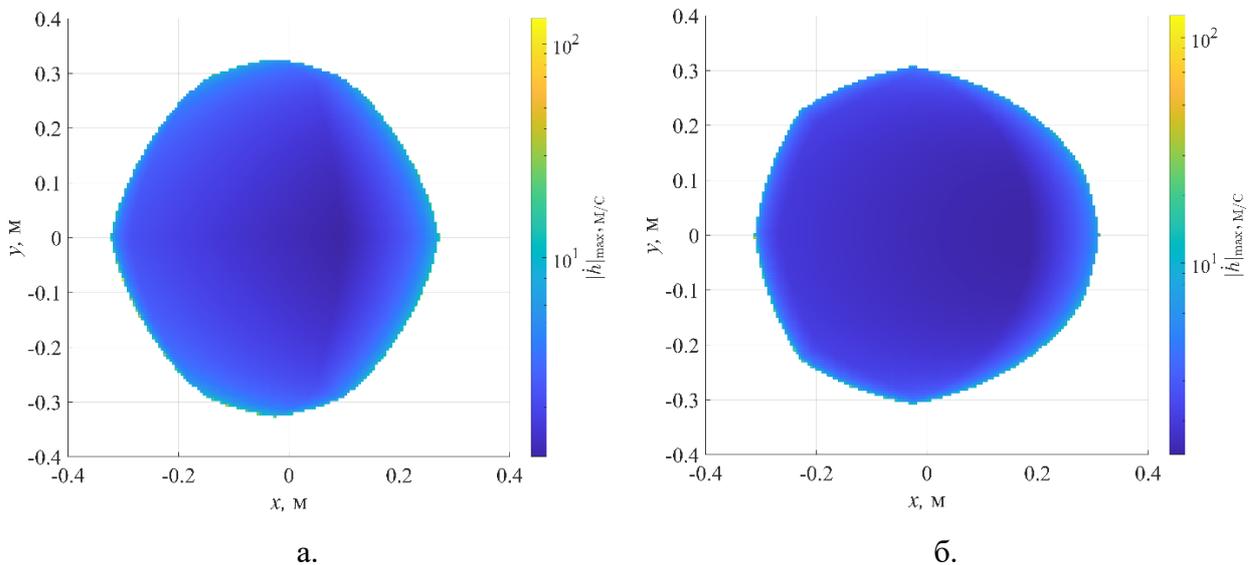


Рисунок 3.11. Распределение значения максимальной скорости кареток по срезу рабочей зоны при $s = 0,05$ м, $z_D = -0,45$ м: для исполнения «2+2» (а), для исполнения «3+1» (б)

Как можно видеть, для обоих исполнений рост значения скоростей в приводах механизма наблюдается при приближении к краю рабочей зоны, что, как и

в случае с плоским механизмом, является ожидаемым ввиду наличия на границе рабочих зон механизмов параллельной структуры типа «ПС».

Силовой анализ механизма с вычислением максимизированных значений сил в приводах может быть проведен с использованием зависимости, аналогичной выражению (2.17) для плоского механизма:

$$|F_h|_{\max} = \max_{i=1...4} (|F_{hi\max}|) = \max_{i=1...4} \left(\left(\sqrt{(j_{i,1}^T)^2 + (j_{i,2}^T)^2 + (j_{i,3}^T)^2} \right) F_D + |j_{i,4}^T| F_s \right), \quad (3.32)$$

где $j_{i,p}^T$ – элемент i -й строки, p -го столбца матрицы $\mathbf{J}^T = (\mathbf{J}^{-1})^T$; F_D , F_s – абсолютные значения силы, приложенной к выходному звену, и силы на схвате соответственно; $|F_{hi\max}|$ – максимизированное значение силы в i -м приводе.

В качестве примера рассмотрим результаты итерационного анализа с определением величины $|F_h|_{\max}$ по формуле (3.32), используя те же размеры и параметры перебора, что и при анализе значений максимальных приводных скоростей. Расчет будем проводить для $F_D = 1$ Н и $F_s = 1$ Н (Рисунок 3.12).

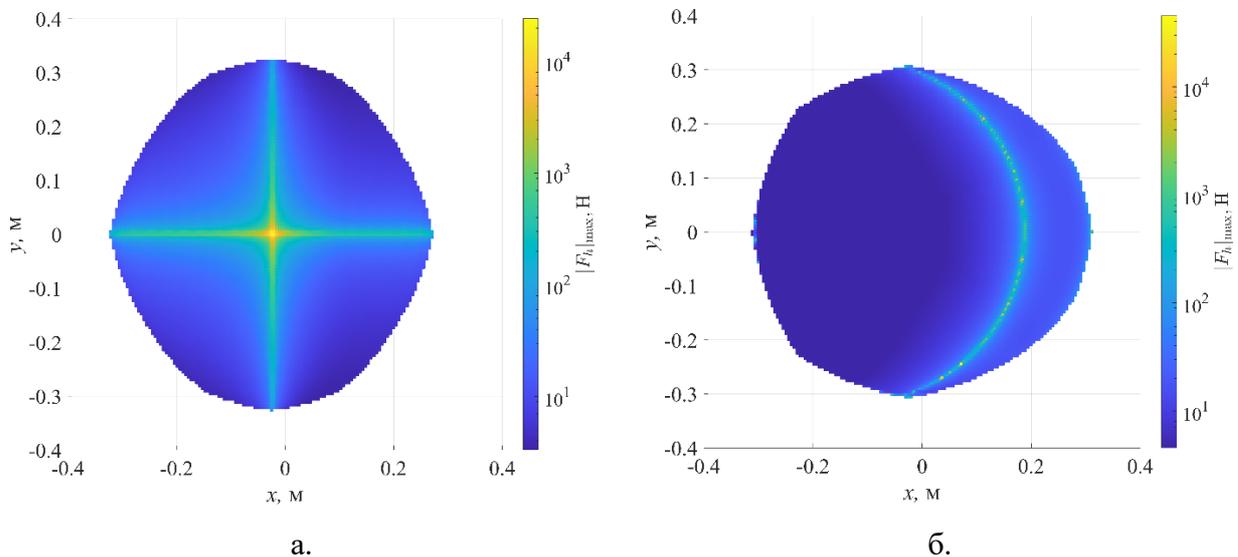


Рисунок 3.12. Распределение значения максимальной силы на каретках по срезу рабочей зоны при $s = 0,05$ м, $z_D = -0,45$ м: для исполнения «2+2» (а), для исполнения «3+1» (б)

Для обоих исполнений наблюдается значительный (до 10^4 Н) рост приводных сил в пределах среза рабочей зоны, что может указывать на наличие в соответствующих точках особых положений типа «ПУ». При этом для исполнения «2+2» зоны роста значений данных сил сосредоточены вдоль двух

линий: горизонтальной линии с постоянным значением $y_D = 0$ и вертикальной линии с постоянным значением $x_D = -0,5s$. Для подтверждения того, что данная картина распределения приводных сил действительно говорит о наличии особых положений типа «ПУ», необходимо вычислите матрицу \mathbf{A} следующим образом:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_D} & \frac{\partial F_1}{\partial y_D} & \frac{\partial F_1}{\partial z_D} & \frac{\partial F_1}{\partial s} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_D} & \frac{\partial F_2}{\partial y_D} & \frac{\partial F_2}{\partial z_D} & \frac{\partial F_2}{\partial s} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x_D} & \frac{\partial F_3}{\partial y_D} & \frac{\partial F_3}{\partial z_D} & \frac{\partial F_3}{\partial s} \\ \frac{\partial F_4}{\partial x_D} & \frac{\partial F_4}{\partial y_D} & \frac{\partial F_4}{\partial z_D} & \frac{\partial F_4}{\partial s} \end{pmatrix},$$

а затем рассмотреть изменение знака определителя данной матрицы по исследуемому срезу рабочей зоны (Рисунок 3.13).

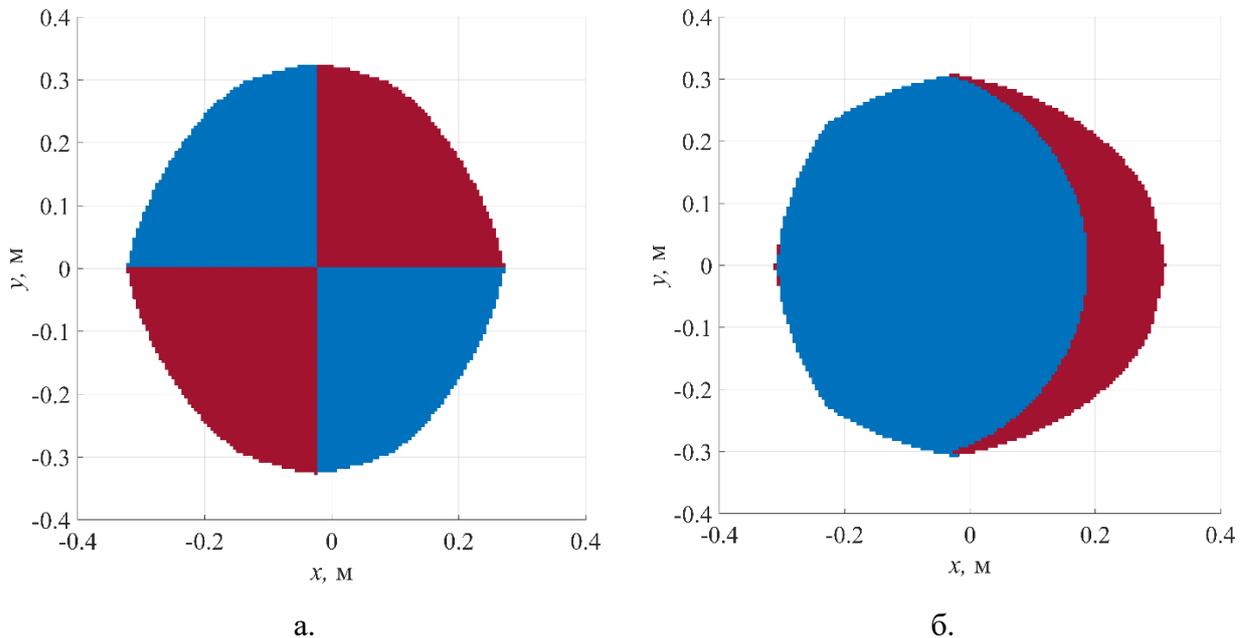


Рисунок 3.13. Знак определителя матрицы \mathbf{A} на срезе рабочей зоны при $s = 0,05$ м, $z_D = -0,45$ м: для исполнения «2+2» (а), для исполнения «3+1» (б)

Как можно видеть, для обоих исполнений границы между зонами положительных и отрицательных значений $\det(\mathbf{A})$ в точности совпадают с областями, в которых наблюдается рост значений сил на каретках, а значит

причиной данного роста действительно является наличие особых положений типа «ПУ». Поскольку наличие особых положений данного типа оказывает существенное негативное влияние на характеристики механизма, был также проведен итерационный анализ всего объема рабочей зоны с шагом 0,01 м для трех различных значений s : 0 м, 0,04 м и 0,08 м.

Результаты итерационного анализа, проведенного для исполнения «2+2», следующие (Рисунок 3.14):

- При $s = 0$ м всего проанализирована 111041 точка, $\det(\mathbf{A}) > 0$ в 53527 точках (48,20 % от общего количества), $\det(\mathbf{A}) < 0$ в 57514 точках (51,80 % от общего количества);
- При $s = 0,04$ м всего проанализировано 101958 точек, $\det(\mathbf{A}) > 0$ в 49241 точке (48,30 % от общего количества), $\det(\mathbf{A}) < 0$ в 52717 точках (51,70 % от общего количества);
- При $s = 0,08$ м всего проанализирована 91561 точка, $\det(\mathbf{A}) > 0$ в 44138 точках (13,97 % от общего количества), $\det(\mathbf{A}) < 0$ в 47423 точках (51,79 % от общего количества).

Результаты итерационного анализа, проведенного для исполнения «3+1», следующие (Рисунок 3.15):

- При $s = 0$ м всего проанализировано 111378 точек, $\det(\mathbf{A}) > 0$ в 15559 точках (13,97 % от общего количества), $\det(\mathbf{A}) < 0$ в 95819 точках (86,03 % от общего количества);
- При $s = 0,04$ м всего проанализированы 104622 точки, $\det(\mathbf{A}) > 0$ в 18346 точке (17,54 % от общего количества), $\det(\mathbf{A}) < 0$ в 86276 точках (82,46 % от общего количества);
- При $s = 0,08$ м всего проанализировано 96175 точек, $\det(\mathbf{A}) > 0$ в 20156 точках (20,96 % от общего количества), $\det(\mathbf{A}) < 0$ в 76019 точках (79,04 % от общего количества).

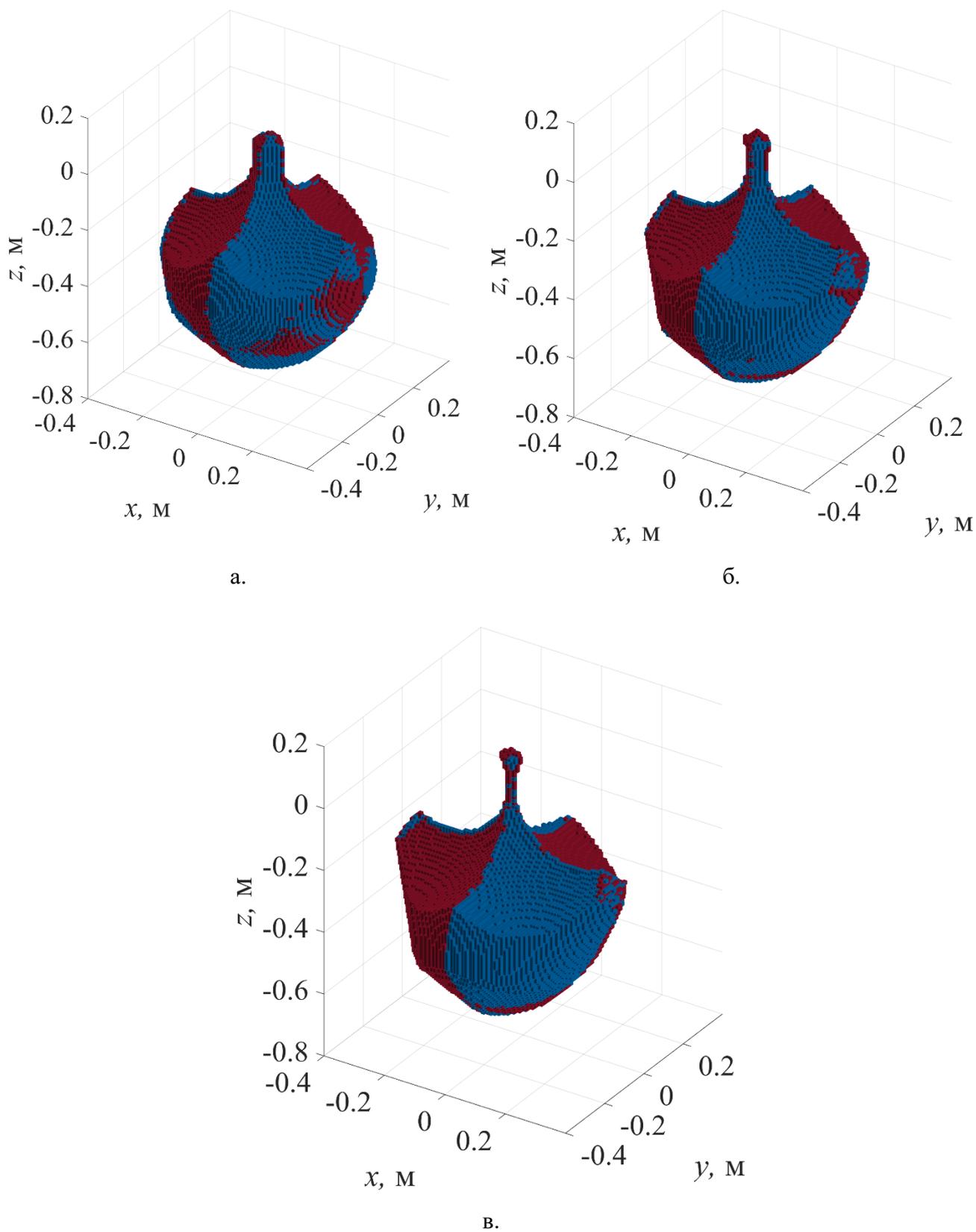


Рисунок 3.14. Знак определителя матрицы A в объеме рабочей зоны для исполнения «2+2»:
при $s = 0$ м (а), $s = 0,04$ м (б), и $s = 0,08$ м (в)

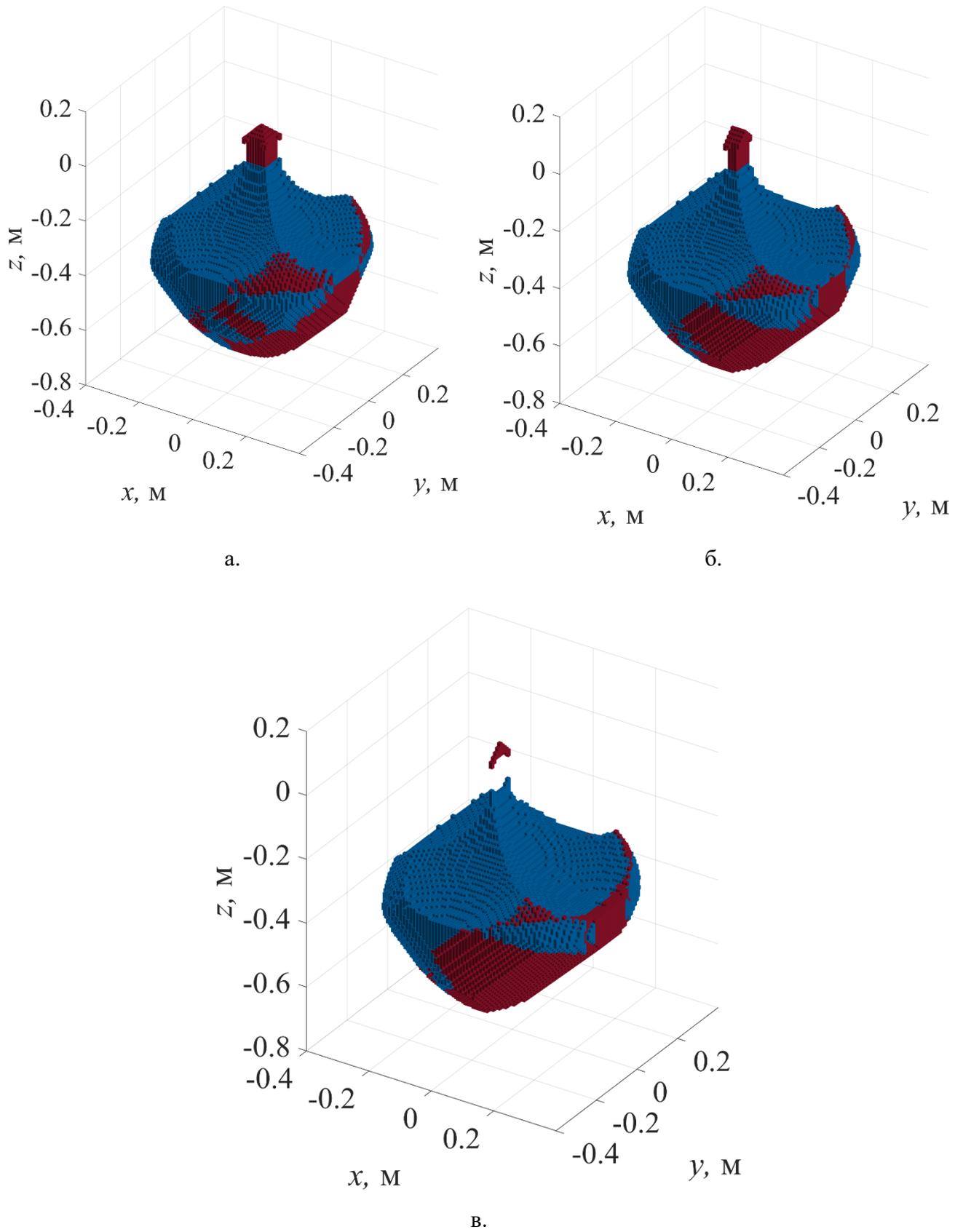


Рисунок 3.15. Знак определителя матрицы A в объеме рабочей зоны для исполнения «3+1»:
при $s = 0 \text{ м}$ (а), $s = 0,04 \text{ м}$ (б), и $s = 0,08 \text{ м}$ (в)

Можно видеть, что для выбранных в рассматриваемом примере геометрических размеров с точки зрения избегания подпадания в особые положения типа «ПУ» исполнение «3+1» оказывается более удачным, нежели исполнение «2+2».

Так, центральная область рабочей зоны исполнения «3+1» состоит из точек, в которых $\det(\mathbf{A}) < 0$, а основной объем точек, в которых $\det(\mathbf{A}) > 0$, находится в одной части рабочей зоны со стороны, расположенной в положительном направлении оси Ox . Помимо этого, имеется несколько областей точек $\det(\mathbf{A}) > 0$ на трех других сторонах рабочей зоны, а также относительно небольшой объем таких точек в ее верхней части. Как видно из результатов анализа, центральная часть рабочей зоны, состоящая из точек, в которых $\det(\mathbf{A}) < 0$, составляет 86,03 % ее общего объема при $s = 0$ м, 82,46 % объема при $s = 0,04$ м и 79,04 % объема при $s = 0,08$ м. В то же время рабочая зона исполнения «2+2» разделена на четыре примерно равных части двумя плоскостями, пересекающимися по прямой, параллельной оси Oz : плоскостью Oxz и плоскостью, параллельной плоскости Oyz и проходящей через точку $x_D = -0,5s$. То есть, механизм сможет работать лишь примерно в четверти общего объема рабочей зоны без необходимости преодоления особых положений типа «ПУ». Несмотря на то, что в данном примере рассматривается теоретическая рабочая зона, и реальный механизм не смог бы достичь значительной ее части, поскольку его звеньям пришлось бы пересекать линейные направляющие, что физически невозможно, разница между двумя исполнениями остается весьма существенной.

Рассмотрим теперь примеры конфигураций механизма, соответствующих особым положениям типа «ПУ», в которых относительное движение двух частей выходного звена становится неуправляемым.

Для исполнения «2+2» исследуем конфигурацию в точке с координатами $x_D = 0,05$ м, $y_D = 0$ м, $z_D = -0,5$ м, $s = 0,04$ м, расположенную в плоскости $Oxyz$ (Рисунок 3.16.а). Поскольку выходное звено должно сохранять свою ориентацию в пространстве, связи, накладываемые первой и второй цепями при зафиксированных приводных парах, оставляют точке D возможность находиться

только на окружности, показанной зеленым цветом. В то же время, третья и четвертая цепи позволяют расположить некоторую симметричную точку, принадлежащую другой половине подвижной платформы, только на оранжевой окружности. Ввиду симметрии механизма относительно плоскости $Oxyz$, обе указанных окружности будут лежать в этой плоскости. Координата s , по сути, представляет собой расстояние вдоль оси Ox между точкой на одной окружности и точкой на другой. Поскольку рассматриваемые окружности лежат в одной плоскости, существует бесконечно много прямых, параллельных оси Ox , соединяющих точки на двух окружностях. Отсюда следует, что существует бесконечно много решений прямой задачи о положениях, в которых координата y_D будет равна нулю, а координаты x_D , z_D и s смогут принимать любые значения. Из этого, в свою очередь, следует, что имеет место неуправляемое относительное движение между двумя частями выходного звена. При этом важно отметить, что данное движение даже теоретически будет являться конечным, а не бесконечно малым, как в подавляющем большинстве случаев особых положений типа «ПУ». Величина относительного перемещения двух частей выходного звена в рамках данной неконтролируемой подвижности будет ограничена только конструктивно в пределах значений s_{\min} и s_{\max} .

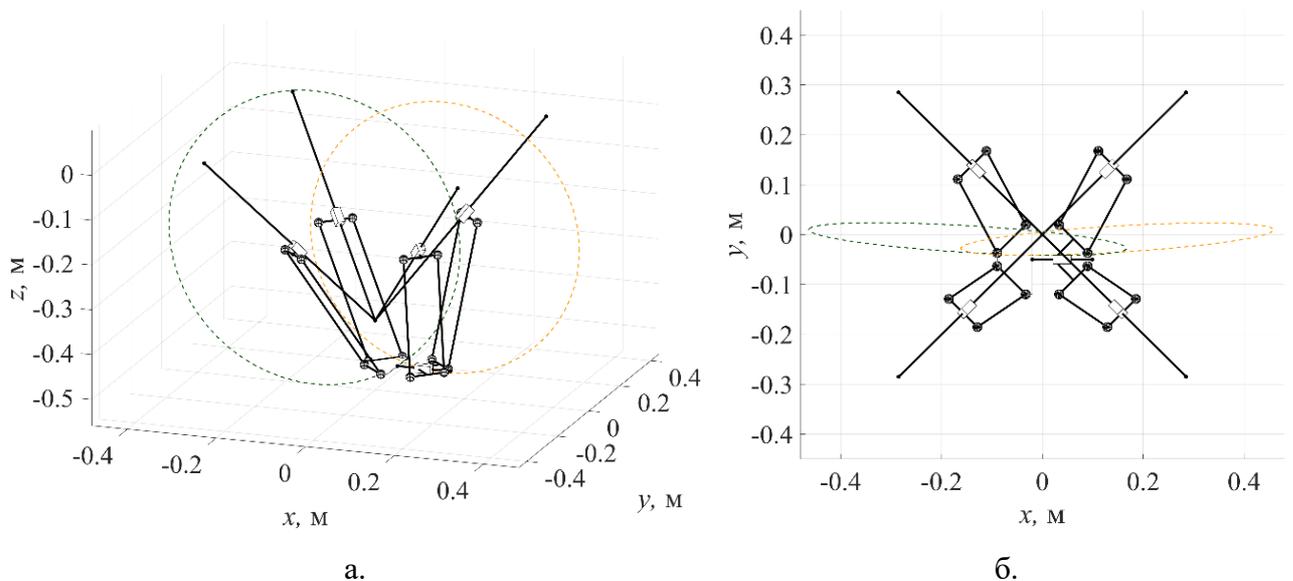


Рисунок 3.16. Примеры конфигураций исполнения «2+2» в особых положениях типа «ПУ»: точка D в плоскости Oxz (а), точка D в плоскости, параллельной Oyz , и $x_D = -0,5s$ (б)

Похожую ситуацию можно наблюдать и для конфигураций механизма, соответствующих положению точки D в плоскости, параллельной Oyz и проходящей через точку $x_D = -0,5s$. Для примера рассмотрим точку с координатами $x_D = -0,02$ м, $y_D = -0,05$ м, $z_D = -0,5$ м, $s = 0,04$ м и соответствующую ей конфигурацию механизма (Рисунок 3.16.б). В этом случае окружности, на которых могут находиться точки, расположенные симметрично на разных половинах выходного звена, не лежат в одной плоскости, однако обладают зеркальной симметрией относительно плоскости Oyz . При этом будет существовать бесконечное число решений для прямой задачи о положениях, в которых координата x_D всегда равна $-0,5s$, а координаты y_D и z_D могут принимать любые значения, при условии, что точка D остается на соответствующей (зеленой) окружности. Как и в рассмотренном ранее случае, неуправляемое относительное движение двух частей выходного звена будет конечным и ограничиваться только конструктивно в пределах от s_{\min} до s_{\max} .

Для исполнения «3+1» рассмотрим конфигурацию механизма в точке с координатами $x_D = 0,145764068712$ м, $y_D = 0$ м, $z_D = -0,5$ м, $s = 0,04$ м, расположенной вблизи границы между центральной областью рабочей зоны, содержащей точки, удовлетворяющие условию $\det(\mathbf{A}) < 0$, и наибольшим объемом, содержащим точки, в которых $\det(\mathbf{A}) < 0$ (Рисунок 3.17). В рассматриваемой конфигурации плоскость параллелограмма четвертой цепи, становится ортогональной оси призматического шарнира, соединяющего две части подвижной платформы, что делает невозможной передачу усилия с привода на выходное звено через эту цепь. Это в свою очередь приводит к потере контроля над перемещением, связанным с выходной координатой s , то есть механизм оказывается в особом положении типа «ПУ». Теоретически, величина относительного перемещения между двумя частями выходного звена бесконечно мала, однако в реальном механизме, ввиду неабсолютной жесткости деталей и наличия зазоров в шарнирах, данное перемещение будет иметь конечную, хотя и относительно небольшую, величину.

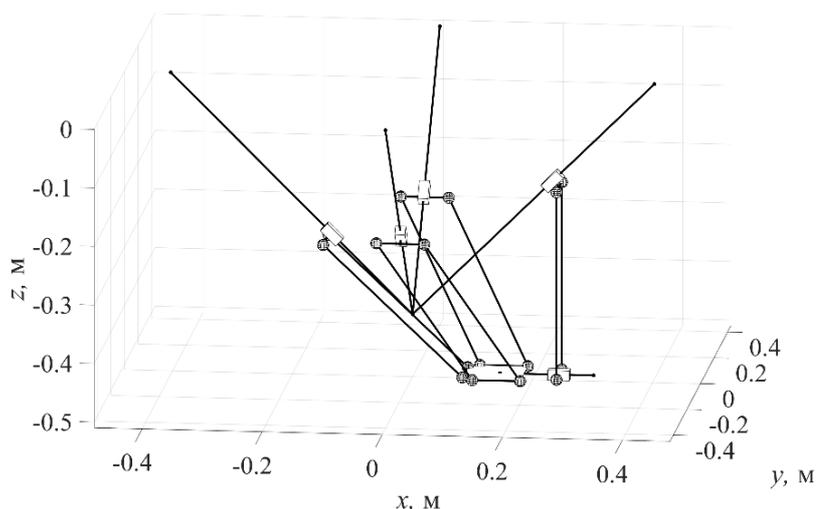


Рисунок 3.17. Пример конфигурации исполнения «3+1» в особом положении типа «ПУ»

По результатам представленного анализа можно сделать вывод, что исполнение «3+1» является более предпочтительным, поскольку максимальный свободный от особых положений типа «ПУ» объем рабочей зоны исполнения «2+2» значительно меньше. Однако, ситуация меняется, если отказаться от симметричного расположения крепления параллелограммов на выходном звене относительно оси призматической пары в исполнении «2+2» и использовать для данного исполнения такое же расположение линейных направляющих, как в исполнении «3+1».

Результаты итерационного анализа для исполнения «2+2» с альтернативным вариантом расположения линейных направляющих следующие (Рисунок 3.18):

- При $s = 0$ м всего проанализировано 111378 точек, $\det(\mathbf{A}) > 0$ в 5078 точках (4,56 % от общего количества), $\det(\mathbf{A}) < 0$ в 106300 точках (95,44 % от общего количества);
- При $s = 0,04$ м всего проанализирована 102621 точка, $\det(\mathbf{A}) > 0$ в 5093 точках (5,22 % от общего количества), $\det(\mathbf{A}) < 0$ в 97528 точках (94,78 % от общего количества);
- При $s = 0,08$ м всего проанализировано 92258 точек, $\det(\mathbf{A}) > 0$ в 4792 точках (5,48 % от общего количества), $\det(\mathbf{A}) < 0$ в 87466 точках (94,52 % от общего количества).

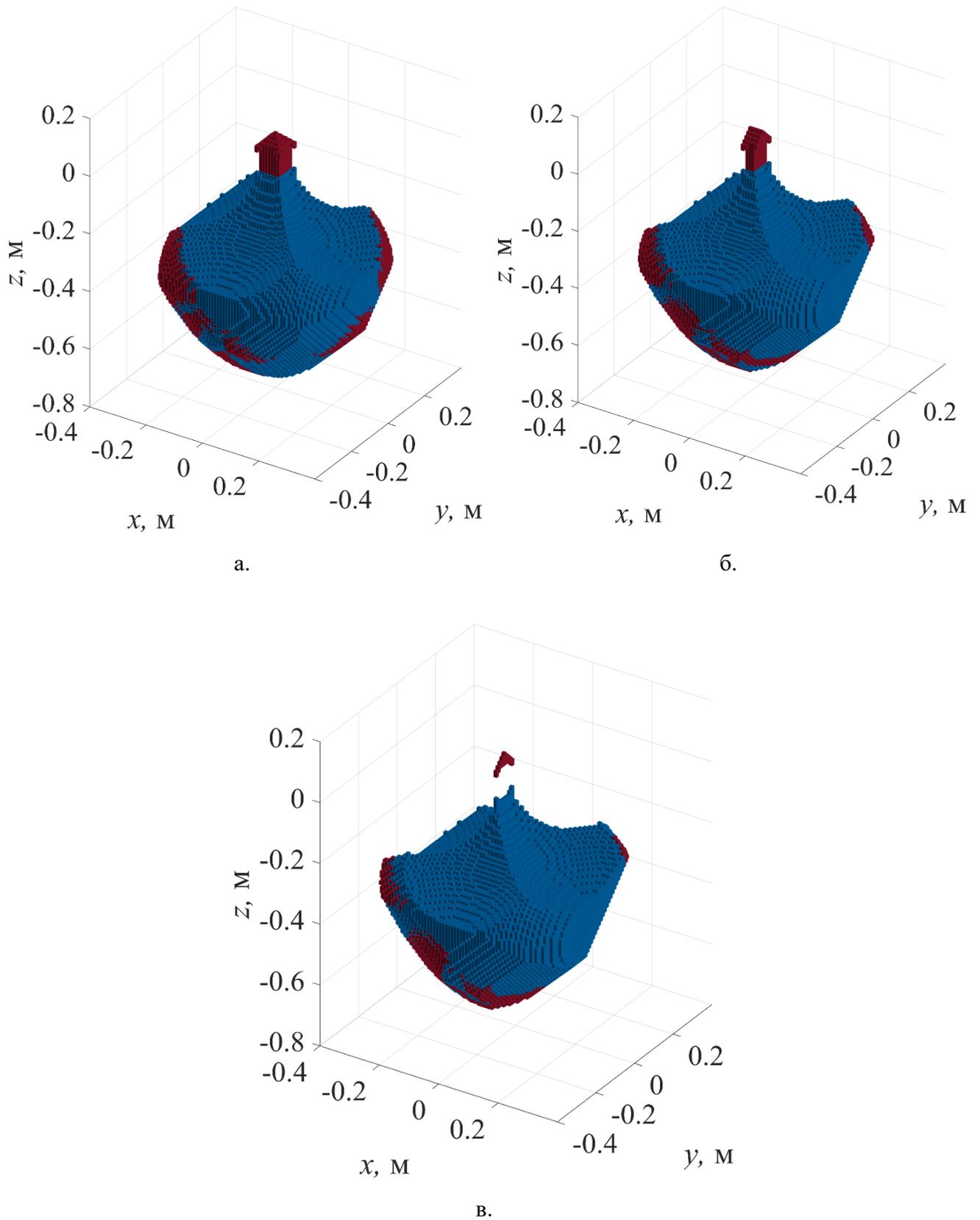


Рисунок 3.18. Знак определителя матрицы A в объеме рабочей зоны для исполнения «2+2» с альтернативным расположением направляющих: при $s = 0$ м (а), $s = 0,04$ м (б), и $s = 0,08$ м (в)

Как можно видеть, центральная часть рабочей зоны исполнения «2+2» с альтернативным расположением линейных направляющих содержит только точки, в которых $\det(\mathbf{A}) < 0$. При этом объем данной части составляет порядка 95 % от общего объема рабочей зоны для всех исследованных значений s , что больше, чем для исполнения «3+1». Точки, в которых $\det(\mathbf{A}) > 0$, локально расположены на нескольких отдельных участках вблизи границ рабочей зоны, а также в небольшом объеме в ее верхней части. Анализ также показал, что для исполнения «2+2» данное расположение линейных направляющих соответствует максимальному объему центральной части рабочей зоны, свободной от особых положений. Любой поворот пирамиды, образованный направляющими, приводит к уменьшению данного объема, а для изначально рассмотренного варианта расположения направляющих в исполнении «2+2», указанный объем является наименьшим. Таким образом, с точки зрения максимизации объема рабочей зоны, свободного от особых положений типа «ПУ», для исполнения «2+2» следует использовать то же расположение линейных направляющих, что и для исполнения «3+1».

В завершение силового анализа вычислим максимальное значение силы сжатия $|F_s|_{\max}$, которую может обеспечить механизм при известной внешней нагрузке силами F_x , F_y и F_z , используя выражение, аналогичное (2.22):

$$|F_s|_{\max} = \min_{i=1..4} (|F_{s,i}|_{\max}) = \min_{i=1..4} \left(\frac{F_{\text{пр}i} - |F_i^{\text{BH}}|}{|\hat{F}_i^s|} \cdot 1 \text{ Н} \right). \quad (3.33)$$

где $F_{\text{пр}i}$ – усилие, которое может быть развито i -м приводом; $|F_i^{\text{BH}}|$ – усилие в i -м приводе, создаваемое внешней нагрузкой; $|\hat{F}_i^s| = |j_{i,4}^T|$ – сила в i -м приводе, необходимая для того, чтобы развить силу на схвате, равную 1 Н.

В качестве примера рассмотрим результаты итерационного анализа с использованием формулы (3.33) того же среза рабочей зоны, что и ранее ($s = 0,05$ м, $z_D = -0,45$ м), приняв $F_{\text{пр}} = 100$ Н. Анализ будем проводить для двух вариантов исполнения «2+2» исполнения «3+1» без внешней нагрузки, а также с внешней нагрузкой $F_x = F_y = F_z = 1$ Н (Рисунок 3.19).

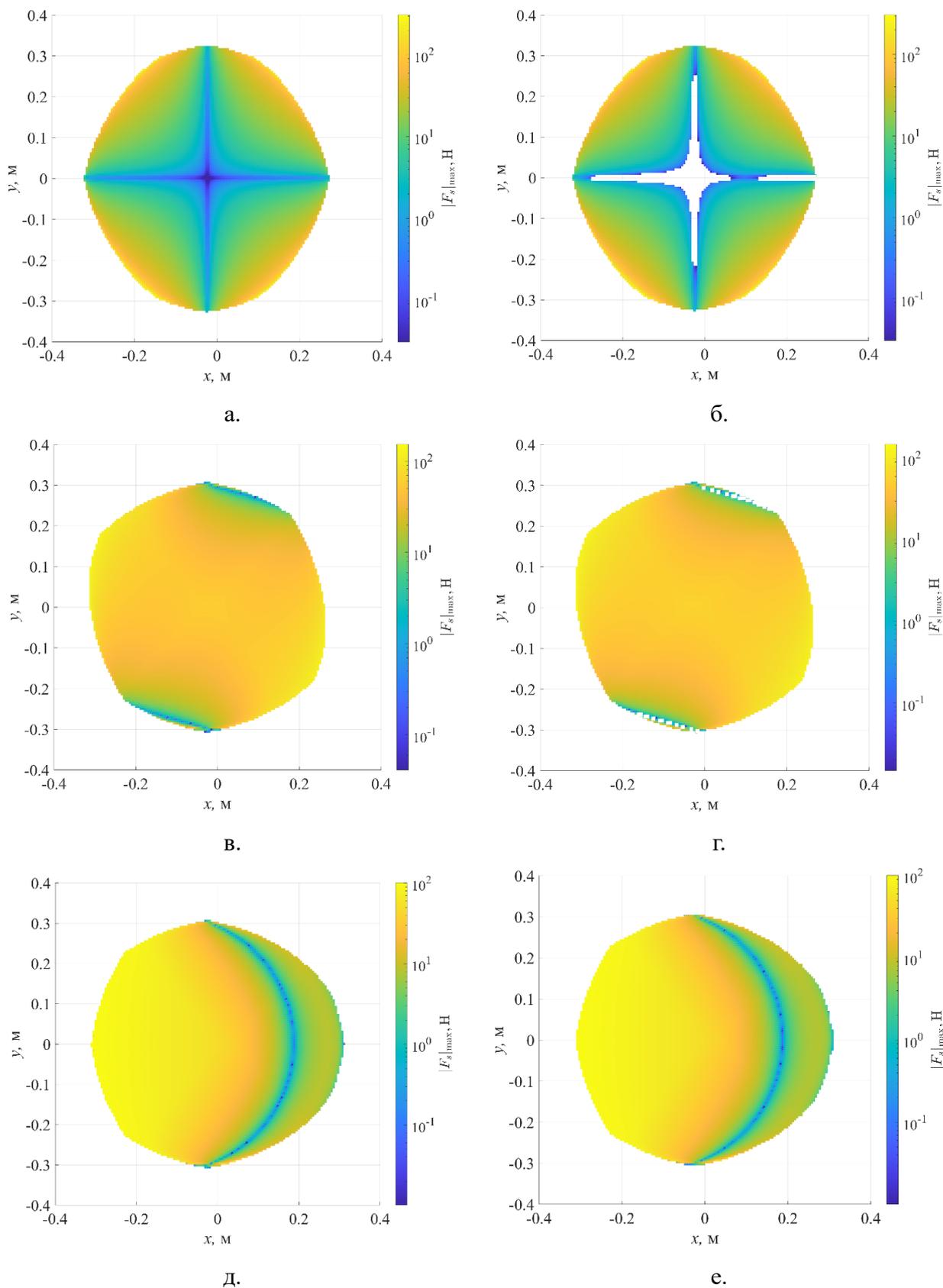


Рисунок 3.19. Распределение максимальной силы на хвате по срезу рабочей зоны при $s = 0,05$ м, $z_D = -0,45$ м»: исходный вариант исполнения «2+2» без нагрузки (а), исходный вариант исполнения «2+2» с нагрузкой (б), альтернативный вариант исполнения «2+2» без нагрузки (в), альтернативный вариант исполнения «2+2» с нагрузкой (г), исполнение «3+1» без нагрузки (д), исполнение «3+1» с нагрузкой (е)

Как и в случае рассмотренного ранее плоского механизма, максимальное значение силы на схвате снижается при приближении к особым положениям типа «ПУ». При наличии внешней нагрузки, на графиках для исполнения «2+2» наблюдаются разрывы внутри среза рабочей зоны, что говорит о том, что в данных областях расчетное значение $|F_s|_{\max}$ меньше, либо равно нулю, то есть механизм теоретически не может развить усилие на схвате. Для исполнения «3+1» подобных разрывов не наблюдается, что может быть связано с тем, что ширина зоны разрыва меньше используемого шага перебора координат.

Таким образом, разработанная математическая модель пространственного механизма в двух исполнениях позволяет проводить анализ его кинематики, скоростей, особых положений, а также вычислять максимально развиваемое усилие на схвате по известным характеристикам двигателей приводов.

3.5. Результаты и выводы по главе

1. Предложено два варианта (исполнения) структурной схемы поступательно-направляющего механизма с кинематической избыточностью, с использованием которой может быть реализована функция захвата объектов манипулирования выходным звеном;

2. Для двух исполнений предложенного механизма получены уравнения связи, найдено аналитическое решение прямой и обратной задачи о положениях, а также путем дифференцирования указанных уравнений определен общий вид матрицы Якоби, что позволило создать математические модели кинематики и статики механизма;

3. Разработанная математическая модель использована для итерационного анализа рабочей зоны, в том числе определения точек, соответствующих особым положениям типа «ПС» и «ПУ», анализа близости к особым положениям указанных типов на основе скоростных и силовых критериев,

а также расчета максимального усилия на схвате механизма по заданным значениям внешней нагрузки и предельно допустимых усилий на приводах механизма;

4. При симметричном расположении линейных направляющих механизма в исполнении «2+2» относительно вертикальной плоскости, проходящей через ось призматической пары выходного звена, в рабочей зоне будут существовать две плоскости, все точки которых соответствуют особым положениям типа «ПУ», причем при попадании в указанные точки неконтролируемые перемещения выходного звена будут конечными, а не бесконечно малыми;

5. Для механизма в исполнении «2+2» с симметричным расположением направляющих относительно некоторой вертикальной плоскости наиболее оптимальным с точки зрения минимизации особых положений типа «ПУ» является такое расположение указанной плоскости, при котором она будет являться средней плоскостью для плоскостей Oxz и Oyz .

ГЛАВА 4. РАЗРАБОТКА И ИССЛЕДОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОТОТИПОВ МЕХАНИЗМОВ

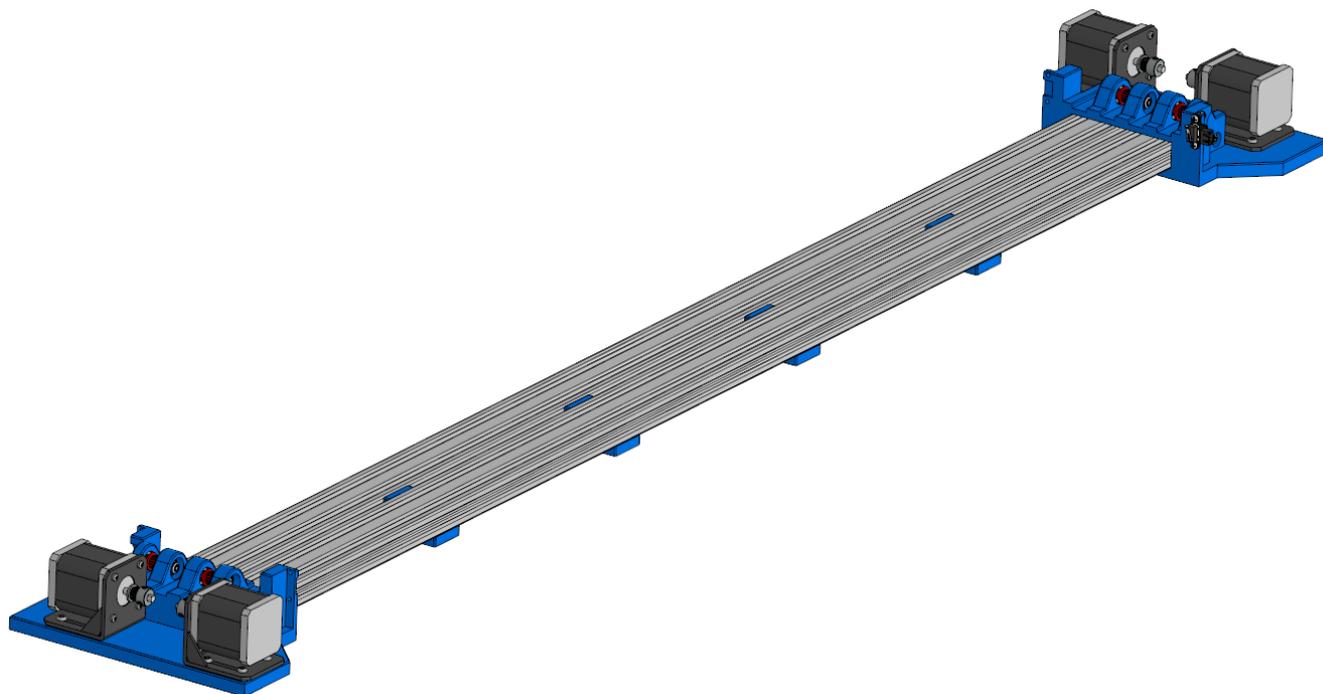
4.1. Разработка прототипа плоского механизма

Важным этапом разработки и анализа новых структурных схем механизмов является их САD-моделирование и физическое прототипирование, позволяющее на практике подтвердить работоспособность механизмов, оценить потенциал их практического применения, а также подтвердить правильность расчетных математических моделей.

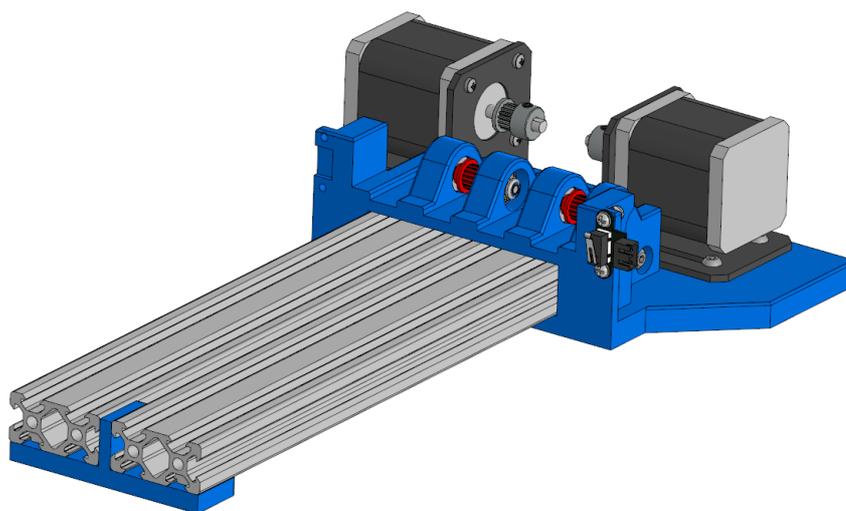
При разработке прототипа плоского механизма был сделан упор на использование максимального числа стандартизированных комплектующих, а также изготовление недостающих деталей из пластика методом 3D-печати. Широкая доступность готовых компонентов, а также быстрота технологического процесса трехмерной печати позволили разработать модель, изготовить необходимые детали и осуществить сборку физического прототипа механизма в кратчайшие сроки с небольшими финансовыми вложениями. Трехмерное моделирование и проработка конструкции прототипа осуществлялась с помощью системы автоматизированного проектирования КОМПАС-3D.

Базовой частью конструкции механизма является линейная направляющая, одновременно служащая и его основанием (Рисунок 4.1.а). Направляющая состоит из двух экструдированных алюминиевых профилей типа v-slot размером 20×40 мм и длиной 1200 мм каждый, которые закреплены в специальных опорных пластинах, изготовленных из пластика (Рисунок 4.1.б). Между опорными пластинами дополнительно расположены четыре проставки, обеспечивающие постоянство ширины направляющей, и предотвращающие ее провисание. На каждой из пластин расположено по два шаговых двигателя типоразмера Nema 17 (17HS4401), на валах которых закреплены приводные шкивы ременной передачи ($p = 2$ мм, $z = 16$). Также

на каждой пластине располагается по два свободно вращающихся пассивных шкива ременной передачи с тем же шагом и числом зубьев, что и на приводных. Оси пассивных шкивов, представляющие собой винты М5, установлены в подшипниках типа 625zz (или 80025 по отечественной классификации). Также на стороне пластины, обращенной к профилю направляющей, расположен нормально замкнутый концевой выключатель, предназначенный для предотвращения столкновения каретки с пластиной.



а.



б.

Рисунок 4.1. Модель линейной направляющей плоского механизма: общий вид (а), вид на опорную пластину (б)

По направляющим перемещаются каретки, корпус которых изготавливается из пластика. На каждой каретке расположено по четыре свободно вращающихся полиформальдегидных ролика, осями которых служат винты М5. В каждом из роликов расположено по два подшипника 625zz. Данные ролики при сборке механизма размещаются в соответствующих боковых пазах профилей направляющей. Также в каждой каретке имеется четыре сквозных прямоугольных отверстия, над каждым из которых расположено по два отверстия с перекладиной, предназначенных для крепления ремня. К одной каретке крепится один ремень, в то время как ремни, приводящие в движение другие каретки проходят через сквозные отверстия. Каретки выполнены в двух исполнениях: под крепление одной штанги (Рисунок 4.14.а) и под крепление двух штанг (Рисунок 4.14.б). В каждом лямбда-механизме используется по одной каретке каждого исполнения. Для предотвращения столкновения кареток на каждой из них установлено по одному концевому выключателю, аналогичному тем, что расположены на опорных пластинах направляющей.

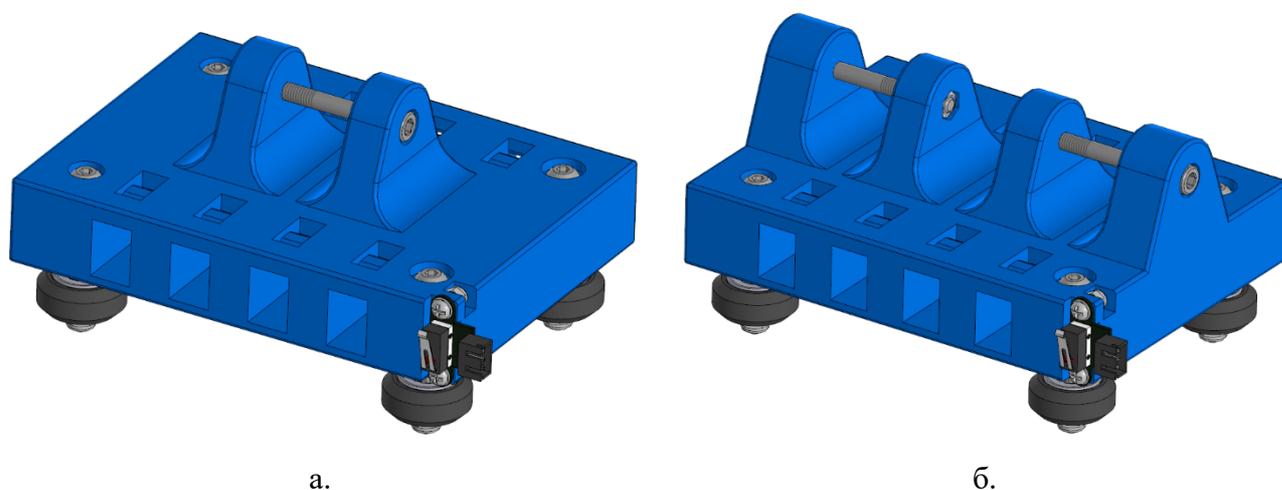


Рисунок 4.2. Модели кареток плоского механизма: под одну штангу (а), под две штанги (б)

Штанги механизма (Рисунок 4.3) представляют собой полые углепластиковые трубки с наружным диаметром 16 мм и толщиной стенки 2 мм. К концам трубки с использованием эпоксидного клея присоединены два пластиковых наконечника, в каждом из которых находится по два подшипника 625zz. Постоянство межосевого расстояния, равного 270 мм, а также параллельность осей отверстий в наконечниках обеспечивается тем, что при сборке

штанги склеивание деталей осуществляется по специальному шаблону. Ширина наконечника штанги составляет 23 мм, что на 2 мм меньше расстояния между проушинами на каретках. Соответственно, при монтаже штанги в зазоры между наконечником и проушинами устанавливаются шайбы толщиной 1 мм, что обеспечивает отсутствие соприкосновения между боковыми поверхностями наконечника и проушинами.

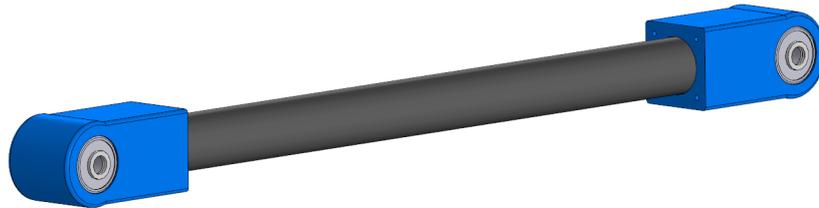


Рисунок 4.3. Модель штанги плоского механизма

Выходное звено механизма (Рисунок 4.4) состоит из двух частей. Одна половина представляет собой пластиковую рамку, с креплениями для установки двух направляющих круглого сечения (стальных шлифованных валов) диаметром 8 мм и общей длиной 150 мм. Фиксация данных направляющих осуществляется за счет притягивания крышек креплений винтами М3 (по четыре винта на каждое крепление). Осевое смещение направляющих предотвращается за счет установки компенсирующих проставок внутри креплений.

Во второй половине выходного звена имеется два сквозных отверстия диаметром 15 мм, предназначенных для установки двух линейных подшипников фланцевого типа LMK8UU. Фиксация подшипников на данной половине выходного звена осуществляется винтами М3. При сборке в данные подшипники устанавливаются направляющие круглого сечения, которые затем закрепляются на первой половине выходного звена. Таким образом две половины выходного звена могут перемещаться друг относительно друга по данным направляющим в пределах, ограниченных габаритами рамки первой половины выходного звена.

На каждой из двух частей выходного звена имеется по четыре проушины с отверстиями диаметром 5 мм, предназначенных для присоединения штанг. Расстояние между проушинами, как и в случае с каретками, на 2 мм больше ширины наконечника штанги. Присоединение штанг к каждой половине выходного

звена осуществляется одним винтом М5 увеличенной длины (130 мм). Данные винты служат осями вращения штанг. Также на каждой половине выходного звена имеется по три отверстия под винты М3 для крепления при необходимости различных инструментов или оборудования.

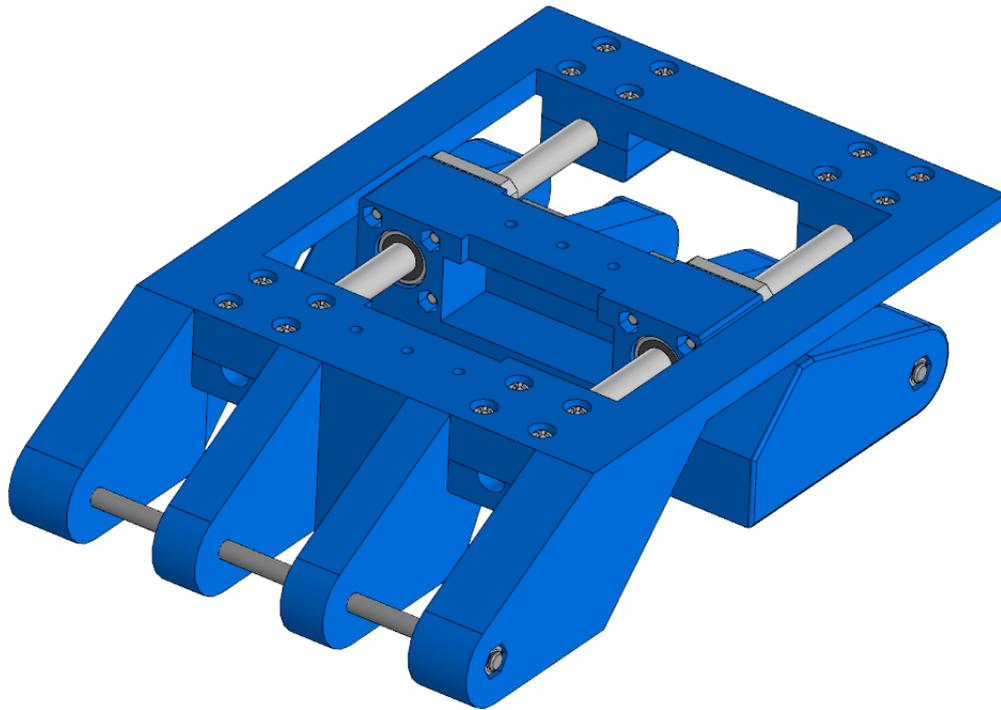


Рисунок 4.4. Модель выходного звена плоского механизма

Трехмерная модель механизма получается путем объединения отдельных деталей и сборочных единиц в одну общую сборку (Рисунок 4.5).

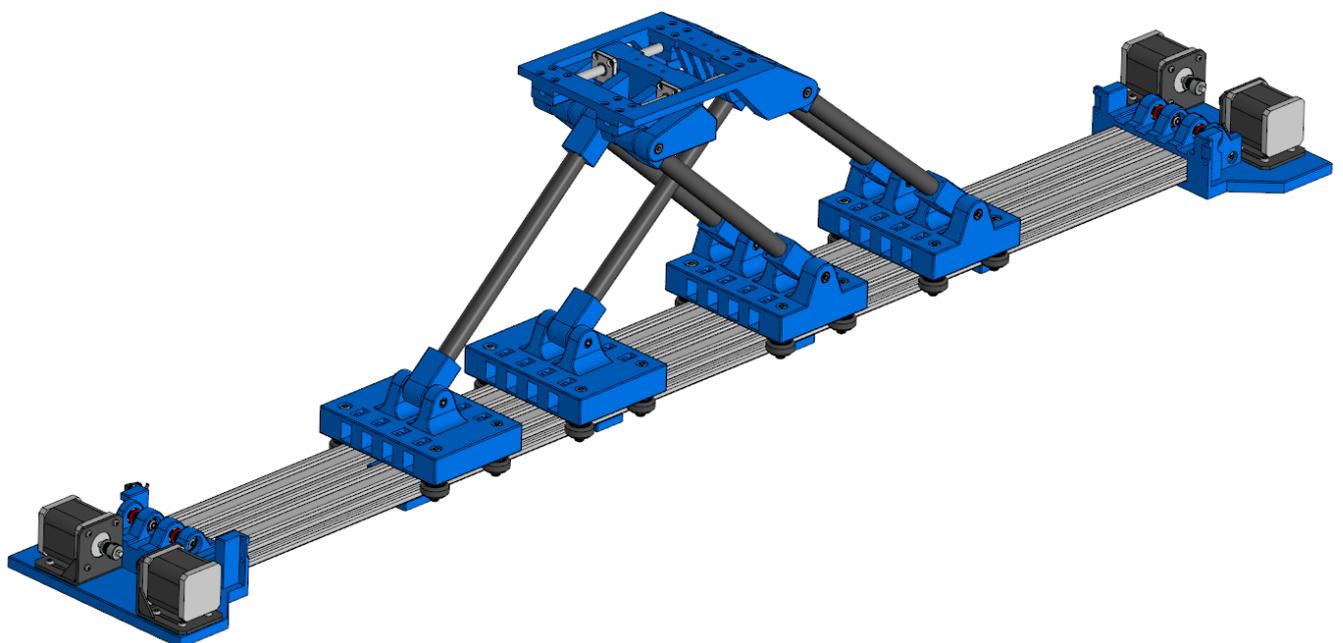


Рисунок 4.5. Модель плоского механизма в сборе

Исследование модели механизма средствами CAD подтвердило, что тип движения выходного звена механизма соответствует требуемому, что позволило перейти к покупке готовых изделий, изготовлению деталей из пластика, и, наконец, к сборке физического прототипа механизма (Рисунок 4.6).



а.



б.

Рисунок 4.6. Примеры конфигураций физического прототипа плоского механизма: платформа в горизонтальном положении (а), платформа наклонена (б)

В соответствии с принятыми во второй главе обозначениями, основные размеры физического прототипа следующие: $l_{AB} = 56,5$ мм для всех цепей; $l_{BC} = 270$ мм для всех цепей; $l_{C2D} = 67$ мм; пределы хода кареток [50; 1050] мм; пределы изменения величины s [67; 147] мм.

4.2. Разработка прототипа пространственного механизма

При разработке модели и физического прототипа пространственного механизма, как и в случае с плоским механизмом, упор делался на использование готовых широкодоступных компонентов и изделий и изготовление недостающих деталей из пластика.

Основание механизма (Рисунок 4.7) имеет форму правильной пирамиды и выполнено из восьми экструдированных алюминиевых профилей типа v-slot сечением 20×20 мм и длиной 350 мм: четыре профиля служат линейными направляющими для кареток, и еще четыре профиля формируют квадратное основание пирамиды. Профили, образующие основание пирамиды, пирамиды попарно соединяются посредством специальных пластиковых креплений, к каждому из которых профили притягиваются винтами М5. Вершина пирамиды также выполнена из пластика и соединяется с профилями, формирующими боковые ребра пирамиды, винтами М5. Нижние концы профилей боковых ребер устанавливаются в специальные пазы креплений профилей основания.

На каждом из нижних креплений расположено по одному шаговому двигателю типоразмера Nema 17 (17HS4401). На валах шаговых двигателей закреплены приводные шкивы зубчатой ременной передачи ($p = 2$ мм, $z = 36$). Для удобства установки приводных шкивов и затяжки винтов М3, которыми крепятся шаговые двигатели, в одной из боковых сторон верхнего ответвления нижних креплений предусмотрены специальные монтажные отверстия. Также со стороны расположения профилей, служащих линейными направляющими для кареток, предусмотрено крепление для концевого выключателя, срабатывание которого предотвращает столкновение каретки с креплением.

В пластиковой детали, формирующей вершину пирамиды, расположены четыре свободно вращающихся шкива с тем же шагом и числом зубьев, что и приводных шкивов. В качестве осей шкивов используются винты М5, а в каждом из шкивов установлено по два радиальных шариковых подшипника MR105zz. Оси

шкивов закрепляются в специальных пазах, что дает возможность регулировать натяжение ремня. Со стороны крепления профилей расположены концевые выключатели, срабатывание которых предотвращает столкновение кареток с вершиной пирамиды. Кроме того, на верхней части вершины с помощью винтов М3 может быть закреплен специальный калибровочный блок, используемый для ручного выставления положения выходного звена при определении точной дистанции срабатывания концевых выключателей.

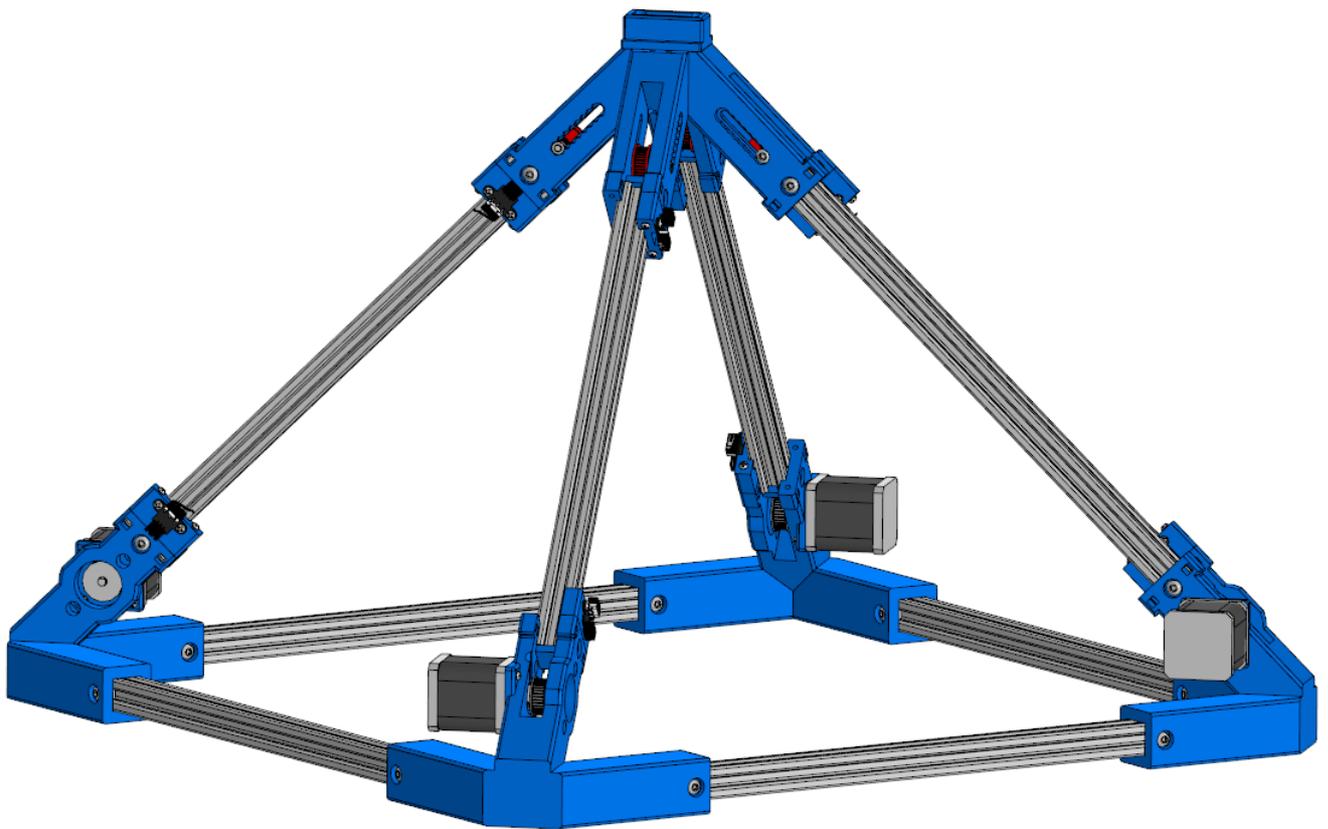


Рисунок 4.7. Модель основания пространственного механизма

Каретки механизма (Рисунок 4.8) выполнены в виде пластиковых пластин толщиной 7 мм. На каждой каретке располагается по четыре свободно вращающихся ролика, выполненных из полиформальдегида. Внутри роликов установлено по два подшипника MR105zz. Осями роликов служат винты М5. На передней и задней сторонах каретки расположены отверстия, предназначенные для закрепления приводного ремня. В свою очередь, на боковых сторонах каретки расположены крепления для шаровых шарниров штанг с помощью винтов М3. Дистанционирование поверхностей каретки и шарнира осуществляется за счет

латунных втулок наружным диаметром 4 мм и длиной 8 мм. Втулки установлены таким образом, чтобы после сборки расстояние между поверхностями каретки и шарнира было равно 3 мм. Наружный диаметр втулки выбран минимально возможным с целью достижения максимально возможных углов поворота в шарнирах штанги.

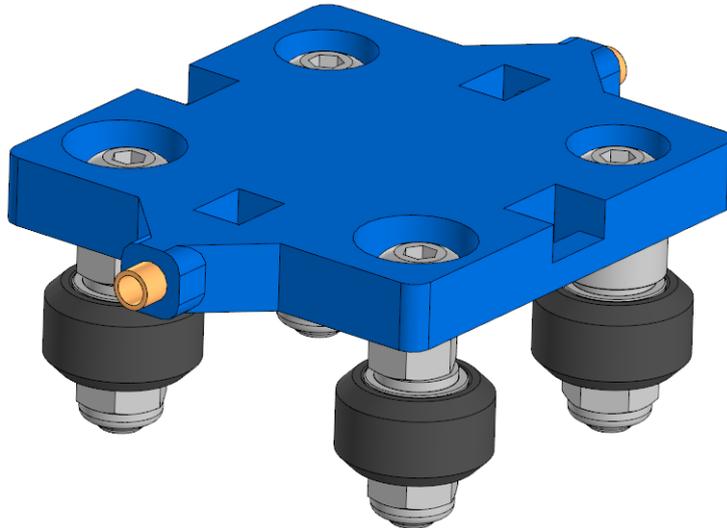


Рисунок 4.8. Модель каретки пространственного механизма

Штанги механизма (Рисунок 4.9), образующие параллелограммы кинематических цепей выполнены в виде углепластиковых трубок с внутренним диаметром 3 мм, толщиной стенки 1 мм и длиной 300 мм. К концам трубки при помощи эпоксидного клея приклеены шаровые шарниры скольжения типоразмера POS3. Как и в случае с плоским механизмом, склеивание деталей осуществлялось по шаблону, что позволило добиться параллельности боковых плоскостей шарниров, а также постоянства межосевого расстояния, равного 320 мм.

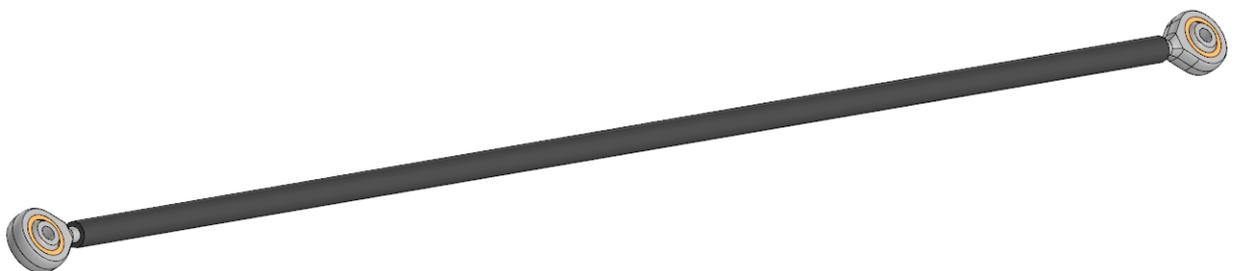


Рисунок 4.9. Модель штанги пространственного механизма

Выходное звено механизма (Рисунок 4.10) по конструкции идентично выходному звену плоского механизма. Единственное отличие заключается в

измененных креплениях. При этом на детали с рамкой расположены крепления для двух штанг, а на другой детали – для шести. Таким образом, при сборке механизм будет иметь исполнение «3+1».

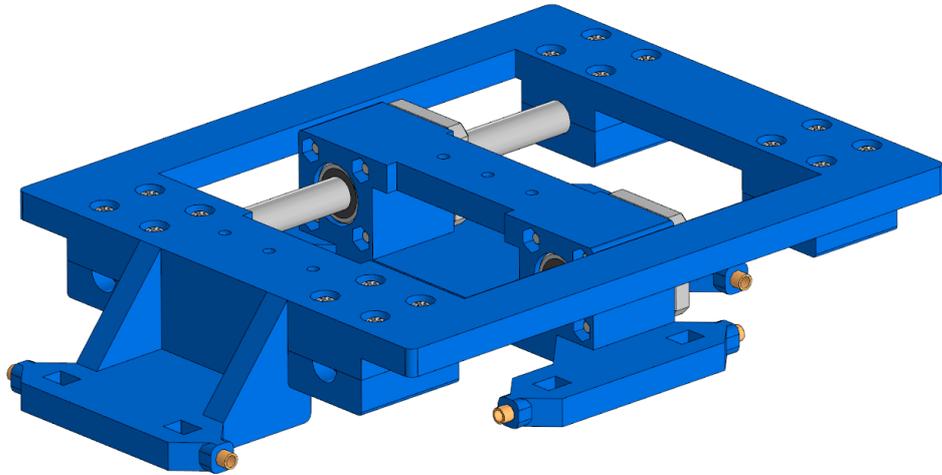


Рисунок 4.10. Модель выходного звена пространственного механизма

Окончательная модель механизма была получена путем объединения всех деталей и сборочных единиц в одну общую сборку (Рисунок 4.11).

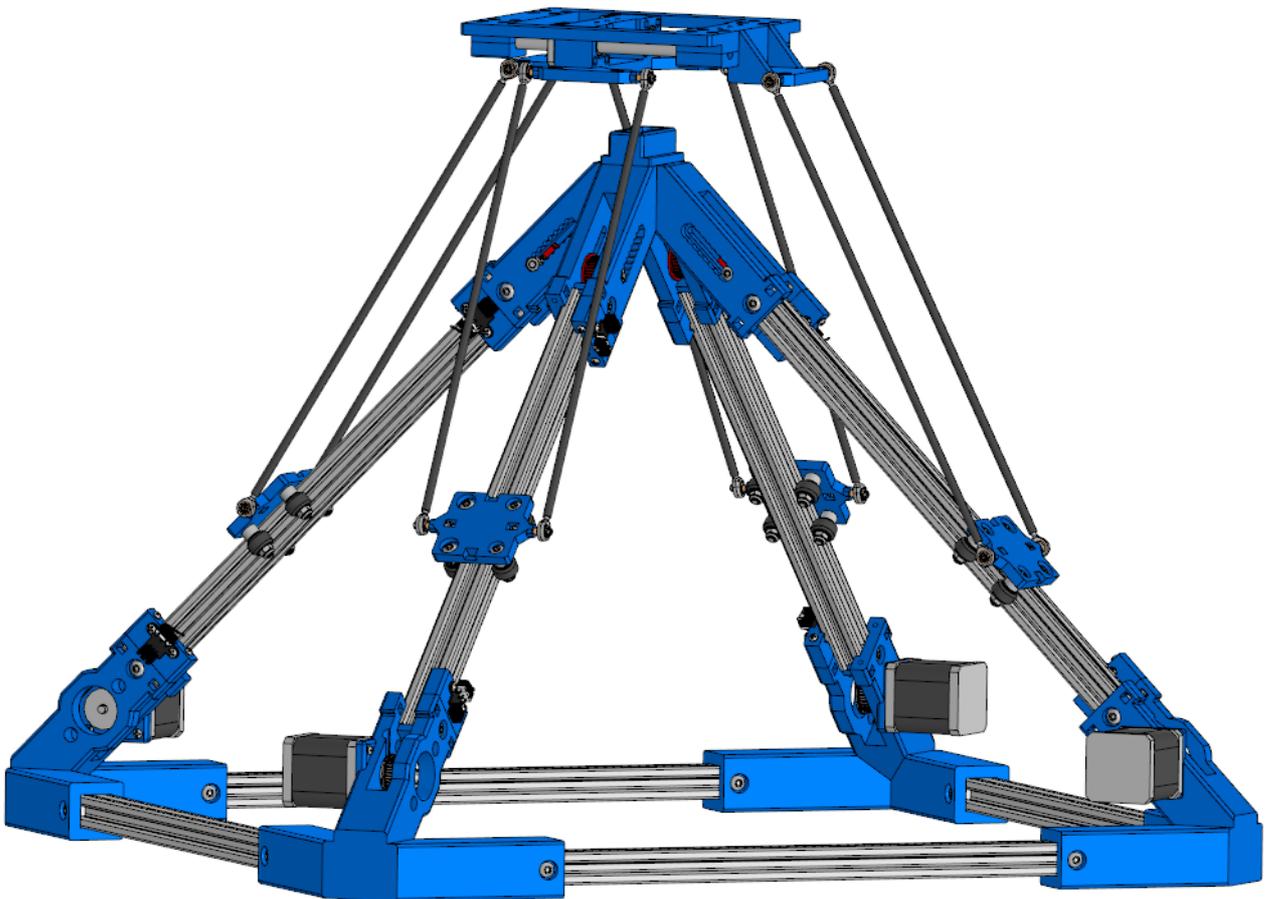


Рисунок 4.11. Модель пространственного механизма в сборе (исполнение «3+1»)

Как и в случае с плоским механизмом, после завершения моделирования было проведено исследование модели механизма средствами CAD подтвердило. Было установлено, что тип движения выходного звена механизма соответствует требуемому. После этого была проведена закупка готовых изделий и компонентов, изготовление деталей из пластика, а также сборка физического прототипа механизма (Рисунок 4.12).



Рисунок 4.12. Физический прототип пространственного механизма (исполнение «3+1»)

В отличие от плоского механизма, размеры физического прототипа пространственного механизма полностью совпадают с размерами примера, представленного в третьей главе, за исключением пределов изменения координат h_i , которые у прототипа должны находиться в интервале $[166; 404]$ мм.

4.3. Экспериментальное исследование силы на схвате плоского механизма

Одной из важных функциональных возможностей исследуемых в данной работе механизмов является возможность захвата объектов за счет кинематической избыточности. В этой связи целесообразно проведение экспериментального исследования по проверке применимости предложенного способа вычисления развиваемого усилия на схвате. Поскольку в прототипе используются шаговые двигатели, измерение момента непосредственно развиваемого двигателем затруднено и требует использования дополнительных датчиков. В то же время измерение максимально развиваемого двигателем усилия не представляет сложности. Данная особенность является ключевой для описываемого далее экспериментальном исследовании.

Для проведения первого этапа эксперимента на одной половине выходного звена с помощью кронштейна был установлен динамометр Zhiqu DS2-500N с насадкой, предназначенной для испытаний на сжатие, а на второй половине выходного звена размещен специальный упор (Рисунок 4.13).

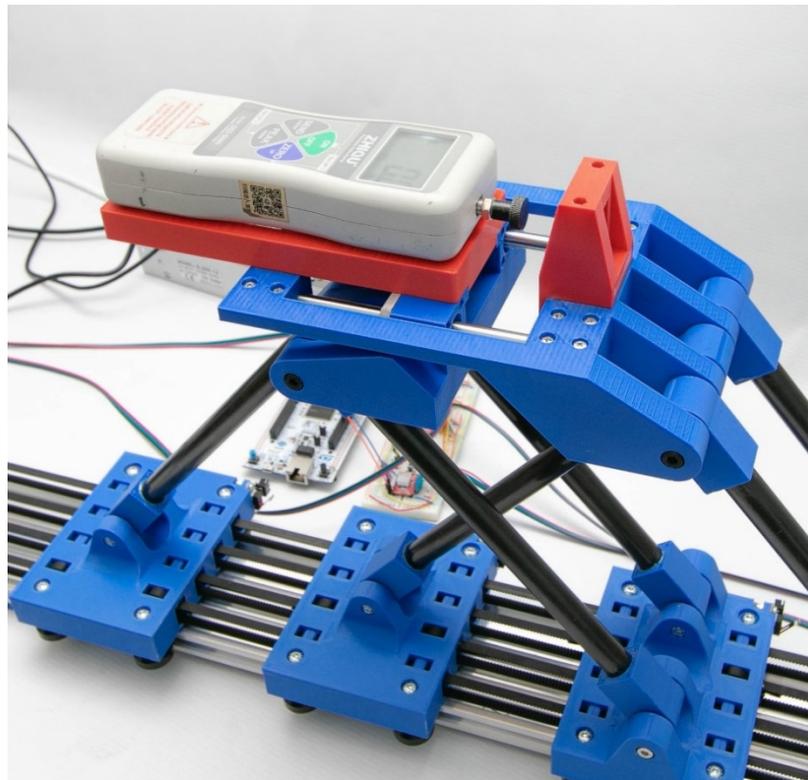


Рисунок 4.13. Динамометр и упор, размещенные на выходном звене механизма

Механизм с установленными на нем динамометром и упором выставлялся в исходное положение со следующими координатами, задающими расположение кареток: $x_{A11} = 290$ мм, $x_{A12} = 630$ мм, $x_{A21} = 460$ мм, $x_{A22} = 800$ мм. Путем решения прямой задачи о положениях с использованием предложенного в работе алгоритма можно вычислить соответствующие координаты выходного звена: $x = 563$ мм, $y = 209,8$ мм, $\varphi = 0^\circ$, $s = 103$ мм. В данном положении механизм оказывается приблизительно на середине линейной направляющей, а расстояния между краями любых двух соседних кареток составляет 70 мм (Рисунок 4.14).

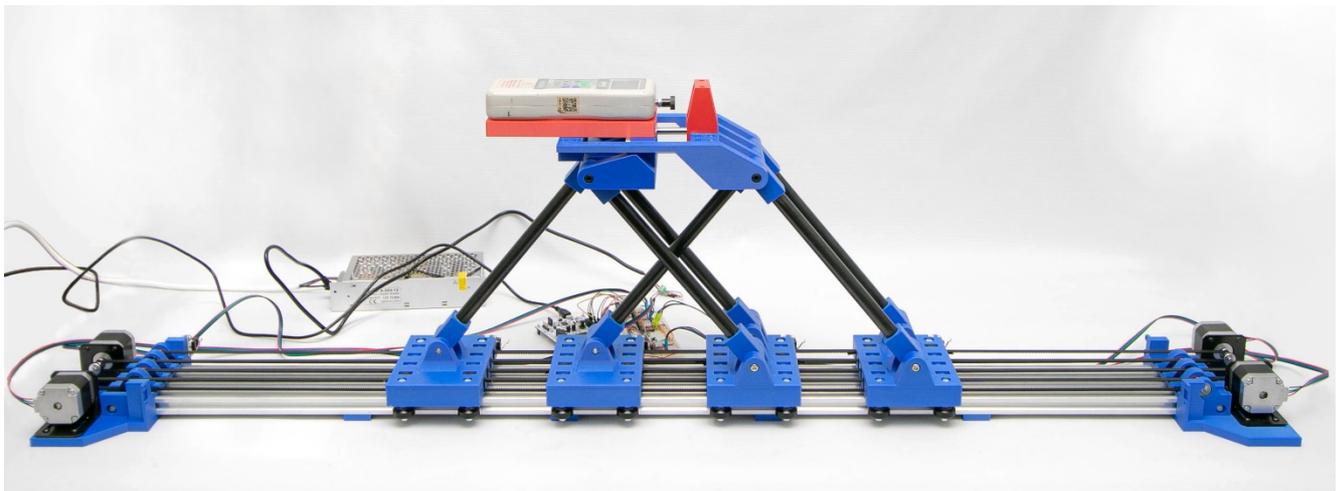


Рисунок 4.14. Механизм в исходном положении для эксперимента по измерению силы на схвате

Далее запускались шаговые двигатели, и все каретки одновременно начинали движение с постоянной и одинаковой скоростью: каретки левого лямбда-механизма смещались вправо (то есть, в направлении увеличения координаты x), а каретки правого лямбда-механизма – влево. В результате происходило смещение точки D влево с одновременным уменьшением значения s . В положении касания насадки динамометра и упора измеренные координаты кареток были следующими: $x_{A11} = 300$ мм, $x_{A12} = 640$ мм, $x_{A21} = 450$ мм, $x_{A22} = 790$ мм, что соответствует координатам выходного звена $x = 553$ мм, $y = 209,8$ мм, $\varphi = 0^\circ$, $s = 83$ мм. Непосредственно сам момент касания определялся по изменению показаний динамометра с 0 Н до 0,1 Н. После касания при продолжении работы двигателей динамометр и упор давили друг на друга, то есть, возникало сжимающее усилие на схвате, измерение которого и было главной задачей данного этапа эксперимента.

Поскольку прототип механизма выполнен из легких материалов и использует ременную передачу, его конструкция является достаточно податливой. Это приводит к тому, что после касания насадки динамометра и упора в процессе роста силы сжатия каретки и звенья механизма будут перемещаться за счет выбора зазоров в шарнирах и упругих деформаций. В этой связи были проведены измерения координат, задающих положение кареток, при силе сжатия, равной 30 Н: $x_{A11} = 302,5$ мм, $x_{A12} = 644$ мм, $x_{A21} = 451,5$ мм, $x_{A22} = 790,5$ мм, что соответствует координатам выходного звена $x = 554$ мм, $y = 209,7$ мм, $\varphi = 0,3933^\circ$, $s = 80,8$ мм. Можно видеть, что имеет место поворот выходного звена, который, однако, является пренебрежительно малым.

Сжатие выходного звена производилось до момента, при котором на каком-либо из двигателей начинался пропуск шагов, что определялось по характерному звуку. Сразу после начала пропуска шагов двигатели отключались, с динамометра снимались показания, после чего механизм возвращался в исходное положение и опыт повторялся. Поскольку момент шагового двигателя зависит от частоты вращения его вала, эксперимент проводился для пяти разных значений скорости движения, определяемых длительностью задержки t_3 между импульсами, подаваемыми на двигатели. Использовались значения t_3 , равные 0,010 с, 0,008 с, 0,006 с, 0,004 с и 0,002 с. С учетом того, что шаг двигателей равен $1,8^\circ$, а коэффициент дробления шага был выбран равным $1/16$, значения скорости $v_A = \dot{x}_A$ перемещения кареток могут быть вычислены по следующей зависимости:

$$v_A = \frac{1,8^\circ}{16t_3 \cdot 360^\circ} zP, \quad (4.1)$$

где $z = 16$ и $P = 2$ мм – число зубьев приводного шкива и шаг зубчатого ремня соответственно.

Вычисленные согласно выражению (4.1) скорости кареток, соответствующие используемым значениям задержки между импульсами, составили 1 мм/с, 1,25 мм/с, 1,667 мм/с, 2,5 мм/с и 5 мм/с.

Для каждого значения скорости v_A было проведено по двадцать измерений силы сжатия, после чего для каждой выборки была проведена проверка гипотезы

об принадлежности нормальному распределению с использованием теста Андресона-Дарлинга с уровнем значимости 5 %. По результатам расчетов справедливость указанной гипотезы была подтверждена для всех исследованных выборок (p -значение $\geq 0,05$), а также были вычислены значения математического ожидания силы сжатия μ_{F_s} и среднеквадратического отклонения σ_{F_s} (Таблица 4.1).

Таблица 4.1. Результаты измерения силы на схвате

Параметры выборки	Скорость движения кареток (v_A), мм/с				
	1	1,25	1,667	2,5	5
μ_{F_s} , Н	48,31	47,18	46,09	44,87	40,54
σ_{F_s} , Н	0,999	0,889	0,976	0,987	1,142
p -значение	0,117	0,880	0,451	0,256	0,692

Для проведения второго этапа эксперимента выходное звено вместе с промежуточными звеньями было отсоединено от кареток. Одна из кареток выставлялась в положение, соответствующее исходному положению на первом этапе эксперимента. В непосредственной близости от этой каретки при помощи специального кронштейна на направляющей закреплялся динамометр. Расположение динамометра относительно каретки было таким, чтобы при запуске шаговых двигателей, каретка двигала в сторону от динамометра. Кроме того, размеры кронштейна были подобраны таким образом, чтобы ось динамометра находилась на одной высоте с осями шарниров B_{ij} , то есть, на высоте $y = 0$ мм в системе координат механизма. В отверстиях для установки винтов, служащих осями данных шарниров, была размещена стальная ось, за которую зацеплялась насадка динамометра, предназначенная для проведения экспериментов на растяжение (Рисунок 4.15).

При запуске шаговых двигателей каретка начинала движение и тянула за насадку динамометра. После того, как на соответствующем шаговом двигателе начинался пропуск шагов, отключалось питание и фиксировалось значение силы, которую развивал привод. После этого каретка возвращалась в исходное положение и эксперимент повторялся. Как и ранее при измерении силы сжатия, для каждого значения скорости v_A было проведено по двадцать измерений, а для

полученных выборок был проверена гипотеза об их принадлежности нормальному распределению, которая оказалась справедливой для всех выборок (Таблица 4.2).

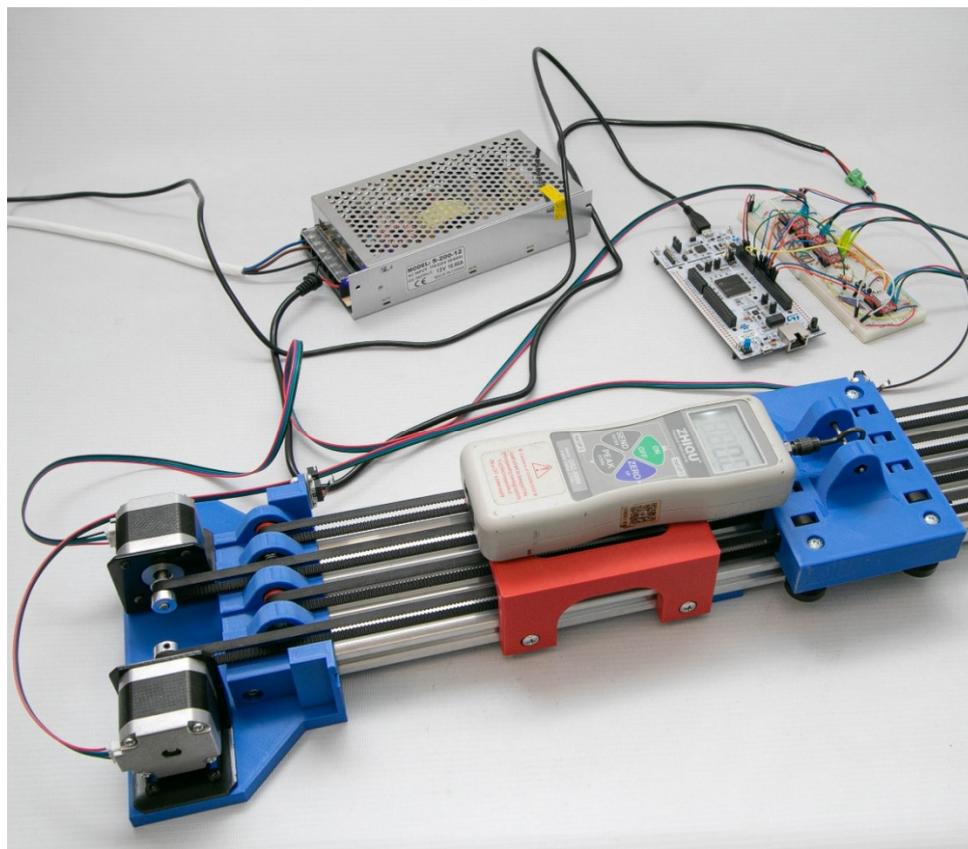


Рисунок 4.15. Экспериментальное измерение силы, развиваемой приводом

Таблица 4.2. Результаты измерения сил на каретках

Индекс каретки	Параметры выборки	Скорость движения кареток (v_A), мм/с				
		1	1,25	1,667	2,5	5
«11»	μ_{F11} , Н	28,920	28,960	28,845	28,180	25,170
	σ_{F11} , Н	0,443	0,437	0,415	0,429	0,459
	p -значение	0,052	0,153	0,164	0,435	0,411
«12»	μ_{F12} , Н	28,080	27,685	27,330	26,170	24,025
	σ_{F12} , Н	1,187	0,845	1,097	1,019	1,196
	p -значение	0,192	0,581	0,138	0,210	0,230
«21»	μ_{F21} , Н	25,565	24,715	24,300	23,240	20,170
	σ_{F21} , Н	0,671	0,382	0,301	0,372	0,450
	p -значение	0,421	0,051	0,313	0,293	0,889
«22»	μ_{F22} , Н	32,255	31,995	31,450	30,275	27,925
	σ_{F22} , Н	0,386	0,352	0,310	0,392	0,341
	p -значение	0,845	0,360	0,725	0,651	0,468

Рассмотрим полученное ранее во второй главе выражение для вычисления максимальной силы на схвате, которое может быть обеспечено приводом при заданной внешней нагрузке:

$$\left| F_{s,k} \right|_{\max} = \frac{F_{\text{прк}} - F_{A(k)}^{\text{вн}}}{\left| \hat{F}_{A(k)}^s \right|} \cdot 1 \text{ Н} = \frac{F_{\text{прк}} - F_{A(k)}^{\text{вн}}}{\left| j_{k,4}^{\text{T}} \right|} \cdot 1 \text{ Н}. \quad (4.2)$$

В отличие от выражения (2.22), в формулу (4.2) входит не абсолютная величина силы на каретке, необходимой для восприятия внешней нагрузки, а ее значение с учетом знака. Это связано с тем, что в рамках проводимого эксперимента развиваемая сила на схвате вычисляется для известного направления движения кареток, а не для наихудшего случая, при котором внешняя нагрузка гарантированно снижает значение возможной силы на схвате.

Как известно [4], параметры μ_X и σ_X некоторой случайной величины X , подчиняющейся нормальному распределению, обладают следующими свойствами:

$$\mu_{aX+b} = a\mu_X + b, \quad \sigma_{aX+b} = a\sigma_X,$$

где a и b – некоторые константы.

Поскольку все выборки, полученные при измерении сил на каретках, имеют нормальное распределение, к ним могут быть применены указанные свойства. Тогда на основе формулы (4.2) можно получить выражения для определения значений математического ожидания и среднеквадратического отклонения максимальной силы на схвате, которая может быть обеспечена каждым приводом:

$$\mu_{F_{s,k}}^* = \frac{\mu_{F,k} - F_{A(k)}^{\text{вн}}}{\left| j_{k,4}^{\text{T}} \right|}, \quad \sigma_{F_{s,k}}^* = \frac{\sigma_{F,k}}{\left| j_{k,4}^{\text{T}} \right|}, \quad (4.3)$$

где звездочка показывает, что величины μ_{F_s} и σ_{F_s} рассчитаны из значений сил на каретках, а не измерены непосредственно на схвате.

Для соблюдения приемственности с принятыми во второй главе обозначениями, при подстановке в формулу (4.3) значения величин $\mu_{F,k}$ и $\sigma_{F,k}$ выбираются следующим образом (для $k = 1 \dots 4$): $\mu_{F,1} = \mu_{F11}$, $\mu_{F,2} = \mu_{F12}$, $\mu_{F,3} = \mu_{F21}$, $\mu_{F,4} = \mu_{F22}$, $\sigma_{F,1} = \sigma_{F11}$, $\sigma_{F,2} = \sigma_{F12}$, $\sigma_{F,3} = \sigma_{F21}$, $\sigma_{F,4} = \sigma_{F22}$.

Поскольку после касания насадки динамометра и упора относительное движение двух частей выходного звена мало, а импульсы продолжают передаваться на двигатели с постоянной частотой, можно считать, что внешняя нагрузка вдоль оси Ox отсутствует. Наличием моментной нагрузки, вызванной неравномерностью распределения массы вдоль выходного звена также можно пренебречь. Таким образом, внешняя нагрузка будет состоять только из действующей вертикально вниз силы $F_y = -m_{вз}g$, определяемой массой выходного звена $m_{вз}$ и ускорением свободного падения $g = 9,81 \text{ м/с}^2$. Учитывая, что масса выходного звена вместе с динамометром составляет 1,065 кг, а также пренебрегая весом промежуточных звеньев (0,050 кг каждое), при проведении расчетов будем считать, что $F_y = -10,45 \text{ Н}$. Тогда, используя выражение (2.19), можно вычислить значение $F_{A(k)}^{вн}$ для каждой каретки, а затем, подставив полученное значение в формулу (4.3), рассчитать максимальную силу на схвате, которую способен обеспечить каждый из приводов (Таблица 4.3).

Таблица 4.3. Результаты расчета значений силы сжатия по силам на каретках

Индекс каретки	Параметры выборки	Скорость движения кареток (v_A), мм/с				
		1	1,25	1,667	2,5	5
«11»	$\mu^*_{Fs,1}$, Н	53,704	53,784	53,555	52,233	46,246
	$\sigma^*_{Fs,1}$, Н	0,882	0,869	0,825	0,853	0,911
«12»	$\mu^*_{Fs,2}$, Н	60,401	59,606	58,892	56,559	52,245
	$\sigma^*_{Fs,2}$, Н	2,387	1,700	2,207	2,050	2,406
«21»	$\mu^*_{Fs,3}$, Н	46,236	44,546	43,720	41,612	35,505
	$\sigma^*_{Fs,3}$, Н	1,336	0,759	0,599	0,740	0,894
«22»	$\mu^*_{Fs,4}$, Н	69,470	68,947	67,851	65,488	59,495
	$\sigma^*_{Fs,4}$, Н	0,776	0,707	0,624	0,788	0,686

Можно видеть, что минимальные расчетные значения силы на схвате для всех скоростей наблюдаются для каретки с индексом «21». Данные результаты согласуются с наблюдениями, сделанными во время проведения первого этапа эксперимента, поскольку пропуск шагов визуально наблюдался именно на соответствующем двигателе. Таким образом, предложенный метод расчета дает

верную качественную оценку того, какой именно двигатель ограничивает максимальную величину силы на схвате. Для количественной оценки точности предложенной расчетной методики определим относительное отклонение расчетного и экспериментального значений силы на схвате по следующей зависимости:

$$\Delta_{F_S} = \frac{|\mu_{F_S} - \mu_{F_S,3}^*|}{\mu_{F_S}} \cdot 100\%.$$

Значение относительного отклонения составило 4,28 % для $v_A = 1$ мм/с, 5,58 % для $v_A = 1,25$ мм/с, 5,14 % для $v_A = 1,667$ мм/с, 7,25 % для $v_A = 2,5$ мм/с и 12,42 % для $v_A = 5$ мм/с.

Таким образом, экспериментальные исследования подтвердили принципиальную возможность использования предложенной расчетной методики, основанной на использовании матрицы Якоби механизма, для оценки величины максимальной силы на схвате механизма.

4.4. Результаты и выводы по главе

1. Для предложенных в работе плоского и поступательно-направляющего механизмов разработаны трехмерные модели и изготовлены физические прототипа, с помощью которых подтверждена работоспособность синтезированных структурных схем;
2. С использованием прототипа плоского механизма проведено экспериментальное исследование максимальной силы, развиваемой на схвате механизма при заданной внешней нагрузке и предельно допустимых усилиях на каретках, определяемых в свою очередь значениями моментов на шаговых двигателях. Результаты эксперимента показали хорошую сходимость измеренных значений силы на схвате с расчетными значениями, полученными по представленной в работе методике.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представленная работа посвящена разработке и исследованию кинематически избыточных трехподвижных механизмов параллельной структуры с интегрированным схватом, то есть таких механизмов, в которых захват объекта манипулирования осуществляется непосредственно выходным звеном без необходимости установки дополнительного оборудования. Это позволяет расширить функциональные возможности механизмов, сохраняя при этом расположение всех приводов на неподвижном основании, и тем самым не увеличивая массу подвижных частей. Ввиду того, что в научной литературе имеются сведения лишь о небольшом количестве параллельных механизмов, в которых кинематическая избыточность используется для реализации интегрированного схвата, тема работы представляется актуальной как с научной, так и с практической точки зрения.

В результате решения поставленных в работе задач получены следующие результаты:

1. Предложены структурные схемы новых плоского и поступательно-направляющего механизмов параллельной структуры с интегрированным схватом. Реализация функции захвата объекта манипулирования выходным звеном механизмов осуществляется за счет наличия кинематической избыточности. Выходное звено выполнено из двух частей, соединенных призматической кинематической парой, возможность изменения расстояния между которыми является дополнительной (избыточной) подвижностью. Для поступательно-направляющего механизма предложено два структурно различающихся возможных варианта исполнения.

2. Разработаны математические модели предложенных механизмов. На основе анализа геометрии механизмов получены уравнения связи, а также решены прямая и обратная задача о положениях. Решение данных задач позволило провести итерационный анализ рабочих зон механизмов с целью установления их

размеров и формы. Дифференцированием уравнений связи получен аналитический вид матрицы Якоби механизмов, с помощью которой проведен анализ кинематических и силовых характеристик механизмов.

3. Проведен анализ особых положений предложенных механизмов, включающий также оценку близости к ним с использованием условий максимизации приводных скоростей и усилий. При этом для одного из исполнений поступательно-направляющего механизма показана значительная зависимость размера объема рабочей зоны, свободного от особых положений, от расположения кинематических цепей относительно вертикальной плоскости, содержащей ось избыточной подвижности. Кроме того, предложена методика определения максимальной силы, развиваемой на схвате механизмов для заданной внешней нагрузки при известных предельно допустимых значениях усилий на приводах.

4. Разработана конструкция, проведено трехмерное моделирование, изготовление, сборка и отладка физических прототипов предложенных механизмов. С использованием САД-моделей и физических прототипов механизмов проведена проверка работоспособности предложенных структурных схем. Также на базе прототипа плоского механизма проведено экспериментальное исследование по проверке расчетной методики определения максимальной силы на схвате, подтвердившее ее применимость.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Антонов А.В., Чернов Р.А., Ульянов Е.Е., Иванов К.А. Использование метода хорд для анализа рабочих зон механизма параллельной структуры // XXXI Международная инновационная конференция молодых ученых и студентов по проблемам машиноведения. 2019. С. 437–440.
2. Глазунов В. А. Механизмы параллельной структуры и их применение: робототехнические, технологические, медицинские, обучающие системы // Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований. 2018. 1036 с.
3. Глазунов В.А., Нгуен Н.Х., Нгуен М.Т. К анализу особых положений механизмов параллельной структуры // Машиностроение и инженерное образование. 2009. С. 11–16.
4. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для вузов, 12-е изд. М.: Юрайт. 2025. 479 с.
5. Исполов Е. Решение обратной задачи о положениях механизма типа Delta с интегрированным схватом // Измерения, автоматизация и моделирование в промышленности и научных исследованиях (ИАМП-2025). Материалы XX юбилейной Всероссийской (с международным участием) научно-технической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых. 22–24 октября, Бийск. 2025. С. 217–219.
6. Исполов Е.М., Ларюшкин П.А. К расчету усилий, связанных с избыточной подвижностью в механизмах параллельной структуры // XXXVII Международная инновационная конференция молодых ученых по современным проблемам машиноведения. 9-11 декабря, Москва. 2025. С. 159-162.
7. Исполов Е.М., Ларюшкин П.А., Сеницына Ю.В. Скоростной и силовой анализ кинематически избыточного плоского механизма параллельной структуры с интегрированным схватом // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2025. №10 (787). С. 3–12.

8. Ларюшкин П. А. Оценка близости к особым положениям механизмов параллельной структуры путем дифференцирования уравнений связи // Вестник Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана. Серия: Машиностроение. 2019. № 1. С. 71–83.
9. Ларюшкин П.А., Исполов Е.М., Долгих А.И. Решение задачи о положениях и исследование рабочей зоны плоского кинематически избыточного механизма параллельной структуры // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2023. №11 (764). С. 20-28.
10. Ларюшкин П.А., Мукабенова Л.Г., Эрастова К.Г. и др. Выбор схемы и решение обратной задачи о положениях для системы позиционирования на базе плоского механизма параллельной структуры // Машиностроение и компьютерные технологии. 2017. № 7. С. 87–101.
11. Малышев А.П. Анализ и синтез механизмов с точки зрения их структуры // Известия Томского политехнического университета. Инжиниринг георесурсов. 1923. Т. 44. С. 29–76.
12. Решетов Л.Н. Конструирование рациональных механизмов. М.: Машиностроение. 1972. 256 с.
13. Тимофеев Г.А. Теория механизмов и машин: учебник и практикум для вузов // Г. А. Тимофеев. 4-е изд., перераб. и доп. Москва: Издательство Юрайт, 2025. 432 с.
14. Филиппов Г.С. Научное обоснование и разработка механизмов параллельно-последовательной структуры для многокоординатных манипуляционных систем: дис. ... докт. техн. наук. Москва. 2019. 324 с.
15. Хрестина А.А., Исполов Е.М., Ларюшкин П.А. Обобщенное решение обратной задачи о положениях параллельных механизмов n-PRR // Современное машиностроение. Наука и образование. 2025. № 14. С. 280-289.
16. Эрастова К.Г., Ларюшкин П.А. Рабочие зоны механизмов параллельной структуры и способы определения их формы и размеров // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2017. № 8 (689). С. 78–87.

17. Эрастова К.Г., Шиханова Н.В., Комаров Р.А. и др. Исследование конструктивной рабочей зоны плоского лямбдо-подобного механизма с учетом особых положений // Вестник машиностроения. 2021. № 3. С. 36–40.
18. Alba, O., Pamanes, J., Wenger, P. Trajectory planning of a redundant parallel manipulator changing working mode // 12th IFToMM World Congress, Besançon. 2007. Pp. 18–21.
19. Altuzarra, O., Tagliavini, L., Lei, Y., Petuya, V., Ruiz-Erezuma, J. On Constraints and Parasitic Motions of a Tripod Parallel Continuum Manipulator // Machines. 2023. Pp. 11–71.
20. Angel, L., Sebastian, J. M., Saltaren, R., Aracil, R. Robot Tennis System Part II: Dynamics and Control // Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference. 2005. Pp. 2030–2034.
21. Angeles J., Caro S., Khan W., Morozov A. Kinetostatic design of an innovative schonflies-motion generator // Journal of Mechanical Engineering Science. 2006. Pp. 935–943.
22. Arakelian V., Briot S., Glazunov V. Improvement of Functional Performance of Spatial Parallel Manipulators Using Mechanisms of Variable Structure // 12th IFToMM World Congress, Besançon, June. 2007. Pp. 1–6.
23. Arsenault, M., Boudreau, R. Synthesis of planar parallel mechanisms while considering workspace, dexterity, stiffness, and singularity avoidance // ASME Journal of Mechanical Design. 2006. Pp. 69–78.
24. Baigunchekov, Zh., Kassinov, A. Direct kinematics of a 3-PRPS type parallel manipulator // Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science. 2020. Pp. 38–46.
25. Briot S., Pashkevich A., Chablat D. Optimal technology-oriented design of parallel robots for high-speed machining applications // 2010 IEEE International Conference on Robotics and Automation. 2010. Pp. 1155–1161.
26. Cha, S.-H., Lasky, T.A., Velinsky, S.A. Kinematically-redundant variations of the 3-RRR mechanism and local optimization-based singularity avoidance // Mechanics Based Design of Structures and Machines. 2007. Pp. 15–38.

27. Chávez-Pichardo M., Martínez-Cruz M.A., Trejo-Martínez A., Martínez-Carbajal D., Arenas-Resendiz T. A complete review of the general quartic equation with real coefficients and multiple roots // *Mathematics*. 2022. № 10. Article 2377.
28. Cheng H., Yiu Y.-K., Li Z. Dynamics and control of redundantly actuated parallel manipulators // *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*. 2003. Pp 483–491.
29. Company, O., & Pierrot, F. Modeling and design issues of a 3-axis parallel machine tool // *Mechanism and Machine Theory*. 2002. Pp. 1325–1345.
30. Connolly, C. ABB High-Speed Picking Robots Establish Themselves in Food Packaging // *Industrial Robot: An International Journal*. 2007. Pp. 281-284.
31. Dasgupta B., Mruthyunjaya T.S. Force redundancy in parallel manipulators: theoretical and practical issues // *Mechanism and Machine Theory*. 1998. Pp. 727–742.
32. Degani, A., Wolf, A. Graphical singularity analysis of planar parallel manipulators // *Proceedings of 2006 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. 2006. Pp. 751–756.
33. Ebrahimi, I., Carretero, J.A., Boudreau, R. 3-PRRR redundant planar parallel manipulator: Inverse displacement, workspace and singularity analyses // *Mechanism and Machine Theory*. 2007. Pp. 1007–1016.
34. Elsamanty, M., Faidallah, E., Hossameldin, Y., Rabbo, S., Maged, S., Yang, H., Guo, K. Workspace Analysis and Path Planning of a Novel Robot Configuration with a 9-DOF Serial-Parallel Hybrid Manipulator (SPHM) // *Applied Sciences*. 2023. № 13. Article 2088.
35. Firmani F., Podhorodeski R.P. Force-unconstrained poses for a redundantly-actuated planar parallel manipulator // *Mechanism and Machine Theory*. 2004. Pp. 459–476.
36. Glisson T. H. *Introduction to Circuit Analysis and Design*. Dordrecht: Springer Netherlands, 2011. 768 p.
37. Glazunov V. A., Orlov A. V., Skvortsov P. A. Rational Design of a Micro-positioner with Elastic Hinges // *Proceedings of IFToMM Asian Mechanism and Machine Science*. 2022. Pp. 22–30.

38. Gogu G. Chebychev–Grübler–Kutzbach's criterion for mobility calculation of multi-loop mechanisms revisited via theory of linear transformations // *European Journal of Mechanics - A/Solids*. 2005. № 3 (24). Pp. 427-441.
39. Gosselin C., Angeles J. Singularity analysis of closed-loop kinematic chains // *IEEE Trans. Robot. Autom.* 1990. № 3 (6). Pp. 281–290.
40. Gosselin C., Laliberte T., Veillette A. Singularity-free kinematically redundant planar parallel mechanisms with un- limited rotational capability // *IEEE Transactions on Robotics*. 2015. Pp. 457–467.
41. Gosselin, C. M. Parallel computational algorithms for the kinematics and dynamics of planar and spatial parallel manipulators // *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*. 1996. Pp. 22–28.
42. Gosselin, C., Angeles, J. Singularity analysis of closed-loop kinematic chains // *IEEE Transactions on Robotics and Automation*. 1990. № 3 (6). Pp. 281–290.
43. Gosselin, C., Angeles, J. The optimum kinematic design of a planar three-degree-of-freedom parallel manipulator // *Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*. 1988. Pp. 35–41.
44. Gosselin, C., Schreiber, L.-T. Kinematically Redundant Spatial Parallel Mechanisms for Singularity Avoidance and Large Orientational Workspace // *IEEE Transactions on Robotics*. 2016. №2 (32). Pp. 286–300.
45. Gosselin, C., Schreiber, L.-T. Redundancy in Parallel Mechanisms: A Review // *Applied Mechanics Reviews*. 2018. №70. Article 010802.
46. Haouas W., Dahmouche R., Le Fort-Piat N., Laurent G. J. 4-DoF spherical parallel wrist with embedded grasping capability for minimally invasive surgery // 2016 *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*. 2016. Pp. 2363-2368.
47. Haouas W., Dahmouche R., Le Fort-Piat N., Laurent G. J. A new seven degrees-of-freedom parallel robot with a foldable platform // *Journal of Mechanisms and Robotics*. 2018. № 10 (4). Pp. 1-15.
48. Haouas W., Laurent G. J., Thibaud S., Dahmouche R. Kinematics, design and experimental validation of a novel parallel robot for two-fingered dexterous

manipulation // Proceedings of the IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS). 2019. Pp. 6763–6768.

49. Harada, T., Liu, P. Internal and External Forces Measurement of Planar 3-DOF Redundantly Actuated Parallel Mechanism by Axial Force Sensors // ISRN Robotics. 2013. Pp. 1–8.

50. Hasan, I., Adriyan, A. Mobility, Kinematic, Singularity, and Workspace Analysis of a Translational Parallel Manipulator with 2(RRPaRR)-PRRR Kinematic Chains // Jurnal Polimesin. 2023. Pp. 33–40.

51. Hoevenaars, A. G., Lambert, P., Herder, J. L. Kinematic design of two elementary 3-dof parallel manipulators with configurable platforms // Computational Kinematics. Springer. 2014. Pp. 315–322.

52. Houmaïri S., Bouaïcha M., Elkardaboussi Y., Zegrari M. Kinematic Modeling, Optimal Sizing, and Accuracy Analysis of a Compact Delta Robot // Smart Applications and Data Analysis. SADASC 2024. Communications in Computer and Information Science. 2024. № 2168. Pp. 248–263.

53. Husty, M. L., Pfurner, M., Schröcker, H.-P., Brunthaler, K. Algebraic methods in mechanism analysis and synthesis // Robotica. 2007. Pp. 661–675.

54. Iazard, J.-B., Gouttefarde, M., Michelin, M., Tempier, O., Baradat, C. A reconfigurable robot for cable-driven parallel robotic and industrial scenario proofing. // Cable-Driven Parallel Robots. 2013. Pp. 135–138.

55. Khrestina A., Ispolov E., Medovshchikov A., Laryushkin P. General Solution for the Inverse Kinematics of Parallel Robots with PRR Kinematic Chains // Advances in Mechanical Engineering. MMESE 2025. Lecture Notes in Mechanical Engineering. 2026. Pp. 85-93.

56. Kim S.H., Jeon D., Shin H.P., In W., Kim J. Design and analysis of decoupled parallel mechanism with redundant actuator // International Journal of Precision Engineering and Manufacturing. 2009. Pp. 93–99.

57. Kim, S. M., Kim, W., Yi, B.-J. Kinematic analysis and optimal design of a 3T1R type parallel mechanism // IEEE International Conference on Robotics and Automation. 2009. Pp. 2199–2204.

58. Krut, S., Nabat, V., Company, O., Pierrot, F. A high-speed parallel robot for SCARA motions // IEEE International Conference on Robotics and Automation. 2004. Pp. 4109–4115.
59. Kurtz, R., Hayward, V. Multiple-goal kinematic optimization of a parallel spherical mechanism with actuator redundancy // IEEE Transactions on Robotics and Automation. 1992. Pp. 644–651.
60. Lahouar, S., Ottaviano, E., Zeghoul, S., Romdhane, L., Ceccarelli, M. Collision free path-planning for cable-driven parallel robots // Robotics and Autonomous Systems. 2009. Pp. 1083–1093.
61. Laliberte, T., Gosselin, C. M., Jean, M. Static balancing of 3-DOF planar parallel mechanisms // IEEE/ASME Transactions on Mechatronics. 1999. Pp. 363–377.
62. Lambert P., Herder J. A novel parallel haptic device with 7 degrees of freedom // Proceedings of the IEEE World Haptics Conference (WHC). 2015. Pp. 183–188.
63. Laryushkin P., Antonov A., Ispolov E., Goncharova M., Aydil A.C. Novel Kinematically Redundant (3+1)-DOF Delta-type Parallel Mechanisms // Robotics. 2025. № 11(14). Article 170.
64. Laryushkin P., Fomin A., Antonov A. Kinematic and Singularity Analysis of a 4-DOF Delta-type Parallel Robot // Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering. 2023. № 4 (45). Article 218.
65. Lecours, A., Gosselin, C. Determination of the workspace of a 3-PRPR parallel mechanism for human-robot collaboration. // Transactions of The Canadian Society for Mechanical Engineering. 2009. Pp. 609–618.
66. Leveziel M., Laurent G. J., Haouas W., Gauthier M., Dahmouche R. A 4-DoF Parallel Robot with a built-in gripper for waste sorting // IEEE Robotics and Automation Letters. 2022. Pp. 9834-9841.
67. Li, Y., Ma, Y., Liu, S., Luo, Z., Mei, J., Huang, T., Chetwynd, D. Integrated design of a 4-dof high-speed pick-and-place parallel robot // CIRP Annals - Manufacturing Technology. 2014. Pp. 185–188.

68. Liu G., Lou Y., Li Z. Singularities of parallel manipulators: a geometric treatment // *IEEE Trans. Robot. Autom.* 2003. № 4 (19). Pp. 579–594.
69. Liu, G. F., Wu, Y. L., Li, Z. X. Analysis and control of redundant parallel manipulators // *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation.* 2001. Pp. 3748–3754.
70. Luces, M., Mills, J. K., Benhabib, B. A review of redundant parallel kinematic mechanisms // *Journal of Intelligent & Robotic Systems.* 2017. Pp. 175–198.
71. Majou, F., Wenger, P., Chablat, D. The design of parallel kinematic machine tools using kinetostatic performance criteria. 2007. Pp 1–8.
72. Merlet J.-P. *Parallel robots.* Springer, 2006. 402 p.
73. Merlet, J.-P. Direct kinematics of planar parallel manipulators // *Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation.* 1996. Pp 3744–3749.
74. Merlet J.-P., Gosselin C. *Parallel Mechanisms and Robots* // *Springer Handbook of Robotics.* 2008. Pp. 269-281.
75. Mohamed, M. G., Gosselin, C. M. Design and analysis of kinematically redundant parallel manipulators with configurable platforms // *IEEE Transactions on Robotics.* 2005. Pp. 277–287.
76. Mohammadi Daniali, H. R., Zsombor-Murray, P. J., Angeles, J. Singularity analysis of planar parallel manipulators // *Mechanism and Machine Theory.* 1995. Pp. 665–678.
77. Mostashiri N., Dhupia J., Xu W. Redundancy in parallel robots: a case study of kinematics of a redundantly actuated parallel chewing robot // *RITA 2018.* 2019. Pp. 65–78.
78. Mueller, A. Redundant actuation of parallel manipulators // *Parallel Manipulators, Towards New Applications.* 2008. 506 p.
79. Murray, A., Hanchak, M. Kinematic synthesis of planar platforms with RPR, PRR, and RRR chains // *Advances in Robot Kinematics.* Dordrecht: Springer. 2000. Pp. 119-127.

80. Nabat V., De la O Rodriguez M., Company O., Krut S., Pierrot F. Par4: very high speed parallel robot for pick-and- place // Proceedings of the IEEE/RSJ International conference on intelligent robots and systems (IROS). 2005. Pp. 553– 558.
81. Nguyen, T.-S., Harton, D., Campeau-Lecours, A., Gosselin, C. Motion control algorithms based on the dynamic modelling of kinematically redundant hybrid parallel robots // Mechatronics. 2021. № 76(5). Article 102555.
82. Nokleby, S.B., Firmani, F., Zibil, A., Podhorodeski, R.P. An analysis of the force-moment capabilities of branch-redundant planar parallel manipulators // Proceedings of the ASME International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference. 2007. Pp. 1013-1020.
83. Notash, L., Huang, L. On the design of fault-tolerant parallel manipulators // Mechanism and Machine Theory. 2003. Pp. 85–101.
84. Oh S. R., Agrawal S. K. A Reference Governor Based Controller for a Cable Robot under Input Constraints // IEEE Transactions on Control Systems Technology. 2005. Pp. 639–645.
85. Ozgur, E., Dahmouche, R., Andreff, N., Martinet, P. High speed parallel kinematic manipulator state estimation from legs observation // Intelligent Robots and Systems (IROS), 2013 IEEE/RSJ International Conference on. 2013. Pp. 424–429.
86. Patel, Y. D., George, P. M. Parallel manipulators applications: A survey // Modern Mechanical Engineering. 2012. Pp. 57–64.
87. Pierrot, F., Marquet, F., Company, O., Gil, T. H4 parallel robot: modeling, design and preliminary experiments // Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA). 2001. Pp. 3256–3261.
88. Pierrot, F., Nabat, V., Company, O., Krut, S., Poignet, P. Optimal design of a 4-dof parallel manipulator: From academia to industry // IEEE Transactions on Robotics. 2009. Pp. 213–224.
89. Pierrot, F., Reynaud, C., Fournier, A. Delta: a simple and efficient parallel robot // Robotica. 1990. Pp. 105–109.
90. Pritschow G. Parallel kinematic machines (PKM) - limitations and new solutions // CIRP Annals. 2000. Pp. 275–280.

91. Rossi P., Simoni R., Carboni A.P. Analysis of a 4-DOF 3T1R parallel robot for machining applications: a stiffness study // *Advances in industrial machines and mechanisms*. 2021. Pp. 161–171.
92. Rosyid A., Stefanini C., El-Khasawneh B. A reconfigurable parallel robot for on-structure machining of large structures // *Robotics*. 2022. № 11 (5). Article 110.
93. Saied H., Chemori A., Michelin M. et al. A redundant parallel robotic machining tool: design, control and real-time experiments // *New developments and advances in robot control*. 2019. Pp. 39–79.
94. Shi, H., Su, H.-J. An analytical model for calculating the workspace of a flexure hexapod nanopositioner // *Journal of Mechanisms and Robotics*. 2013. № 4(5). Article 041009.
95. Slavutin M., Shai O., Sheffer A. et al. A novel criterion for singularity analysis of parallel mechanisms // *Mech. Mach. Theory*. 2019. Pp. 459–475.
96. Varalakshmi, K., Kurmala, S., Srinivas, J. Optimum design of kinematically redundant planar parallel manipulator following a trajectory // *International Journal of Materials, Mechanics and Manufacturing*. 2015. Pp. 74–79.
97. Wen K., Harton D., Laliberté T., Gosselin C. Kinematically redundant (6+3)-dof hybrid parallel robot with large orientational workspace and remotely operated gripper // *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*. 2019. Pp. 1672–1678.
98. Wen, K., Nguyen, T. S., Harton, D., Laliberté, T., Gosselin, C. A backdrivable kinematically redundant (6+3)-degree-of-freedom hybrid parallel robot for intuitive sensorless physical human–robot interaction // *IEEE Transactions on Robotics*. 2021. Pp. 1222–1238.
99. Williams R. L., Snyder B., Albus J. S., Bostelman R. V. Seven DOF Cable Suspended Robot with Independent Metrology // *Proceedings of DETC'04, ASME Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*. 2004. Pp. 317–325.

100. Williams R. L., Joshi, A. R. Planar parallel 3-RPR manipulator // Proceedings of the sixth conference on applied mechanisms and robotics. Cincinnati, OH. 1999. Pp. 1-7.
101. Wu G., Bai S., Hjørnet P. Architecture optimization of a parallel schonflies-motion robot for pick-and-place applications in a predefined workspace // Mechanism and Machine Theory. 2016. Pp. 148–165.
102. Xie, F., Liu, X.-J. Design and development of a high-speed and high-rotation robot with four identical arms and a single platform // Journal of Mechanisms and Robotics. 2015. Article 041015.
103. Yao, Q., Dong, J., Ferreira, P. M. A novel parallel-kinematics mechanism for integrated, multi-axis nanopositioning: Part 1. Kinematics and design for fabrication // Precision Engineering. 2008. Pp. 7–19.
104. Yi, B.-J., Na, H. Y., Lee, J. H., Hong, Y.-S., Oh, S.-R., Suh, I. H., Kim, W. K. Design of a parallel-type gripper mechanism // The International Journal of Robotics Research. 2002. Pp. 661–676.
105. Zeng Q., Ehmann K., Cao J. Tri-pyramid Robot: Design and kinematic analysis of a 3-DOF translational parallel manipulator // Robotics and Computer-Integrated Manufacturing. 2014. №6 (30). Pp. 648–657.
106. Zlatanov D., Bonev I., Gosselin C. Constraint Singularities of Parallel Mechanisms // Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation. 2002. Pp. 496–502.

УТВЕРЖДАЮ:

проректор по учебной работе

МГТУ им. Н. Э. Баумана

к.т.н., доцент Альков С. В.



«24» ноября 2025 г.

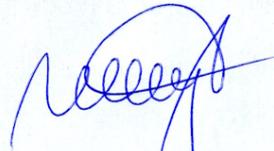
АКТ

об использовании результатов диссертационной работы Исполова Егора Михайловича «Разработка и исследование трехподвижных механизмов параллельной структуры с интегрированным схватом»

Настоящий акт подтверждает, что результаты, полученные в диссертации Исполова Е. М., используются в Московском государственном техническом университете им. Н. Э. Баумана на кафедре основ конструирования машин при подготовке магистров по направлению подготовки 15.04.01 «Машиностроение». Предложенная автором расчетная методика определения усилия на интегрированном схвате механизма параллельной структуры, а также разработанный автором стенд, позволяющий измерять данное усилие, используются в рамках научно-исследовательской работы и преддипломной практики студентов, темой исследований которых являются механизмы параллельной структуры.

Руководитель НУК РК

к.т.н.



Г. В. Шашурин

Заведующий кафедрой основ

конструирования машин,

д.т.н., профессор



М. Н. Захаров