

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки  
«Институт машиноведения им. А. А. Благонравова Российской академии наук»

На правах рукописи



Хрестина Арина Артуровна

**СИНТЕЗ И АНАЛИЗ СФЕРИЧЕСКИХ МЕХАНИЗМОВ ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ  
СТРУКТУРЫ С ЛИНЕЙНЫМИ ПРИВОДАМИ**

Специальность 2.5.2. Машиноведение

диссертация на соискание ученой степени

кандидата технических наук

Научный руководитель:  
доктор технических наук, доцент  
Ларюшкин Павел Андреевич

Москва 2026

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>Введение.....</b>	<b>3</b>
<b>Глава 1. Обзор роботизированных систем ориентации .....</b>	<b>10</b>
1.1. Общие сведения о роботах последовательной и параллельной структуры .	10
1.2. Применение параллельных механизмов в системах ориентации .....	15
1.3. Результаты и выводы по главе.....	28
<b>Глава 2. Синтез сферических механизмов с линейными приводами .....</b>	<b>29</b>
2.1. Определение возможных вариантов структуры кинематической цепи .....	29
2.2. Определение силовых винтов цепи с плоской диадой PRR или RPR .....	39
2.3. Анализ геометрических условий попадания в особые положения.....	45
2.4. Выбор структуры кинематической цепи для сферического механизма.....	53
2.5. Результаты и выводы по главе.....	55
<b>Глава 3. Анализ механизма 3-(RPR)R'R' .....</b>	<b>56</b>
3.1. Геометрия механизма и вывод уравнений связи .....	56
3.2. Решение задачи о положениях и моделирование рабочей зоны.....	64
3.3. Анализ скоростей, силовой анализ и анализ особых положений .....	73
3.4. Результаты и выводы по главе.....	82
<b>Глава 4. Прототипирование механизма 3-(RPR)R'R' .....</b>	<b>84</b>
4.1. Конструирование и сборка прототипа механизма.....	84
4.2. Экспериментальное исследование кинематики механизма .....	100
4.3. Результаты и выводы по главе.....	106
<b>Заключение .....</b>	<b>107</b>
<b>Список литературы .....</b>	<b>109</b>
<b>Приложение А. Акты внедрения научных результатов .....</b>	<b>121</b>

## ВВЕДЕНИЕ

### Актуальность темы диссертации

С конца второй половины XX века наблюдается рост научных исследований и практических применений механизмов параллельной структуры, то есть механизмов, с несколькими кинематическими цепями, соединяющими неподвижное основание и выходное звено. Такие механизмы обладают определенными преимуществами над традиционными роботами последовательной структуры, а именно: меньшей массой подвижных частей и, как следствие, лучшими показателями инерции и большими допустимыми скоростями работы; более высокой жесткостью за счет структуры пространственной фермы, позволяющей распределять нагрузки между цепями; более высокой грузоподъемностью относительно собственной массы манипулятора. Указанные преимущества обусловили широкое распространение механизмов параллельной структуры в различных отраслях производства. Так, широко известны такие представители данного класса механизмов, как платформа Гофа-Стюарта, применяющаяся в авиатренажерах, платформах стабилизации, медицинских устройствах и т.д., а также механизм Delta, используемый в высокосортных линиях по сортировке и упаковке, 3D-принтерах, прототипах станков и тактильных устройствах.

Существенный вклад в развитие теории механизмов параллельной структуры и их практическое применение внесли такие зарубежные ученые, как Д. Стюарт, Э. Гоф, К. Хант, К. Сугимото, Ю. Такеда, С. Кун, К. Госслен, Х. Анджелес, Ж.-П. Мерле, Ж. Эрве, Г. Гогу, В. Аракелян, Р. Клавель, М. Карригато, М. Чеккарелли, Д. Карбоне, И. Бонев, Д. Златанов, Ф. Венгер, Л. Цай, Ц. Дай, Дж. Дуффи, а также российские исследователи: Ф.М. Диментберг, А.Ф. Крайнев, В.А. Глазунов, А.Ш. Колискор, Г.В. Ращоян, Г.С. Филиппов, А.К. Алешин, А.С. Фомин, А.В. Антонов, П.А. Ларюшкин, К.А. Шалюхин, С.В. Хейло, К.Г. Эрастова, Л.А. Рыбак, В.Н. Пащенко, И.А. Несмиянов, П.Г. Мудров.

Приведенные выше примеры, безусловно, не отражают весь спектр практических применений механизмов параллельной структуры. Различные механизмы данного типа также применяются в оптических устройствах, системах ориентации и стабилизации телескопов, в том числе, используемых в оборудовании, работающем в космическом пространстве. Для подобных задач зачастую требуется обеспечение возможности изменения ориентации выходного звена при сохранении его положения в пространстве. Механизмы, реализующие такой тип движения, называют сферическими.

Как правило, в кинематических цепях сферических механизмов используется вращательный тип привода, а, соответственно, применение линейного привода является скорее исключением (например, механизм OmniWrist). В то же время, использование линейного привода в механизмах параллельной структуры имеет свои преимущества. Так, например, винтовые передачи, часто используемые в линейных приводах, позволяют добиться большого передаточного отношения при отсутствии люфтов, что особенно важно в тех случаях, когда механизм предполагается эксплуатировать в широком диапазоне температур. Также данный тип привода наиболее удобен для реализации точных перемещений (в том числе микроперемещений). Кроме того, использование линейной направляющей во многих случаях позволяет уменьшить длину входного звена механизма и, как следствие, уменьшить массу подвижных элементов, закрепленных консольно. Несмотря на указанные потенциальные преимущества, количество исследований, посвященных синтезу и анализу сферических механизмов параллельной структуры с линейными приводами относительно невелико. Данный факт может быть отчасти объяснен тем, что для механизмов подобного типа использование вращательного привода кажется наиболее естественным и позволяет минимизировать количество кинематических пар в цепи (достаточно трех цепей с тремя вращательными парами в каждой).

Таким образом, настоящая работа, посвященная вопросам синтеза и анализа сферических механизмов параллельной структуры с линейными приводами, является актуальной.

### **Область исследования**

Область исследования диссертации соответствует следующим пунктам паспорта научной специальности 2.5.2. Машиноведение:

Пункт 1. Синтез структурных и кинематических схем механизмов и обобщенных структурных схем машин, оптимизация параметров;

Пункт 2. Теория и методы проектирования машин и механизмов, систем приводов, узлов и деталей машин;

Пункт 3. Методы кинематического и динамического анализа, в том числе математического моделирования, анимационного и экспериментального исследования механизмов.

**Цель работы** – разработка новых сферических механизмов параллельной структуры с линейными приводами и исследование их функциональных характеристик.

Для достижения поставленной цели в диссертации решаются следующие **задачи**:

1. Структурный синтез возможных вариантов кинематических цепей с последовательно расположенными одноподвижными кинематическими парами, позволяющих реализовывать сферическое движение выходного звена механизма за счет приведения в движение активной призматической пары цепи;

2. Выбор наиболее подходящих для дальнейших теоретических исследований и потенциальных практических применений вариантов структуры кинематических цепей механизма из условия минимизации возможности его попадания в особые положения разных типов;

3. Вывод уравнений связи, аналитическое решение обратной задачи о положениях, задачи о скоростях, а также итерационное исследование формы и размеров рабочей зоны выбранного механизма, включая анализ особых положений и близости к ним;

4. Разработка конструкции, трехмерное моделирование, изготовление, сборка и отладка физического прототипа механизма, а также экспериментальная проверка его работоспособности.

### **Научная новизна:**

1. Разработан оригинальный метод структурного синтеза, основанный на анализе винтовых уравнений скоростей, позволивший определить все возможные варианты кинематических цепей сферических механизмов параллельной структуры с линейными приводами;
2. С применением винтового исчисления впервые в общем виде решена задача определения геометрических условий попадания в особые положения сферических механизмов параллельной структуры с линейными приводами;
3. Разработана математическая модель механизма  $3-(R\underline{P}R)R'R'$ , основанная на аналитическом решении обратной задачи о положениях и задачи о скоростях, позволяющая проводить анализ кинематики механизма, а также исследовать его рабочую зону и особые положения.

### **Практическая значимость:**

1. Определены схемы сферических механизмов параллельной структуры с линейными приводами, наиболее подходящие для практической реализации ввиду минимизации возможности попадания в особые положения различных типов;
2. Разработаны прикладные программы, реализующие аналитические алгоритмы расчета кинематики и итерационные алгоритмы анализа и визуализации рабочей зоны и особых положений механизма  $3-(R\underline{P}R)R'R'$ , в том числе с учетом конструктивных ограничений;
3. Создан физический прототип механизма  $3-(R\underline{P}R)R'R'$ , который может служить модельным объектом для различных экспериментальных исследований и отработки алгоритмов управления сферическими механизмами параллельной структуры с линейными приводами.

### **Реализация результатов работы**

Полученные результаты приняты к использованию в АО «Концерн «Моринсис-Агат» при проведении проектных и проверочных расчетов приспособлений для испытаний коммутаторов приемных антенн, а также в учебном процессе МГТУ им. Н. Э. Баумана при подготовке студентов в

магистратуре по направлению 15.04.01 «Машиностроение», что подтверждено соответствующими актами (Приложение А).

### **Методы исследования**

В работе использованы методы теоретической механики, теории механизмов и машин, линейной алгебры и математического анализа, численные методы, математическое и компьютерное моделирование. Основные теоретические результаты получены с применением винтового исчисления.

### **Основные положения, выносимы на защиту**

1. Метод структурного синтеза кинематических цепей, основанный на анализе винтовых уравнений скоростей, и новые структурные схемы сферических механизмов параллельной структуры с линейными приводами, полученные с использованием данного метода;
2. Результаты анализа по определению в общем виде геометрических условий попадания сферических механизмов параллельной структуры с линейными приводами в особые положения различных типов;
3. Математическая модель и результаты анализа кинематики, рабочей зоны и особых положений механизма  $3-(RPR)R'R'$ , а также результаты натурального эксперимента по проверке работоспособности указанного механизма.

### **Достоверность полученных результатов**

Достоверность результатов подтверждается использованием общепринятых расчетных методик и допущений, характерных для работ в области теоретической механики и теории механизмов и машин, применением современного программного обеспечения, а также проверкой теоретических результатов компьютерным моделированием и натурным экспериментом.

### **Апробация работы**

Основные результаты, изложенные в диссертации, были представлены на следующих конференциях:

- 14-я Международная научно-практическая конференция «Современное машиностроение: Наука и образование MMESE-2025», Санкт-Петербург, 2025;

- 20-я Всероссийская научно-техническая конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Измерения, автоматизация и моделирование в промышленности и научных исследованиях» (ИАМП-2025), Бийск, 2025;
- 37-я Международная инновационная конференция молодых учёных и студентов по современным проблемам машиноведения (МИКМУС-2025), Москва, 2025.

### **Личный вклад**

В работе лично автором разработан метод синтеза структурных схем кинематических цепей, позволяющих реализовать сферическое движение выходного звена за счет использования линейного привода, проведен в общем виде анализ геометрических условий попадания в особые положения, разработана математическая модель, алгоритмы и прикладные программы анализа кинематики, рабочей зоны и особых положений механизма 3-(RPR)R'R'. Также лично автором разработана конструкция прототипа указанного механизма, осуществлена его сборка и проведен натурный эксперимент.

### **Публикации**

По теме проведенных исследований опубликовано 8 работ: 3 статьи в периодических изданиях, включенных в Перечень ВАК РФ, 2 статьи в изданиях, индексируемых в международных библиографических базах Web of Science и Scopus, 3 работы, индексируемых в РИНЦ.

### **Объем и структура диссертации**

Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения, списка литературы из 112 наименований и приложения. Объем диссертации составляет 122 страницы, включая 63 рисунка.

В первой главе представлен обзор робототехнических систем различного назначения, а также научных исследований в данной области. При этом особое внимание уделяется сферическим механизмам параллельной структуры и их практическим применениям: в медицинском оборудовании, в качестве отдельных механизмов экзоскелетов и антропоморфных роботов, в оптических устройствах и механизмах ориентации антенн телескопов, устройства для микроперемещений.

Во второй главе рассмотрен структурный синтез кинематических цепей, обеспечивающих сферическое движение выходного звена за счет приведения в движение активной (приводной) призматической пары цепи. Предложен метод синтеза указанных цепей, основанный на анализе винтового уравнения скоростей. Для синтезированных вариантов кинематических цепей, а также механизмов, включающих данные цепи, с применением винтового исчисления проведен анализ условий попадания в особые положения различных типов. Полученные в общем виде условия использованы для определения вариантов структуры механизма, обеспечивающих минимально возможный шанс попадания в особые положения. Из указанных вариантов выбран наиболее подходящий для дальнейших исследований механизм. Результаты, полученные в данной главе, отражены в работах [12, 81].

В третьей главе проведен анализ выбранного сферического механизма со структурой  $3-(RPR)R'R'$ . Представлен вывод уравнений связи и аналитическое решение обратной задачи о положениях. Также с применением винтового исчисления аналитически решена задача о скоростях. Полученная математическая модели кинематики механизма использована для итерационного анализа рабочей зоны механизма (в том числе с учетом конструктивных ограничений), а также итерационного анализа особых положений и близости к ним с использованием скоростных и силовых критериев. Разработанные алгоритмы анализа реализованы в виде прикладных программ в системе компьютерной алгебры MATLAB. Результаты, полученные в данной главе, отражены в работах [6, 19, 21, 71].

В четвертой главе представлен процесс трехмерного моделирования и разработки конструкции физического прототипа механизма. Проведен анализ оптимальной длины второго промежуточного звена из условия обеспечения максимального размера рабочей зоны. На основе созданной трехмерной модели осуществлена сборка и отладка физического прототипа исследуемого механизма. Проведен эксперимент, подтвердивший работоспособность предложенной структурной схемы. Результаты, полученные в данной главе, отражены в работах [18, 20].

# ГЛАВА 1. ОБЗОР РОБОТИЗИРОВАННЫХ СИСТЕМ ОРИЕНТАЦИИ

## 1.1. Общие сведения о роботах последовательной и параллельной структуры

В современном постиндустриальном обществе, где широко распространено высокотехнологичное производство, развитие теории роботов-манипуляторов и их внедрение в различные отрасли науки и промышленности осуществляются высокими темпами. Применение роботизированных механизмов в различных сферах деятельности происходит повсеместно, что открывает новые производственные и технологические возможности [16]. Современные способы изготовления и обработки деталей для различных отраслей промышленности, включая авиационную, медицинскую и другие, ставят перед конструкторами и технологами сложные задачи, которые, могут быть решены за счет применения различных робототехнических комплексов [3, 17]. Одновременно, за счет внедрения таких новых технологий как, например, 3D-печать с использованием пластиков, полимеров и металлов [39, 52, 54, 70, 107, 2], время на разработку и изготовление роботизированных устройств уменьшается, и при этом растет разнообразие структур и компоновок механизмов. В то же время требования, позволяющие обеспечивать различные заданные характеристики устройств, такие как точность позиционирования, грузоподъемность и скорость манипулирования, могут противоречить друг другу, что усложняет процесс разработки механизмов роботов и приводит к необходимости проведения более сложного анализа на этапе проектирования [5].

Механизмы роботов-манипуляторов по типу кинематической структуры можно разделить на параллельные и последовательные. Большинство классических манипуляторов имеют антропоморфную последовательную структуру, напоминающую человеческую руку (Рисунок 1.1). По сути, механизмы

с последовательной структурой состоят из последовательного набора твердых тел (промежуточных звеньев), каждое из которых соединено с соседними звеньями шарниром с одной степенью свободы, обеспечивающим вращение вокруг некоторой оси или поступательное движение. Цепь заканчивается рабочим органом, выполняющим основную задачу механизма. При этом все шарниры, как правило, всегда снабжены приводом.



Рисунок 1.1. Пример классической компоновки робота последовательной структуры

Роботы последовательной структуры обладают рядом преимуществ, среди которых отработанность схем сборки и алгоритмов управления, широкая область применения, высокая изученность недостатков и способов их нивелирования.

Среди минусов можно отметить следующие:

- сложность в изготовлении устройств, обладающих одновременно и большой грузоподъемностью и высокой точностью позиционирования;
- накопление погрешности позиционирования в шарнирах, что приводит к увеличению погрешности положения исполнительного (выходного) звена;
- расположение приводов в шарнирах, соединяющих промежуточные звенья, существенно увеличивает массу подвижных частей механизма, что, в свою очередь, требует увеличения мощности указанных приводов и жесткости звеньев, а также отрицательно сказывается на инерционных характеристиках.

Другим классом механизмов роботов являются пространственные механизмы параллельной структуры (или просто параллельные механизмы), то есть механизмы, состоящие из нескольких, часто однотипных, кинематических цепей, замкнутых на общее неподвижное основание с одной стороны и на подвижную платформу с другой. Главное отличие механизмов параллельной структуры состоит в том, что выходное звено (рабочий орган) соединено с основанием несколькими кинематическими цепями, а не одной. Среди преимуществ данных механизмов можно отметить следующие:

- относительная простота изготовления, так как все кинематические цепи, как правило, имеют идентичную архитектуру и включают простые конструктивные элементы и шарниры;
- замкнутые кинематические цепи, работающие по принципу пространственных ферм, позволяют одновременно повысить и точность позиционирования, и жесткость устройства;
- возможность установки двигателей на основании или максимально близко к нему позволяет существенно уменьшить массу подвижных частей робота, что снижает динамические нагрузки и повышает скорость движения.

Основными недостатками механизмов параллельной структуры являются ограниченные размеры рабочей зоны и наличие так называемых «особых положений» (сингулярностей). Тем не менее, преимущества параллельной структуры над последовательной для решения определенного класса технологических и производственных задач очевидны. Так, например, в статье [84] показано, что для робота параллельной структуры с тремя степенями свободы среднее потребление энергии составляет 26% от энергии, потребляемой аналогичным манипулятором последовательной структуры.

Пространственные механизмы параллельной структуры могут иметь как шесть степеней свободы, так и меньшее их количество. Например, в сварочном оборудовании и медицинских устройствах распространены трехподвижные механизмы [4, 9, 88]. Благодаря перечисленным выше достоинствам механизмы параллельной структуры находят широкое применение в качестве тренажеров,

технологических и медицинских роботов, измерительных и испытательных устройств, промышленных манипуляторов. Также механизмы данного класса используются в различных системах ориентации, где важно иметь возможность вращения выходного звена вокруг неподвижной точки.

Ряд проблем, возникающих при использовании механизмов последовательной структуры, может быть решен путем распределения нагрузки по кинематическим цепям, то есть за счет перехода к параллельной структуре. Данная идея прослеживается еще в трудах французских ученых, таких как О. Л. Коши [41], А. Лебег [82], Р. Брикар [37], Э. Борель [35]. Также в 1928 году Д. Гвиннетт подал патент на конструкцию, похожую на сферический механизм [65].

Первая практическая разработка механизма параллельной структуры – труд Э. Гофа, где он описывает основные принципы конструкции с замкнутой кинематической структурой – машины для тестирования покрышек, построенной им в 1955 году [61]. Как упоминается в работе [32], несмотря на то, что Э. Гоф был первым, кто разработал функциональный прототип робота параллельной структуры, гексаподы были известны задолго до этого. Независимо от Э. Гофа в 1965 году Д. Стюарт описал конструкцию, включающую подвижную треугольную платформу, все вершины которой соединены сферическим шарниром с нижней частью механизма [103]. При этом в настоящее время под термином «платформа Стюарта» часто подразумевается механизм, разработанный Э. Гофом. Устройства подобного типа также часто называют «Multi-Simulation Table» [1, 56, 69, 72, 73]. Более широкое использование параллельных механизмов-гексаподов началось после создания первых тренажеров для пилотов в 1956 году (Рисунок 1.2.а). Ретроспектива использования авиатренажеров в отечественной авиации представлена в статьях [7, 14]. В качестве примера современных тренажеров-симуляторов полёта в России можно привести роботов, производимых ЦНТУ «Динамика». Стоит отметить, что до Э. Гофа параллельный механизм с другой структурой предлагалось использовать для автоматического распыления краски при производстве кузовов автомобилей [93], однако запатентованная конструкция так и не была реализована на практике.

В середине прошлого века были разработаны прототипы современных параллельных шарнирно-рычажных механизмов, которые могли воспроизводить поступательные движения твердых тел [1]. Одно из первых исследований в области синтеза поступательных механизмов представлено в статье [15], где описываются связи, налагаемые на движение выходного звена. Синтез механизмов с использованием винтового исчисления рассматривается в работах [76, 77].

В 80-х годах XX века был разработан робот Дельта – один из самых распространённых поступательно-направляющих механизмов параллельной структуры (Рисунок 1.2.б). Оригинальная конструкция представлена Р. Клавелем более 30 лет назад, однако находит широкое применение и сегодня [46, 47, 85, 89]. Классическая конструкция дельта-робота включает три кинематические цепи с вращательными приводами и звеньями с параллелограммами. Для обеспечения ещё одной степени свободы выходного звена устанавливают дополнительный привод с телескопической штангой. Конструкция дельта-робота со входными поступательными парами часто используется в 3D-принтерах [22]. Среди сфер применения дельта-роботов: сортировка, загрузка, выгрузка и упаковка с высокой скоростью изделий в медицинской, пищевой и электронной отраслях промышленности.



а.



б.

Рисунок 1.2. Примеры устройств на базе платформы Гофа-Стюарта (а) и Дельта-робота (б)

## 1.2. Применение параллельных механизмов в системах ориентации

Роботизированные механизмы часто используются в различных системах ориентации, для точного позиционирования ориентируемых объектов относительно окружающих предметов [24]. Такие механизмы могут использоваться в составе систем обнаружения [29], навигации [90], а также систем относительного манипулирования [104, 110]. Далее рассмотрим примеры использования параллельных механизмов в устройствах указанного типа.

Среди механизмов с двумя вращательными степенями свободы особого внимания заслуживает «Omni-Wrist» (Рисунок 1.3) – механизм ориентации, обеспечивающий наклон выходного звена в пределах  $\pm 90^\circ$  без возникновения особых положений. В статье [96] описана одна из модификаций, используемая для ориентирования зеркал, датчиков и прочих устройств и обладающая относительно небольшой погрешностью 3,6' при максимальной грузоподъемности 2 кг.



Рисунок 1.3. Механизм «Omni-Wrist»

Среди механизмов, обладающих тремя степенями свободы, выделяют три основных группы, которые соответствуют определенным сочетаниям степеней свободы выходного звена: плоские, поступательно-направляющие и сферические. Сферическим называется пространственный механизм, выходное звено которого

вращается вокруг некоторой неподвижной точки, называемой центром вращения. Это означает, что расстояние от выходного звена до этой точки не изменяется, а изменяется только ориентация выходного звена в пространстве. Среди сфер применения, помимо систем ориентации, отмечаются шарниры экзоскелетов и медицинское оборудование, используемое для реабилитации пациентов с различными повреждениями корпуса, верхних и нижних конечностей [42, 76, 88]. Помимо реабилитации, параллельные механизмы используются также при хирургических операциях, особенно при малоинвазивной хирургии. Лапароскопический инструмент может перемещаться относительно выходного звена и имеет неподвижный центр вращения. Существуют также механизмы, используемые в коленном суставе для обеспечения смещения бедренной кости относительно большеберцовой [91]. В исследовании [83] был представлен механизм с шестью степенями свободы для обследования артерий. Механизм включает в себя две цепи с плоскими соединениями из пяти стержней и имеет удлиненное рабочее пространство в горизонтальном направлении; конструкция механизма позволяет сканировать все артерии человека. Конструкции механизмов и принципы их работы подробно представлены в опубликованных ранее исследованиях [23, 30, 44, 92, 95, 98, 105].

В качестве конкретного примера медицинского приложения сферических механизмов параллельной структуры рассмотрим устройство, предложенное в работе [97]. В дистанционных приложениях, особенно в хирургии, тактильные устройства должны обладать высокой жесткостью и точностью. В упомянутой статье рассматривается разработка сферического параллельного манипулятора, который позволяет удовлетворить эти требования. (Рисунок 1.4). Параллельная конструкция позволяет использовать робота такого типа в качестве ведущего в системе дистанционных операций. Кроме того, данный механизм имеет удаленный центр вращения, что делает его более приспособленным для применения в малоинвазивной хирургии. В статье решается проблема избегания особых положений, и предлагается использование дополнительного датчика,

позволяющего исключить попадание в них без необходимости внесения изменений в конструкцию.



Рисунок 1.4. Тактильное устройство для проведения дистанционных операций

Еще одно применение параллельных механизмов, как было отмечено ранее, – экзоскелеты, в частности плечевые суставы, подробный обзор частей которых рассмотрен в работе [26]. Среди них сустав, разработанный с использованием механизма с двойным параллелограммом и предназначенный для реализации вращательного движения человеческого запястья с тремя вращательными степенями свободы [45, 86]. Использование двойных параллелограммов в механизме позволяет обеспечить необходимую жесткость конструкции для передачи крутящего момента и усилия, сохраняя при этом компактность и легкость.

Более подробно остановимся на сферическом ножничном механизме, представленном в работе [40]. Данный механизм плечевого сустава был разработан путем расширения плоского ножничного механизма до сферического механизма, что позволило получить компактное решение, сравнимое по диапазону движений с последовательным сферическим механизмом (Рисунок 1.5). Данный механизм имеет небольшие габариты, но при этом способен обеспечить практически полный диапазон движений руки человека без каких-либо сложностей.

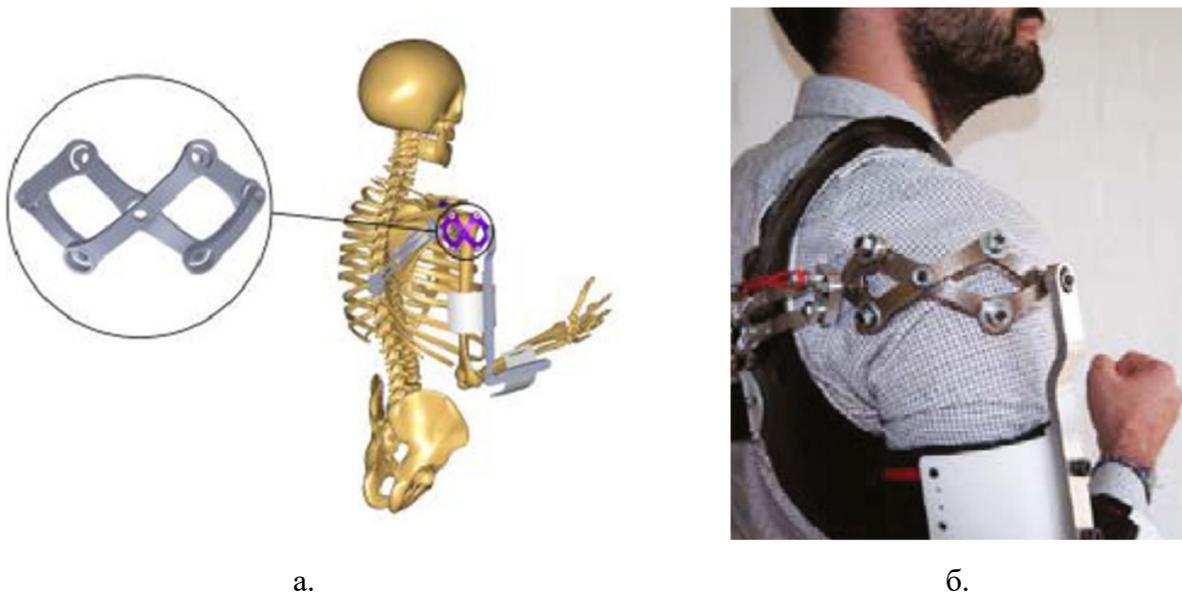


Рисунок 1.5. Сферический ножничный механизм: модель (а), прототип (б)

Для реализации вращательного движения с двумя степенями свободы в параллельном механизме часто используется пассивный универсальный шарнир, расположенный в центре вращения. Подобное решение применено, например, в запястье робота NASA Robonaut 2 (Рисунок 1.6), выполненном в виде параллельного механизма со структурой 2-PS-U. Центральный универсальный шарнир соединяет кисть с предплечьем, в то время как две цепи, состоящие из призматического и сферического шарниров, приводятся в движение, что обеспечивает возможность разгибания/сгибания и отклонения в сторону [38].

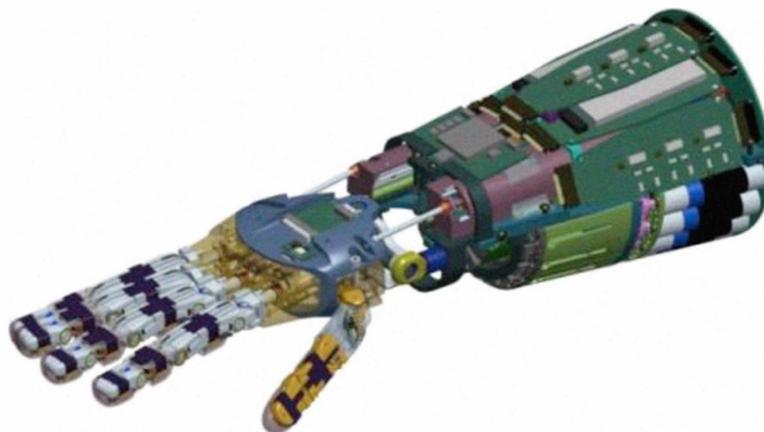


Рисунок 1.6. 3D модель запястья робота NASA Robonaut 2

Для запястья руки RoboRay, реализованного на базе механизма 2-PUR-U, специально разработан механизм разъединения сухожилий на основе специальных

блоков с двумя степенями свободы для эффективной передачи нагрузки на запястье, что позволяет свести к минимуму трение и сохранить форму, подобную человеческой [75].

Аналогичным образом, чтобы минимизировать взаимную зависимость движений пальца и запястья, в устройстве DLR Hand-Arm (Рисунок 1.7) используется сферический «антипараллелограммный» механизм в конфигурации 2-RRRR-RRS, механизма, который обеспечивает разгибание/сгибание в диапазоне до  $\pm 90^\circ$ , а также отведение запястья в сторону на  $\pm 30^\circ$  [62]. Кроме того, указанная роботизированная система имеет размеры, аналогичные человеческим, и в основном предназначена для выполнения гибких манипуляций с избеганием нежелательных столкновений. Обе степени свободы обеспечиваются приводами с настраиваемой переменной жесткостью, в которых два двигателя регулируют жесткость отдельно для каждого положения. Максимальный момент, развиваемый при сгибании данного механизма, составляет 8 Н·м, что практически соответствует моменту сгибания человеческого запястья. При этом, однако, скорость сгибания достигает 560 °/сек, что почти вдвое меньше, чем у человеческого запястья. Система DLR Hand-Arm предназначена для имитации как кинематических, так и силовых свойств человеческой руки [63, 64].

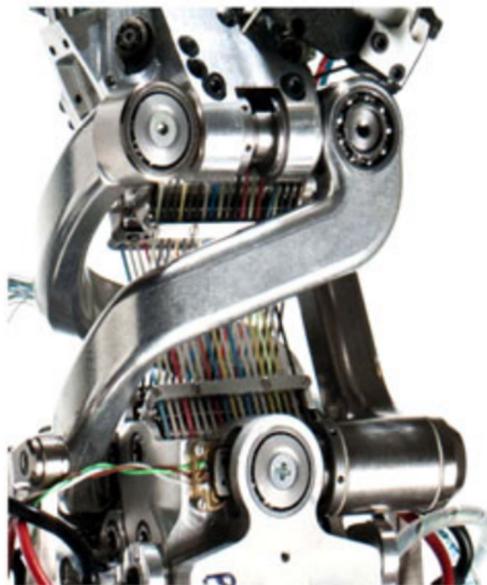


Рисунок 1.7. Механизм DLR Hand-Arm

Универсальный держатель хирургического инструмента, изобретенный Д. Санчесом, использует конфигурацию 3-PS-S [99]. Центральное звено включает в себя сферический шарнир, который прикреплен неподвижной оси, в то время как три другие цепи, включающие призматический и сферический шарниры, сжимаются и вытягиваются для приведения в движение выходного звена.

В шарнире постоянной угловой скорости, разработанном компанией NTN, используется механизм 3-RRRR с двумя вращательными шарнирами на основании. Механизм обеспечивает угол поворота  $360^\circ$  при наклоне до  $\pm 180^\circ$ . Все три кинематические цепи перемещаются по сферической поверхности, у которой «выходная» и «входная» стороны симметричны относительно разделяющей их пополам плоскости. Авторам предполагается, что получаемый в результате эффект в виде постоянства угловой скорости вращения выходного звена может быть полезен в оптических устройствах [101].

Механизм роботизированного хирургического инструмента для малоинвазивной хирургии, предложенный М. Хуном и соавторами, выполнен с использованием параллельной структуры 3-PSR-RUUP. В отличие от чисто вращательных механизмов, в то время как механизм 3-PSR обеспечивает сферическое движение, центральная цепь RUUR обеспечивает осевое перемещение хирургического инструмента [68].

В отличие от роботов, использующих исключительно параллельный механизм с тремя степенями свободы, блок малоинерционного манипулятора LIMS2-AMBIDEX (Рисунок 1.8), описанный в работе [74], использует гибридную структуру с параллельным механизмом 3-UU с тремя степенями свободы и активным поворотным шарниром с одной степенью свободы. Стоит отметить, что механизмы, использующие кинематическую развязку совместно с гибридной структурой, как правило, позволяют обеспечить полный оборот при вращении выходного вокруг одной из осей. Для данного движения и используется независимый (развязанный) привод. Также было показано, что некоторые подобные механизмы способны обеспечивать момент при сгибе порядка 35 Н·м при скорости более 1000 %/сек [28, 55, 78].

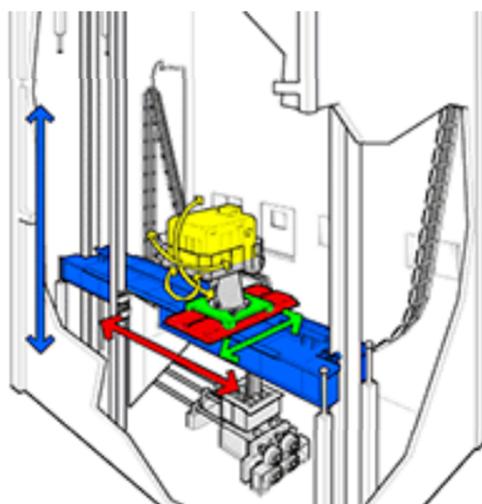


Рисунок 1.8. Манипулятор LIMS2-AMBIDEX

Среди прочих областей применения сферических механизмов стоит особенно выделить их использование в системах и устройствах ориентации, которые представлены во многих публикациях [33, 43, 53, 102]. Например, в работе [25] рассматривается сферический механизм параллельной структуры, задействованный в системе ориентирования, и определяются оптимальные конструктивные параметры (размеры звеньев, углы и т.п.), обеспечивающие максимальный размер рабочей области.

Нельзя не отметить один из самых популярных примеров практического использования данных механизмов – VMS-систему (англ. *vertical motion simulator*), разработанную NASA для моделирования реальных условий полета при обучении пилотов и астронавтов [88] (Рисунок 1.9). Тренажёр размещён в отдельно стоящем сооружении и включает платформу с рельсовыми направляющими, на которой установлена кабина. Платформа способна перемещаться вертикально по направляющим, тогда как сама кабина движется горизонтально относительно платформы. Кабина и основание связаны тремя кинематическими цепями RRPS («трипод») и центральной штангой, жёстко закреплённой внизу основания и подвижно связанной с кабиной с помощью сферического шарнира. По сведениям NASA, этот тренажёр использовался для тренировки астронавтов перед отправкой

на орбитальных шаттлах серии Space Shuttle, а также применялся для подготовки пилотов вертолёта Chinook CH47D и самолётов-конвертопланов.



а.



б.

Рисунок 1.9. Система VMS: схема тренажера (а), кабина тренажера (б)

В качестве важного частного случая следует упомянуть механизмы с круговой направляющей. В качестве примера приведем статью [34], где благодаря круговой направляющей под выходным звеном освободилось пространство, а, следовательно, появилась возможность установки дополнительного оборудования. Один из таких механизмов рассматривается в работе [8], где с помощью круговой направляющей решается проблема синтеза и анализа механизмов параллельной структуры, обеспечивающих увеличенный (в том числе неограниченный) угол поворота выходного звена и увеличенные габариты рабочей зоны, а также способность трансформироваться в компактную двумерную конструкцию. Реализацию концепции использования круговой направляющей совместно с центральной штангой можно наблюдать в работе [79]. Авторами разработан реконфигурируемый механизм параллельной структуры, который позволяет смещать центр сферического движения, за счет использования центральной дополнительной цепи, кинематически развязанной с другими цепями. Данный механизм может быть использован в реабилитации после, например, тяжелых течений COVID-19. В качестве альтернативы использованию центральной штанги может быть применена приводная избыточность, как, например, предложено в

работе [36]. В рассмотренном механизме с круговой направляющей в каждой цепи используется по два привода. При этом выходное звено имеет четыре степени свободы, то есть два привода являются избыточными. Такое решение требует более тщательного контроля над приводами для избегания циркуляции мощности, однако позволяет реализовать возможность складывания механизма в плоскую конфигурацию, что невозможно при использовании центральной штанги. Кроме того, отсутствие указанной штанги позволяет использовать «внутреннее» пространство механизма для размещения какого-либо оборудования.

Заслуживает внимания также семейство 3-UPU и 2-UPU механизмов, представленных в работе [108], которые нашли применение, в том числе, в механической обработке [109] (Рисунок 1.10).



Рисунок 1.10. 3-UPU механизм

В работе были предложены несколько видов манипуляторов, способные обеспечить неограниченное вращение рабочего органа (Рисунок 1.11). Эти устройства имеют асимметричную конструкцию и частичную развязку. Их подвижная платформа оснащена универсальным шарниром, который передает вращательное движение центрального вала и обеспечивает таким образом непрерывное вращение внутренней части кольца.

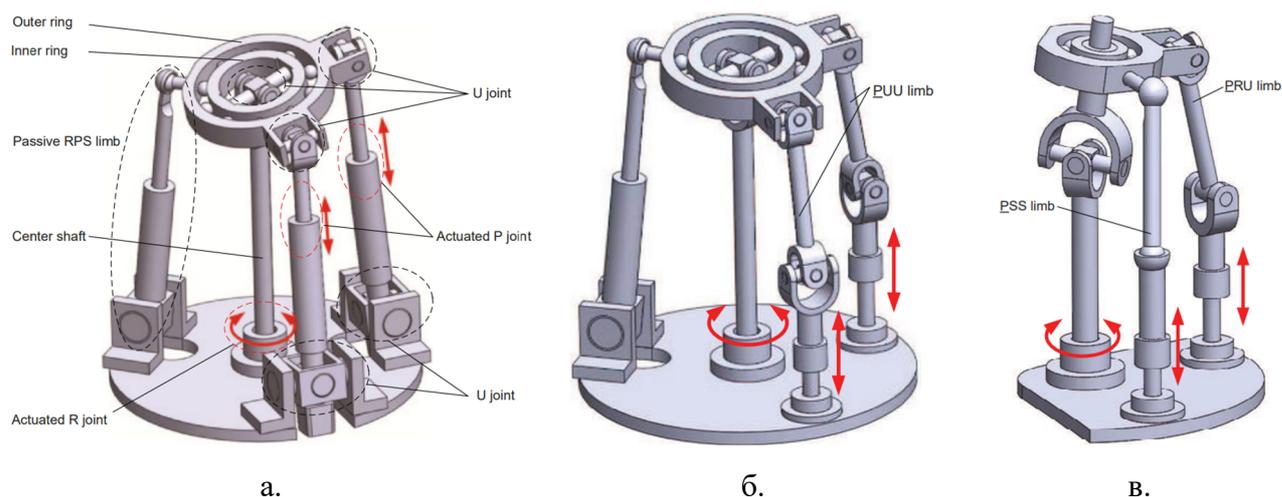


Рисунок 1.11. 3D модели сферических параллельных механизмов с тремя степенями свободы: 2-UPU-RPU (а), 2-PUU-RPU (б), PSS-PUU-RUR (в)

Благодаря своей уникальной структуре такие асимметричные манипуляторы обладают преимуществами по сравнению с классическими решениями: большими углами поворота выходного звена и повышенной точностью позиционирования. Однако наличие универсальных шарниров вызывает проблемы, связанные с динамической устойчивостью, поскольку создается нелинейная связь между входной и выходной скоростями [87, 94, 106, 27].

Еще один пример механизма, связанного с системами ориентации, – механизм спутникового слежения (Рисунок 1.12), который был разработан в Кентерберийском университете [49]. Механизм может быть собран в исполнении с двумя или тремя степенями свободы в зависимости от наличия центральной штанги. Кинематика данного механизма также описана в работах [50, 51].

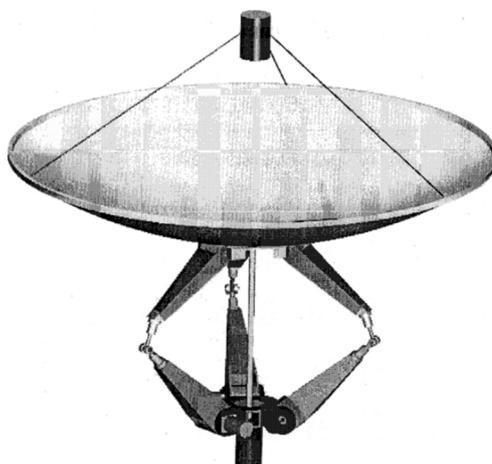


Рисунок 1.12. 3D модель механизма слежения с двумя степенями свободы

Одним из самых известных сферических механизмов, который невозможно не упомянуть, является Agile Eye (Рисунок 1.13), предназначенный для использования в устройствах для ориентации камер (или иных оптических устройствах). Данный механизм имеет рабочую зону, большую, чем у человеческого глаза. Устройства, основанные на описанном механизме, применяются в авиационной отрасли для высокоточного захвата и сопровождения движущихся объектов, таких как самолеты, ракеты или наземные цели в условиях сложной окружающей обстановки и на высокой скорости перемещения. Данный механизм был спроектирован группой ученых из Университета Лавалья [57, 58, 59] и имеет структуру 3-RRR. Важным условием является пересечение осей всех вращательных кинематических пар в точке, относительно которой и вращается рабочий орган.

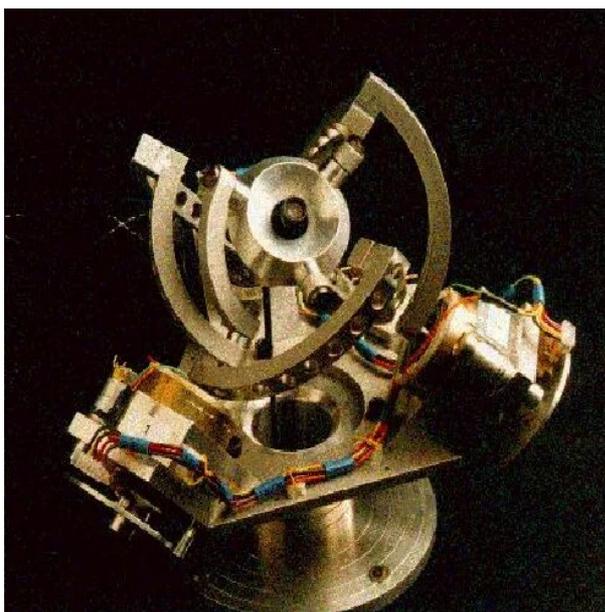


Рисунок 1.13. Механизм Agile Eye

Также стоит упомянуть модификацию механизма Agile Eye, а именно сферический тактильный прибор SHaDe с тремя степенями свободы, выполненный в виде структуры 2-RRR-RRRR, которая обеспечивает чистое вращение вокруг фиксированной центральной точки, расположенной внутри руки оператора. Механизм предназначен для использования в точном дистанционном управлении [31]. Также был предложен параллельный механизм 3-RRR-RUR, который включает в себя механизм 3-RRR, как в Agile Eye, и дополнительную

расположенную в центре кинематическую цепь RUR. Дополнительная цепь увеличивает диапазон поворота до  $180^\circ$  за счет использования привода, причем показана возможность увеличения данного диапазона до  $360^\circ$  за счет использования других типов приводов. При определенной точности изготовления этот механизм может быть использован в качестве эндоскопического хирургического инструмента для малоинвазивных операций [67].

В качестве последнего примера рассмотрим механизм параллельной структуры 2-PRRU-RUUR (Рисунок 1.14), позволяющий обеспечить точное антропоморфное движение как для дистанционно управляемых, так и для автоматизированных роботизированных микроманипуляций. Цепь RUUR обеспечивает неограниченное вращательное движение выходного звена вокруг одной оси, в то время как структура 2-PRRU приводит в действие дополнительную «ближнюю» платформу, соединенную с «дальней» платформой парой зубчатых колес качения, что позволяет дальней платформе иметь вдвое больший угол наклона, нежели ближняя платформа [66].

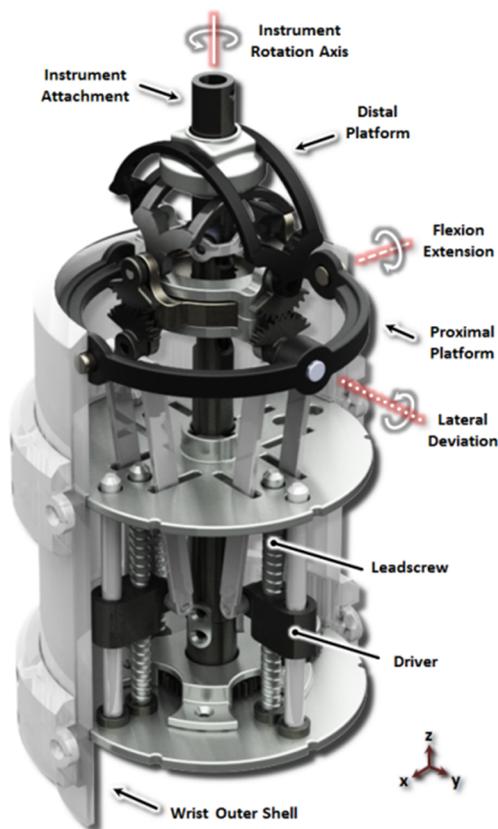


Рисунок 1.14. Механизм со структурой 2PRRU-RUUR

Как можно видеть, механизмы параллельной структуры, обеспечивающие сферическое движение выходного звена, находят довольно широкое применение. Представленные примеры демонстрируют использование данного типа механизмов в оптической технике, экзоскелетах и элементах гуманоидной робототехники, медицинских роботах, устройствах для микроперемещений, системах ориентации тарелок телескопов, авиатренажерах. При этом в большинстве сферических механизмов используется вращательный тип привода. Использование вращательных кинематических пар в качестве приводных в подобных механизмах представляется наиболее естественным решением, а также позволяет минимизировать количество шарниров в кинематических цепях, что, безусловно, имеет свои преимущества. Так, меньшее количество шарниров позволяет уменьшить накопление погрешности при передаче движения на выходное звено. Однако в то же время при использовании трех вращательных пар в каждой кинематической цепи (минимальное количество пар для трехподвижного механизма) все их оси должны пересекаться в одной точке, что приводит к необходимости повышения требований по точности изготовления шарниров и промежуточных звеньев.

Использование линейных приводов в механизмах параллельной структуры имеет определенные преимущества. Так, например, линейный привод является наиболее удобным при необходимости реализации точных перемещений (в том числе микроперемещений) за счет возможности получения большого передаточного отношения. Как следствие, данный тип привода также позволяет получить значительный выигрыш в силе. Еще одним преимуществом линейного привода является относительная простота обеспечения отсутствия люфтов в передаче в том числе при эксплуатации в широком диапазоне температур, чего крайне сложно добиться при использовании вращательного привода с редуктором.

Несмотря на наличие перечисленных потенциальных преимуществ линейного привода над вращательным, в сферических механизмах параллельной структуры, как уже было отмечено, линейный привод не нашел широкого распространения. Наиболее известным механизмом с данным типом привода,

реально применяемым на практике, является OmniWrist. Однако стоит отметить, что кинематически основная часть структуры данного механизма включает только вращательные пары, а линейные приводы расположены в отдельных рычагах, «качающих» входное звено относительно первого вращательного шарнира цепи, закрепленного на основании.

Таким образом, задача синтеза механизмов параллельной структуры с линейными приводами и анализа их функциональных характеристик, решению которой посвящена данная работа, представляется актуальной, как с научной, так и практической точки зрения.

### **1.3. Результаты и выводы по главе**

1. Проведен обзор научных исследований и практических применений механизмов параллельной структуры. При этом основное внимание уделено механизмам, реализующим сферический тип движения выходного звена;

2. Сферические механизмы параллельной структуры имеют широкое практическое применение и используются, в частности, в оптической технике, экзоскелетах и элементах гуманоидной робототехники, медицинских роботах, устройствах для микроперемещений, системах ориентации тарелок телескопов, авиатренажерах;

3. Несмотря на потенциальные преимущества использования линейного привода, в сферических механизмах параллельной структуры преобладает вращательный привод;

4. Комплексное решение задачи синтеза и анализа сферических механизмов параллельной структуры с линейными приводами должно позволить расширить научные представления о возможных структурных схемах механизмов данного типа, а также их функциональных возможностях и потенциальных применениях.

## ГЛАВА 2. СИНТЕЗ СФЕРИЧЕСКИХ МЕХАНИЗМОВ С ЛИНЕЙНЫМИ ПРИВОДАМИ

### 2.1. Определение возможных вариантов структуры кинематической цепи

Чтобы решить поставленную задачу по синтезу сферического механизма параллельной структуры с тремя степенями подвижности и линейными приводами, необходимо начать с синтеза одной кинематической цепи. Поскольку любую кинематическую пару, подвижность которой больше, либо равна двум, можно теоретически рассматривать как комбинацию одноподвижных кинематических пар, при синтезе кинематической цепи будем использовать только одноподвижные пары. Также будем считать, что все кинематические пары между основанием и выходным звеном расположены последовательно. Так, в теории, любой механизм, включающий только вращательные кинематические пары, может иметь линейные приводы, обеспечивающие относительное перемещение звеньев механизма, подобно тому, как это реализовано, например, в механизме OmniWrist [100]. Подобные варианты структуры кинематических цепей в данной работе рассматриваться не будут.

Поскольку по условиям поставленной задачи требуется наличие линейного привода, синтезируемая кинематическая цепь должна включать как минимум одну призматическую кинематическую пару. Помимо этого, для обеспечения непосредственно сферического движения выходного звена данная цепь должна включать как минимум три вращательные кинематические пары. При этом обязательным условием будет являться то, что для любого положения выходного звена должно быть невозможным за счет параллельного переноса совместить любые две оси или разместить все три оси в одной плоскости. В противном случае выходное звено механизма будет иметь меньше трех вращательных степеней

свободы. Таким образом, минимально возможное количество одноподвижных кинематических пар в цепи равно четырем.

Существует четыре варианта структуры кинематической цепи с тремя вращательными и одной призматической парами:  $\underline{P}RRR$ ,  $R\underline{P}RR$ ,  $RR\underline{P}R$  и  $RRR\underline{P}$ , где «R» обозначает вращательную пару, «P» – призматическую, а подчеркивание указывает на то, что пара является приводной. Здесь и далее порядок пар – от основания к выходному звену (Рисунок 2.1).

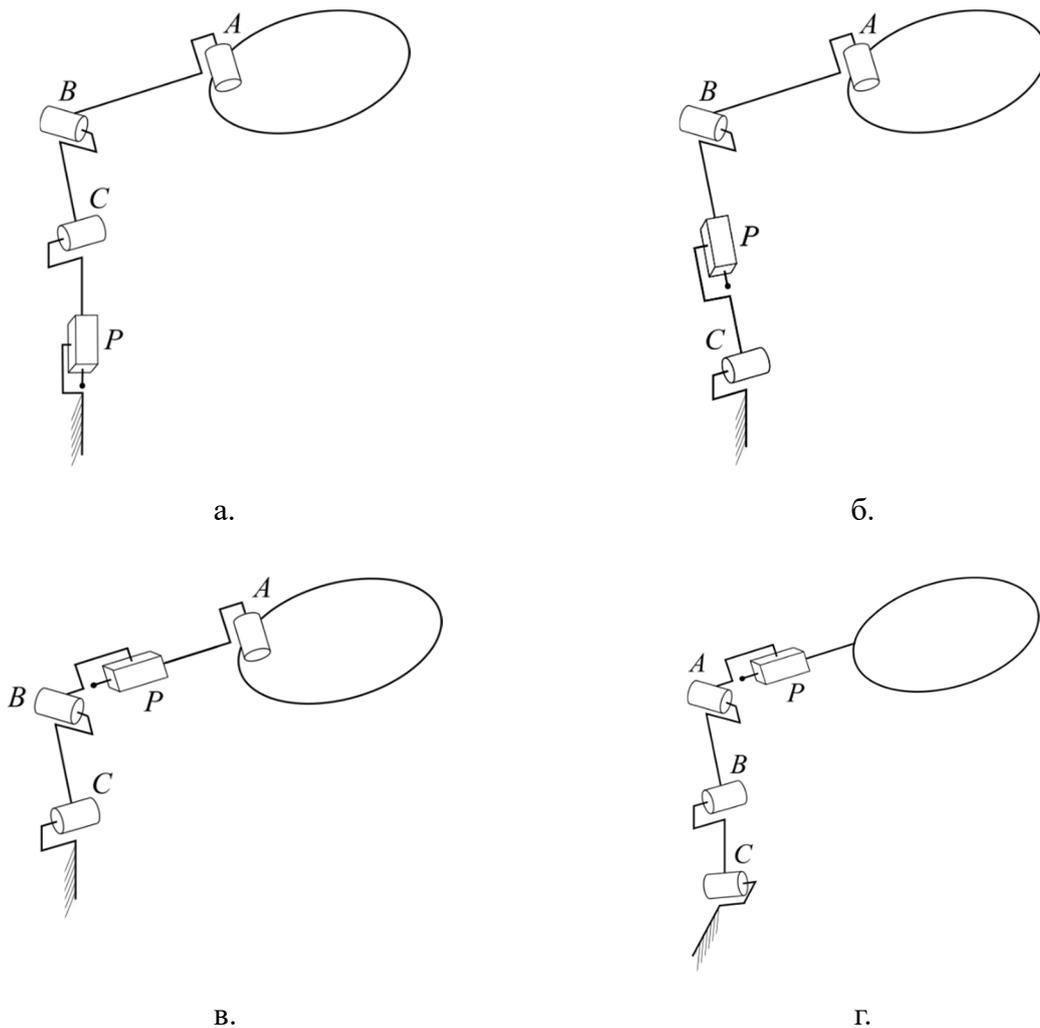


Рисунок 2.1. Варианты кинематических цепей с тремя вращательными и одной призматической парами:  $\underline{P}RRR$  (а),  $R\underline{P}RR$  (б),  $RR\underline{P}R$  (в),  $RRR\underline{P}$  (г)

Сопоставим кинематическим парам единичные кинематические винты: вращательным парам  $A$ ,  $B$  и  $C$  – винты нулевого параметра  $t_A$ ,  $t_B$ ,  $t_C$ , а призматической паре  $P$  – винт бесконечного параметра  $t_P$ . При этом в качестве примера рассмотрим цепь  $\underline{P}RRR$  (Рисунок 2.2).

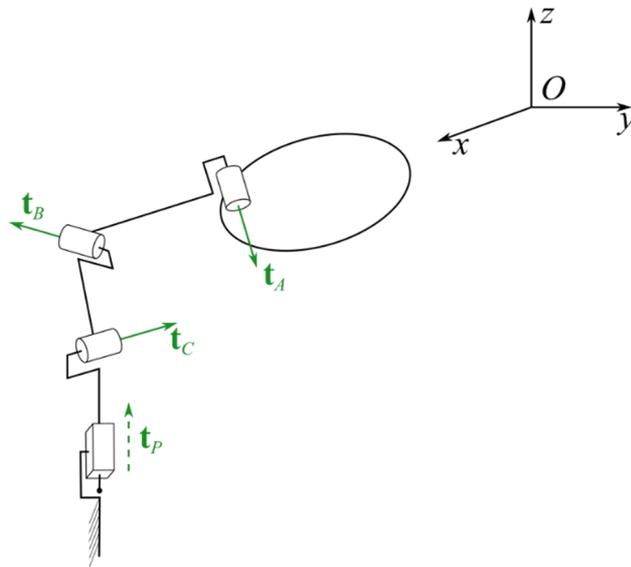


Рисунок 2.2. Кинематические винты цепи с тремя вращательными и одной призматической парами на примере цепи  $\underline{P}RRR$

Важно заметить, что кинематические винты показаны только для цепи  $\underline{P}RRR$  в целях упрощения изложения, поскольку для всех других вариантов указанные винты будут такими же. Соответственно, все последующие рассуждения справедливы для всех четырех возможных вариантов кинематической цепи с тремя вращательными и одной призматической парами.

При приведении винтов в центр вращения, являющийся одновременно началом неподвижной системы координат  $Oxuz$ , их координаты в общем случае будут записываться следующим образом:

$$\mathbf{t}_A = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{s}}_A \\ \boldsymbol{\rho}_A \times \hat{\mathbf{s}}_A \end{bmatrix}, \mathbf{t}_B = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{s}}_B \\ \boldsymbol{\rho}_B \times \hat{\mathbf{s}}_B \end{bmatrix}, \mathbf{t}_C = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{s}}_C \\ \boldsymbol{\rho}_C \times \hat{\mathbf{s}}_C \end{bmatrix}, \mathbf{t}_P = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3 \\ \hat{\mathbf{s}}_P \end{bmatrix}, \quad (2.1)$$

где  $\mathbf{0}_3 = [0 \ 0 \ 0]^T$  – вектор-столбец с тремя нулевыми элементами,  $\hat{\mathbf{s}}$  – единичный вектор, задающий направление оси кинематической пары,  $\boldsymbol{\rho}$  – вектор из точки  $O$  до любой точки на оси кинематической пары, а индексы показывают, к какой именно кинематической паре относится соответствующий вектор или винт. Здесь и далее все векторы и винты по умолчанию записываются в виде столбцов.

Если механизм является работоспособным, то некоторый произвольный (в рамках имеющихся у механизма степеней свободы) кинематический винт  $\boldsymbol{\Omega}$

выходного звена может быть получен линейной комбинацией кинематических винтов цепи, то есть

$$\dot{q}_A \mathbf{t}_A + \dot{q}_B \mathbf{t}_B + \dot{q}_C \mathbf{t}_C + \dot{q}_P \mathbf{t}_P = \mathbf{\Omega}, \quad (2.2)$$

где  $\dot{q}$  – скорость в соответствующей (согласно индексу) кинематической паре. При этом данное утверждение должно быть справедливо для всех кинематических цепей.

Поскольку в рассматриваемом случае механизм должен иметь только вращательные степени свободы, моментная часть (последние три координаты) винта  $\mathbf{\Omega}$  всегда будет нулевой. Тогда, с учетом того, что векторная часть (первые три координаты) винта  $\mathbf{t}_P$  является нулевой, выражение (2.2) можно переписать следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{q}_A \hat{\mathbf{s}}_A + \dot{q}_B \hat{\mathbf{s}}_B + \dot{q}_C \hat{\mathbf{s}}_C = \boldsymbol{\omega}, \\ \dot{q}_A \boldsymbol{\rho}_A \times \hat{\mathbf{s}}_A + \dot{q}_B \boldsymbol{\rho}_B \times \hat{\mathbf{s}}_B + \dot{q}_C \boldsymbol{\rho}_C \times \hat{\mathbf{s}}_C + \dot{q}_P \hat{\mathbf{s}}_P = \mathbf{0}_3, \end{cases} \quad (2.3)$$

где  $\boldsymbol{\omega}$  – векторная часть винта  $\mathbf{\Omega}$ , представляющая собой угловую скорость выходного звена.

Верхняя строка выражения (2.3) представляет собой систему из трех линейных уравнений с тремя неизвестными:  $\dot{q}_A$ ,  $\dot{q}_B$ ,  $\dot{q}_C$ . Таким образом, значения скоростей во вращательных парах рассматриваемой кинематической цепи зависят только от вектора угловой скорости выходного звена  $\boldsymbol{\omega}$  и однозначно определяются им. В то же время нижняя строка выражения (2.3) может быть переписана следующим образом:

$$\dot{q}_A \boldsymbol{\rho}_A \times \hat{\mathbf{s}}_A + \dot{q}_B \boldsymbol{\rho}_B \times \hat{\mathbf{s}}_B + \dot{q}_C \boldsymbol{\rho}_C \times \hat{\mathbf{s}}_C = -\dot{q}_P \hat{\mathbf{s}}_P. \quad (2.4)$$

Согласно (2.1), если в общем случае оси вращательных кинематических пар не проходят через центр вращения, то соответствующие кинематические винты имеют ненулевую моментную часть. Поскольку, как было отмечено выше, значения скоростей в активных парах однозначно определяются вектором  $\boldsymbol{\omega}$ , изменяя длину и направление данного вектора можно получить любые значения  $\dot{q}_A$ ,  $\dot{q}_B$  и  $\dot{q}_C$ . Тогда сумма в левой части уравнения (2.4) в общем случае также может представлять

собой вектор любого направления. Однако данное уравнение может обращаться в тождество только в том случае, если данный вектор коллинеарен вектору  $\hat{\mathbf{s}}_P$ , а значит рассматриваемая кинематическая цепь не может обеспечить только сферическое движение выходного звена без его линейного перемещения.

Если ось одной из вращательных пар будет проходить через точку  $O$ , то кинематическая цепь также не сможет обеспечить чисто сферическое движение выходного звена. Например, если ось пары  $A$  проходит через точку  $O$ , то выражение (2.4) приобретает следующий вид:

$$\dot{q}_B \mathbf{p}_B \times \hat{\mathbf{s}}_B + \dot{q}_C \mathbf{p}_C \times \hat{\mathbf{s}}_C = -\dot{q}_P \hat{\mathbf{s}}_P.$$

Очевидно, что в этом случае левая часть уравнения может представлять собой любой вектор, принадлежащий плоскости, задаваемой векторами  $\mathbf{p}_B \times \hat{\mathbf{s}}_B$  и  $\mathbf{p}_C \times \hat{\mathbf{s}}_C$ , и неколлинеарный в общем случае вектору  $\hat{\mathbf{s}}_P$ .

Далее предположим, что оси двух вращательных пар, например  $A$  и  $B$ , проходят через точку  $O$ . Тогда

$$\dot{q}_C \mathbf{p}_C \times \hat{\mathbf{s}}_C = -\dot{q}_P \hat{\mathbf{s}}_P.$$

Иными словами, кинематическая цепь теоретически сможет обеспечить чистое сферическое движение выходного звена в том случае, если ось призматической пары перпендикулярна плоскости, задаваемой векторами  $\mathbf{p}_C$  и  $\hat{\mathbf{s}}_C$ , то есть плоскости, проходящей через ось пары  $C$  и точку  $O$ . Однако на практике обеспечить постоянство выполнения данного условия невозможно ввиду постоянного изменения относительного положением промежуточных звеньев относительно друг друга и точки  $O$ . Даже если пара  $C$  и, соответственно, указанная плоскость неподвижны, вращение в данной паре будет приводить к изменению положения осей всех остальных пар относительно данной плоскости за исключением случая, когда ось призматической пары лежит в той же плоскости и коллинеарна оси пары  $C$ .

Наконец, если оси всех трех вращательных пар проходят через точку  $O$ , то из уравнения (2.4) следует, что скорость в призматической должна всегда быть равной нулю, что невозможно, так как данная пара должна быть приводной.

Таким образом, использование кинематических цепей с приводной призматической парой и тремя пассивными вращательными парами для синтеза трехподвижного сферического механизма невозможно.

Перейдем к рассмотрению цепей, в которых помимо призматической пары имеется четыре вращательных кинематических пары (Рисунок 2.3).

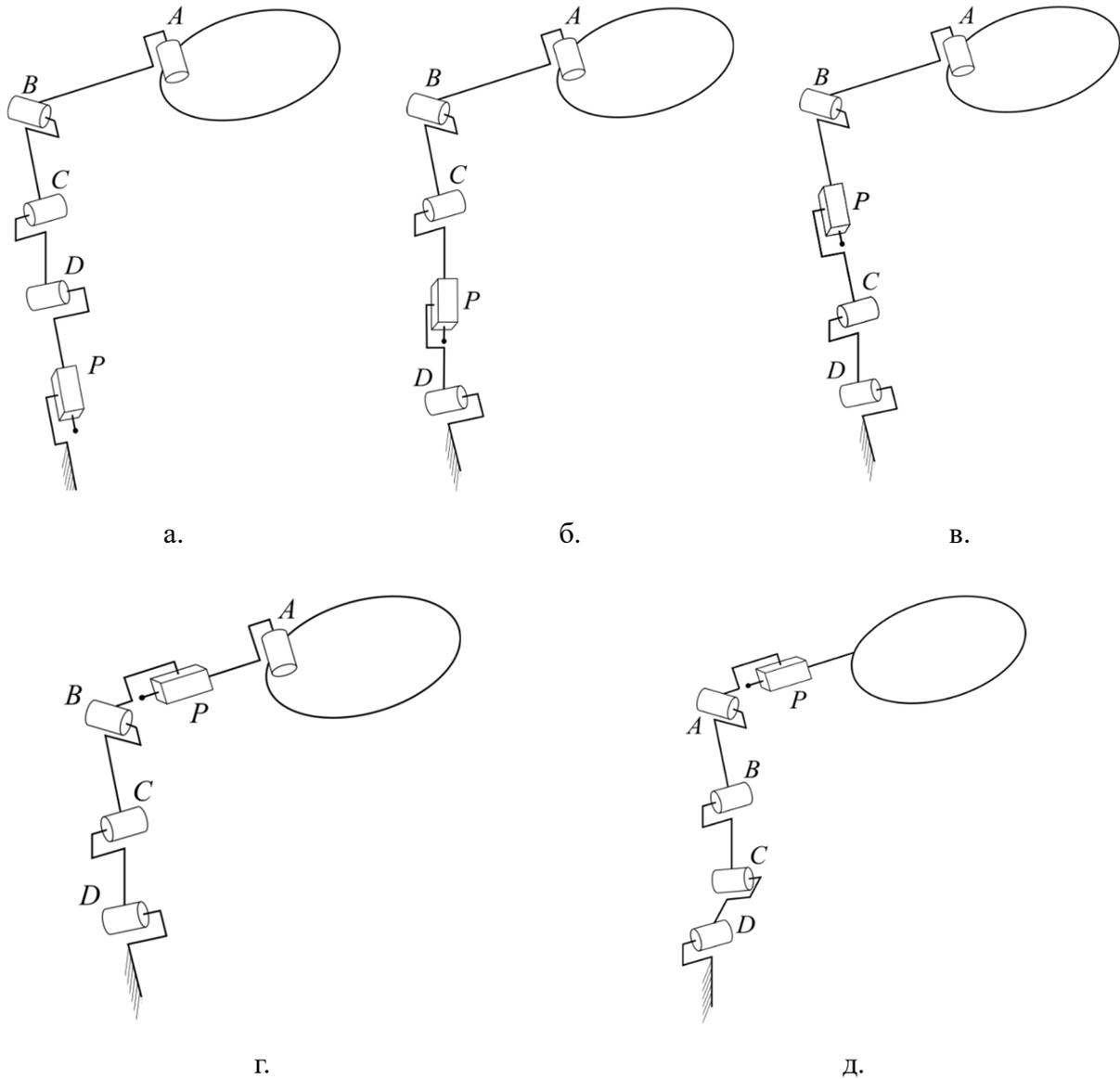


Рисунок 2.3. Варианты кинематических цепей с четырьмя вращательными и одной призматической парами:  $\underline{P}RRRR$  (а),  $R\underline{P}RRR$  (б),  $RR\underline{P}RR$  (в),  $RRR\underline{P}R$  (г),  $RRRR\underline{P}$  (д)

Как и ранее, рассмотрим единичные кинематические винты на примере одной из цепей, а именно  $\underline{P}RRRR$  (Рисунок 2.4), принимая во внимание, что дальнейшие рассуждения будут справедливы для всех пяти возможных вариантов структуры.

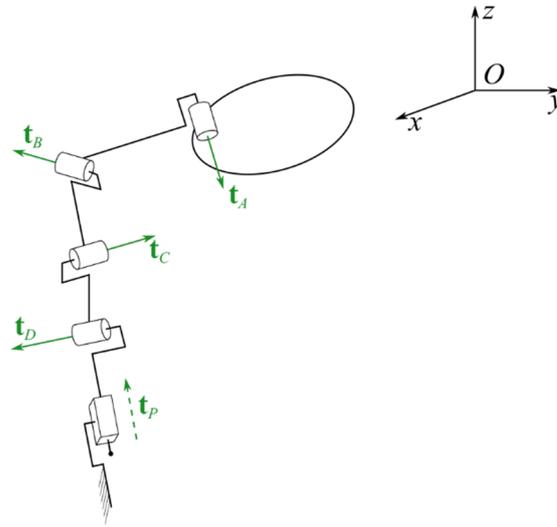


Рисунок 2.4. Кинематические винты цепи с четырьмя вращательными и одной призматической парами на примере цепи  $\underline{P}RRRR$

Выражение (2.4) для подобной цепи будет иметь следующий вид

$$\dot{q}_A \mathbf{p}_A \times \hat{\mathbf{s}}_A + \dot{q}_B \mathbf{p}_B \times \hat{\mathbf{s}}_B + \dot{q}_C \mathbf{p}_C \times \hat{\mathbf{s}}_C + \dot{q}_D \mathbf{p}_D \times \hat{\mathbf{s}}_D = -\dot{q}_P \hat{\mathbf{s}}_P. \quad (2.5)$$

Как и в случае с ранее рассмотренными цепями с тремя вращательными кинематическими парами, если через точку  $O$  не проходит ни одной оси вращательных пар, либо проходит ось только одной такой пары, то уравнение (2.5) в общем случае не может быть обращено в тождество. Иными словами, как оси как минимум двух вращательных пар должны проходить через точку  $O$ . Пусть такими парами являются  $A$  и  $B$ . Тогда (2.5) примет следующий вид:

$$\dot{q}_C \mathbf{p}_C \times \hat{\mathbf{s}}_C + \dot{q}_D \mathbf{p}_D \times \hat{\mathbf{s}}_D = -\dot{q}_P \hat{\mathbf{s}}_P. \quad (2.6)$$

Если оси пар  $A$ ,  $B$  и  $C$  удовлетворяют обозначенному ранее условию невозможности за счет параллельного переноса совместить любые две оси или разместить все три оси в одной плоскости, выбор направления оси пары  $D$  не будет ограничен данным условием. Предположим, что оси пар  $C$  и  $D$  параллельны. Тогда  $\hat{\mathbf{s}}_C = \hat{\mathbf{s}}_D$ , а выражение, аналогичное выражению (2.3), может быть записано следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{q}_A \hat{\mathbf{s}}_A + \dot{q}_D \hat{\mathbf{s}}_D + (\dot{q}_C + \dot{q}_D) \hat{\mathbf{s}}_C = \boldsymbol{\omega}. \\ \dot{q}_C \mathbf{p}_C \times \hat{\mathbf{s}}_C + \dot{q}_D \mathbf{p}_D \times \hat{\mathbf{s}}_C = -\dot{q}_P \hat{\mathbf{s}}_P. \end{cases} \quad (2.7)$$

Из первой части выражения (2.7) следует, что вектор  $\omega$  однозначно определяет только значение суммы  $\dot{q}_C + \dot{q}_D$ , в то время как конкретные значения самих скоростей могут быть любыми, то есть для некоторого произвольно заданного  $\omega$  левая часть второго уравнения, входящего в (2.7), будет представлять собой не некоторый конкретный вектор, а плоскость, задаваемую векторами  $\rho_C \times \hat{s}_C$  и  $\rho_D \times \hat{s}_C$ , то есть перпендикулярную вектору  $\hat{s}_C$  (Рисунок 2.5).

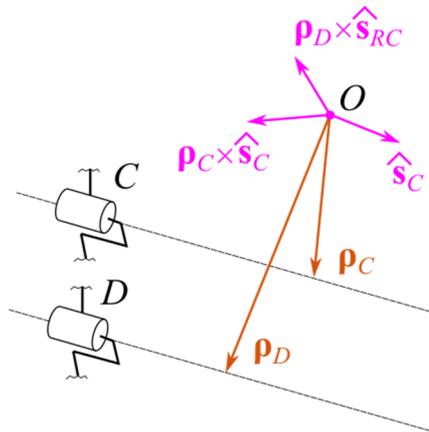


Рисунок 2.5. Векторные и моментные части винтов  $t_C$  и  $t_D$ , приведенные в точку  $O$  при условии параллельности осей пар  $C$  и  $D$

Тогда для рассматриваемого варианта цепи чистое сферическое движение выходного звена механизма может быть обеспечено, если вектор  $\hat{s}_P$  всегда лежит в указанной плоскости, то есть ось призматической пары всегда остается перпендикулярной (либо скрещивается под прямым углом) осям пар  $C$  и  $D$ . Это может быть реализовано, если вращательные пары  $C$ ,  $D$  и призматическая пара будут образовывать плоскую диаду (группу Ассур второго класса второго порядка)  $\underline{PRR}$  (или, что является тем же самым,  $\underline{RRP}$ ) или  $\underline{RPR}$  (Рисунок 2.6).



Рисунок 2.6. Плоские диады  $\underline{PRR}$  (а),  $\underline{RPR}$  (б)

Если оси трех вращательных пар цепи, например  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , проходят через точку  $O$ , то уравнение (2.5) запишется следующим образом:

$$\dot{q}_D \mathbf{p}_D \times \hat{\mathbf{s}}_D = -\dot{q}_P \hat{\mathbf{s}}_P.$$

Соответственно, в таком случае рассматриваемая кинематическая цепь сможет реализовать сферическое движение выходного звена при условии перпендикулярности вектора  $\hat{\mathbf{s}}_P$  плоскости, определяемой осью пары  $D$  и точкой  $O$ . Как уже было отмечено ранее, в общем случае обеспечение постоянства выполнения данного условия вне зависимости от ориентации выходного звена невозможно.

Наконец, если оси всех четырех вращательных пар цепи проходят через точку  $O$ , то согласно (2.5) скорость в призматической паре всегда должна быть равна нулю и, соответственно, такая пара не может быть приводной, что противоречит условию поставленной задачи.

Таким образом, кинематическая цепь трехподвижного сферического механизма с линейным приводом должна включать как минимум пять одноподвижных кинематических пар: четыре вращательных и, собственно, одну приводную призматическую пару. При этом оси двух вращательных пар должны проходить через центр вращения, а две другие пары совместно с призматической должны формировать плоскую диаду – группу Ассур второго класса второго порядка второго или третьего типа.

Дополнительно обозначая штрихом пары, оси которых пересекают точку  $O$ , а также выделяя с помощью скобок пары, формирующие плоскую диаду, все подходящие варианты структуры кинематической цепи можно записать следующим образом (Рисунок 2.7):

- С диадой  $\underline{RPR}$ :  $(\underline{RPR})R'R'$ ,  $R'(\underline{RPR})R'$ ,  $R'R'(\underline{RPR})$ ;
- С диадой  $\underline{PRR}$ :  $(\underline{PRR})R'R'$ ,  $R'(\underline{PRR})R'$ ,  $R'R'(\underline{PRR})$ ;
- С диадой  $\underline{RRP}$ :  $(\underline{RRP})R'R'$ ,  $R'(\underline{RRP})R'$ ,  $R'R'(\underline{RRP})$ .

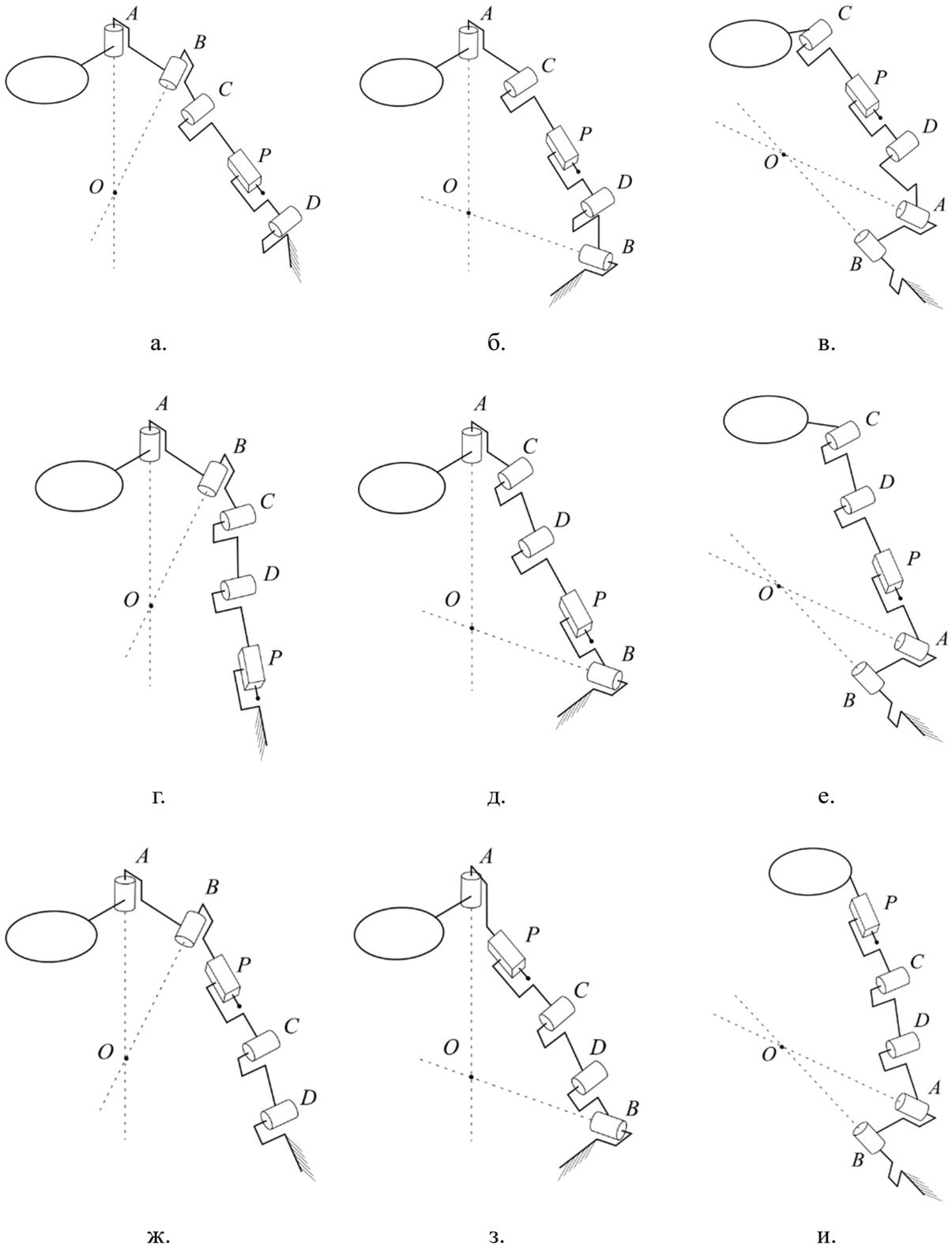


Рисунок 2.7. Варианты цепей с плоской диадой:  $(R\underline{P}R)R'R'$  (а),  $R'(R\underline{P}R)R'$  (б),  $R'R'(R\underline{P}R)$  (в),  $(\underline{P}RR)R'R'$  (г),  $R'(\underline{P}RR)R'$  (д),  $R'R'(\underline{P}RR)$  (е),  $(RR\underline{P})R'R'$  (ж),  $R'(RR\underline{P})R'$  (з),  $R'R'(RR\underline{P})$  (и)

## 2.2. Определение силовых винтов цепи с плоской диадой PRR или RPR

Для выбранного типа цепи с учетом всех особенностей взаимного расположения пар (оси пар  $A$ ,  $B$  проходят через точку  $O$ , а пары  $C$  и  $D$  имеют параллельные оси, которые не проходят через  $O$ ), кинематические винты будут иметь следующие координаты.

$$\mathbf{t}_A = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{s}}_A \\ \mathbf{0}_3 \end{bmatrix}, \mathbf{t}_B = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{s}}_B \\ \mathbf{0}_3 \end{bmatrix}, \mathbf{t}_C = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{s}}_C \\ \boldsymbol{\rho}_C \times \hat{\mathbf{s}}_C \end{bmatrix}, \mathbf{t}_D = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{s}}_C \\ \boldsymbol{\rho}_D \times \hat{\mathbf{s}}_C \end{bmatrix}, \mathbf{t}_P = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3 \\ \hat{\mathbf{s}}_P \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

Данные винты порождают линейное подпространство  $T$  пространства  $\mathbb{R}^6$ , характеризующее перемещения выходного звена, разрешаемые цепью:

$$T = \text{span}(\mathbf{t}_A, \mathbf{t}_B, \mathbf{t}_C, \mathbf{t}_D, \mathbf{t}_P).$$

В общем случае подпространство  $T$  будет иметь размерность, равную пяти, то есть на выходное звено будет накладываться одна связь. Эта связь может быть описана единичным силовым винтом  $\mathbf{w}_{\text{св}}$ , взаимным всем кинематическим винтам цепи, то есть

$$\mathbf{t} \circ \mathbf{w}_{\text{св}} = 0 \quad \forall \mathbf{t} \in T,$$

где символ « $\circ$ » обозначает относительный момент кинематического и силового винтов.

Координаты данного винта легко найти, внимательно рассмотрев выражения для определения координат кинематических винтов. Так, можно видеть, что ненулевые векторные части кинематических винтов всегда линейно независимы. В то же время, вектор  $\hat{\mathbf{s}}_P$  всегда лежит в плоскости, заданной векторами  $\boldsymbol{\rho}_C \times \hat{\mathbf{s}}_C$  и  $\boldsymbol{\rho}_D \times \hat{\mathbf{s}}_C$ , т.е. моментные части винтов  $\mathbf{t}_C$ ,  $\mathbf{t}_D$  и  $\mathbf{t}_P$  линейно зависимы. Поскольку указанной плоскости всегда перпендикулярен вектор  $\hat{\mathbf{s}}_C$ , координаты силового винта связи  $\mathbf{w}_{\text{св}}$  будут следующими:

$$\mathbf{w}_{\text{св}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{s}}_C \\ \mathbf{0}_3 \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

Из выражения (2.9) видно, что силовой винт связи рассматриваемой цепи является винтом нулевого параметра, ось которого проходит через точку  $O$ , а сама цепь, соответственно, накладывает на выходное звено связь, запрещающую линейное перемещение в направлении вектора  $\hat{\mathbf{s}}_C$ .

Чтобы найти приводной силовой винт цепи необходимо исключить из системы кинематических винтов винт приводной пары, а затем найти такой силовой винт, который будет взаимен всем оставшимся кинематическим винтам, но при этом не будет принадлежать системе силовых винтов связи данной цепи. При этом для удобства анализа последнее условие без потери общности может быть усилено до ортогональности приводного винта силовым винтам связи цепи [80]. Таким образом, приводной силовой винт  $\mathbf{w}_{пр}$  рассматриваемой цепи будет задаваться следующим условием:

$$\begin{cases} \mathbf{t} \circ \mathbf{w}_{пр} = 0 & \forall \mathbf{t} \in T_{пас}, \\ \mathbf{w}_{св} \cdot \mathbf{w}_{пр} = 0, \end{cases} \quad (2.10)$$

где  $T_{пас} = \text{span}(\mathbf{t}_A, \mathbf{t}_B, \mathbf{t}_C, \mathbf{t}_D)$  – линейное подпространство, порождаемое кинематическими винтами пассивных пар цепи.

Рассмотрим относительный момент винтов  $\mathbf{t}_A$  и  $\mathbf{t}_B$  с винтом  $\mathbf{w}_{пр}$ . Учитывая, что координаты винтов  $\mathbf{t}_A$  и  $\mathbf{t}_B$  определяются согласно выражению (2.8), из условия (2.10) следует, что

$$\begin{cases} \mathbf{t}_A \circ \mathbf{w}_{пр} = \hat{\mathbf{s}}_A \cdot \mathbf{w}_{пр.м} + \mathbf{0}_3 \cdot \mathbf{w}_{пр.в} = \hat{\mathbf{s}}_A \cdot \mathbf{w}_{пр.м} = 0, \\ \mathbf{t}_B \circ \mathbf{w}_{пр} = \hat{\mathbf{s}}_B \cdot \mathbf{w}_{пр.м} + \mathbf{0}_3 \cdot \mathbf{w}_{пр.в} = \hat{\mathbf{s}}_B \cdot \mathbf{w}_{пр.м} = 0, \end{cases} \quad (2.11)$$

где  $\mathbf{w}_{пр.в}$  и  $\mathbf{w}_{пр.м}$  – векторная и моментная части винта  $\mathbf{w}_{пр}$  соответственно.

Из выражения (2.11) легко видеть, что, какой бы ни была векторная часть винта  $\mathbf{w}_{пр}$ , для равенства нулю относительных моментов  $\mathbf{t}_A \circ \mathbf{w}_{пр}$  и  $\mathbf{t}_B \circ \mathbf{w}_{пр}$  необходимо, чтобы его моментная часть была одновременно ортогональна векторам  $\hat{\mathbf{s}}_A$  и  $\hat{\mathbf{s}}_B$ . Отсюда следует, что

$$\mathbf{w}_{пр.м} = a \hat{\mathbf{s}}_A \times \hat{\mathbf{s}}_B, \quad (2.12)$$

где  $a$  – некоторая константа.

Далее рассмотрим относительный момент винтов  $\mathbf{t}_C$  и  $\mathbf{t}_D$  с винтом  $\mathbf{w}_{\text{пр}}$ . Из условия (2.10) получим:

$$\begin{cases} \mathbf{t}_C \circ \mathbf{w}_{\text{пр}} = \hat{\mathbf{s}}_C \cdot \mathbf{w}_{\text{пр.м}} + (\boldsymbol{\rho}_C \times \hat{\mathbf{s}}_C) \cdot \mathbf{w}_{\text{пр.в}} = 0, \\ \mathbf{t}_D \circ \mathbf{w}_{\text{пр}} = \hat{\mathbf{s}}_C \cdot \mathbf{w}_{\text{пр.м}} + (\boldsymbol{\rho}_D \times \hat{\mathbf{s}}_C) \cdot \mathbf{w}_{\text{пр.в}} = 0, \end{cases}$$

откуда ввиду равенства векторных частей рассматриваемых кинематических винтов следует, что

$$(\boldsymbol{\rho}_C \times \hat{\mathbf{s}}_C) \cdot \mathbf{w}_{\text{пр.в}} = (\boldsymbol{\rho}_D \times \hat{\mathbf{s}}_C) \cdot \mathbf{w}_{\text{пр.в}}. \quad (2.13)$$

Пусть  $\boldsymbol{\rho}_{CD}$  – вектор, проведенный из  $C$  в  $D$ , т.е.  $\boldsymbol{\rho}_D = \boldsymbol{\rho}_C + \boldsymbol{\rho}_{CD}$ . Тогда можно записать (2.13) следующим образом:

$$(\boldsymbol{\rho}_C \times \hat{\mathbf{s}}_C) \cdot \mathbf{w}_{\text{пр.в}} = ((\boldsymbol{\rho}_C + \boldsymbol{\rho}_{CD}) \times \hat{\mathbf{s}}_C) \cdot \mathbf{w}_{\text{пр.в}},$$

откуда ввиду дистрибутивности векторного и скалярного произведений векторов относительно операции сложения следует, что

$$(\boldsymbol{\rho}_C \times \hat{\mathbf{s}}_C) \cdot \mathbf{w}_{\text{пр.в}} = (\boldsymbol{\rho}_C \times \hat{\mathbf{s}}_C) \cdot \mathbf{w}_{\text{пр.в}} + (\boldsymbol{\rho}_{CD} \times \hat{\mathbf{s}}_C) \cdot \mathbf{w}_{\text{пр.в}},$$

а значит

$$(\boldsymbol{\rho}_{CD} \times \hat{\mathbf{s}}_C) \cdot \mathbf{w}_{\text{пр.в}} = 0,$$

то есть векторная часть приводного силового  $\mathbf{w}_{\text{пр}}$  винта должна быть ортогональна вектору  $\boldsymbol{\rho}_{CD} \times \hat{\mathbf{s}}_C$ .

Наконец, рассмотрим условие ортогональности винтов  $\mathbf{w}_{\text{св}}$  и  $\mathbf{w}_{\text{пр}}$ :

$$\mathbf{w}_{\text{св}} \cdot \mathbf{w}_{\text{пр}} = \hat{\mathbf{s}}_C \cdot \mathbf{w}_{\text{пр.в}} + \mathbf{0}_3 \cdot \mathbf{w}_{\text{пр.м}} = \hat{\mathbf{s}}_C \cdot \mathbf{w}_{\text{пр.в}} = 0,$$

из которого, как можно видеть, следует ортогональность векторов  $\mathbf{w}_{\text{пр.в}}$  и  $\hat{\mathbf{s}}_C$ .

Таким образом, векторная часть винта  $\mathbf{w}_{\text{пр}}$  должна быть одновременно ортогональна векторам  $\boldsymbol{\rho}_{CD} \times \hat{\mathbf{s}}_C$  и  $\hat{\mathbf{s}}_C$ , то есть

$$\mathbf{w}_{\text{пр.в}} = b(\boldsymbol{\rho}_{CD} \times \hat{\mathbf{s}}_C) \times \hat{\mathbf{s}}_C,$$

где  $b$  – некоторая константа.

Используя свойства векторного произведения, и учитывая, что в плоской диаде векторы  $\mathbf{p}_{CD}$  и  $\hat{\mathbf{s}}_C$  будут всегда оставаться ортогональными, получим:

$$\mathbf{w}_{\text{пр.в}} = b(\mathbf{p}_{CD} \times \hat{\mathbf{s}}_C) \times \hat{\mathbf{s}}_C = b(\hat{\mathbf{s}}_C (\hat{\mathbf{s}}_C \cdot \mathbf{p}_{CD}) - \mathbf{p}_{CD} (\hat{\mathbf{s}}_C \cdot \hat{\mathbf{s}}_C)) = -b\mathbf{p}_{CD}. \quad (2.14)$$

Тогда, в соответствии с (2.12) и (2.14):

$$\mathbf{w}_{\text{пр}} = \begin{bmatrix} -b\mathbf{p}_{CD} \\ a\hat{\mathbf{s}}_A \times \hat{\mathbf{s}}_B \end{bmatrix}.$$

Как известно, координаты винтов можно определить только с точностью до некоторого множителя, поэтому важным является не численное значение неизвестных констант  $a$  и  $b$ , а соотношение между ними. Для упрощения записи винта  $\mathbf{w}_{\text{пр}}$  разделим его векторную и моментную части винта на  $-b\|\mathbf{p}_{CD}\|$ :

$$\mathbf{w}_{\text{пр}} = \begin{bmatrix} \frac{-b\mathbf{p}_{CD}}{-b\|\mathbf{p}_{CD}\|} \\ \frac{a\hat{\mathbf{s}}_A \times \hat{\mathbf{s}}_B}{-b\|\mathbf{p}_{CD}\|} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{s}}_{CD} \\ -c\hat{\mathbf{s}}_A \times \hat{\mathbf{s}}_B \end{bmatrix},$$

где  $\hat{\mathbf{s}}_{CD}$  – единичный вектор, направленный вдоль отрезка  $CD$ , а  $c$  – некоторая константа, заменяющая ранее введенные константы  $a$  и  $b$ .

Значение  $c$  может быть вычислено из условия равенства нулю относительного момента  $\mathbf{t}_C \circ \mathbf{w}_{\text{пр}}$  или  $\mathbf{t}_D \circ \mathbf{w}_{\text{пр}}$ . Воспользовавшись первым вариантом, получим:

$$\mathbf{t}_C \circ \mathbf{w}_{\text{пр}} = \hat{\mathbf{s}}_C \cdot (-c\hat{\mathbf{s}}_A \times \hat{\mathbf{s}}_B) + (\mathbf{p}_C \times \hat{\mathbf{s}}_C) \cdot \hat{\mathbf{s}}_{CD} = 0,$$

откуда

$$c = \frac{(\mathbf{p}_C \times \hat{\mathbf{s}}_C) \cdot \hat{\mathbf{s}}_{CD}}{(\hat{\mathbf{s}}_A \times \hat{\mathbf{s}}_B) \cdot \hat{\mathbf{s}}_C}.$$

Таким образом, винт  $\mathbf{w}_{\text{пр}}$  будет иметь следующие координаты:

$$\mathbf{w}_{\text{пр}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{s}}_{CD} \\ -\frac{(\mathbf{p}_C \times \hat{\mathbf{s}}_C) \cdot \hat{\mathbf{s}}_{CD}}{(\hat{\mathbf{s}}_A \times \hat{\mathbf{s}}_B) \cdot \hat{\mathbf{s}}_C} \hat{\mathbf{s}}_A \times \hat{\mathbf{s}}_B \end{bmatrix}. \quad (2.15)$$

Для подтверждения правильности определения константы  $c$  проверим выполнение условия  $\mathbf{t}_D \circ \mathbf{w}_{\text{вр}} = 0$ , подставив соответствующие координаты винтов:

$$\mathbf{t}_D \circ \mathbf{w}_{\text{вр}} = \hat{\mathbf{s}}_C \cdot \left( -\frac{(\boldsymbol{\rho}_C \times \hat{\mathbf{s}}_C) \cdot \hat{\mathbf{s}}_{CD}}{(\hat{\mathbf{s}}_A \times \hat{\mathbf{s}}_B) \cdot \hat{\mathbf{s}}_C} \hat{\mathbf{s}}_A \times \hat{\mathbf{s}}_B \right) + (\boldsymbol{\rho}_D \times \hat{\mathbf{s}}_C) \cdot \hat{\mathbf{s}}_{CD} = 0. \quad (2.16)$$

Первое слагаемое может быть преобразовано следующим образом:

$$\hat{\mathbf{s}}_C \cdot \left( -\frac{(\boldsymbol{\rho}_C \times \hat{\mathbf{s}}_C) \cdot \hat{\mathbf{s}}_{CD}}{(\hat{\mathbf{s}}_A \times \hat{\mathbf{s}}_B) \cdot \hat{\mathbf{s}}_C} \hat{\mathbf{s}}_A \times \hat{\mathbf{s}}_B \right) = -(\boldsymbol{\rho}_C \times \hat{\mathbf{s}}_C) \cdot \hat{\mathbf{s}}_{CD} \left( \frac{\hat{\mathbf{s}}_C \cdot (\hat{\mathbf{s}}_A \times \hat{\mathbf{s}}_B)}{(\hat{\mathbf{s}}_A \times \hat{\mathbf{s}}_B) \cdot \hat{\mathbf{s}}_C} \right) = -(\boldsymbol{\rho}_C \times \hat{\mathbf{s}}_C) \cdot \hat{\mathbf{s}}_{CD}.$$

С учетом того, что  $\boldsymbol{\rho}_D = \boldsymbol{\rho}_C + \boldsymbol{\rho}_{CD}$ , второе слагаемое примет следующий вид:

$$(\boldsymbol{\rho}_D \times \hat{\mathbf{s}}_C) \cdot \hat{\mathbf{s}}_{CD} = ((\boldsymbol{\rho}_C + \boldsymbol{\rho}_{CD}) \times \hat{\mathbf{s}}_C) \cdot \hat{\mathbf{s}}_{CD} = (\boldsymbol{\rho}_C \times \hat{\mathbf{s}}_C) \cdot \hat{\mathbf{s}}_{CD} + (\boldsymbol{\rho}_{CD} \times \hat{\mathbf{s}}_C) \cdot \hat{\mathbf{s}}_{CD},$$

Тогда после подстановки в (2.16), получим следующее выражение:

$$\mathbf{t}_D \circ \mathbf{w}_{\text{вр}} = -(\boldsymbol{\rho}_C \times \hat{\mathbf{s}}_C) \cdot \hat{\mathbf{s}}_{CD} + (\boldsymbol{\rho}_C \times \hat{\mathbf{s}}_C) \cdot \hat{\mathbf{s}}_{CD} + (\boldsymbol{\rho}_{CD} \times \hat{\mathbf{s}}_C) \cdot \hat{\mathbf{s}}_{CD} = (\boldsymbol{\rho}_{CD} \times \hat{\mathbf{s}}_C) \cdot \hat{\mathbf{s}}_{CD} = 0,$$

которое, как легко видеть, является тождеством, поскольку векторы  $\boldsymbol{\rho}_{CD}$  и  $\hat{\mathbf{s}}_{CD}$  коллинеарны, а значит смешанное произведение  $(\boldsymbol{\rho}_{CD} \times \hat{\mathbf{s}}_C) \cdot \hat{\mathbf{s}}_{CD}$  всегда равно нулю. Таким образом, значение константы  $c$  определено верно.

Далее определим параметр данного винта. Согласно [4], параметр винта  $p$  равен скалярному произведению его векторной и моментной частей, отнесенному к квадрату нормы векторной части. Тогда, используя выражение (2.15), получим:

$$p_{\text{вр}} = \frac{\hat{\mathbf{s}}_{CD} \cdot \left( -\frac{(\boldsymbol{\rho}_C \times \hat{\mathbf{s}}_C) \cdot \hat{\mathbf{s}}_{CD}}{(\hat{\mathbf{s}}_A \times \hat{\mathbf{s}}_B) \cdot \hat{\mathbf{s}}_C} \hat{\mathbf{s}}_A \times \hat{\mathbf{s}}_B \right)}{\|\hat{\mathbf{s}}_{CD}\|^2} = -\frac{(\boldsymbol{\rho}_C \times \hat{\mathbf{s}}_C) \cdot \hat{\mathbf{s}}_{CD}}{(\hat{\mathbf{s}}_A \times \hat{\mathbf{s}}_B) \cdot \hat{\mathbf{s}}_C} (\hat{\mathbf{s}}_{CD} \cdot (\hat{\mathbf{s}}_A \times \hat{\mathbf{s}}_B)). \quad (2.17)$$

Как можно видеть, в общем случае винт  $\mathbf{w}_{\text{вр}}$  является винтом некоторого конечного параметра. Для анализа частных случаев рассмотрим условия равенства нулю скалярных произведений, входящих в выражение (2.17).

Равенство нулю скалярного произведения  $(\hat{\mathbf{s}}_A \times \hat{\mathbf{s}}_B) \cdot \hat{\mathbf{s}}_C$  невозможно, поскольку в таком случае вектор  $\hat{\mathbf{s}}_C$  должен лежать в плоскости, порождаемой векторами  $\hat{\mathbf{s}}_A$  и  $\hat{\mathbf{s}}_B$ , что противоречит условию невозможности размещения осей трех вращательных пар в одной плоскости путем параллельного переноса этих осей.

Скалярное произведение  $(\mathbf{p}_C \times \hat{\mathbf{s}}_C) \cdot \hat{\mathbf{s}}_{CD}$  будет равно нулю, а винт  $\mathbf{w}_{пр}$  иметь нулевой параметр, в том случае, если вектор  $\hat{\mathbf{s}}_{CD}$  лежит в плоскости, порождаемой векторами  $\mathbf{p}_C$  и  $\hat{\mathbf{s}}_C$ . Можно видеть (Рисунок 2.5), что векторы  $\mathbf{p}_C$  и  $\hat{\mathbf{s}}_{CD}$  всегда лежат в одной плоскости, перпендикулярной вектору  $\hat{\mathbf{s}}_C$ . То есть, выполнение указанного условия возможно только в том случае, если векторы  $\mathbf{p}_C$  и  $\hat{\mathbf{s}}_{CD}$  коллинеарны, для чего прямая, проходящая через  $C$  и  $D$ , должна проходить и через точку  $O$ . Из (2.15) видно, что если  $(\mathbf{p}_C \times \hat{\mathbf{s}}_C) \cdot \hat{\mathbf{s}}_{CD} = 0$ , то моментная часть винта  $\mathbf{w}_{пр}$  также равна нулю. Отсюда следует, что если данное условие выполняется хотя бы в одной цепи механизма, то выходное звено будет иметь неконтролируемую вращательную степень свободы, поскольку приводной силовой винт этой цепи будет линейно зависим с системой силовых винтов связи механизма, что соответствует особому положению.

Наконец, винт  $\mathbf{w}_{пр}$  будет также иметь нулевой параметр в том случае, если скалярное произведение  $\hat{\mathbf{s}}_{CD} \cdot (\hat{\mathbf{s}}_A \times \hat{\mathbf{s}}_B)$  будет равно нулю. Для этого вектор  $\hat{\mathbf{s}}_{CD}$  должен лежать в плоскости, порождаемой векторами  $\hat{\mathbf{s}}_A$  и  $\hat{\mathbf{s}}_B$ , из чего следует, что вектор  $\hat{\mathbf{s}}_C$  должен быть ортогонален данной плоскости. При этом может быть обеспечено постоянство выполнения данного условия за счет присоединения пар  $A$  и  $B$  к противоположным концам плоской диады (Рисунок 2.8).

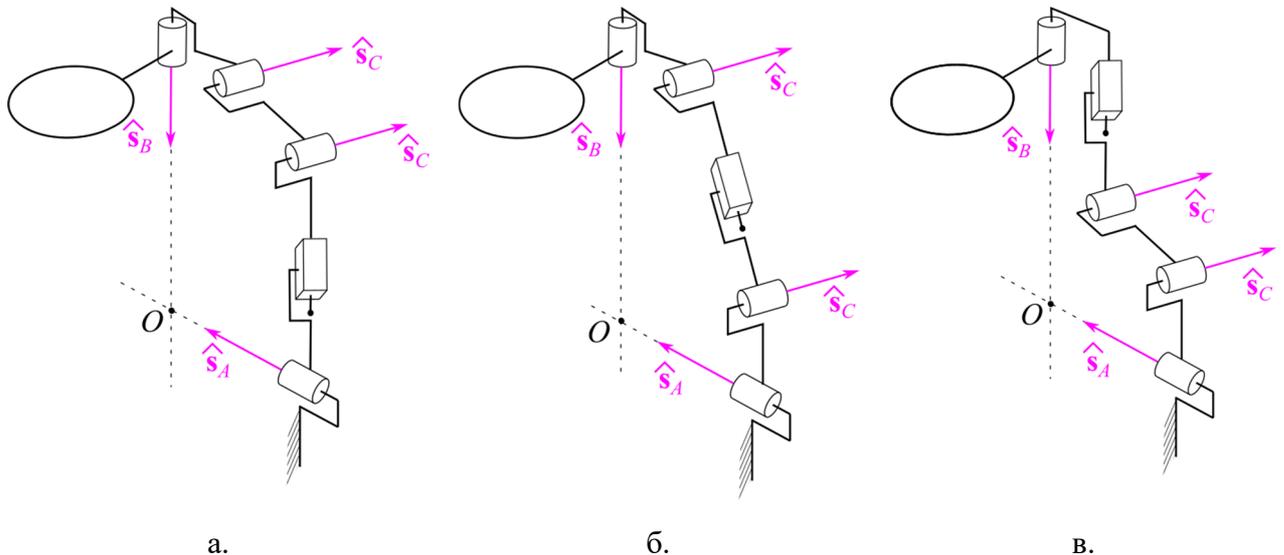


Рисунок 2.8. Варианты кинематической цепи с приводным винтом нулевого параметра:

$$R'(\underline{P}RR)R' \text{ (a)}, R'(R\underline{P}R)R' \text{ (б)}, R'(RR\underline{P})R' \text{ (в)}$$

Таким образом, приводной силовой винт всегда имеет либо конечный параметр, либо параметр, равный нулю.

### 2.3. Анализ геометрических условий попадания в особые положения

После определения допустимых вариантов структуры отдельной кинематической цепи становится возможным перейти к синтезу механизмов в целом. При этом целесообразно исходить из того, что все цепи будут иметь одинаковую структуру, т.к. это позволит обеспечить определенную симметрию рабочей зоны механизма.

Одним из главных недостатков механизмов параллельной структуры являются особые положения, попадание в которые приводит к изменению подвижности механизма. При этом близость к особым положениям также оказывает серьезное негативное влияние на характеристики механизма, в частности может наблюдаться увеличение нагрузки на конструктивные элементы и приводы, уменьшение жесткости, ухудшение точности позиционирования выходного звена. С учетом вышесказанного, одной из главных задач структурного синтеза механизмов данного типа, помимо, собственно, обеспечения требуемого типа подвижности выходного звена, является минимизация возможности попадания механизма в особое положение.

В настоящее время существует несколько различных классификаций особых положений, каждая из которых имеет свои достоинства и недостатки [60, 111, 112]. В данной работе будет использоваться классификация, предложенная в статье [11], поскольку в ней условия возникновения особых положений сформулированы с применением винтового исчисления. Указанная классификация включает четыре типа особых положений: тип «ПС» характеризуется потерей степени свободы выходным звеном; тип «ПУ» – возникновением неконтролируемой подвижности выходного звена в рамках изначально имевшихся у механизма степеней свободы; тип «ВС» описывает вырождение накладываемых на выходное звено связей, проявляющееся в появлении у него новой, ранее не имевшейся степени свободы; тип «ПП» характеризуется наличием подвижности промежуточных звеньев механизма при неподвижных приводах и выходном звене.

Условием попадания механизма в особое положение типа «ПС» является линейная зависимость кинематических винтов хотя бы в одной из цепей, приводящая к потере выходным звеном одной из степеней свободы, которыми оно должно обладать. Анализируя выражение (2.8), можно заметить, что линейная зависимость кинематических винтов цепи возможна в нескольких случаях.

Первый случай – любые два из тройки векторов  $\hat{s}_A$ ,  $\hat{s}_B$ ,  $\hat{s}_C$  параллельны. При этом выходное звено теряет возможность вращения вокруг оси, задаваемой векторным произведением непараллельных векторов (Рисунок 2.9). Силовой винт  $w_{\text{пс}}$  возникшей связи будет иметь бесконечный параметр и следующие координаты:

$$\begin{aligned} w_{\text{пс}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3 \\ \hat{s}_A \times \hat{s}_C \end{bmatrix} = \pm \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3 \\ \hat{s}_B \times \hat{s}_C \end{bmatrix} && \text{при } \hat{s}_A = \pm \hat{s}_B, \\ w_{\text{пс}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3 \\ \hat{s}_A \times \hat{s}_B \end{bmatrix} = \pm \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3 \\ \hat{s}_C \times \hat{s}_B \end{bmatrix} && \text{при } \hat{s}_A = \pm \hat{s}_C, \\ w_{\text{пс}} &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3 \\ \hat{s}_B \times \hat{s}_A \end{bmatrix} = \pm \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3 \\ \hat{s}_C \times \hat{s}_A \end{bmatrix} && \text{при } \hat{s}_B = \pm \hat{s}_C. \end{aligned}$$

Векторы  $\hat{s}_A$  и  $\hat{s}_B$  могут стать параллельными (коллинеарными) только если диада расположена между парами  $A$  и  $B$ . Параллельность векторов  $\hat{s}_A$  и  $\hat{s}_C$  или  $\hat{s}_B$  и  $\hat{s}_C$ , напротив, возможна, если пары  $A$  и  $B$  расположены между диадой и выходным звеном, или между диадой и основанием соответственно.

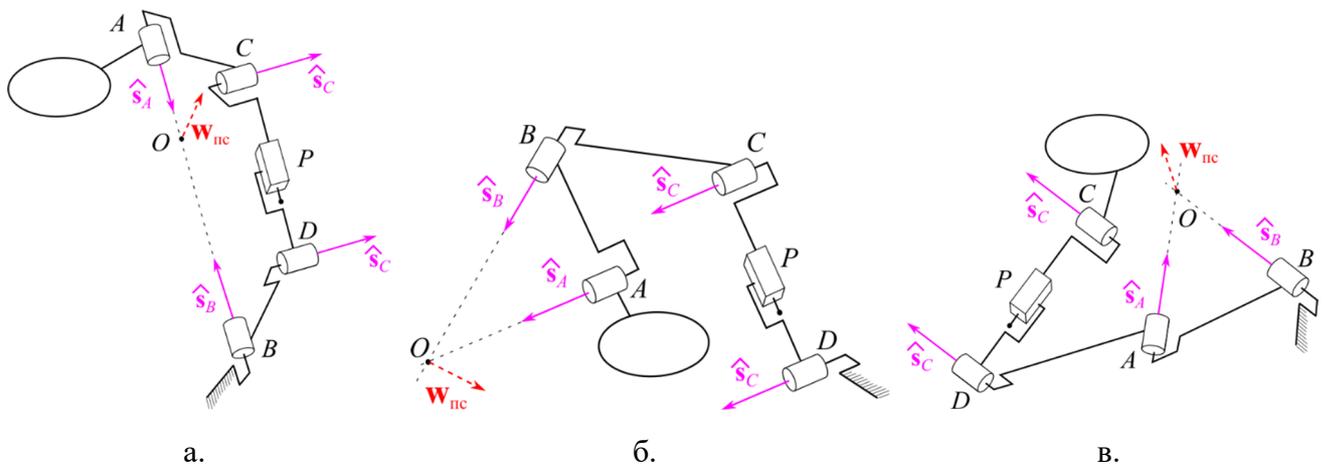


Рисунок 2.9. Примеры особых положений типа «ПС» в цепи с диадой RPR:

$$\hat{s}_A = \pm \hat{s}_B \text{ (a)}, \hat{s}_A = \pm \hat{s}_C \text{ (б)}, \hat{s}_B = \pm \hat{s}_C \text{ (в)}$$

Следующий случай – векторные произведения  $\rho_C \times \hat{s}_C$  и  $\rho_D \times \hat{s}_C$  равны. Для выполнения данного условия должны быть равны векторы  $\rho_C$  и  $\rho_D$ , а значит кинематические пары  $C$  и  $D$  должны располагаться в одной точке, то есть, по сути, функционировать как одна единая вращательная пара, что невозможно.

Еще один случай – разность векторных произведений  $\rho_C \times \hat{s}_C$  и  $\rho_D \times \hat{s}_C$  пропорциональна вектору  $\hat{s}_P$ , что учетом того, что  $\rho_D = \rho_C + \rho_{CD}$ , означает, что векторное произведение  $\rho_{CD} \times \hat{s}_C$  пропорционально вектору  $\hat{s}_P$ . Данное условие выполняется только в цепях с диадой  $\underline{PRR}$  или  $\underline{RRP}$  в том случае, если ось призматической пары перпендикулярна отрезку, соединяющему пары  $C$  и  $D$ . Можно видеть, что в таком случае линейная комбинация кинематических винтов цепи всегда будет иметь моментную часть, пропорциональную вектору  $\hat{s}_P$  (либо равную нулю). Тогда новая связь будет запрещать линейное перемещение в направлении, перпендикулярном  $\hat{s}_P$  и векторной части силового винта связи, т.е.  $\hat{s}_C$ . Указанное направление данном случае соответствует вектору  $\hat{s}_{CD}$  (Рисунок 2.10).

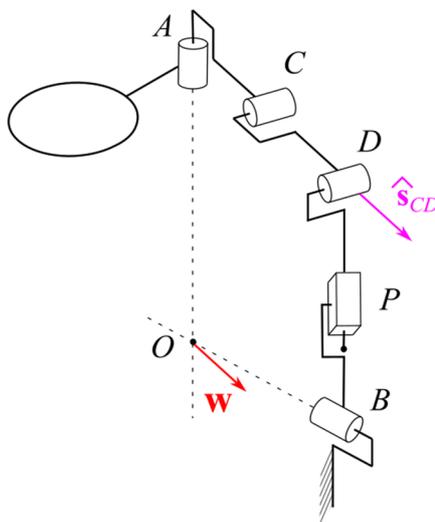


Рисунок 2.10. Пример возможного ограничения подвижности выходного звена механизма в цепи с диадой  $\underline{PRR}$

Силовой винт возникшей связи, будет иметь нулевой параметр и следующие координаты:

$$w = \begin{bmatrix} \hat{s}_{CD} \\ \mathbf{0}_3 \end{bmatrix}.$$

В сферическом механизме данное перемещение должно быть заблокировано другими кинематическими цепями, то есть рассматриваемая ситуация формально не является особым положением. Однако, может оказаться невозможным перемещение точки крепления цепи к выходному звену в направлении вектора  $\hat{s}_P$ , а значит и некоторое вращение выходного звена. Данной ситуации можно избежать, если выбирать длины звеньев с запасом так, чтобы для любого положения точки крепления цепи к выходному звену отрезок  $CD$  никогда не был ортогонален оси призматической пары.

Таким образом, вне зависимости от типа выбранной диады и ее расположения в цепи, избежать возможности попадания механизма в особое положение типа «ПС» невозможно при условии, что отсутствуют конструктивные ограничения, не допускающие сингулярных ориентаций выходного звена.

Особое положение типа «ПУ» соответствует случаю вырождения системы всех силовых винтов механизма, при условии, что система силовых винтов связи сама по себе остается невырожденной. Ранее при определении параметра приводного винта цепи уже был упомянут один из возможных вариантов возникновения подобной ситуации – прямая, на которой лежит отрезок, соединяющий пары  $C$  и  $D$ , проходит через точку  $O$ , что приводит к тому, что моментная часть винта  $\mathbf{w}_{пр}$  цепи становится нулевой. Изучая (2.15), можно видеть, что в таком случае выходное звено механизма сможет при заблокированных приводах вращаться вокруг оси, перпендикулярной плоскости, задаваемой векторами  $\hat{s}_A \times \hat{s}_B$  двух других цепей (Рисунок 2.11). Полагая, что описанная конфигурация реализуется в первой из трех цепей механизма, координаты кинематического винта нулевого параметра  $\tau_{пу}$ , характеризующего возникшую неконтролируемую подвижность выходного звена будут следующими:

$$\tau_{пу} = \begin{bmatrix} (\hat{s}_{A2} \times \hat{s}_{B2}) \times (\hat{s}_{A3} \times \hat{s}_{B3}) \\ \mathbf{0}_3 \end{bmatrix}.$$

Здесь и далее цифры в нижних индексах указывают на номер кинематической цепи в составе механизма.

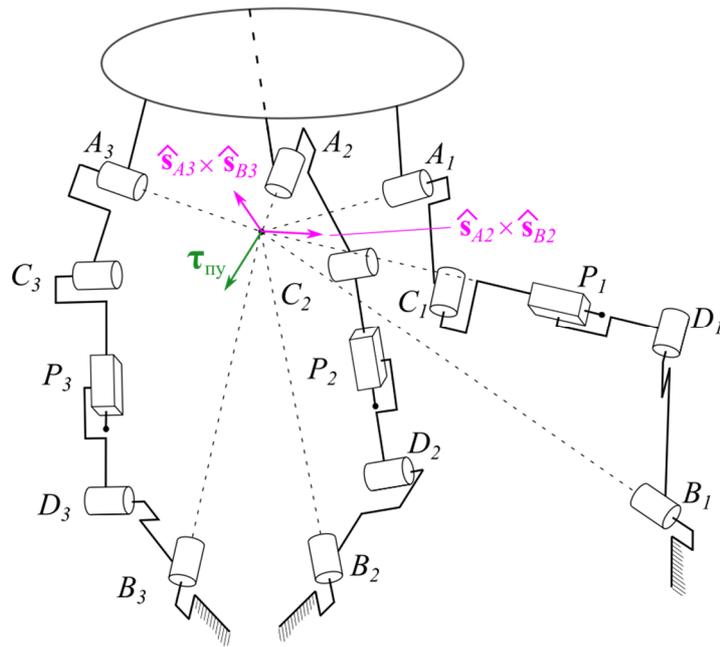


Рисунок 2.11. Пример особого положения типа «ПУ» в механизме с цепями с диадой RPR (точка  $O$  лежит на прямой  $CD$  первой цепи)

В данном случае точка  $O$  должна лежать в плоскости диады, что возможно только если между основанием и диадой есть вращательная пара, либо диада закреплена на основании, но точка  $O$  изначально лежит в ее плоскости. Тогда если диада присоединена к основанию, а точка  $O$  не лежит в ее плоскости, то попадание механизма в особое положение описываемым образом невозможно.

Еще один случай возникновения особого положения типа «ПУ» – коллинеарность векторов  $\hat{s}_A \times \hat{s}_B$  любых двух цепей, что означает совпадение плоскостей  $OAB$  этих цепей. Соответственно, неконтролируемым становится вращение выходного звена относительно оси, лежащей в данной плоскости и ортогональной вектору  $\hat{s}_A \times \hat{s}_B$  третьей цепи (Рисунок 2.12). Если совпадают плоскости  $OAB$  цепей 1 и 2, то неконтролируемая подвижность будет описываться кинематическим винтом со следующими координатами:

$$\tau_{пу} = \begin{bmatrix} (\hat{s}_{A1} \times \hat{s}_{B1}) \times (\hat{s}_{A3} \times \hat{s}_{B3}) \\ \mathbf{0}_3 \end{bmatrix} \propto \begin{bmatrix} (\hat{s}_{A2} \times \hat{s}_{B2}) \times (\hat{s}_{A3} \times \hat{s}_{B3}) \\ \mathbf{0}_3 \end{bmatrix}.$$

Избежать подобной ситуации в общем случае не представляется возможным.

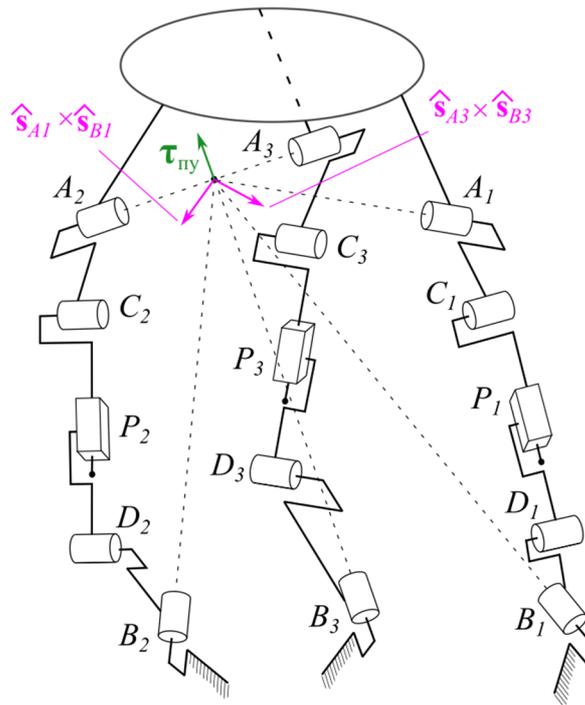


Рисунок 2.12. Пример особого положения типа «ПУ» в механизме с цепями с диадой RPR  
(плоскости  $OAB$  цепей 1 и 2 совпадают)

Наконец, последний случай, при котором механизм окажется в особом положении типа «ПУ» – моментные части приводных винтов всех цепей механизма лежат в одной плоскости, что соответствует неконтролируемому вращению выходного звена вокруг оси, перпендикулярной этой плоскости. Данная ось должна лежать в плоскости, порождаемой векторами  $\hat{s}_A$  и  $\hat{s}_B$ , то есть в плоскости  $OAB$  каждой цепи одновременно, а значит указанные плоскости всех цепей должны пересекаться по общей прямой. В этом случае кинематический винт неконтролируемого перемещения выходного звена будет иметь следующие координаты:

$$\tau_{пу} = \begin{bmatrix} (\hat{s}_{A1} \times \hat{s}_{B1}) \times (\hat{s}_{A2} \times \hat{s}_{B2}) \\ \mathbf{0}_3 \end{bmatrix} \propto \begin{bmatrix} (\hat{s}_{A1} \times \hat{s}_{B1}) \times (\hat{s}_{A3} \times \hat{s}_{B3}) \\ \mathbf{0}_3 \end{bmatrix} \propto \begin{bmatrix} (\hat{s}_{A2} \times \hat{s}_{B2}) \times (\hat{s}_{A3} \times \hat{s}_{B3}) \\ \mathbf{0}_3 \end{bmatrix}.$$

В частности, из вышесказанного следует, что, используя доступные варианты кинематических цепей (Рисунок 2.7), невозможно синтезировать механизм с круговой направляющей, поскольку в таком случае упомянутая прямая будет совпадать с осью направляющей (Рисунок 2.13). В общем же случае, избежать описанной ситуации невозможно.

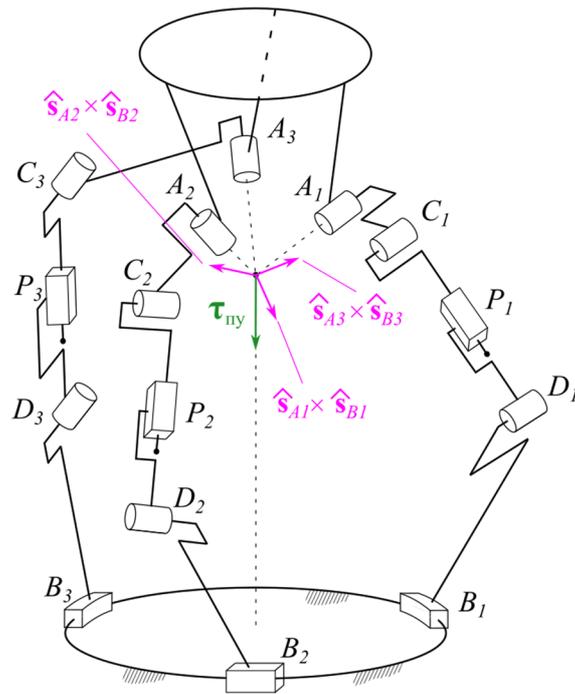


Рисунок 2.13. Пример механизма с круговой направляющей, всегда находящегося в особом положении типа «ПУ» (плоскости  $OAB$  всех трех цепей пересекаются по общей прямой)

Особое положение типа «ВС» характеризуется вырождением системы силовых винтов связей, что, как можно видеть из (2.9), возможно если хотя бы в двух цепях векторы  $\hat{s}_C$  коллинеарны, либо если указанные векторы всех трех цепей лежат в одной плоскости. В первом случае необходимо, чтобы плоскости диад двух цепей оказались параллельны, что, очевидно, возможно только в случае, если между диадой и основанием есть хотя бы одна вращательная пара. Выходное звено механизма при этом получит возможность неконтролируемого перемещения в направлении, ортогональном одновременно совпавшим векторам  $\hat{s}_C$  и вектору  $\hat{s}_C$  третьей цепи (Рисунок 2.14.a). При совпадении указанных векторов в цепях 1 и 2 координаты кинематического винта бесконечного параметра  $\tau_{BC}$ , описывающего неконтролируемое перемещение выходного звена, будут следующими:

$$\tau_{BC} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3 \\ \hat{s}_{C1} \times \hat{s}_{C3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3 \\ \hat{s}_{C2} \times \hat{s}_{C3} \end{bmatrix}.$$

Во втором случае, как уже было отмечено, векторы  $\hat{s}_C$  всех цепей лежат в одной плоскости, то есть данная плоскость является ортогональной плоскостям всех трех диад. Соответственно, существование такой ортогональной плоскости и

будет являться еще одним условием попадания механизма в особое положение типа «ВС» (частный случай – плоскости всех диад пересекаются по некоторой общей прямой (Рисунок 2.14.б). Неконтролируемое перемещение выходного звена будет возможно по нормали к данной плоскости. В этом случае координаты кинематического винта неконтролируемого перемещения будут следующими:

$$\tau_{bc} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3 \\ \hat{s}_{C1} \times \hat{s}_{C2} \end{bmatrix} \propto \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3 \\ \hat{s}_{C1} \times \hat{s}_{C3} \end{bmatrix} \propto \begin{bmatrix} \mathbf{0}_3 \\ \hat{s}_{C2} \times \hat{s}_{C3} \end{bmatrix}.$$

Как и в первом случае для того, чтобы выполнение данного условия было возможным, в каждой цепи между диадой и основанием должна быть хотя бы одна вращательная пара.

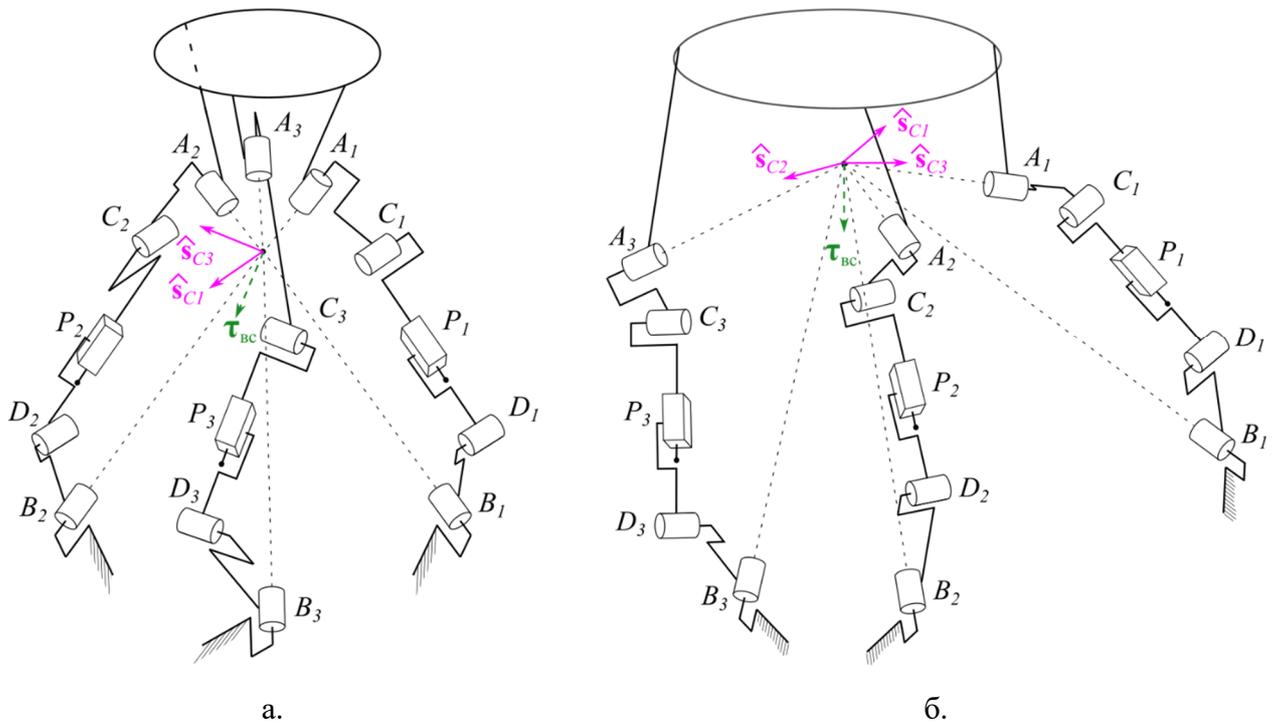


Рисунок 2.14. Особые положения типа «ВС» на примере механизма с диадой RPR: плоскости диад цепей 1 и 2 параллельны (а), плоскости диад трех цепей имеют общую прямую (б)

Особое положение типа «ПП» соответствует случаю возникновения линейной зависимости между кинематическими винтами пассивных пар цепи. На основе проведенного ранее анализа условий попадания механизма в особое положение типа «ПС», можно видеть, что попадание в особое положение типа «ПП» возможно в одном единственном случае, а именно при коллинеарности

векторов  $\hat{s}_A$  и  $\hat{s}_B$ . При этом легко видеть, что вся кинематическая цепь сможет вращаться вокруг общей оси пар  $A$  и  $B$  (Рисунок 2.15). Иными словами, попадание механизма в ранее описанное особое положение типа «ПС» при  $\hat{s}_A = \pm\hat{s}_B$  будет означать его одновременное попадание в особое положение типа «ПП».

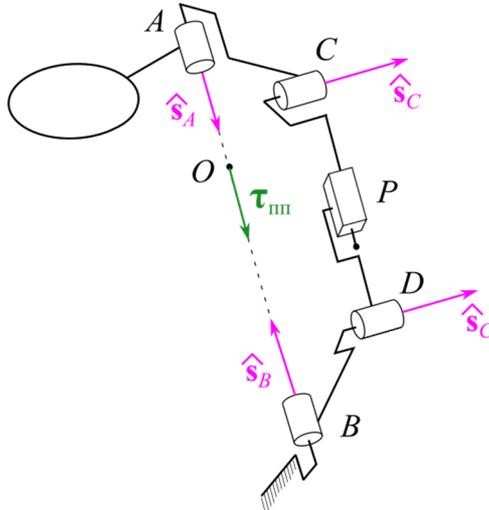


Рисунок 2.15. Пример особого положения типа «ПП» в цепи с диадой  $\underline{RPR}$

Можно видеть, что координаты кинематического винта нулевого параметра  $\tau_{III}$ , описывающего вращение цепи, будут следующими:

$$\tau_{III} = \begin{bmatrix} \hat{s}_A \\ \mathbf{0}_3 \end{bmatrix} = \pm \begin{bmatrix} \hat{s}_B \\ \mathbf{0}_3 \end{bmatrix}.$$

#### 2.4. Выбор структуры кинематической цепи для сферического механизма

Проведенный анализ показывает, что с точки зрения минимизации возможных вариантов попадания синтезируемого механизма в особые положения целесообразно использовать кинематические цепи, в которых плоская диада присоединяется непосредственно к основанию механизма, то есть структуры  $(\underline{RPR})R'R'$ ,  $(\underline{PRR})R'R'$  или  $(\underline{RRP})R'R'$ . Такое решение позволяет полностью избежать попадания механизма в особые положения типов «ВС» и «ПП», а также минимизировать количество возможных вариантов попадания в особые положения

типов «ПС» и «ПУ» при условии, что ни для одной цепи точка  $O$  не лежит в плоскости диады. При этом для исключения особых положений типа «ВС» требуется, чтобы плоскости любых двух диад не были параллельными, а плоскости трех диад не пересекались по одной общей линии. В противном случае механизм будет неработоспособным, поскольку будет всегда находиться в особом положении данного типа.

С точки зрения конструкции реального механизма целесообразно располагать приводы как можно ближе к основанию. В этой связи использование структуры цепи  $(RRP)R'R'$  представляется нерациональным, поскольку привод призматической пары может быть расположен только на втором подвижном звене, что существенно увеличит инерцию механизма, а также потребует увеличения жесткости первого звена цепи. При этом, как уже было отмечено при анализе условий попадания механизма в особое положение типа «ПС», для обеспечения максимально возможной амплитуды поворота выходного звена при использовании плоской диады с двумя последовательно расположенными вращательными парами необходимо иметь достаточную длину звена, соединяющего эти пары. Соответственно, увеличение длины первого звена влечет за собой увеличение расстояния между приводом и основанием и, как следствие, увеличение инерции цепи и всего механизма. Из двух оставшихся вариантов структуры цепи менее удачной представляется структура  $(PRR)R'R'$ , поскольку расположение призматической пары на основании означает необходимость ее консольного закрепления, что по сравнению с расположением призматической пары после вращательной увеличивает потенциальные изгибные нагрузки, воспринимаемые штоком реального приводного устройства.

Таким образом, с учетом проведенного анализа и представленных выше аргументов, наиболее подходящей структурой для сферического механизма с тремя степенями свободы и линейными приводами представляется структура  $3-(RRP)R'R'$ , которая и будет в дальнейшем рассматриваться в данной работе.

## 2.5. Результаты и выводы по главе

1. Предложен метод структурного синтеза кинематических цепей, реализующих сферическое движение выходного звена за счет приведения в движение активной призматической пары, основанный на анализе винтовых уравнений скоростей. Применение данного метода позволило получить девять вариантов структуры кинематической цепи, удовлетворяющей необходимым требованиям;

2. С применением винтового исчисления проведен анализ условий попадания синтезированных цепей и механизмов, включающих указанные цепи, в различные типы особых положений, что позволило определить наиболее подходящую для дальнейших исследований структурную схему механизма из условия минимизации возможности попадания в особые положения;

3. При условии последовательного расположения кинематических пар в цепи минимальное их количество, необходимое для обеспечения сферического движения выходного звена с тремя степенями свободы, равно пяти: четыре вращательных и одна призматическая пара. При этом две вращательных пары совместно с активной призматической парой должны образовывать плоскую диаду, а оси оставшихся двух вращательных пар должны проходить через центр вращения;

4. Использование трех из девяти возможных вариантов структуры кинематической цепи, а именно  $(R\underline{P}R)R'R'$ ,  $(\underline{P}RR)R'R'$ ,  $(RR\underline{P})R'R'$ , позволяет при соблюдении определенных условий полностью исключить попадание механизма в особые положения типов «ВС» и «ПП»;

5. Для конструирования реальных устройств наиболее предпочтительными структурами кинематической цепи являются  $(R\underline{P}R)R'R'$ ,  $(\underline{P}RR)R'R'$ , поскольку вариант структуры  $(RR\underline{P})R'R'$  подразумевает необходимость размещения привода на втором подвижном звене, что ухудшит массово-инерционные характеристики проектируемого устройства.

## ГЛАВА 3. АНАЛИЗ МЕХАНИЗМА 3-(RPR)R'R'

### 3.1. Геометрия механизма и вывод уравнений связи

В предыдущей главе было установлено, что для сферического механизма параллельной структуры с линейными приводами наиболее целесообразной представляется схема с тремя идентичными кинематическими цепями (RPR)R'R'. При этом, поскольку анализ проводился для общего случая структуры цепи, взаимное расположение осей кинематических пар цепи (углы их пересечения или скрещивания), а также взаимное расположение плоскостей диад различных цепей не задавалось.

При синтезе реальных сферических механизмов, как правило, важно обеспечить возможность ориентировать выходное звено в любом направлении в рамках некоторого заданного сферического сектора, угловые размеры которого определяются конкретным применением, под которое проектируется механизм. Кроме того, для указанного сектора могут также устанавливаться требования к значениям угла поворота вокруг собственной оси выходного звена. Таким образом, важное значение приобретает радиальная симметрия рабочей зоны относительно некоторой оси в пространстве. Для рассматриваемого механизма, очевидно, симметрия рабочей зоны будет во многом определяться симметричностью расположения плоскостей диад, относительно некоторой оси.

Симметричность расположения плоскостей диад может быть достигнута, например, за счет того, что указанные плоскости будут пересекаться под углом  $120^\circ$  по общей прямой, проходящей через центр вращения, либо, в более общем случае, образовывать грани призмы, основанием которой является равносторонний треугольник, а ось проходит через центр вращения. Однако, как было показано в предыдущей главе, в таком случае механизм будет всегда находиться в особом положении типа «ВС» с неконтролируемым перемещением вдоль указанной оси.

Другой вариант – сделать плоскости диад взаимно ортогональным. В таком случае осью радиальной симметрии будет прямая, проходящая через центр вращения под одинаковым углом к каждой из плоскостей диад цепей. Данный вариант представляется наиболее целесообразным, поскольку силовые винты связей цепей всегда будут оставаться взаимно ортогональными, что делает любую конфигурацию механизма наиболее «далекой» от особого положения типа «ВС». Именно такой вариант принят для дальнейшего исследования (Рисунок 3.1).

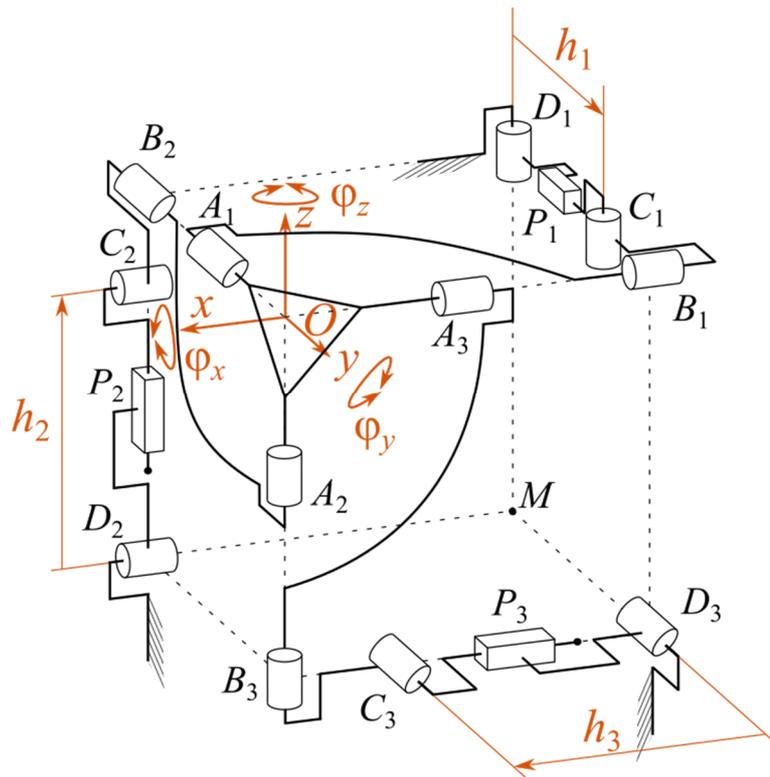


Рисунок 3.1. Схема сферического механизма 3-(RPR)R'R'

Рассмотрим структуру и геометрию исследуемого механизма. К выходному звену присоединяются вращательные кинематические пары  $A_1$ ,  $A_2$  и  $A_3$ , оси которых являются взаимно ортогональными. Далее в каждой  $i$ -й ( $i = 1 \dots 3$ ) кинематической цепи пара  $A_i$  соединяется посредством промежуточного звена с вращательной парой  $B_i$ , ось которой ортогональна оси пары  $A_i$ . В свою очередь, пара  $B_i$  через промежуточное звено соединяется с вращательной парой  $C_i$ , ось которой ортогональна оси пары  $B_i$ . Пара  $C_i$  является частью плоской диады, в которую входят также соединенная с неподвижным основанием механизма вращательная пара  $D_i$  и приводная призматическая пара  $P_i$ . Для удобства будем считать, что центр

вращения – точка  $O$  – одновременно является началом декартовой системы координат  $Oxyz$ . Будем также считать, что индекс «1» имеет цепь, плоскость диады которой совпадает с плоскостью  $Oxy$ , индекс «2» имеет цепь, у которой плоскость диады совпадает с плоскостью  $Oyz$ , и, соответственно, цепь, диада которой лежит в плоскости  $Ozx$ , будет иметь индекс «3».

Для анализа кинематики и рабочей зоны любого механизма параллельной структуры прежде всего необходимо получить уравнения связи для его кинематических цепей, связывающие координаты выходного звена с перемещением привода в каждой цепи. Для механизмов данного типа подобные уравнения, как правило, имеют неявный вид, однако, обычно представляется возможным аналитически решить обратную задачу о положениях, то есть явным образом выразить из уравнений связи зависимость приводных координат от координат выходного звена. Прямая же задача, заключающаяся в определении координат выходного звена по заданным приводным координатам, в большинстве случаев для параллельных механизмов может быть решена только численно.

Для сферического механизма координатами выходного звена будут являться некоторые параметры, определяющие ориентацию этого звена относительно системы  $Oxyz$ . В данной работе в качестве таких параметров будут использоваться углы поворота  $\varphi_x$ ,  $\varphi_y$ ,  $\varphi_z$ , и соответствующие им матрицы поворота:

$$\mathbf{R}_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_x & -\sin \varphi_x \\ 0 & \sin \varphi_x & \cos \varphi_x \end{bmatrix}, \mathbf{R}_y = \begin{bmatrix} \cos \varphi_y & 0 & \sin \varphi_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi_y & 0 & \cos \varphi_y \end{bmatrix}, \mathbf{R}_z = \begin{bmatrix} \cos \varphi_z & -\sin \varphi_z & 0 \\ \sin \varphi_z & \cos \varphi_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Матрица поворота  $\mathbf{R}$  выходного звена получается перемножением указанных матриц и зависит от последовательности поворотов, причем матрицы перемножаются в обратном порядке. Так, для последовательности поворотов  $x, y, z$  матрица поворота будет следующей:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_z \mathbf{R}_y \mathbf{R}_x. \quad (3.1)$$

При проведении дальнейших расчетов будем считать, что матрица  $\mathbf{R}$  определяется согласно выражению (3.1).

Приводными координатами, обозначаемыми  $h_i$ , будут являться расстояния между парами  $C_i$  и  $D_i$  в каждой кинематической цепи. Стоит заметить, что в частном случае оси пар  $D_1, D_2, D_3$  могут пересекаться в точке  $M$ . При этом в некотором начальном положении механизма, то есть при нулевых углах поворота выходного звена, точки  $O, B_1, B_2, B_3, D_1, D_2, D_3$  и  $M$  могут являться вершинами куба (Рисунок 3.1), однако для справедливости дальнейших выкладок выполнение данного условия необязательно.

Пусть  $x_{0Ai}, y_{0Ai}, z_{0Ai}$  – известные (задаются геометрией выходного звена) координаты точки  $A_i$  в начальном положении. Тогда после некоторого поворота, характеризуемого матрицей  $\mathbf{R}$ , координаты  $x_{Ai}, y_{Ai}, z_{Ai}$  данного шарнира будут следующими:

$$\begin{bmatrix} x_{Ai} \\ y_{Ai} \\ z_{Ai} \end{bmatrix} = \mathbf{R} \begin{bmatrix} x_{0Ai} \\ y_{0Ai} \\ z_{0Ai} \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

Для выбранной геометрии механизма (Рисунок 3.1) координаты точек  $A_i$  в начальном положении будут следующими:

$$\begin{bmatrix} x_{0A1} \\ y_{0A1} \\ z_{0A1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -l_{OA1} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_{0A2} \\ y_{0A2} \\ z_{0A2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -l_{OA2} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_{0A3} \\ y_{0A3} \\ z_{0A3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_{OA3} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

где  $l_{OAi}$  – расстояние от точки  $O$  до точки  $A_i$ .

Очевидно, что, поскольку в каждой цепи шарниры  $A_i$  и  $B_i$  соединены жестким промежуточным звеном, расстояние между ними будет всегда оставаться постоянным:

$$(x_{Bi} - x_{Ai})^2 + (y_{Bi} - y_{Ai})^2 + (z_{Bi} - z_{Ai})^2 = l_{ABi}^2, \quad (3.3)$$

где  $x_{Bi}, y_{Bi}, z_{Bi}$  – координаты точки  $B_i$ , а  $l_{ABi}$  – расстояние между точками  $A_i$  и  $B_i$ .

Также легко видеть, что при любой ориентации выходного звена шарнир  $B_i$  может только вращаться вокруг оси шарнира  $A_i$ , то есть все его возможные положения ограничиваются некоторой окружностью, представляющей собой

основание прямого конуса, высотой которого является отрезок  $OA_i$ , а образующей – отрезок  $OB_i$ . Из этого следует, что длина отрезка  $OB_i$  остается постоянной при любой ориентации выходного звена, что с учетом того, что точка  $O$  является началом координат ( $x_O = 0, y_O = 0, z_O = 0$ ), позволяет записать:

$$x_{Bi}^2 + y_{Bi}^2 + z_{Bi}^2 = l_{OBi}^2, \quad (3.4)$$

где  $l_{OBi}$  – расстояние между точками  $O$  и  $B_i$ .

Раскроем скобки в выражении (3.3):

$$x_{Bi}^2 - 2x_{Ai}x_{Bi} + x_{Ai}^2 + y_{Bi}^2 - 2y_{Ai}y_{Bi} + y_{Ai}^2 + z_{Bi}^2 - 2z_{Ai}z_{Bi} + z_{Ai}^2 = l_{ABi}^2.$$

После перестановки слагаемых получим:

$$x_{Ai}x_{Bi} + y_{Ai}y_{Bi} + z_{Ai}z_{Bi} = \frac{x_{Ai}^2 + y_{Ai}^2 + z_{Ai}^2 + x_{Bi}^2 + y_{Bi}^2 + z_{Bi}^2 - l_{ABi}^2}{2},$$

что с учетом (3.4) дает:

$$x_{Ai}x_{Bi} + y_{Ai}y_{Bi} + z_{Ai}z_{Bi} = \frac{l_{OAi}^2 + l_{OBi}^2 - l_{ABi}^2}{2}. \quad (3.5)$$

Перейдем временно к рассмотрению только первой кинематической цепи.

Возможное движение шарнира  $B_1$  ограничено вращением относительно оси шарнира  $C_1$ , поэтому данный шарнир всегда будет находиться в плоскости диады первой цепи, то есть в плоскости  $Oxy$ , а значит  $z_{B1} = 0$  при любой ориентации выходного звена. В таком случае выражение (3.5) примет следующий вид:

$$x_{A1}x_{B1} + y_{A1}y_{B1} = l_1, \quad (3.6)$$

где для сокращения записи использовано обозначение:

$$l_1 = \frac{l_{OA1}^2 + l_{OB1}^2 - l_{AB1}^2}{2}.$$

Можно видеть, что левая часть уравнения (3.6) представляет собой скалярное произведение двух двумерных векторов, а именно вектора  $\mathbf{r}'_{OA1} = [x_{A1} \ y_{A1}]^T$ , получаемого проекцией вектора  $\mathbf{r}_{OA1}$  на плоскость  $Oxy$ , и вектора  $\mathbf{r}'_{OB1} = [x_{B1} \ y_{B1}]^T$ , равного по модулю вектору  $\mathbf{r}_{OB1}$  ввиду нахождения отрезка  $OB_1$  в плоскости  $Oxy$ ,

но имеющего две координаты, а не три. Тогда выражение (3.6) можно переписать следующим образом:

$$\mathbf{p}'_{OB_1} \cdot \mathbf{p}'_{OA_1} = \|\mathbf{p}'_{OB_1}\| \cdot \|\mathbf{p}'_{OA_1}\| \cos \alpha_1 = l_{OB_1} \sqrt{x_{A_1}^2 + y_{A_1}^2} \cos \alpha_1 = l_1, \quad (3.7)$$

где  $\alpha_1$  – угол между векторами  $\mathbf{p}'_{OA_1}$  и  $\mathbf{p}'_{OB_1}$  (Рисунок 3.2).

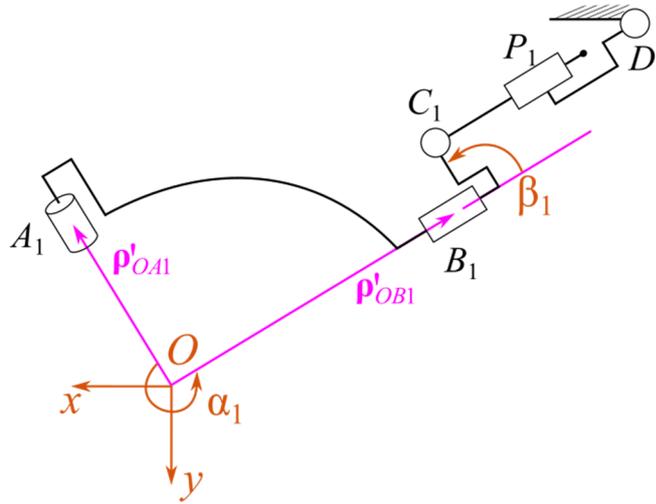


Рисунок 3.2. Вид сверху на первую кинематическую цепь

Легко видеть, что вектор  $\mathbf{p}'_{OB_1}$  (а значит и координаты  $x_{B_1}$  и  $y_{B_1}$ ) может быть получен поворотом на угол  $\alpha_1$  некоторого вектора, направленного вдоль вектора  $\mathbf{p}'_{OA_1}$  и имеющего длину  $l_{OB_1}$ :

$$\begin{bmatrix} x_{B_1} \\ y_{B_1} \end{bmatrix} = \mathbf{R}_{\alpha_1} \frac{l_{OB_1}}{\|\mathbf{p}'_{OA_1}\|} \mathbf{p}'_{OA_1} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_1 & -\sin \alpha_1 \\ \sin \alpha_1 & \cos \alpha_1 \end{bmatrix} \frac{l_{OB_1}}{\sqrt{x_{A_1}^2 + y_{A_1}^2}} \begin{bmatrix} x_{A_1} \\ y_{A_1} \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

При этом угол  $\alpha_1$  может быть вычислен из выражения (3.7):

$$\alpha_1 = \pm \arccos \left( \frac{l_1}{l_{OB_1} \sqrt{x_{A_1}^2 + y_{A_1}^2}} \right). \quad (3.9)$$

Можно видеть, что выражения (3.8) и (3.9) не определены ввиду деления на ноль в том случае, если обе координаты  $x_{A_1}$  и  $y_{A_1}$  одновременно равны нулю. Физически это означает, что точка  $A_1$  лежит на оси  $z$ . В этом случае ось пары  $A_1$  совпадает с осью  $z$ , то есть является ортогональной плоскости  $Oxy$ , в которой лежит диада цепи, что, как уже было установлено, соответствует особому положению типа «ПС». Легко видеть, что для любой цепи перемещение пары  $B_i$  относительно

пары  $A_i$  ограничено вращением вокруг оси последней. Иными словами, для некоторого заданного положения пары  $A_i$  в пространстве, возможные положения пары  $B_i$  будут ограничены некоторой окружностью. При этом пара  $B_i$  должна лежать в плоскости диады. В общем случае существует две точки пересечения указанных плоскости и окружности. Например, для первой цепи эти точки соответствуют двум возможным значениям угла  $\alpha_1$ , рассчитываемым согласно (3.9). Однако, если пара  $A_i$  перпендикулярна плоскости диады, то окружность, составленная из возможных положений точки  $B_i$ , будет целиком лежать в плоскости диады. Соответственно, поскольку точка  $B_i$  может теоретически находиться в любом месте данной окружности, обратная задача о положениях будет иметь бесконечное число решений. Стоит отметить, что данная конфигурация не будет являться особым положением типа «ПП», поскольку при заданном расстоянии  $h_i$  только для двух точек на окружности возможно существование сборки  $i$ -й кинематической цепи, причем данные точки в общем случае изолированы.

Поскольку пары  $B_1$  и  $C_1$  соединены жестким промежуточным звеном, расстояние  $l_{BC1}$  между ними постоянно. Кроме того, указанные пары и промежуточное звено всегда находятся в плоскости  $Oxy$ , а значит координаты  $x_{C1}$  и  $y_{C1}$  могут быть получены поворотом на угол  $\beta_1$  (Рисунок 3.2) некоторого вектора с началом в точке  $B_1$ , который коллинеарен вектору  $\rho'_{OB1}$  и по модулю равен  $l_{BC1}$ :

$$\begin{bmatrix} x_{C1} \\ y_{C1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{B1} \\ y_{B1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \beta_1 & -\sin \beta_1 \\ \sin \beta_1 & \cos \beta_1 \end{bmatrix} \frac{l_{BC1}}{l_{OB1}} \begin{bmatrix} x_{B1} \\ y_{B1} \end{bmatrix}. \quad (3.10)$$

Угол  $\beta_1$  определяется геометрией механизма и не зависит от ориентации выходного звена. Координата  $z_{C1} = 0$ .

Зная координаты  $x_{C1}$  и  $y_{C1}$  точки  $C_1$  и координаты  $x_{D1}$ ,  $y_{D1}$  точки  $D_1$  ( $z_{D1} = 0$ ), можно записать следующее уравнение:

$$(x_{D1} - x_{C1})^2 + (y_{D1} - y_{C1})^2 - h_1^2 = 0. \quad (3.11)$$

Координаты точки  $C_1$  вычисляются согласно (3.10) с использованием координат точки  $B_1$ , то есть путем подстановки (3.8). В свою очередь, вычисление

координат точки  $B_1$  требует подстановки в (3.8) выражения (3.2), позволяющего определить координаты точки  $A_1$  для некоторой ориентации выходного звена, задаваемой углами поворота  $\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z$ . Тогда, после всех последовательных подстановок выражение (3.11) будет содержать как выходные, так и приводную координату  $h_1$ , а значит данное выражение представляет собой уравнение связи для первой кинематической цепи механизма.

Вывод уравнений связи для второй и третьей кинематических цепей будет следовать той же логике, что была использована для первой цепи. При этом для второй кинематической цепи все приведенные ранее рассуждения будут справедливы, если в последовательности « $x, y, z$ » циклично сдвинуть координаты всех точек на одну вправо, то есть на место координаты  $x$  поставить координату  $y$ , на место  $y$  – координату  $z$ , а на место  $z$  – координату  $x$ . Так, координаты  $y_{B2}, z_{B2}$  точки  $B_2$  будут следующими:

$$\begin{bmatrix} y_{B2} \\ z_{B2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_2 & -\sin \alpha_2 \\ \sin \alpha_2 & \cos \alpha_2 \end{bmatrix} \frac{l_{OB2}}{\sqrt{y_{A2}^2 + z_{A2}^2}} \begin{bmatrix} y_{A2} \\ z_{A2} \end{bmatrix}, \quad \alpha_2 = \pm \arccos \left( \frac{l_{OA2}^2 + l_{OB2}^2 - l_{AB2}^2}{2l_{OB2} \sqrt{y_{A2}^2 + z_{A2}^2}} \right), \quad (3.12)$$

а координата  $x_{B2} = 0$ .

Для точки  $C_2$  координата  $x_{C2}$  также равна нулю, а две оставшиеся координаты будут следующими:

$$\begin{bmatrix} y_{C2} \\ z_{C2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_{B2} \\ z_{B2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \beta_2 & -\sin \beta_2 \\ \sin \beta_2 & \cos \beta_2 \end{bmatrix} \frac{l_{BC2}}{l_{OB2}} \begin{bmatrix} y_{B2} \\ z_{B2} \end{bmatrix}. \quad (3.13)$$

Координаты точки  $D_2$  известны и постоянны, причем  $x_{D2} = 0$ . Соответственно, уравнение связи для второй цепи будет иметь следующий вид:

$$(y_{D2} - y_{C2})^2 + (z_{D2} - z_{C2})^2 - h_2^2 = 0. \quad (3.14)$$

Можно видеть, что по аналогии с выражениями, полученными для первой цепи, последовательная подстановка (3.2) в (3.12), (3.12) в (3.13) и (3.13) в (3.14) позволяет связать выходные координаты механизма с приводной координатой второй цепи  $h_2$ .

Для третьей цепи  $y_{B3} = 0$  и  $y_{C3} = 0$ , а оставшиеся координаты точек  $B_3$  и  $C_3$  определяются следующим образом:

$$\begin{bmatrix} z_{B3} \\ x_{B3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_3 & -\sin \alpha_3 \\ \sin \alpha_3 & \cos \alpha_3 \end{bmatrix} \frac{l_{OB3}}{\sqrt{z_{A3}^2 + x_{A3}^2}} \begin{bmatrix} z_{A3} \\ x_{A3} \end{bmatrix}, \quad \alpha_3 = \pm \arccos \left( \frac{l_{OA3}^2 + l_{OB3}^2 - l_{AB3}^2}{2l_{OB3} \sqrt{z_{A3}^2 + x_{A3}^2}} \right), \quad (3.15)$$

$$\begin{bmatrix} z_{C3} \\ x_{C3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{B3} \\ x_{B3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \beta_3 & -\sin \beta_3 \\ \sin \beta_3 & \cos \beta_3 \end{bmatrix} \frac{l_{BC3}}{l_{OB3}} \begin{bmatrix} z_{B3} \\ x_{B3} \end{bmatrix}. \quad (3.16)$$

Также для данной цепи  $y_{D3} = 0$ , а уравнение связи имеет следующий вид:

$$(z_{D3} - z_{C3})^2 + (x_{D3} - x_{C3})^2 - h_3^2 = 0. \quad (3.17)$$

По аналогии с первой и второй цепями, углы поворота  $\varphi_x$ ,  $\varphi_y$ ,  $\varphi_z$  могут быть связаны с приводной координатой третьей цепи  $h_3$  путем последовательной подстановки (3.2) в (3.15), (3.15) в (3.16) и, наконец, (3.16) в (3.17).

### 3.2. Решение задачи о положениях и моделирование рабочей зоны

Аналитическое решение обратной задачи о положениях для механизма естественным образом вытекает из полученных ранее уравнений связи:

$$\begin{cases} h_1 = \sqrt{(x_{D1} - x_{C1})^2 + (y_{D1} - y_{C1})^2}, \\ h_2 = \sqrt{(y_{D2} - y_{C2})^2 + (z_{D2} - z_{C2})^2}, \\ h_3 = \sqrt{(z_{D3} - z_{C3})^2 + (x_{D3} - x_{C3})^2}. \end{cases} \quad (3.18)$$

Стоит заметить, что в формуле (3.18) знак « $\pm$ » перед корнем не используется, поскольку физически расстояние между точками  $C_i$  и  $D_i$  может выражаться только положительным числом.

Далее перейдем к численному примеру обратной задачи о положениях.

Рассматриваемый механизм имеет следующие геометрические параметры:  $l_{OA_i} = 0,4$  м;  $l_{OB_i} = 1$  м;  $l_{AB_i} = 1,077$  м;  $l_{BC_i} = 0,25$  м;  $\beta_i = 90^\circ$ ; координаты точек  $D_i$  (м):  $D_1 = [-1 \ -1 \ 0]$ ,  $D_2 = [0 \ -1 \ -1]$ ,  $D_3 = [-1 \ 0 \ -1]$ ; координаты точек  $A_i$  в начальном положении (м):  $A_{01} = [0 \ -0,4 \ 0]$ ,  $A_{02} = [0 \ 0 \ -0,4]$ ,  $A_{03} = [-0,4 \ 0 \ 0]$ . Расстояния от точки  $O$  до углов подвижной платформы равны  $0,25$  м. Расстояние от точки  $D_i$  до условного центра шарнира  $P_i$  при визуализации  $l_{DP_i} = 0,2$  м.

При выборе варианта решения обратной задачи о положениях кинематических цепей индекс «1» будет соответствовать знаку «+» перед арккосинусом в формулах (3.9), (3.12), (3.15), а индекс «2» будет соответствовать выбору знака «-» в указанных формулах. Рабочая сборка в начальном положении механизма (Рисунок 3.3), соответствующая ранее представленной конфигурации (Рисунок 3.1), будет иметь обозначение «222», то есть для каждой цепи должен быть выбран второй вариант решения обратной задачи о положениях.

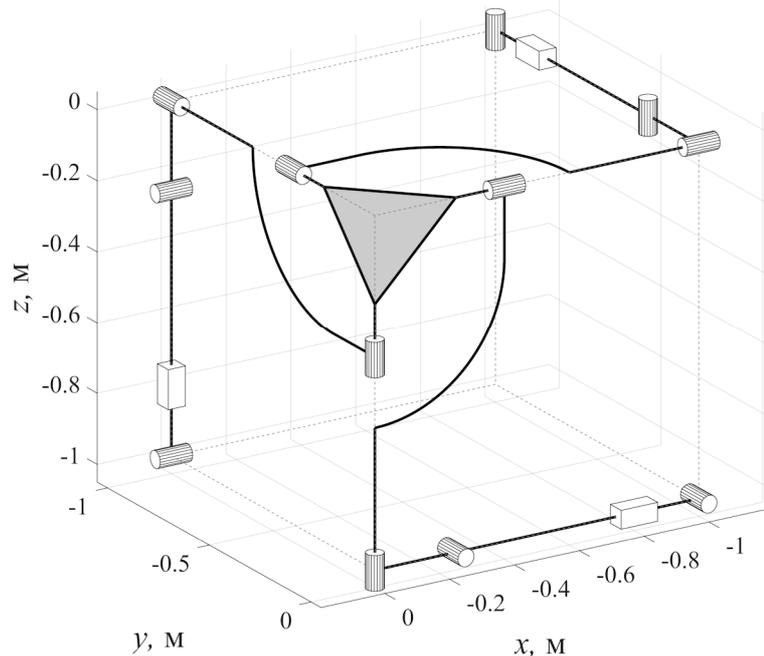
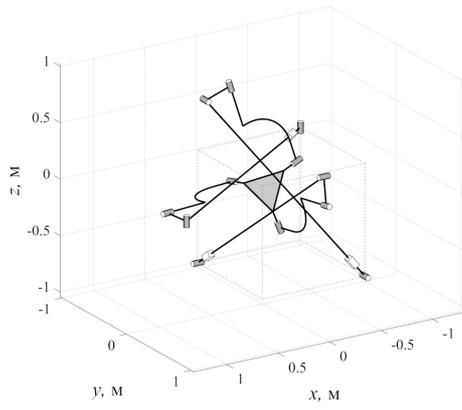


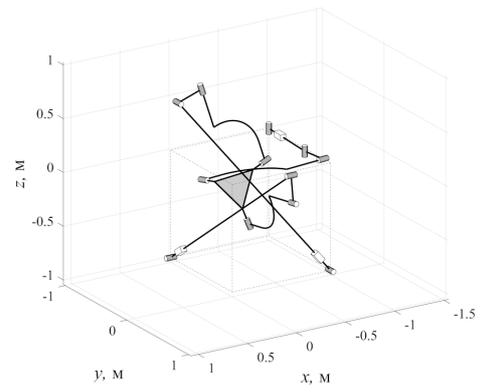
Рисунок 3.3. Механизм в начальном положении (рабочая сборка «222»)

Все расчеты и визуализация выполняются в среде MATLAB с помощью специально написанных для исследования данного механизма программ.

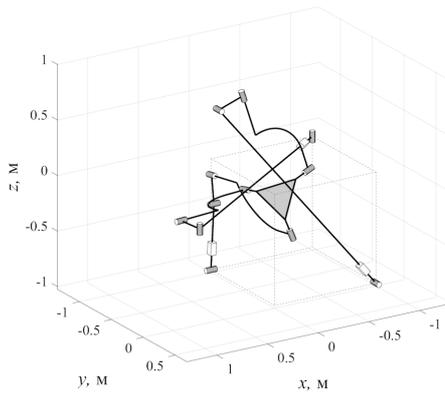
Рассмотрим все возможные решения обратной задачи о положениях (рабочие сборки) для некоторых случайно выбранных значений углов поворота:  $\varphi_x = 11^\circ$ ,  $\varphi_y = 18^\circ$ ,  $\varphi_z = 10^\circ$  (Рисунок 3.4).



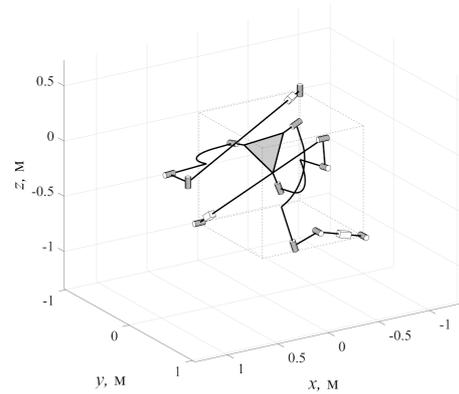
а.



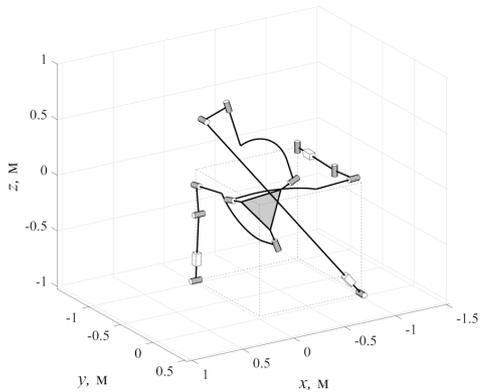
б.



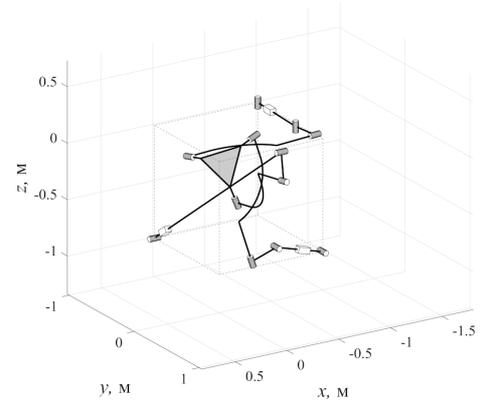
в.



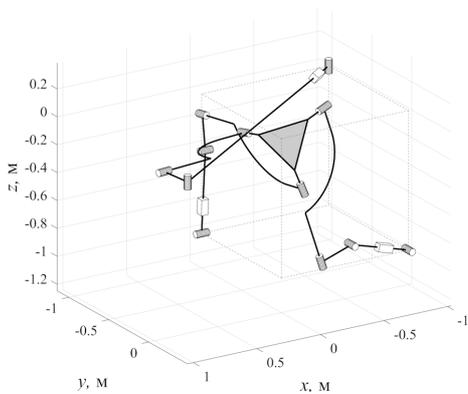
г.



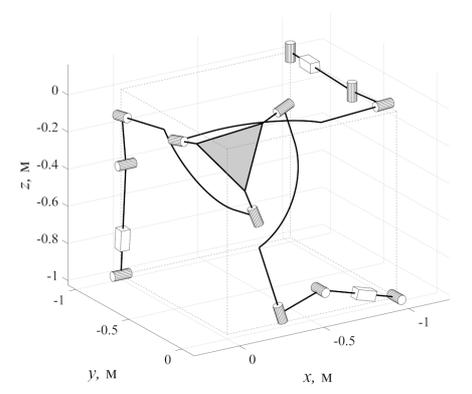
д.



е.



ж.



з.

Рисунок 3.4. Возможные решения обратной задачи о положениях (рабочие сборки) для значений углов поворота  $\varphi_x = 11^\circ$ ,  $\varphi_y = 18^\circ$ ,  $\varphi_z = 10^\circ$ : «111» (а), «211» (б), «121» (в), «112» (г), «221» (д), «212» (е), «122» (ж), «222» (з)

Решением задачи о положениях для указанного сочетания углов поворота являются следующие значения приводных координат:  $h_{1.1} = 2,391$  м,  $h_{1.2} = 0,638$  м,  $h_{2.1} = 2,398$  м,  $h_{2.2} = 0,610$  м,  $h_{3.1} = 2,430$  м,  $h_{3.2} = 0,467$  м. Легко видеть, что для каждой цепи первый вариант решения является менее предпочтительным, поскольку в таком случае удлинение звена  $C_iD_i$ , в среднем, больше чем в четыре раза превышает таковое для второго варианта решения. На практике это означает уменьшение жесткости механизма, а также необходимость использования более массивных линейных приводов или передач с большим рабочим ходом. Кроме того, из представленной визуализации видно, что все рабочие сборки, кроме сборки «222», приводят к интерференции звеньев. При этом легко видеть, что при изменении размеров механизма сборка «222» все равно окажется если не единственной работоспособной, то, как минимум, наиболее предпочтительной, поскольку все решения с индексом «1» для каждой цепи будут требовать большего удлинения звена  $C_iD_i$ . Таким образом, в дальнейших исследованиях целесообразно рассматривать именно данную рабочую сборку.

После решения обратной задачи о положениях становится возможной оценка формы и размеров рабочей зоны. Принадлежность какой-либо точки рабочей зоне определяется существованием соответствующей рабочей сборки, то есть возможностью решения в ней обратной задачи о положениях: если указанная задача может быть решена в действительных числах, то точка принадлежит рабочей зоне.

Для анализа рабочей зоны будем использовать итерационный подход, заключающийся в том, что для каждого из углов поворота задаются пределы изменения его значения, а затем проводится перебор указанных значений с некоторым шагом, и в каждой точке проверяется возможность решить обратную задачу о положениях. Кроме того, в целях повышения удобства визуализации для описания ориентации выходного звена будем использовать углы  $\varphi_a$ ,  $\varphi_n$ ,  $\varphi_c$  вместо углов  $\varphi_x$ ,  $\varphi_y$ ,  $\varphi_z$  (Рисунок 3.5). Последовательность действий для задания ориентации выходного звена при помощи указанных углов следующая: сначала ось наклона (изображена фиолетовым цветом) из своего начального положения поворачивается вокруг оси симметрии механизма (изображена оранжевым цветом)

на азимутальный угол  $\varphi_a$ . Далее выходное звено и ось собственного вращения (изображена синим цветом, в начальном положении совпадает с осью симметрии механизма) поворачиваются вокруг оси наклона на угол  $\varphi_n$ . После этого выходное звено поворачивается вокруг оси собственного вращения на угол  $\varphi_c$ . Ось наклона в начальном положении задается вектором, перпендикулярным оси симметрии механизма и лежащим в плоскости  $Oxy$ .

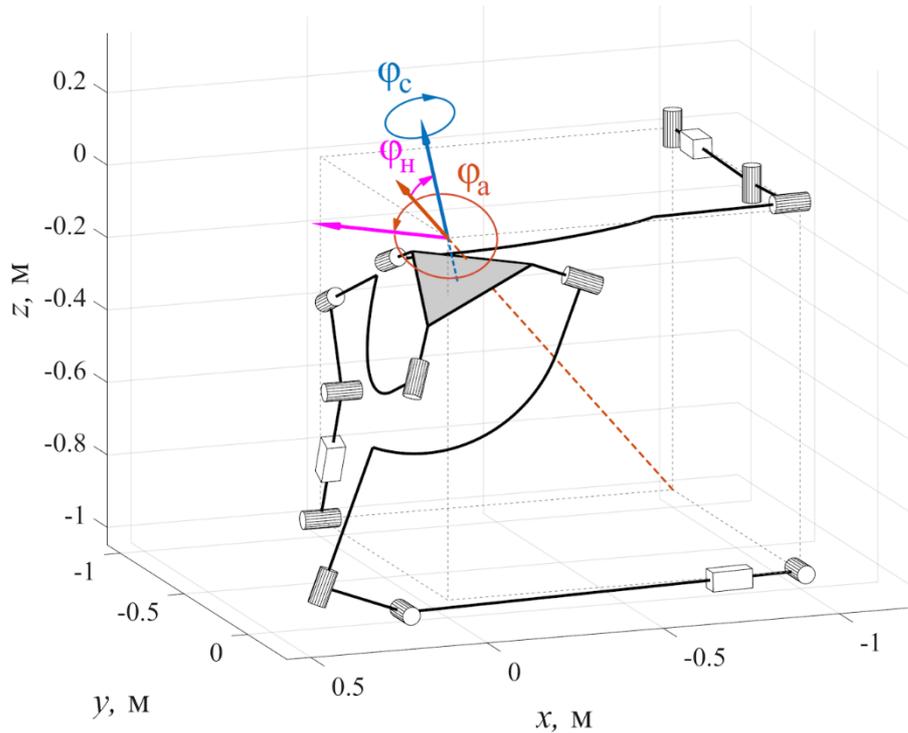


Рисунок 3.5. Ось симметрии механизма, оси наклона и собственного вращения механизма, а также соответствующие углы

При решении обратной задачи о положениях для заданных углов  $\varphi_a$ ,  $\varphi_n$ ,  $\varphi_c$  необходимо сформировать матрицу поворота  $\mathbf{R}$ . Пусть ось симметрии задается единичным вектором  $\hat{\mathbf{s}}_a$ , а ось наклона в начальном положении – единичным вектором  $\hat{\mathbf{s}}_{0n}$ . Для рассматриваемого механизма

$$\hat{\mathbf{s}}_a = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}^T, \quad \hat{\mathbf{s}}_{0n} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}^T.$$

Координаты некоторого единичного вектора  $\hat{\mathbf{s}}_n$ , задающего ось наклона выходного звена после ее поворота из начального положения на угол  $\varphi_a$  вокруг оси

симметрии механизма, могут быть получены с использованием формулы Родрига [13]:

$$\hat{\mathbf{s}}_H = \hat{\mathbf{s}}_{0H} + \sin \varphi_a [\hat{\mathbf{s}}_a] \hat{\mathbf{s}}_{0H} + (1 - \cos \varphi_a) [\hat{\mathbf{s}}_a]^2 \hat{\mathbf{s}}_{0H},$$

где  $[\hat{\mathbf{s}}_a]$  – представление вектора  $\hat{\mathbf{s}}_a$  в виде кососимметричной матрицы:

$$[\hat{\mathbf{s}}_a] = \begin{bmatrix} 0 & -s_{az} & s_{ay} \\ s_{az} & 0 & -s_{ax} \\ -s_{ay} & s_{ax} & 0 \end{bmatrix}.$$

С использованием формулы Родрига также может быть получена матрица поворота (наклона) выходного звена относительно оси наклона на угол  $\varphi_H$ :

$$\mathbf{R}_H = \mathbf{I}_{3 \times 3} + \sin \varphi_H [\hat{\mathbf{s}}_H] + (1 - \cos \varphi_H) [\hat{\mathbf{s}}_H]^2,$$

где  $\mathbf{I}_{3 \times 3}$  – единичная матрица  $3 \times 3$ , а  $[\hat{\mathbf{s}}_H]$  – представление вектора  $\hat{\mathbf{s}}_H$  в виде кососимметричной матрицы.

В начальном положении единичный вектор  $\hat{\mathbf{s}}_{0c}$  оси собственного вращения выходного звена совпадает с вектором  $\hat{\mathbf{s}}_a$  оси симметрии механизма. Соответственно, после наклона выходного звена, координаты вектора, задающего ось собственного вращения будут следующими:

$$\hat{\mathbf{s}}_c = \mathbf{R}_H \hat{\mathbf{s}}_a.$$

Тогда, еще раз применив формулу Родрига, получим матрицу поворота выходного звена относительно оси собственного вращения на угол  $\varphi_c$ :

$$\mathbf{R}_c = \mathbf{I}_{3 \times 3} + \sin \varphi_c [\hat{\mathbf{s}}_c] + (1 - \cos \varphi_c) [\hat{\mathbf{s}}_c]^2,$$

где, согласно ранее принятым обозначениям,  $[\hat{\mathbf{s}}_c]$  – вектор  $\hat{\mathbf{s}}_c$ , записанный в виде кососимметричной матрицы.

Наконец, матрица поворота выходного звена, которая может быть подставлена в выражение (3.2), будет иметь следующий вид:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_c \mathbf{R}_H.$$

Очевидно, что если значения приводных координаты  $h_i$  никак не ограничены, то теоретическая рабочая зона механизма также не будет ограничена, то есть выходное звено сможет иметь любую ориентацию и при этом быть повернуто вокруг оси собственного на любой произвольный угол. Однако в реальности размеры приводных координат будут конструктивно ограничены. Поэтому в качестве примера рассмотрим механизм с теми же, геометрическими параметрами, что были описаны ранее, и ограничением перемещения в каждом приводе интервалом  $0 \dots 2$  м. Диапазон изменения азимутального угла:  $\varphi_a = -180^\circ \dots 180^\circ$ , угла наклона:  $\varphi_n = 0^\circ \dots 180^\circ$ . Шаг перебора примем равным  $1^\circ$ . Визуализацию возможных положений выходного звена будем осуществлять в виде сферы с центром в точке  $O$  и радиусом  $r = 0,5$  м. То есть, если исследуемая ориентация (без учета собственного вращения) реализуема, то это будет отмечено в виде точки с координатами  $r\hat{s}_c$ . Для каждой точки на поверхности сферы, соответствующей реализуемой ориентации выходного звена, также проверялось максимально достижимое значение угла собственного вращения, как в положительном (против часовой стрелки), так и в отрицательном (по часовой стрелке) направлении. Указанная величина визуализировалась за счет изменения цвета точки на поверхности сферы (Рисунок 3.6).

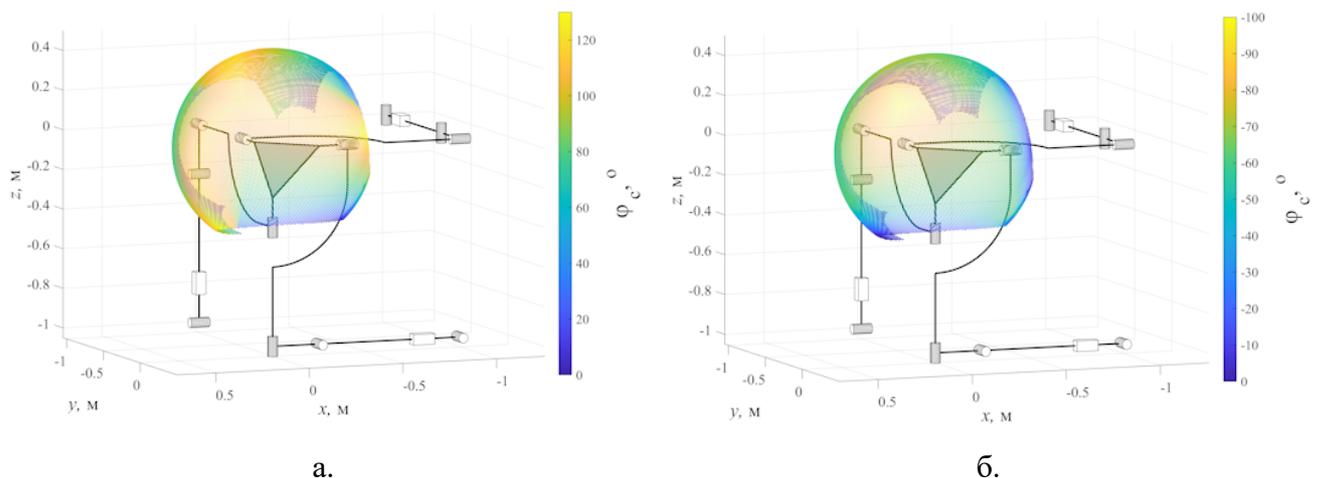
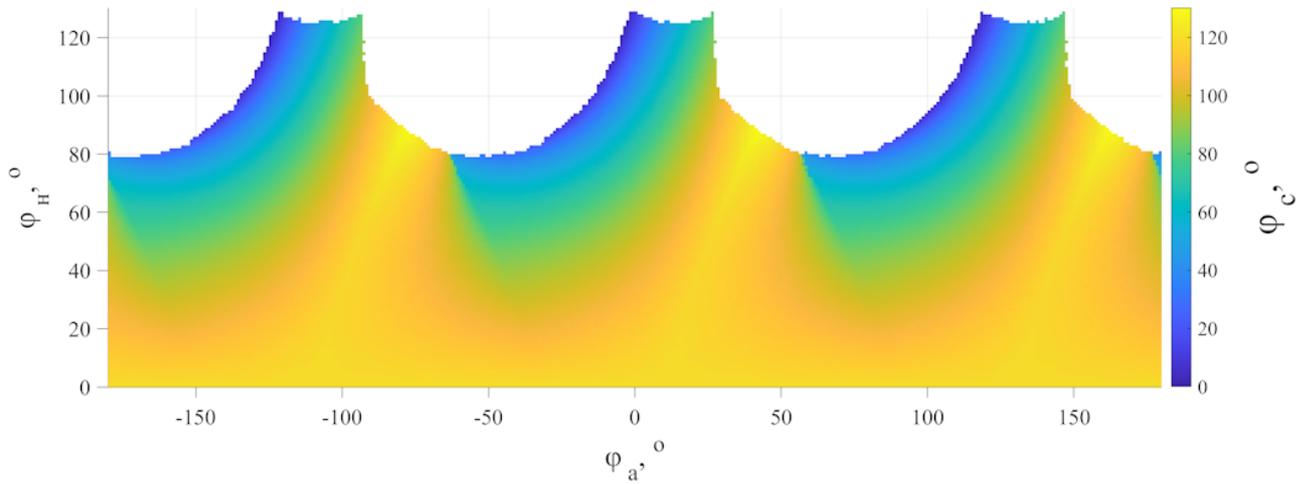
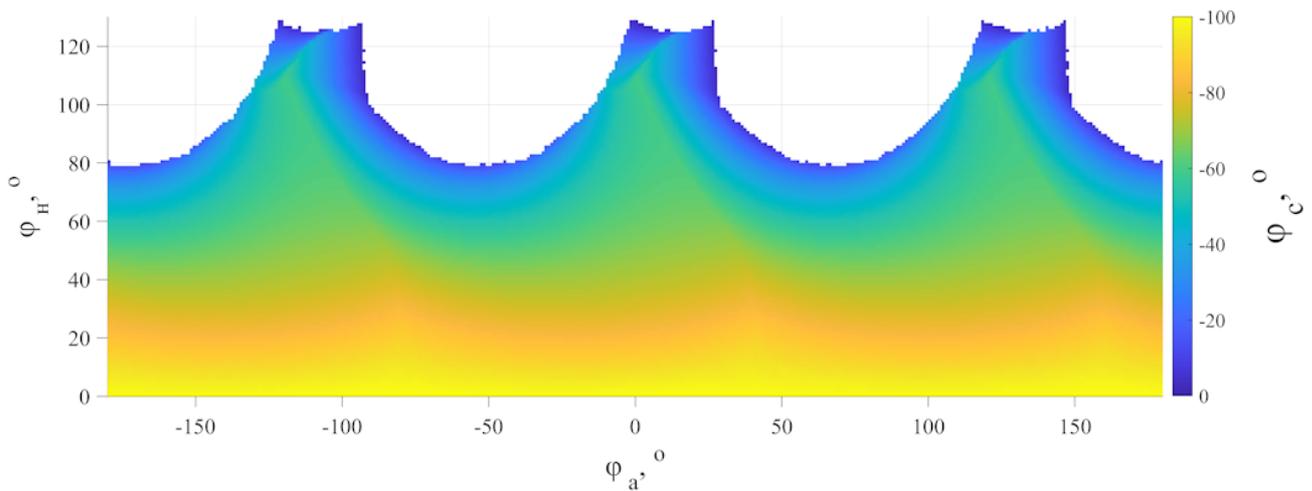


Рисунок 3.6. Рабочая зона механизма для  $h_i = 0 \dots 2$  м и собственного вращения выходного звена, отсчитываемого против часовой стрелки (а) и по часовой стрелке (б)

Данные рисунки дают представление о форме рабочей зоны, но, поскольку передняя часть сферы на них закрывает собой ее заднюю часть, для удобства также были визуализированы плоские «карты» рабочей зоны (Рисунок 3.7).



а.



б.

Рисунок 3.7. Карта рабочей зоны механизма для  $h_i = 0 \dots 2$  м и собственного вращения выходного звена, отсчитываемого против часовой стрелки (а) и по часовой стрелке (б)

Как можно видеть, предложенный подход позволяет удобно оценить и наглядно визуализировать рабочую зону механизма. Стоит отметить, что при уменьшении хода привода, рабочая зона будет разделяться на отдельные сектора, переход между которыми невозможен. Для демонстрации данного явления можно рассмотреть пример расчетов для диапазона  $h_i = 0,5 \dots 1,5$  м с визуализацией на поверхности сферы (Рисунок 3.8) и в виде карты рабочей зоны (Рисунок 3.9).

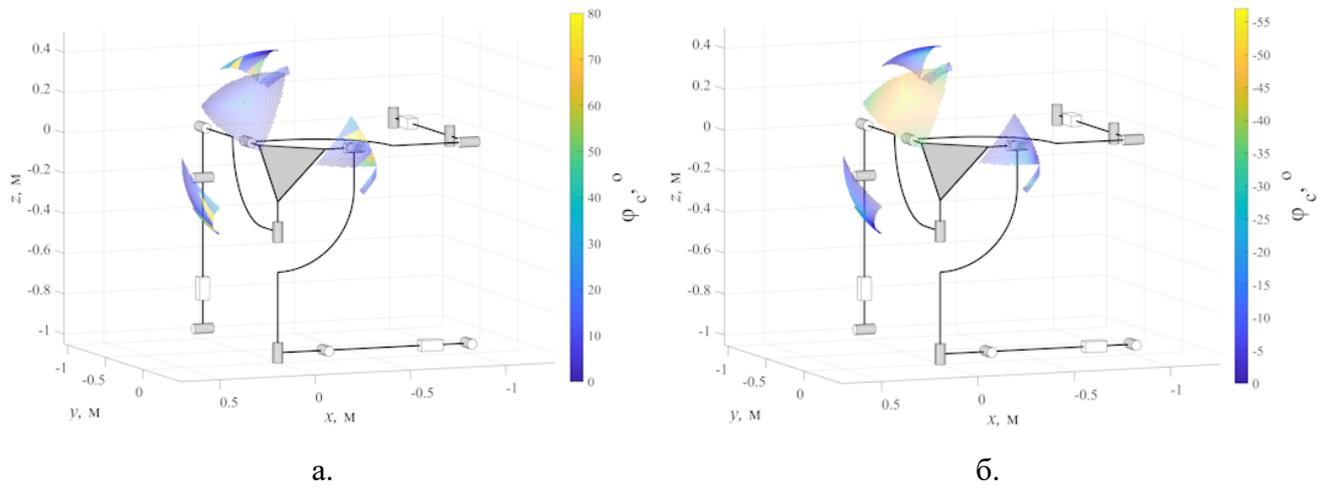


Рисунок 3.8. Рабочая зона механизма для  $h_i = 0,5 \dots 1,5$  м и собственного вращения выходного звена, отсчитываемого против часовой стрелки (а) и по часовой стрелке (б)

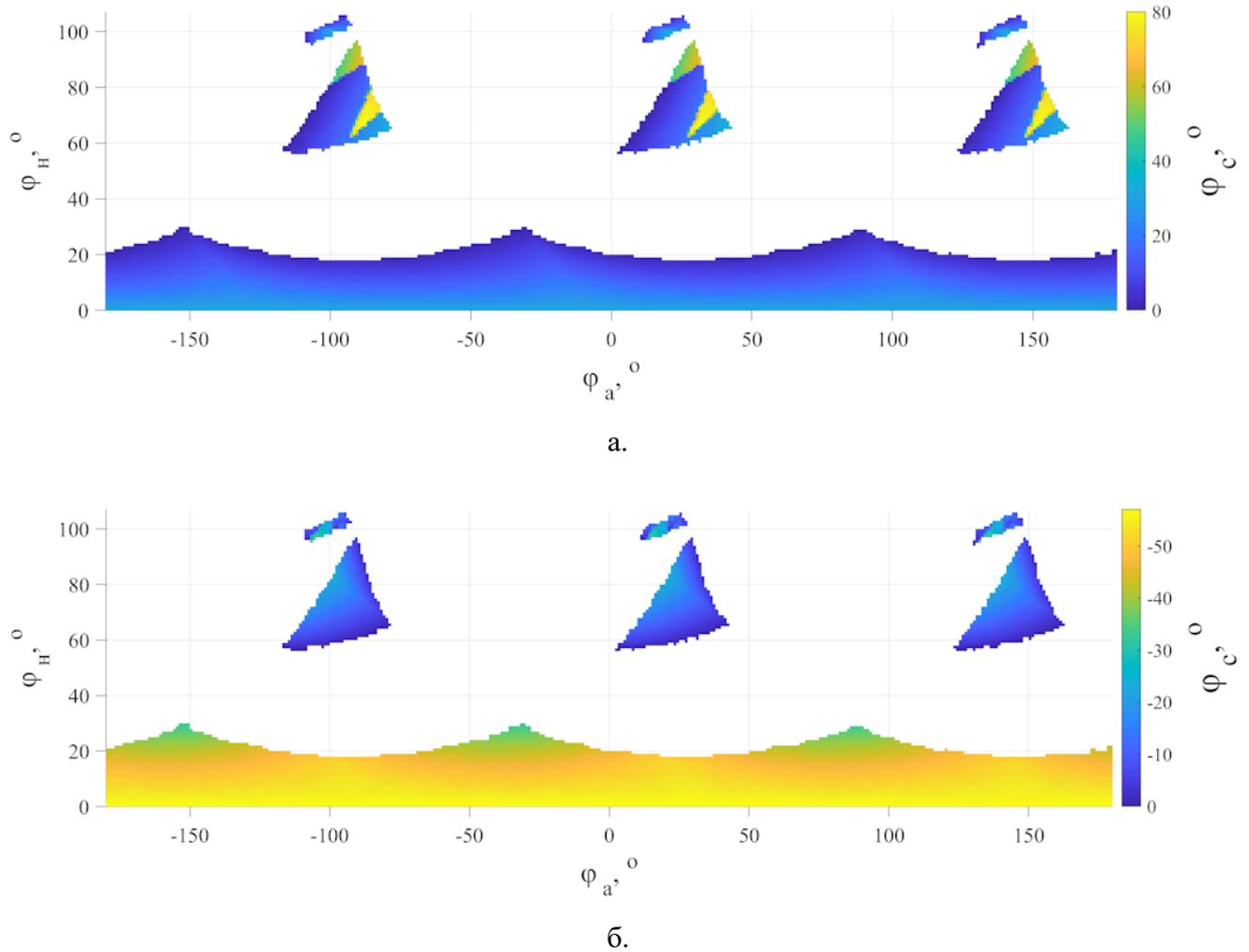


Рисунок 3.9. Карта рабочей зоны механизма для  $h_i = 0,5 \dots 1,5$  м и собственного вращения выходного звена, отсчитываемого против часовой стрелки (а) и по часовой стрелке (б)

### 3.3. Анализ скоростей, силовой анализ и анализ особых положений

Существует два основных подхода к решению задачи о скоростях, силовому анализу и исследованию особых положений механизмов параллельной структуры. Первый подход основывается на дифференцировании уравнений связи, составлении матрицы Якоби механизма и анализе поведения ее определителя. Второй подход подразумевает анализ кинематических и силовых винтов механизма. Поскольку во второй главе данной работы уже были получены в общем виде аналитические выражения для определения координат кинематических и силовых винтов механизма, целесообразно использовать подход, основанный на винтовом исчислении. Другим аргументом в пользу применения данного подхода является то, что при дифференцировании уравнений связи рассматриваемого механизма будут получаться громоздкие выражения, неудобные для визуального анализа и требующие большего времени для вычисления значений необходимых величин. В то же время винтовые уравнения получаются более компактными, что позволяет быстрее проводить итерационный анализ.

Для решения задачи о скоростях винтовым методом, запишем по аналогии с (2.2) уравнение, связывающее кинематические винты  $i$ -й цепи с кинематическим винтом выходного звена:

$$\dot{q}_{A_i} \mathbf{t}_{A_i} + \dot{q}_{B_i} \mathbf{t}_{B_i} + \dot{q}_{C_i} \mathbf{t}_{C_i} + \dot{q}_{D_i} \mathbf{t}_{D_i} + \dot{h}_i \mathbf{t}_{P_i} = \mathbf{\Omega}. \quad (3.19)$$

Далее для левой и правой частей уравнения (3.19) найдем относительный момент с приводным силовым винтом данной цепи  $\mathbf{w}_{\text{при}}$ . Поскольку данный силовой винт взаимен всем кинематическим винтам пассивных пар цепи, получим:

$$\dot{h}_i \mathbf{t}_{P_i} \circ \mathbf{w}_{\text{при}} = \mathbf{\Omega} \circ \mathbf{w}_{\text{при}},$$

откуда

$$\dot{h}_i = \frac{\mathbf{\Omega} \circ \mathbf{w}_{\text{при}}}{\mathbf{t}_{P_i} \circ \mathbf{w}_{\text{при}}}. \quad (3.20)$$

Используя выражения (2.8) и (2.15), после подстановки в (3.20) получим:

$$\dot{h}_i = \frac{\boldsymbol{\omega} \cdot \left( -\frac{(\mathbf{p}_{Ci} \times \hat{\mathbf{s}}_{Ci}) \cdot \hat{\mathbf{s}}_{CDi}}{(\hat{\mathbf{s}}_{Ai} \times \hat{\mathbf{s}}_{Bi}) \cdot \hat{\mathbf{s}}_{Ci}} \hat{\mathbf{s}}_{Ai} \times \hat{\mathbf{s}}_{Bi} \right) + \mathbf{0}_3 \cdot \hat{\mathbf{s}}_{CDi}}{\mathbf{0}_3 \cdot \left( -\frac{(\mathbf{p}_{Ci} \times \hat{\mathbf{s}}_{Ci}) \cdot \hat{\mathbf{s}}_{CDi}}{(\hat{\mathbf{s}}_{Ai} \times \hat{\mathbf{s}}_{Bi}) \cdot \hat{\mathbf{s}}_{Ci}} \hat{\mathbf{s}}_{Ai} \times \hat{\mathbf{s}}_{Bi} \right) + \hat{\mathbf{s}}_{Pi} \cdot \hat{\mathbf{s}}_{CDi}} = \frac{-\frac{(\mathbf{p}_{Ci} \times \hat{\mathbf{s}}_{Ci}) \cdot \hat{\mathbf{s}}_{CDi}}{(\hat{\mathbf{s}}_{Ai} \times \hat{\mathbf{s}}_{Bi}) \cdot \hat{\mathbf{s}}_{Ci}} (\hat{\mathbf{s}}_{Ai} \times \hat{\mathbf{s}}_{Bi}) \cdot \boldsymbol{\omega}}{\hat{\mathbf{s}}_{Pi} \cdot \hat{\mathbf{s}}_{CDi}}.$$

Положительное направление координаты  $h_i$  соответствует направлению от точки  $D_i$  к точке  $C_i$  (Рисунок 3.1) а значит  $\hat{\mathbf{s}}_{Pi} = -\hat{\mathbf{s}}_{CDi}$ , то есть  $\hat{\mathbf{s}}_{Pi} \cdot \hat{\mathbf{s}}_{CDi} = -1$ . Тогда окончательно, для заданного вектора угловых скоростей выходного звена  $\boldsymbol{\omega} = [\omega_x \ \omega_y \ \omega_z]^T$  скорость в приводной паре  $i$ -й кинематической цепи будет рассчитываться следующим образом:

$$\dot{h}_i = \frac{(\mathbf{p}_{Ci} \times \hat{\mathbf{s}}_{Ci}) \cdot \hat{\mathbf{s}}_{CDi}}{(\hat{\mathbf{s}}_{Ai} \times \hat{\mathbf{s}}_{Bi}) \cdot \hat{\mathbf{s}}_{Ci}} (\hat{\mathbf{s}}_{Ai} \times \hat{\mathbf{s}}_{Bi}) \cdot \boldsymbol{\omega}, \quad (3.21)$$

где

$$\hat{\mathbf{s}}_{Ai} = \frac{[x_{Ai} \ y_{Ai} \ z_{Ai}]^T}{\sqrt{x_{Ai}^2 + y_{Ai}^2 + z_{Ai}^2}},$$

$$\hat{\mathbf{s}}_{Bi} = \frac{[x_{Bi} \ y_{Bi} \ z_{Bi}]^T}{\sqrt{x_{Bi}^2 + y_{Bi}^2 + z_{Bi}^2}},$$

$$\hat{\mathbf{s}}_{C1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \hat{\mathbf{s}}_{C2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \hat{\mathbf{s}}_{C3} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{p}_{Ci} = \begin{bmatrix} x_{Ci} \\ y_{Ci} \\ z_{Ci} \end{bmatrix},$$

$$\hat{\mathbf{s}}_{CDi} = \frac{[x_{Di} - x_{Ci} \ y_{Di} - y_{Ci} \ z_{Di} - z_{Ci}]^T}{\sqrt{(x_{Di} - x_{Ci})^2 + (y_{Di} - y_{Ci})^2 + (z_{Di} - z_{Ci})^2}}.$$

Таким образом, для любой ориентации выходного звена механизма обратная задача о скоростях для каждой цепи может быть решена с использованием выражения (3.21).

Для решения прямой задачи о скоростях необходимо составить систему линейных уравнений, включающую уравнения (3.21) всех цепей:

$$\begin{bmatrix} \frac{(\mathbf{p}_{C1} \times \hat{\mathbf{s}}_{C1}) \cdot \hat{\mathbf{s}}_{CD1} (\hat{\mathbf{s}}_{A1} \times \hat{\mathbf{s}}_{B1})}{(\hat{\mathbf{s}}_{A1} \times \hat{\mathbf{s}}_{B1}) \cdot \hat{\mathbf{s}}_{C1}} \\ \frac{(\mathbf{p}_{C2} \times \hat{\mathbf{s}}_{C2}) \cdot \hat{\mathbf{s}}_{CD2} (\hat{\mathbf{s}}_{A2} \times \hat{\mathbf{s}}_{B2})}{(\hat{\mathbf{s}}_{A2} \times \hat{\mathbf{s}}_{B2}) \cdot \hat{\mathbf{s}}_{C2}} \\ \frac{(\mathbf{p}_{C3} \times \hat{\mathbf{s}}_{C3}) \cdot \hat{\mathbf{s}}_{CD3} (\hat{\mathbf{s}}_{A3} \times \hat{\mathbf{s}}_{B3})}{(\hat{\mathbf{s}}_{A3} \times \hat{\mathbf{s}}_{B3}) \cdot \hat{\mathbf{s}}_{C3}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \\ \dot{h}_3 \end{bmatrix}. \quad (3.22)$$

Решением прямой задачи о скоростях для некоторых заданных значений приводных скоростей будет являться решение системы (3.22).

Наибольший практический интерес представляет обратная задача о скоростях. Это связано с тем, что при проектировании механизма, как правило, заданы требуемые параметры движения выходного звена, в частности – его скорость. Тогда решение обратной задачи о скоростях позволяет определить значения скоростей в приводах, соответствующие требуемой скорости выходного звена, что в свою очередь позволяет сформулировать требования к скоростям двигателей приводов. При этом зачастую задается только абсолютное значение скорости выходного звена, а ее направление может быть любым. В таком случае наиболее целесообразным является анализ скоростей в условиях реализации наиболее неблагоприятного сценария согласно методике, предложенной в [10]. Для этого в каждой исследуемой точке рабочей зоны будем решать обратную задачу о скоростях для некоторых наихудших направлений вектора угловой скорости выходного звена, каждое из которых максимизирует скорость в соответствующем приводе. После этого указанной точке в соответствие ставится максимальное по модулю значение приводной скорости. Из (3.21) следует, что для  $i$ -й цепи наихудшим будет направление  $\boldsymbol{\omega}$ , совпадающее с вектором  $\hat{\mathbf{s}}_{Ai} \times \hat{\mathbf{s}}_{Bi}$ .

Анализ максимальных скоростей в приводах проводился с шагом итерации, равным  $0,99^\circ$ , чтобы избежать возможного попадания непосредственно в особые положения типа «ПС», в которых теоретически одна из приводных скоростей будет равна бесконечности. При этом величина хода приводов не ограничивалась.

Угол  $\varphi_c$  принимался равным нулю, а  $\|\omega\| = 1$  рад/с. Результаты визуализировались на поверхности сферы (Рисунок 3.10) и в виде плоской карты (Рисунок 3.11).

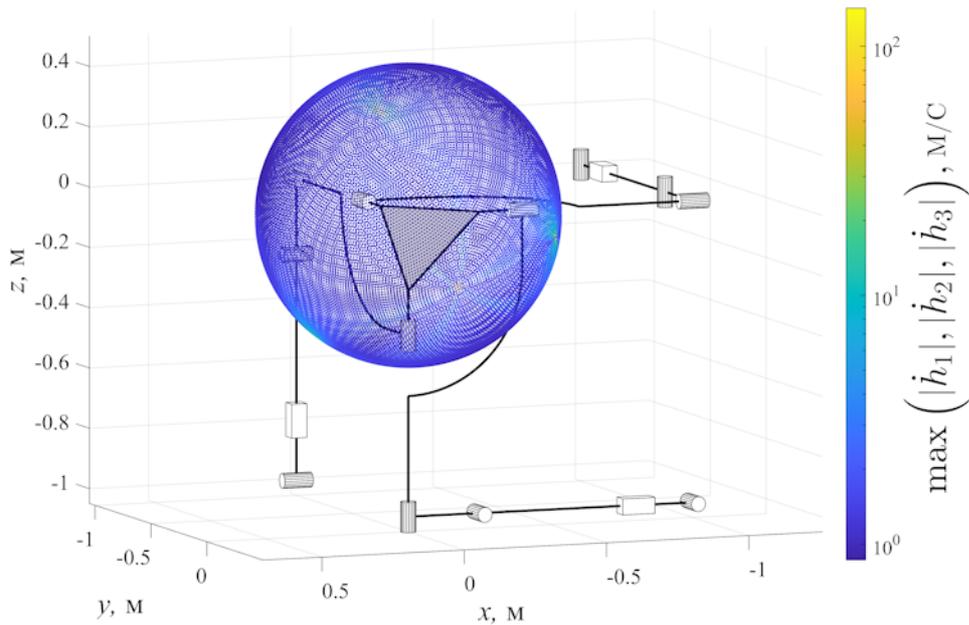


Рисунок 3.10. Абсолютное значение максимальной приводной скорости для  $\|\omega\| = 1$  рад/с при  $\varphi_c = 0^\circ$  (визуализация на поверхности сферы)

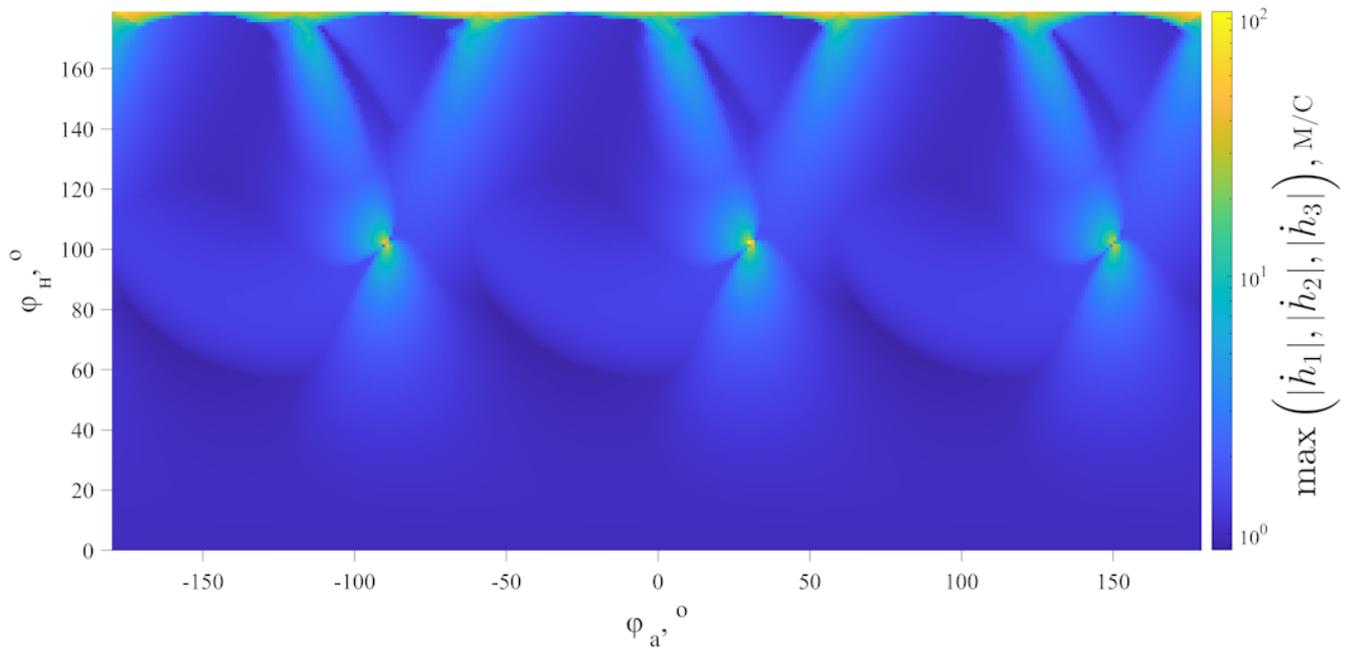


Рисунок 3.11. Абсолютное значение максимальной приводной скорости для  $\|\omega\| = 1$  рад/с при  $\varphi_c = 0^\circ$  (визуализация в виде плоской карты)

На представленных рисунках наблюдается рост значений максимальной приводной скорости для угла  $\varphi_n = \approx 102^\circ$ , если  $\varphi_a = 30 \pm 120^\circ$ , а также для угла  $\varphi_n = 180^\circ$ , если  $\varphi_a = \pm 60n^\circ$  ( $n$  – любое целое число). Анализ конфигураций промежуточных звеньев и шарниров механизма для указанных ориентаций показал,

что в первом случае наблюдается параллельность векторов  $\hat{s}_{Ai}$  и  $\hat{s}_{Ci}$  в одной из цепей (Рисунок 3.12.а), а во втором случае помимо параллельности указанных векторов дополнительно наблюдается совпадение плоскостей  $OA_iB_i$  двух из трех цепей (Рисунок 3.12.б). Согласно геометрическим условиям попадания в особые положения, полученным в предыдущей главе, в первом случае механизм будет находиться в особом положении типа «ПС», а во втором – в особом положении типов «ПС» и «ПУ» одновременно.

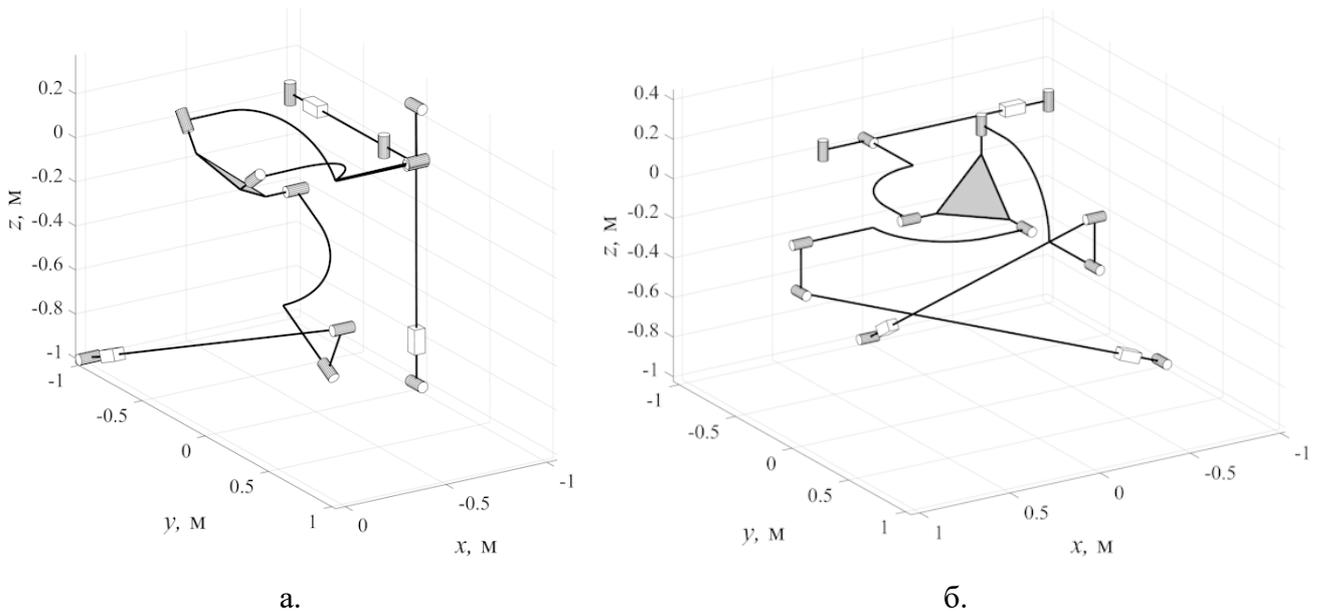


Рисунок 3.12. Примеры особых положений:  $\hat{s}_{A2} \parallel \hat{s}_{C2}$  – особое положение типа «ПС» (а),  $\hat{s}_{A3} \parallel \hat{s}_{C3}$  и плоскости  $OA_1B_1$ ,  $OA_2B_2$  параллельные – особое положение типа «ПС» и «ПУ» (б)

Таким образом, проведенный анализ скоростей механизма также позволил обнаружить ориентации механизма, соответствующие особым положениям типа «ПС».

Для силового анализа механизма рассмотрим винтовое уравнение равновесия:

$$r_{\text{пр}1} \mathbf{W}_{\text{пр}1} + r_{\text{пр}2} \mathbf{W}_{\text{пр}2} + r_{\text{пр}3} \mathbf{W}_{\text{пр}3} + r_{\text{св}1} \mathbf{W}_{\text{св}1} + r_{\text{св}2} \mathbf{W}_{\text{св}2} + r_{\text{св}3} \mathbf{W}_{\text{св}3} = \mathbf{P}, \quad (3.23)$$

где  $r_{\text{пр}i}$  и  $r_{\text{св}i}$  – коэффициент линейной комбинации, называемый также обобщенной реакцией, приводного винта, либо винта связи  $i$ -й цепи соответственно,  $\mathbf{P}$  – силовой винт, характеризующий внешнюю нагрузку на механизм.

Физический смысл данного уравнения заключается в том, что любая внешняя нагрузка, действующая на механизм, должна уравниваться силовыми винтами его кинематических цепей. По сути, (3.23) представляет собой систему из шести линейных уравнений с шестью неизвестными обобщенными реакциями. Решая данную систему для заданного винта  $\mathbf{P}$ , можно вычислить нагрузку, воспринимаемую  $i$ -й цепью, которая будет равна  $r_{\text{пр}i}\mathbf{w}_{\text{пр}i} + r_{\text{св}i}\mathbf{w}_{\text{св}i}$ . Данная нагрузка затем может быть использована, например, для расчета нагрузок на отдельные конструктивные элементы цепей и проверки их прочности. При этом наибольший интерес представляет нагрузка, передаваемая на привод, поскольку, как и в случае с приводными скоростями, необходимое приводное усилие определяет требуемые параметры двигателя привода.

На привод  $i$ -й цепи передается только нагрузка  $r_{\text{пр}i}\mathbf{w}_{\text{пр}i}$ , в то время как компонента  $r_{\text{св}i}\mathbf{w}_{\text{св}i}$  компенсируется только за счет реакций цепи. Поскольку в рассматриваемом механизме используется линейный привод, моментная часть винта  $r_{\text{пр}i}\mathbf{w}_{\text{пр}i}$  данным приводом восприниматься не будет. Векторная часть любого силового винта, представляющая собой силу, не меняется при изменении точки приведения, поэтому для определения приводного усилия  $F_i$  достаточно найти величину проекции векторной части винта  $r_{\text{пр}i}\mathbf{w}_{\text{пр}i}$  на единичный вектор, совпадающий по направлению с линией привода, то есть на вектор  $\hat{\mathbf{s}}_{Pi}$ :

$$F_i = \frac{r_{\text{пр}i}\mathbf{w}_{\text{пр}i} \cdot \hat{\mathbf{s}}_{Pi}}{\|\hat{\mathbf{s}}_{Pi}\|} = \frac{r_{\text{пр}i}\hat{\mathbf{s}}_{CDi} \cdot (-\hat{\mathbf{s}}_{CDi})}{\|-\hat{\mathbf{s}}_{CDi}\|} = -r_{\text{пр}i}. \quad (3.24)$$

Как и в случае с приводными скоростями, зачастую известна только величина внешней нагрузки, но не ее направление, например, задана масса перемещаемого механизмом объекта, но направления ускорений при его перемещении неизвестны. В этом случае при расчете приводного усилия  $i$ -й цепи целесообразно максимизировать соответствующую обобщенную реакцию. Пусть  $\boldsymbol{\tau}_{\text{пр}i}$  – кинематический винт, взаимный всем силовым винтам механизма, кроме  $\mathbf{w}_{\text{пр}i}$ .

$$\mathbf{w} \circ \boldsymbol{\tau}_{\text{пр}i} = 0 \quad \forall \mathbf{w} \neq \mathbf{w}_{\text{пр}i}. \quad (3.25)$$

Выражение (3.25) однозначно определяет винт  $\boldsymbol{\tau}_{\text{пр}i}$  с точностью до множителя.

Взяв относительный момент левой и правой частей уравнения (3.23) с кинематическим винтом  $\tau_{pri}$ , получим:

$$r_{pri} \mathbf{w}_{pri} \circ \tau_{pri} = \mathbf{P} \circ \tau_{pri},$$

откуда с учетом (3.24) получим:

$$F_i = -\frac{\mathbf{P} \circ \tau_{pri}}{\mathbf{w}_{pri} \circ \tau_{pri}}. \quad (3.26)$$

Из (3.26) следует, что максимальная по модулю сила в  $i$ -м приводе будет соответствовать силовому винту внешней нагрузки, координаты которого пропорциональны координатам кинематического винта  $\tau_{pri}$ :

$$\mathbf{P} \propto \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & \mathbf{I}_{3 \times 3} \\ \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \tau_{pri},$$

причем ввиду взаимности  $\tau_{pri}$  всем винтам связи, винт  $\mathbf{P}$  будет чистым моментом.

Как и при анализе приводных скоростей, будем производить перебор ориентаций выходного звена с шагом  $0,99^\circ$  без ограничения хода приводов при условии, что  $\varphi_c = 0^\circ$  и  $\|\mathbf{P}\| = 1 \text{ Н}\cdot\text{м}$ , и визуализацией полученных результатов на поверхности сферы (Рисунок 3.13) и в виде плоской карты (Рисунок 3.14).

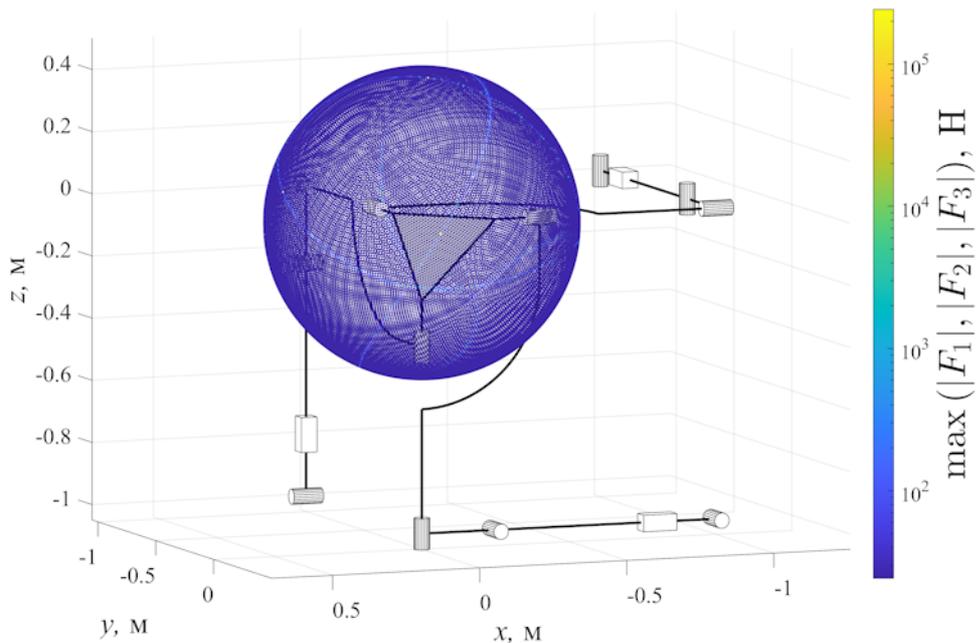


Рисунок 3.13. Абсолютное значение максимального приводного усилия для  $\|\mathbf{P}\| = 1 \text{ Н}\cdot\text{м}$  при  $\varphi_c = 0^\circ$  (визуализация на поверхности сферы)

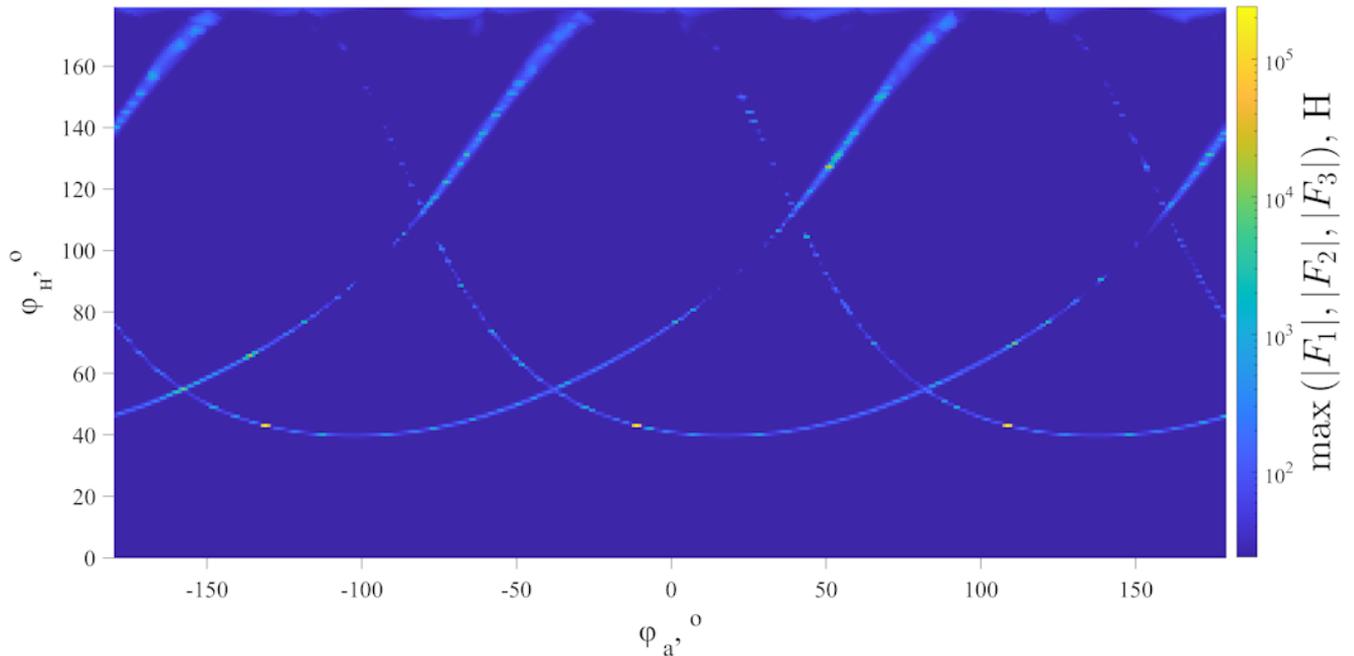


Рисунок 3.14. Абсолютное значение максимального приводного усилия для  $\|\mathbf{P}\| = 1 \text{ Н}\cdot\text{м}$  при  $\varphi_c = 0^\circ$  (визуализация в виде плоской карты)

Известно [88], что рост нагрузки на приводы должен наблюдаться при приближении к особым положениям типа «ПУ». Таким образом, подтвердить адекватность полученной общей картины изменения максимального приводного усилия по рабочей зоне можно путем определения расположения точек, соответствующих указанному типу особых положений. Для этого был проведен итерационный анализ изменения знака определителя матрицы координат силовых винтов механизма  $\mathbf{W}$ :

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_{\text{пр1}} & \mathbf{w}_{\text{пр2}} & \mathbf{w}_{\text{пр3}} & \mathbf{w}_{\text{св1}} & \mathbf{w}_{\text{св2}} & \mathbf{w}_{\text{св3}} \end{bmatrix}.$$

Матрица  $\mathbf{W}$  для рассматриваемого механизма имеет размерность  $6 \times 6$  и в общем случае вырождается в особые положения типов «ПУ» или «ВС». Вырождение матрицы  $\mathbf{W}$  соответствует особому положению типа «ПУ» в том случае, если линейная зависимость возникает между приводными силовыми винтами (первые три столбца матрицы), а силовые винты связи остаются линейно независимы. Соответственно, при линейной зависимости силовых винтов связи (последние три столбца матрицы) и сохранении линейной независимости приводных силовых винтов, вырождение матрицы  $\mathbf{W}$  будет означать попадание механизма в особое положение типа «ВС» [10]. Однако, как было показано в

предыдущей главе, для рассматриваемого механизма, возможно попадание только в особые положения типа «ПУ», поэтому вырождение матрицы  $\mathbf{W}$  будет соответствовать особому положению только этого типа.

Как уже было отмечено выше, для определения точек вырождения матрицы  $\mathbf{W}$  и, соответственно, точек, в которых механизм попадает в особое положение типа «ПУ» был проведен итерационный анализ изменения знака определителя данной матрицы. При вырождении матрицы, как известно, ее определитель становится равным нулю. Тогда, если шаг перебора достаточно мал, можно рассматривать знак определителя матрицы  $\mathbf{W}$  в двух соседних проанализированных точках. Если знак оказывается разным, то есть определитель имеет положительное значение в одной точке и отрицательное в другой, то между этими точками существует точка, в которой определитель будет равен нулю.

Итерационный анализ проводился с теми же параметрами и при тех же условиях, что и анализ максимальных приводных усилий с визуализацией зон положительных и отрицательных значений определителя матрицы  $\mathbf{W}$  на поверхности сферы (Рисунок 3.15) и в виде плоской карты (Рисунок 3.16).

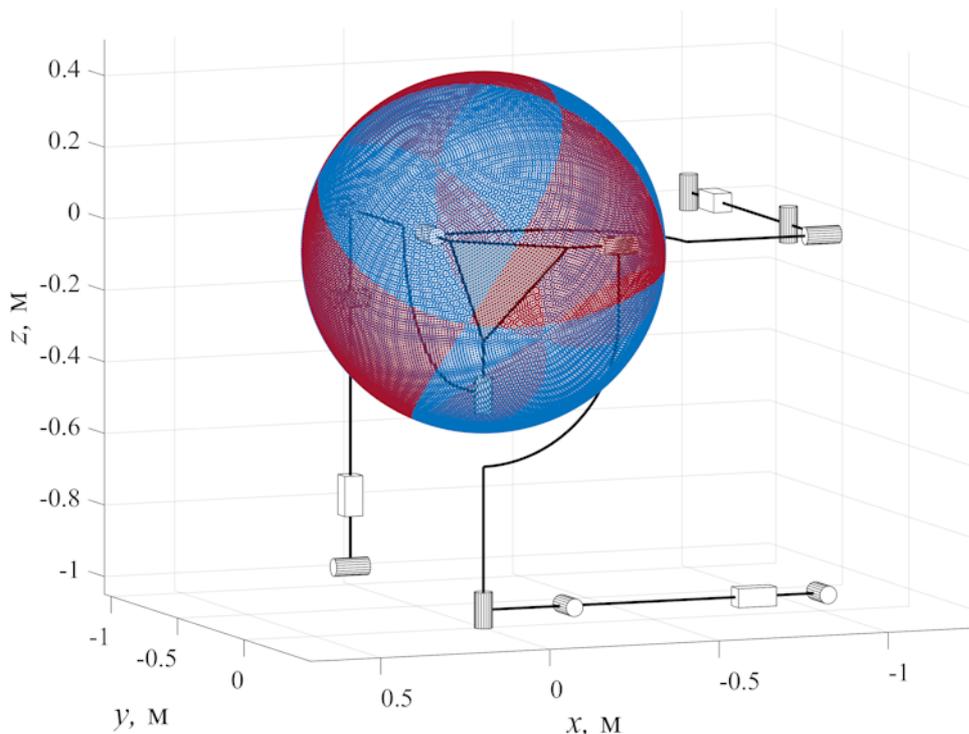


Рисунок 3.15. Знак определителя матрицы  $\mathbf{W}$ : «+» – красный, «-» – синий (визуализация на поверхности сферы)

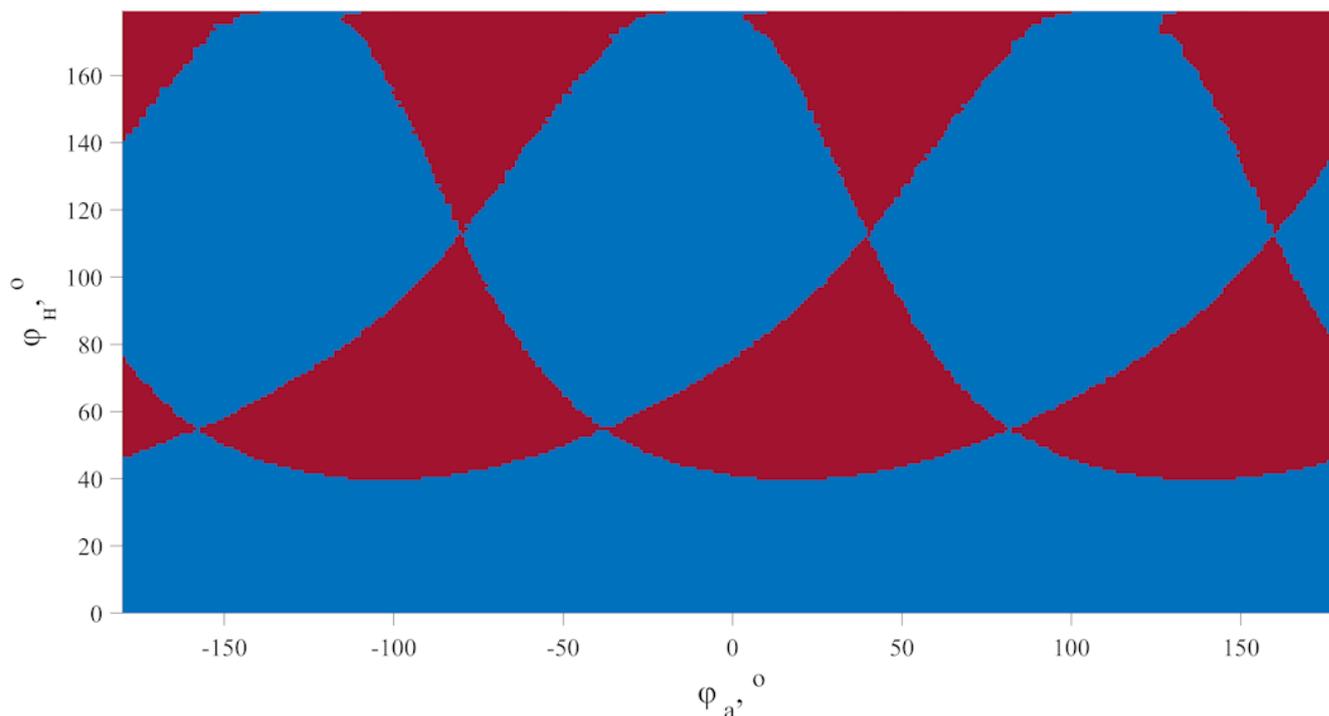


Рисунок 3.16. Знак определителя матрицы  $\mathbf{W}$ : «+» – красный, «-» – синий (визуализация в виде плоской карты)

Как можно видеть, границы зон положительных и отрицательных значений определителя матрицы  $\mathbf{W}$  совпадают с местами, в которых наблюдается увеличения значения максимального приводного усилия, что полностью соответствует ожиданиям и подтверждает правильность проведенных расчетов.

### 3.4. Результаты и выводы по главе

1. Для механизма 3-(RPR)R'R' получены уравнения связи и аналитически решена обратная задача о положениях, а также задача о скоростях, что позволило создать математическую модель кинематики механизма в общем виде;
2. С использованием математической модели кинематики механизма проведен итерационный анализ рабочей зоны с определением ее размеров и формы, в том числе с учетом конструктивных ограничений, а также скоростной и силовой анализ, и исследование особых положений, включая оценку близости к ним с применением скоростных и силовых критериев;

3. Разработанная математическая модель и алгоритмы анализа кинематики, рабочей зоны и особых положений реализованы в виде прикладных программ в системе компьютерной алгебры MATLAB, позволяющих при необходимости гибко изменять геометрические параметры исследуемого механизма;

4. Обратная задача о положениях исследуемого механизма имеет восемь теоретических решений (рабочих сборок), однако только одно из них может быть реализовано в реальном механизме, поскольку оставшиеся семь будут приводить к интерференции промежуточных звеньев;

5. Результаты итерационного анализа особых положений, а также скоростного и силового анализа в контексте оценки близости к особым положениям соответствуют изложенной в предыдущей главе геометрической трактовке условий попадания в особые положения, что подтверждает правильность полученных результатов.

## ГЛАВА 4. ПРОТОТИПИРОВАНИЕ МЕХАНИЗМА 3-(RPR)R'R'

### 4.1. Конструирование и сборка прототипа механизма

Современные средства компьютерного моделирования позволяют довольно точно воспроизводить различные параметры механических систем. Так, например, при синтезе рычажных механизмов, включающих в том числе и механизмы параллельной структуры, проверка соответствия движения выходного звена теоретически заданному закону, а также динамическое моделирование параметров механизма в движении может быть осуществлена на компьютере с использованием специализированного программного обеспечения – MDS-систем (англ. *multibody dynamics simulation*). Более того, часть функционала таких систем реализована и в программах для твердотельного моделирования – САД-системах, которые также зачастую имеют функционал, позволяющий проводить конечно-элементные прочностные расчеты отдельных элементов и узлов механизма, либо всего механизма в целом. В то же время без физического прототипирования механизма невозможно оценить его работоспособность в реальных условиях, при которых звенья не являются абсолютно жесткими, а сборка механизма осуществляется с различного рода погрешностями. Кроме того, одной компьютерной модели, как правило, недостаточно для того, чтобы оценить удобство сборки, настройки и калибровки реального устройства. С учетом вышесказанного создание физического прототипа является одним из важных этапов в процессе разработки и исследования любого механизма параллельной структуры, особенно если такой механизм не был ранее подробно изучен другими исследователями.

Создание прототипа исследуемого механизма 3-(RPR)R'R' было начато с разработки конструкции приводной диады. В качестве привода был выбран готовый линейный актуатор, представляющий собой электроцилиндр на основе передачи винт-гайка скольжения с трапецеидальной резьбой. Винт данной

передачи установлен в подшипниках в корпусе актуатора и приводится в движение двигателем постоянного тока через трехступенчатую зубчатую передачу, расположенную в задней части актуатора (Рисунок 4.1).

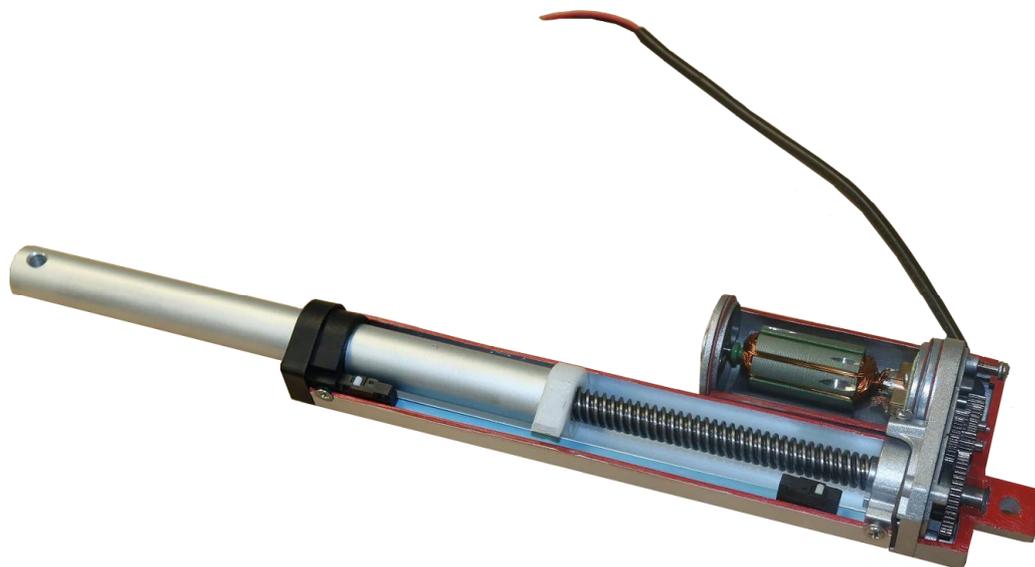


Рисунок 4.1. Внутреннее устройство линейного актуатора

При подаче напряжения 12 В на двигатель, винт начинает вращаться с постоянной скоростью, в результате чего пластиковая гайка передачи, зафиксированная от проворота, линейно перемещается вдоль винта. Направление перемещения определяется полярностью напряжения питания двигателя. С гайкой посредством резьбы соединен цилиндрический шток диаметром 20 мм. Ход гайки и, как следствие, штока ограничен с двух сторон концевыми выключателями, размыкающими цепь питания, и для выбранной модели актуатора составляет 250 мм. Выбор данной модели обусловлен необходимостью создания достаточно компактного по габаритам прототипа, который при этом не был бы слишком миниатюрным и, как следствие, неудобным для конструирования. Среди моделей актуаторов с близкими значениями хода выбранная модель имеет наибольшую скорость перемещения штока, равную 10 мм/с.

После выбора модели актуатора была начата разработка конструкции механизма с использованием САПР КОМПАС-3D. Для ускорения процесса физического прототипирования, а также с целью снижения итоговой стоимости прототипа большинство нестандартных конструируемых деталей проектировалось

из соображений, что их изготовление будет осуществляться аддитивным методом из пластика PLA, то есть посредством печати на 3D-принтере.

Первая вращательная пара кинематической цепи (шарнир  $D_i$ ), служащая также опорой актуатора, реализована в виде закрепляемого на основании стакана, внутри которого установлена свободно вращающаяся ось (Рисунок 4.2).

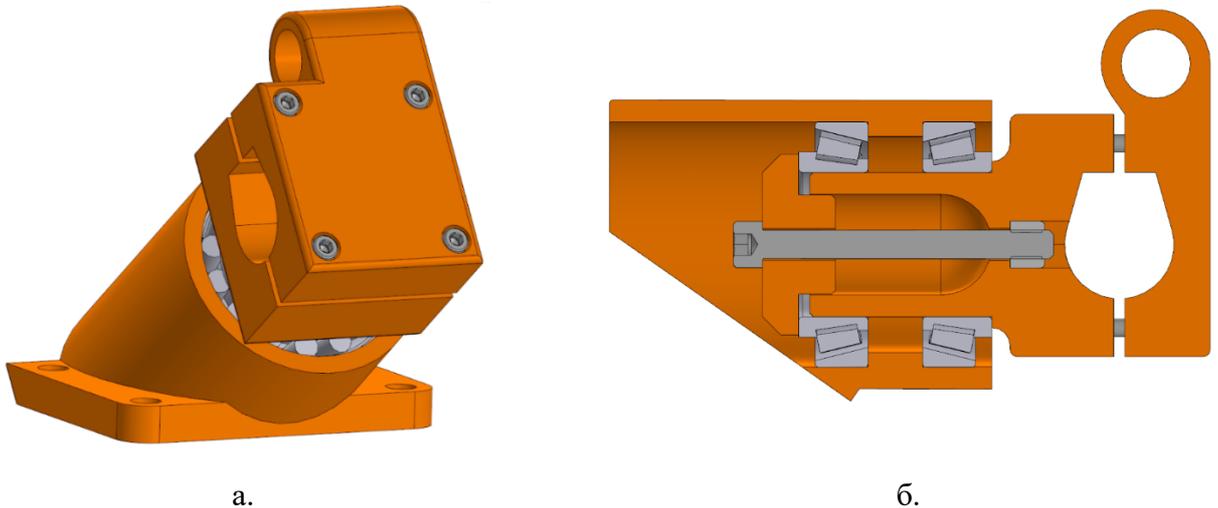


Рисунок 4.2. Трехмерная модель поворотной опоры привода: общий вид (а), вид в разрезе (б)

Для установки оси используются два роликовых радиально-упорных подшипника 2007108А, закрепленных по схеме «врастяжку». Осевая фиксация и регулировка подшипников осуществляется путем затяжки винта М8 длиной 80 мм, насквозь проходящего через ось и прижимающего шайбу-фиксатор в внутреннем кольцу заднего (ближайшего к основанию стакана) подшипника. С противоположного конца винт закручивается в самоконтрящуюся гайку, зафиксированную от поворота путем установки в шестигранное углубление на оси. Часть оси, находящаяся вне стакана, выполнена в форме половины (нижней части) клеммы квадратной формы. При этом паз клеммы соответствует форме профиля корпуса актуатора. Ответная (верхняя) часть клеммы притягивается к нижней части посредством четырех винтов М5 длиной 45 мм, завинчиваемых в самоконтрящиеся гайки, установленные в шестигранных углублениях в нижней части клеммы. Использование клеммового соединения вместо конструирования шарнира на штатном месте его крепления, расположенном на задней части актуатора,

позволяет значительно уменьшить консольную длину и, как следствие, изгибную нагрузку на ось опоры.

На верхней части клеммы имеется сквозное цилиндрическое отверстие, предназначенное для установки линейного подшипника типа LM10LUU, осевая фиксация которого осуществляется с помощью двух наружных стопорных колец. Внутри данного подшипника перемещается направляющий стержень, который представляет собой шлифованный вал диаметром 10 мм и длиной 400 мм. Один из концов данного стержня закреплен в наконечнике диады, а второй является свободным (Рисунок 4.3).

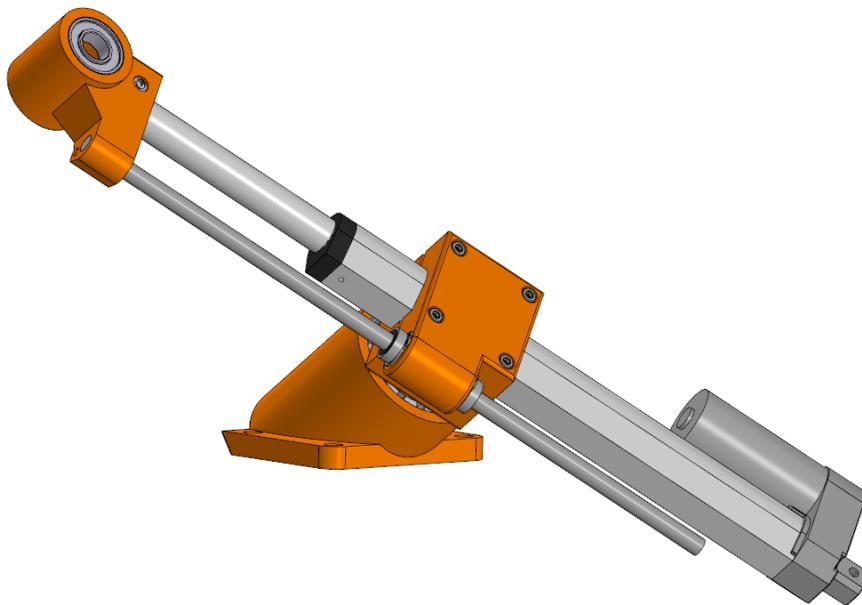


Рисунок 4.3. Трехмерная модель приводной диады

Концевая часть штока актуатора размещается в специальном глухом отверстии на корпусе наконечника диады. Для крепления штока к наконечнику и его фиксации от осевого смещения используется цилиндрический штифт диаметром 6,5 мм, проходящий насквозь через корпус наконечника и отверстие в штоке. Данный штифт имеет внутреннее сквозное отверстие, через которое проходит винт М3 длиной 40 мм. С помощью данного винта, а также двух увеличенных шайб и самоконтрящейся гайки штифт фиксируется относительно наконечника, что в свою очередь фиксирует наконечник относительно штока (Рисунок 4.4.а). Что касается направляющего стержня, то он фиксируется в соответствующем сквозном отверстии в наконечнике двумя установочными винтами М3 длиной 8 мм,

завинчиваемых через гайки, установленные в специальных пазах, предотвращающих их проворот (Рисунок 4.4.б).

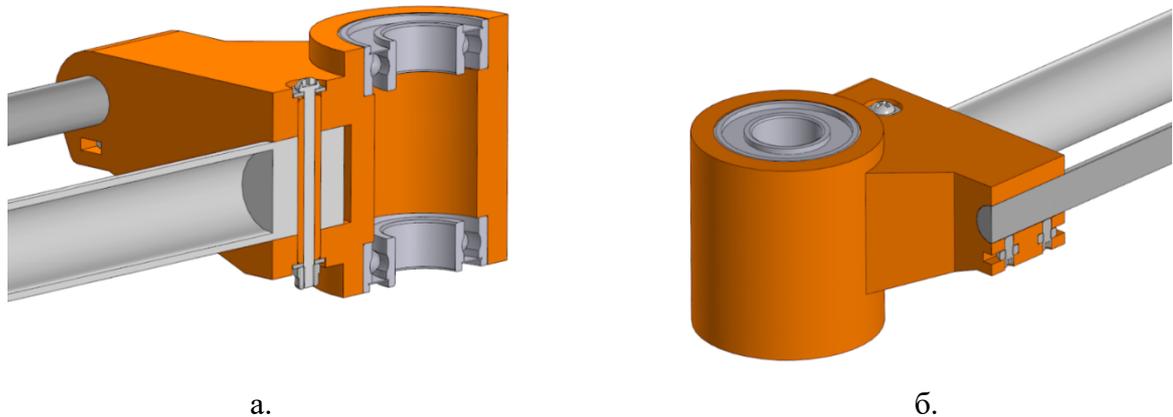


Рисунок 4.4. Трехмерная модель наконечника приводной диады: вид с сечением по оси штока актуатора (а), вид с сечением по оси направляющего стержня (б)

Важным конструктивным элементом наконечника диады является цилиндрический стакан, в котором размещаются два шариковых радиальных подшипника 60103. Взаимное расположение штока актуатора, направляющего стержня и наконечника диады подобрано таким образом, чтобы обеспечивалась параллельность оси указанного стакана с осью стакана, закрепляемого на основании. Данный стакан предназначен для размещения в нем второго звена кинематической цепи – оси, на конце которой располагается аналогичный стакан, ось которого ортогональна оси стакана наконечника диады (Рисунок 4.5).

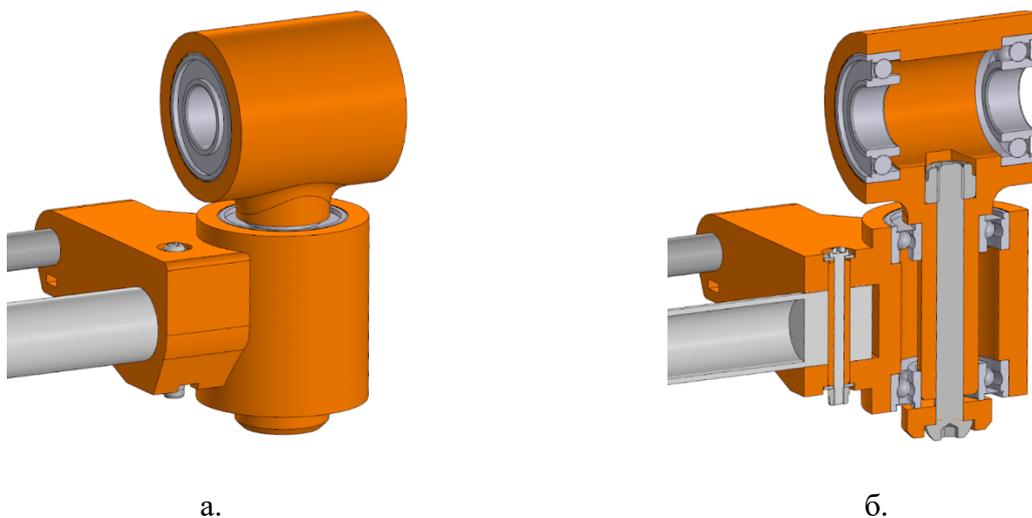


Рисунок 4.5. Трехмерная модель второго звена механизма, размещенного в наконечнике диады: общий вид (а), вид с сечением по оси штока актуатора (б)

Ось второго звена фиксируется в стакане наконечника диады с помощью шайбы-фиксатора, притягиваемой к внутреннему кольцу одного из подшипников винтом М6 длиной 70 мм. Данный винт проходит сквозь ось и заворачивается в самоконтрящуюся гайку, расположенную в шестигранном углублении в одной из стенок стакана второго звена. Таким образом, стакан наконечника диады и ось второго звена образуют вращательную кинематическую пару – шарнир  $C_i$ . В свою очередь стакан второго звена является охватывающей частью вращательного шарнира  $B_i$ , то есть согласно ранее представленной модели кинематики механизма звено  $B_iC_i$  будет иметь нулевую длину. Использование такого конструктивного решения основано на результатах анализа влияния длины  $l_{BCi}$  на размер рабочей зоны механизма, проведенного с использованием разработанных ранее программ. В процессе анализа предполагалось, что точки  $O, D_1, D_2, D_3, M$  всегда лежат в вершинах условного куба с длиной  $L_k$ . Кроме того, точки  $B_1, B_2, B_3$  также находятся в вершинах указанного куба в начальном положении механизма. Дополнительно предполагалось, что в начальном положении величина приводной координаты находится в середине допустимого диапазона  $[h_{\min}, h_{\max}]$ . Размер рабочей зоны, очевидно, всегда будет увеличиваться при увеличении рабочего хода привода вне зависимости от отношения данной величины к длине стороны куба, поэтому в процессе анализа принималось, что ход привода равен указанной данной длине, то есть  $h_{\max} - h_{\min} = L_k$ . Размер рабочей зоны любого сферического механизма будет зависеть не от абсолютных размеров его звеньев, а от соотношения этих размеров, поэтому в процессе анализа исследовалась относительная длина звена  $B_iC_i$ , а именно отношение длин  $l_{BCi}/L_k$ . Значение данной величины изменялось в диапазоне от 0 до 0,25. Для каждого значения использовался итерационный алгоритм, описанный в предыдущей главе. При этом величина угла собственного вращения принималась постоянной и равной нулю, а длины всех промежуточных звеньев одинаковыми во всех кинематических цепях. В процессе итерационного анализа оценивалось количество достижимых выходным звеном точек  $N_{pz}$  в «центральной» части рабочей зоны, то есть если нахождение механизма в некоторой области рабочей зоны теоретически возможно, но при этом попадание в эту область из

начального положения невозможно, то такие области из рассмотрения исключались (Рисунок 4.6).

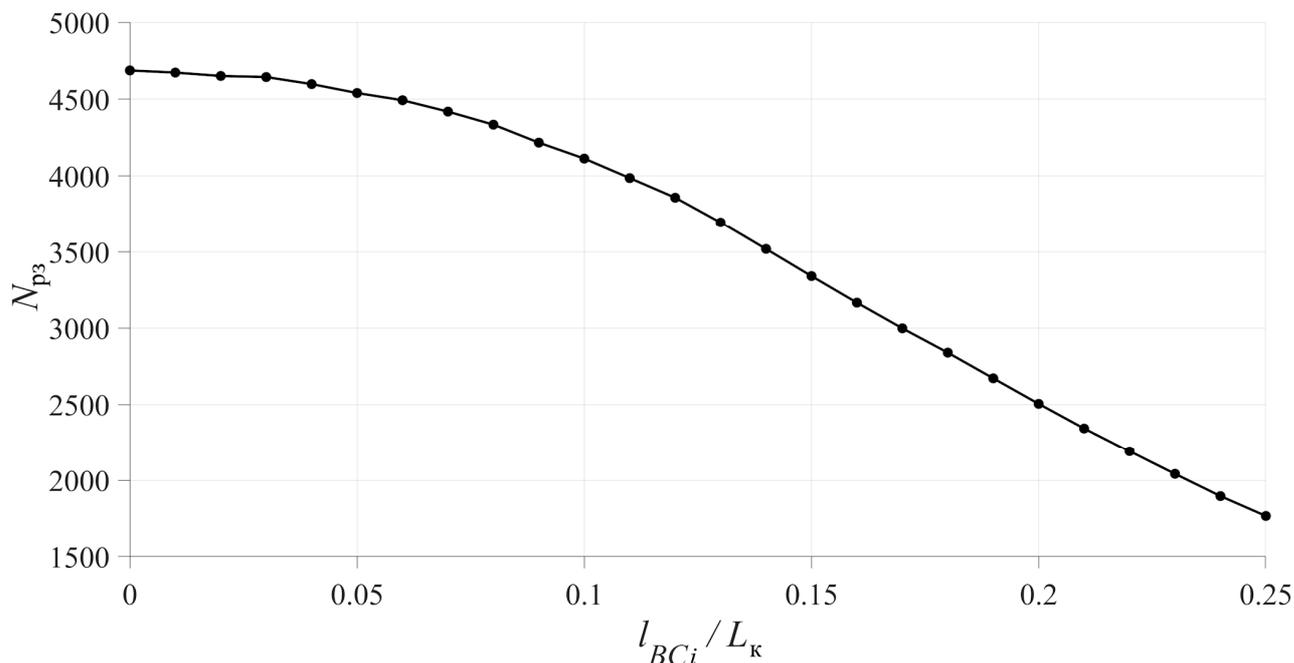


Рисунок 4.6. Зависимость размера рабочей зоны от относительной длины звена  $B_iC_i$

Как можно видеть, с ростом относительной длины звена  $B_iC_i$  размер рабочей зоны уменьшается. При этом наибольший размер рабочей зоны соответствует нулевой длине данного звена. Таким образом, предложенное конструктивное решение второго звена кинематической цепи является наиболее оптимальным с точки зрения увеличения рабочей зоны механизма. Отсутствие необходимости изготовления отдельного звена  $B_iC_i$  также упрощает конструкцию механизма и уменьшает затраты на его изготовление. Стоит также отметить, что с точки зрения кинематики механизма два отдельных вращательных шарнира  $B_i$  и  $C_i$  можно рассматривать в качестве одного условного универсального шарнира (шарнира Гука). При этом условная точка, в которой располагается данный шарнир, будет соответствовать геометрическому центру стакана второго звена кинематической цепи.

Третье звено кинематической цепи механизма состоит из основной несущей части – «дуги», выполненной из алюминиевого сплава Д16Т. Толщина материала несущей дуги составляет 8 мм, а сама деталь изготовлена путем фрезерования на станке с ЧПУ. Концевые части дуги в сечении имеют квадратную форму, что

позволяет разместить на них пластиковые оси необходимого диаметра без необходимости фиксации указанных осей от проворота относительно несущей части звена. Кроме того, концевые участки металлической основы звена отделены от ее центральной части ограничивающими уступами, до которых запрессовываются оси. На торцах дуги расположены отверстия с резьбой М4 и глубиной нарезанной части 10 мм (Рисунок 4.7).

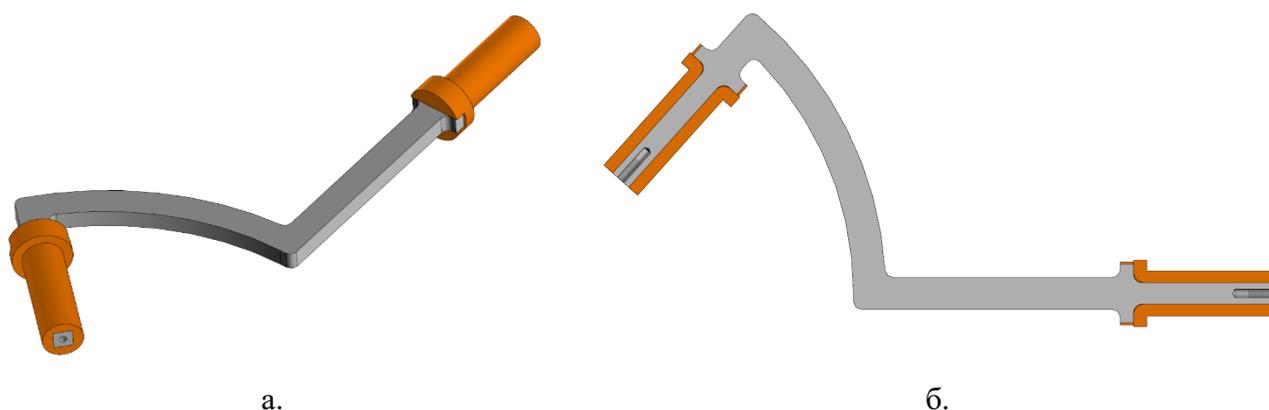


Рисунок 4.7. Трехмерная модель третьего звена механизма: общий вид (а), сечение (б)

Одна из осей третьего звена, расположенная со стороны прямолинейной части металлической основы звена, размещается в стакане второго звена. Осевая фиксация концевой части третьего звена в стакане второго звена осуществляется шайбой, притягиваемой к внутреннему кольцу одного из подшипников винтом М4 длиной 16 мм, завинчиваемым в резьбовое отверстие в торце дуги. Таким образом, стакан второго звена и одна из осей третьего звена образуют шарнир  $B_i$  кинематической цепи (Рисунок 4.8).

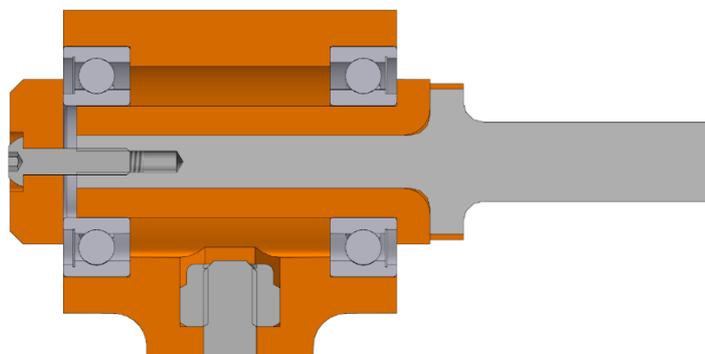


Рисунок 4.8. Трехмерная модель шарнира  $B_i$  в сечении

Выходное звено механизма состоит из пластины толщиной 7 мм, изготовленной из сплава Д16Т путем фрезерования на станке с ЧПУ, а также трех

стаканов, присоединяемых к указанной пластине посредством винтов М4 длиной 12 мм, завинчиваемых в резьбовые отверстия на пластине. При этом оси всех трех стаканов ортогональны друг другу и пересекаются в одной точке – предполагаемом центре вращения (Рисунок 4.9).

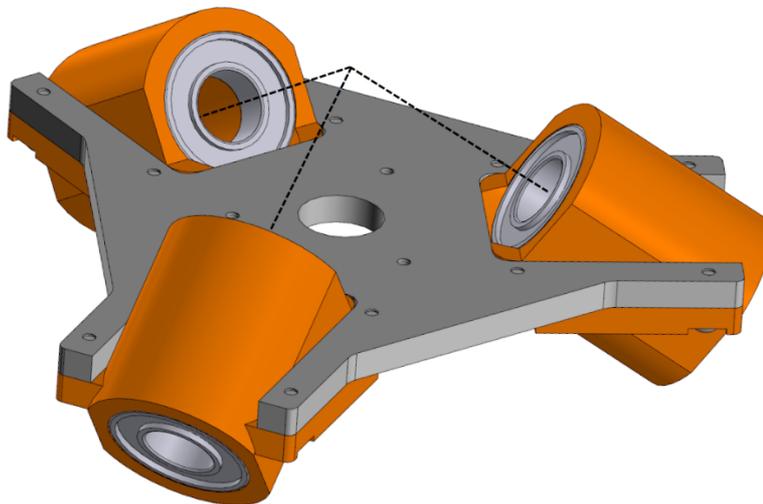


Рисунок 4.9. Трехмерная модель выходного звена

Подвижное соединение оси дуги с одним из стаканов, расположенных на выходном звене механизма, образует вращательный шарнир  $A_i$ . Конструкция данного шарнира аналогична конструкции шарнира  $B_i$  – фиксация оси в стакане осуществляется шайбой, притягиваемой к внутреннему кольцу подшипника, расположенного со стороны пластины выходного звена, винтом М4 длиной 16 мм, завинчиваемым в резьбовое отверстие в торце дуги (Рисунок 4.10).

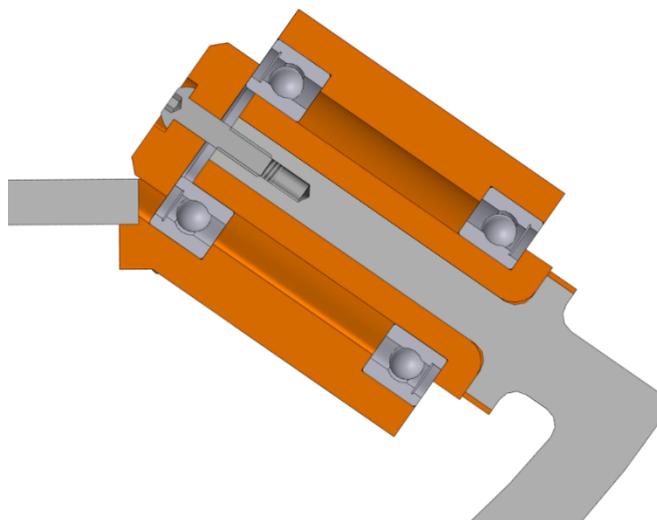


Рисунок 4.10. Трехмерная модель шарнира  $A_i$  в сечении

В центральной части пластины выходного звена имеется центрирующее отверстие диаметром 20 мм, а также три сквозных резьбовых отверстия М4. Данные отверстия предназначены для обеспечения возможности установки на выходное звено каких-либо объектов или инструментов при возникновении такой необходимости.

Основание механизма представляет собой пластину из алюминиевого сплава АМг6 толщиной 10 мм. На основании имеется три углубления глубиной 2 мм, предназначенных для центрирования фланцев опорных стаканов приводных диад кинематических цепей по трем сторонам. В каждом углублении имеется четыре сквозных отверстия с резьбой М5 для крепления указанных стаканов, а также одно отверстие под винт М8 с цековкой для обеспечения возможности надежного крепления основания механизма к различным поверхностям при необходимости. Аналогичное крепежное отверстие с цековкой расположено также и в центре основания (Рисунок 4.11). Данная деталь, аналогично несущим частям третьих звеньев кинематических цепей и пластине выходного звена, изготавливается на фрезерном станке с ЧПУ.

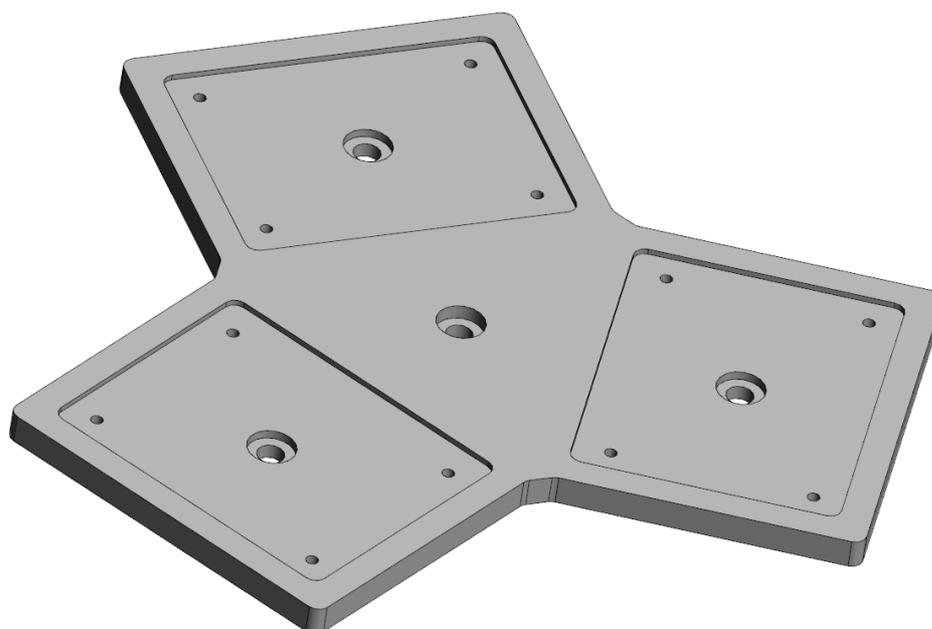


Рисунок 4.11. Трехмерная модель основания механизма

Представленные выше модели отдельных элементов и узлов были объединены в общую сборочную модель механизма. При этом, размеры и

геометрия сконструированных элементов подбирались таким образом, чтобы в начальном положении механизма, соответствующем ходу штока актуатора, равному 125 мм (половине максимального хода), центр сферического движения механизма (точка  $O$ ), точка пересечения осей опорных стаканов диад (точка  $M$ ) и геометрические центры стаканов вторых звеньев цепей (точки  $B_i$ ) находились в вершинах условного куба с длиной стороны 260 мм. Стоит заметить, что если в качестве точек  $D_i$  рассматривать геометрические центры опорных шарниров приводных диад, то данные точки физически не будут находиться в вершинах упомянутого условного куба. Однако, с точки зрения кинематики без потери общности приводную диад можно считать расположенной в любой плоскости, ортогональной осям ее вращательных шарниров. Иными словами, при моделировании кинематики механизма можно считать, что точки  $D_i$  также расположены в вершинах условного куба (Рисунок 4.12).

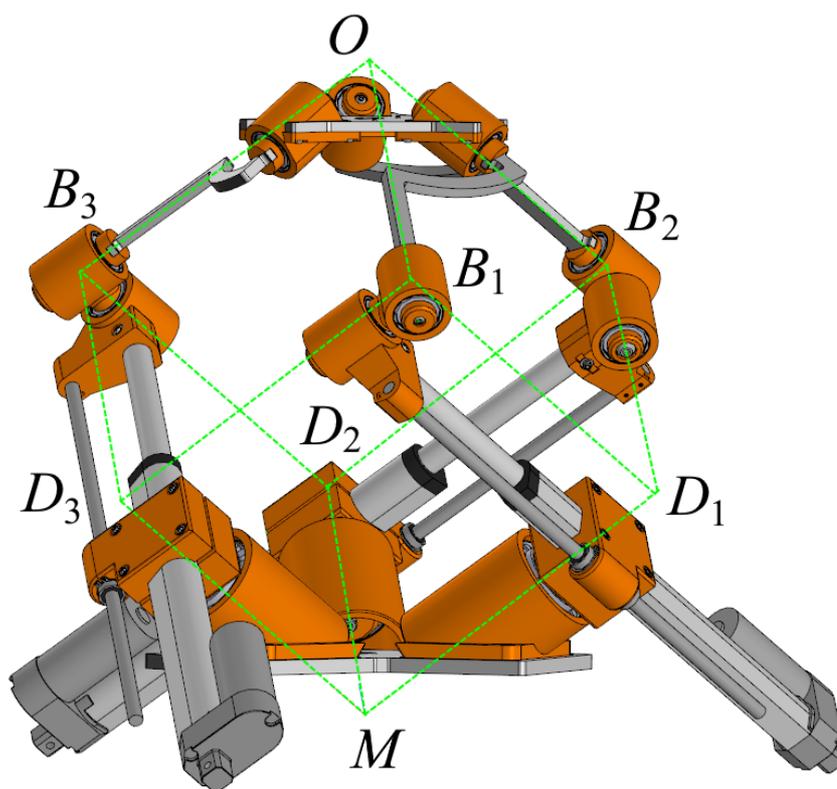


Рисунок 4.12. Трехмерная модель механизма и условный куб со стороной 260 мм

Можно видеть, что форма третьего звена (звена  $A_iB_i$ ) и его конфигурация в начальном положении отличается от таковых в примере, рассмотренном в предыдущей главе. Так, в сконструированном механизме угол между осями

шарниров  $A_i$  и  $B_i$  составляет  $48,1897^\circ$ , в то время как в примере, рассмотренном ранее, данный угол был равен  $90^\circ$ . Кроме того, в данном механизме выходное звено в начальном положении повернуто на угол  $60^\circ$  вокруг оси собственного вращения относительно начального положения, рассмотренного в примере ранее. Данное решение обусловлено тем, что, если третьи звенья цепей выполнены в соответствии с рассмотренной ранее схемой (Рисунок 4.13.а), то при полностью втянутых штоках актуаторов металлические части третьих звеньев находятся достаточно близко друг к другу (Рисунок 4.13.б), что при определенных условиях может оказаться небезопасным. Кроме того, габариты таких звеньев получаются большими по сравнению с таковыми у звеньев, выполненных согласно принятому конструктивному решению.

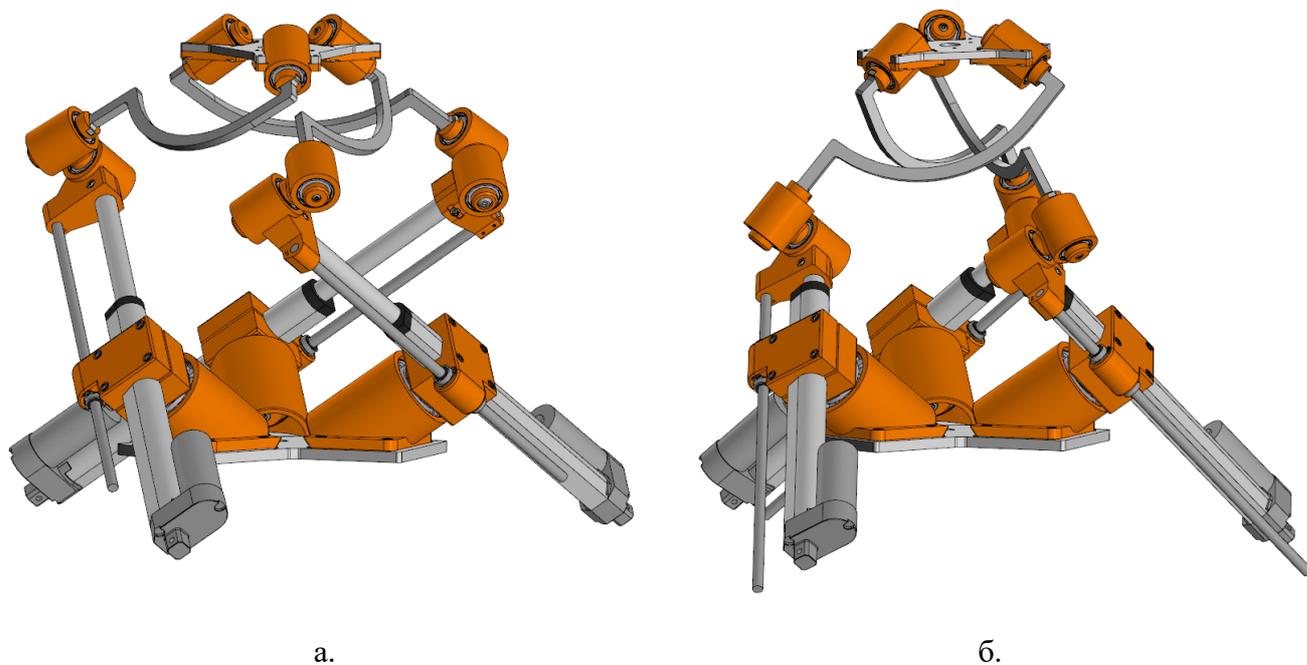


Рисунок 4.13. Трехмерная модель исполнения механизма с третьими звеньями, выполненными в соответствии с примером, рассмотренным в главе 3: в начальном положении механизма (а), в положении с полностью втянутыми штоками актуаторов (б)

В качестве возможной альтернативы также было разработано исполнение механизма с расположением центра вращения «внутри» его габаритов, то есть между выходным звеном и основанием в начальном положении (Рисунок 4.14). Такое решение позволяет сделать геометрию третьих звеньев более близкой к прямолинейной, однако несколько увеличивает их длину. Кроме того, в данном

исполнении практически исключена возможность размещения каких-либо объектов на внутренней стороне выходного звена, поскольку с высокой долей вероятности указанные объекты будут мешать движению третьих звеньев кинематических цепей.

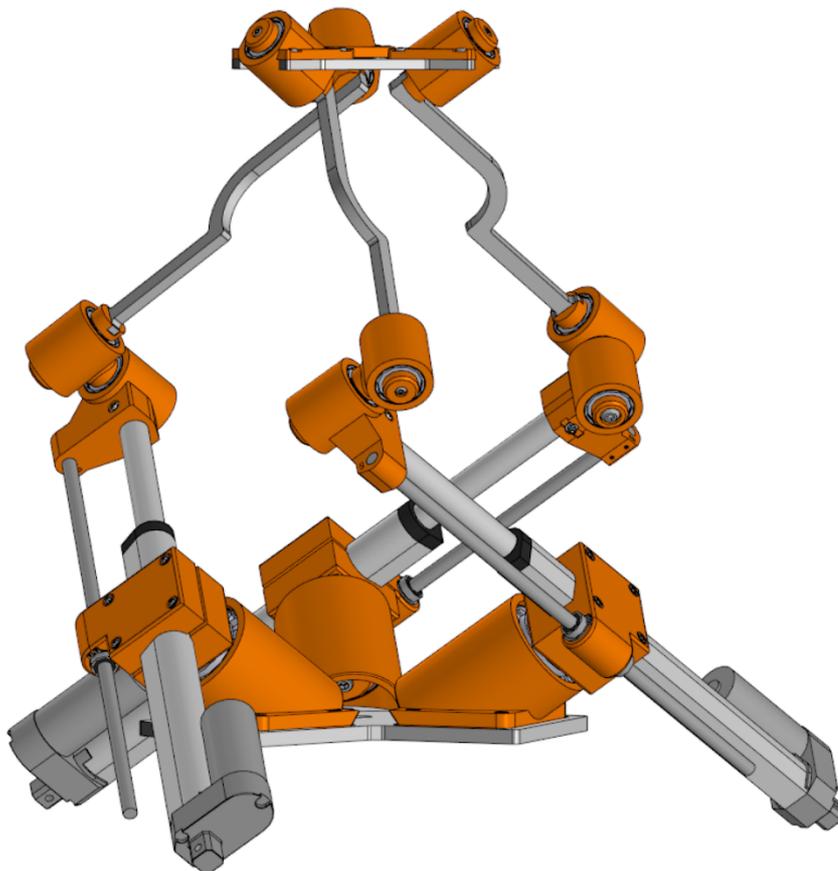


Рисунок 4.14. Трехмерная модель исполнения механизма с расположением центра вращения в начальном положении между основанием и выходным звеном

С учетом описанных выше особенностей различных исполнений механизма, для реализации в виде физического прототипа был выбран первый из рассмотренных выше возможных вариантов конструкции (Рисунок 4.12). Данный механизм имеет следующие геометрические параметры в соответствии с принятыми в предыдущей главе обозначениями:

- Длины звеньев:  $l_{OA_i} = 80$  мм;  $l_{OB_i} = 260$  мм;  $l_{AB_i} = 215,10$  мм;  $l_{BC_i} = 0$  мм;
- Координаты точек  $D_i$  (мм):  $D_1 = [-260 \ -260 \ 0]$ ,  $D_2 = [0 \ -260 \ -260]$ ,  $D_3 = [-260 \ 0 \ -260]$ ;
- Координаты точек  $A_i$  в начальном положении (мм):  $A_{01} = [-53,33 \ -53,33 \ 26,67]$ ,  $A_{02} = [26,67 \ -53,33 \ -53,33]$ ,  $A_{03} = [-53,33 \ 26,67 \ -53,33]$ .

После моделирования механизма и проверки средствами САПР того, что разработанная конструкция обеспечивает необходимый тип движения выходного звена, на основе созданных трехмерных моделей были изготовлены необходимые детали механизма. После изготовления деталей и закупки готовых компонентов была осуществлена сборка прототипа механизма (Рисунок 4.15).



а.



б.



в.

Рисунок 4.15. Прототип механизма: со втянутыми штоками актуаторов (а), в теоретическом начальном положении (б), в произвольном положении (в)

Для обеспечения возможности свободного вращения корпусов актуаторов прототип механизма был размещен на специальном утяжеленном табурете, что позволило обеспечить достаточную устойчивость конструкции и в то же время возможность перемещения сборки по лаборатории силами одного человека. Также стоит заметить, что для физического прототипа начальное положение, по сути, соответствует конфигурации с максимально втянутыми штоками (Рисунок 4.15.а), поскольку данное положение соответствует срабатыванию конечных выключателей во всех цепях. Из данного положения выходное звено может быть переориентировано в теоретическое начальное положение (Рисунок 4.15.б), либо в любое другое произвольное положение (Рисунок 4.15.в).

Для управления перемещением механизма была разработана и собрана соответствующая схема (Рисунок 4.16).

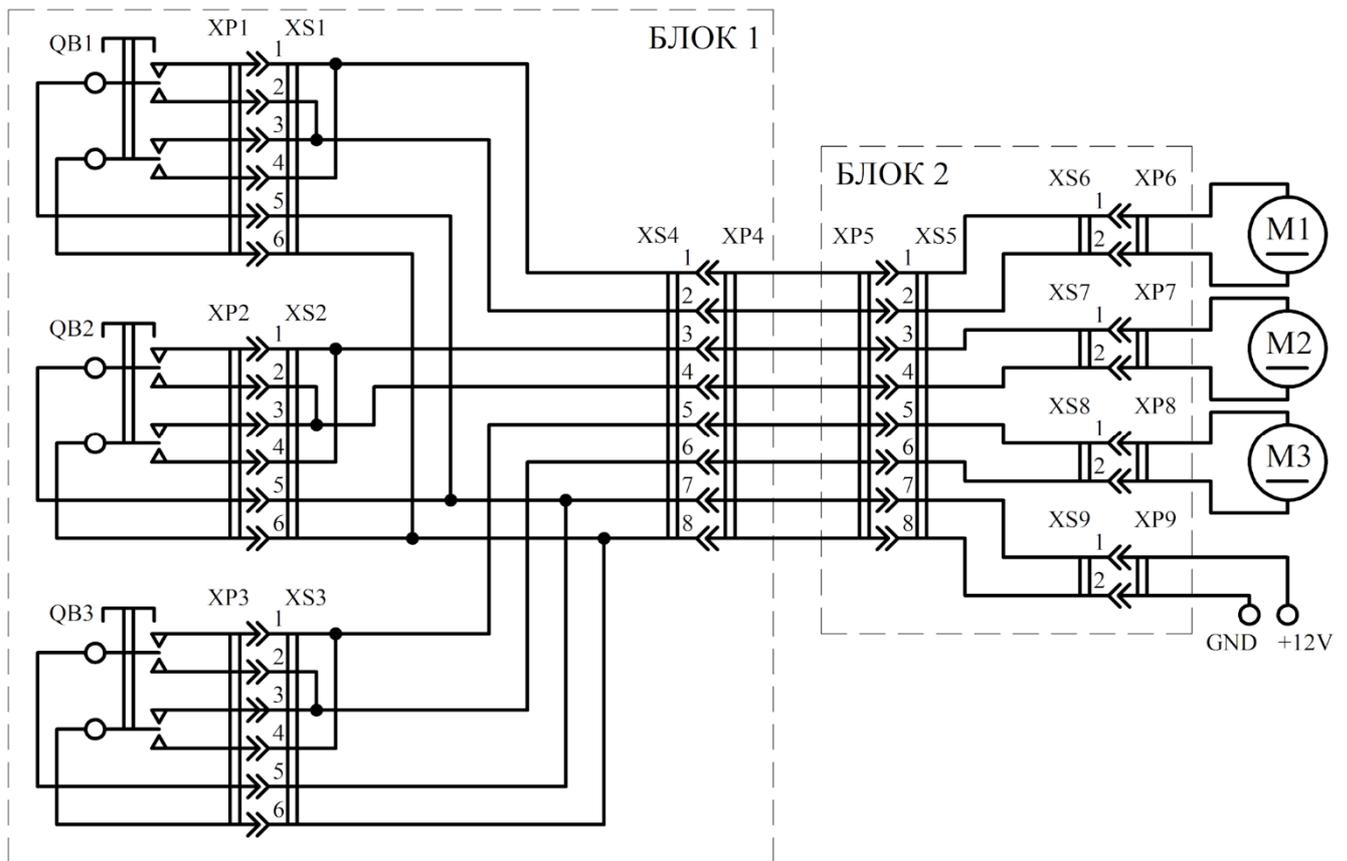


Рисунок 4.16. Электрическая схема системы управления перемещением механизма

Данная схема разделена на два основных блока. Блок 1 размещается на удалении от механизма. В состав блока входят три кнопочных двухполюсных трехпозиционных переключателя QB1, QB2 и QB3 с самовозвратом в нейтральное

положение. К переключателям припаяны кабели с шестью отдельными жилами. На концах кабелей находятся вилки XP1, XP2, XP3 шестиконтактных разъемов типа JST-ХН, которые в свою очередь соединяются с розетками XS1, XS2 и XS3 указанных разъемов, расположенными на печатной плате. Контакты 1, 4 и 2, 3 каждой розетки попарно замкнуты, что при подаче напряжения на соответствующий переключатель позволяет изменять полярность на выходах 1 и 3 розетки в зависимости от положения указанного переключателя. Выходы 1 и 3 розеток XS1, XS2, XS3 соединены соответственно с контактами 1 и 2, 3 и 4, 5 и 6 восьмиконтактной розетки XS4 типа GX16. С контактом 7 розетки XS4 соединяются выходы 5 розеток XS1, XS2, XS3, а с контактом 8, соответственно, выходы 6 указанных розеток. Розетка XS4 соединяется посредством восьмижильного кабеля с розеткой XS5, расположенной на печатной плате, входящей в состав блока 2, который размещается в непосредственной близости к механизму. Выходы 1 и 2, 3 и 4, 5 и 6, 7 и 8 розетки XS5 соединяются соответственно с контактами 1 и 2 розеток XS6, XS7, XS8, XS9 двухконтактных разъемов типа JST-ХН. Выходы вилок XP6, XP7 и XP8 соединены соответственно со входными контактами двигателей постоянного тока M1, M2 и M3, приводящих в движение линейные актуаторы механизма. Выходы 1 и 2 вилки XP9 соединены с выходами блока питания +12V и GND соответственно. Таким образом, при замыкании переключателя в зависимости от его положения соответствующий двигатель постоянного тока (M1 для QB1, M2 для QB2, M3 для QB3) будет вращаться в одну или другую сторону. При этом будет увеличиваться или уменьшаться вылет штока соответствующего актуатора, то есть изменяться координата  $h_i$  соответствующей кинематической цепи. Разделение схемы управления движением механизма на два отдельных физических блока обеспечивает возможность размещения органов управления (кнопочных переключателей) на достаточном удалении от механизма, что позволяет безопасно управлять его движением, в то время как подключение блока питания и двигателей для удобства осуществляется непосредственно вблизи механизма. Использование разъемов позволяет подключать и отключать необходимые элементы и

обеспечивает удобство проектирования и сборки корпусов, в которых размещаются электронные компоненты.

#### **4.2. Экспериментальное исследование кинематики механизма**

Как уже было отмечено, базовая проверка работоспособности конструкции была осуществлена средствами САПР. При наложении соответствующих зависимостей, определяющих заданную относительную подвижность отдельных звеньев, было установлено, что при поступательном движении штоков выходное звено механизма, как и требуется, поворачивается вокруг центра сферического движения. При этом положение центра сферического вращения в пространстве остается постоянным.

Для проверки соответствия типа движения выходного звена прототипа заданному в режиме ручного управления в случайном порядке приводились в движение приводы механизма. При этом визуально оценивалось перемещение выходного звена. Наблюдение показало, что тип движения данного звена действительно является сферическим, однако имеет место некоторое смещение центра вращения. С целью оценки величины данного смещения было проведено экспериментальное исследование.

Для проведения эксперимента была изготовлена специализированная сборочная единица – контрольный шар, представляющий собой шарик для подшипника качения, размещенный на пластиковом основании (Рисунок 4.17.а). Указанный шарик имеет номинальный диаметр 50 мм и изготовлен из стали ШХ-15 по ГОСТ 3722-81. Шарик помещен в сферическое углубление на подставке и закреплен в нем посредством клеевого соединения цианакрилатным клеем Cosmofen CA-12. На основании подставки имеется выступ диаметром 20 мм, а также три отверстия, предназначенные соответственно для центрирования и крепления подставки к выходному звену исследуемого прототипа механизма. Непосредственное крепление подставки осуществляется тремя винтами М4 длиной

20 мм, ввинчиваемыми в соответствующие резьбовые отверстия на платформе выходного звена. При этом размеры подставки подобраны таким образом, чтобы при размещении контрольного шара на выходном звене его теоретический центр совпадал с центром сферического движения механизма.

После закрепления шара на выходном звене механизма к нему подводился цифровой индикатор часового типа Micron ИЦ с диапазоном измерения от 0 до 12,7 мм и ценой деления 0,001 мм (Рисунок 4.17.б). Указанный индикатор закреплен на специальной стойке, которая в свою очередь крепится к основанию, жесткость которого заведомо больше жесткости механизма. Закрепление индикатора осуществлялось таким образом, чтобы ось его штока была направлена примерно по нормали к поверхности контрольного шара и проходила вблизи его центра. Точное выставление положения оси штока индикатора относительно центра контрольного шара и его поверхности в рамках проводимого эксперимента не требуется.



а.



б.



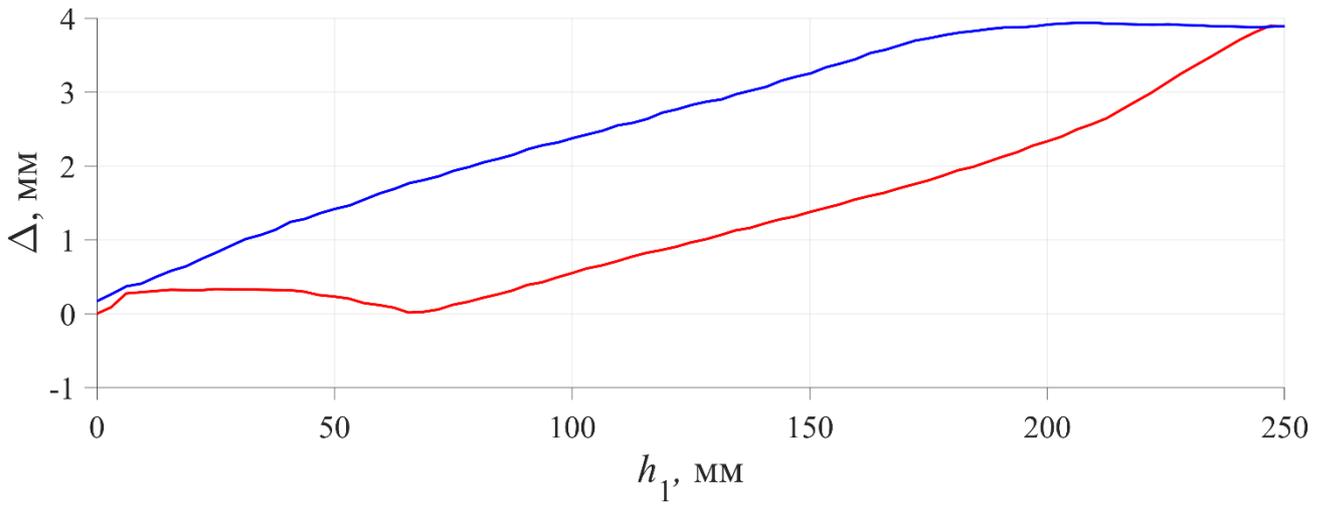
в.

Рисунок 4.17. Эксперимент по измерению отклонения положения центра вращения: контрольный шар (а), размещение шара на выходном звене (б), общий вид механизма (в)

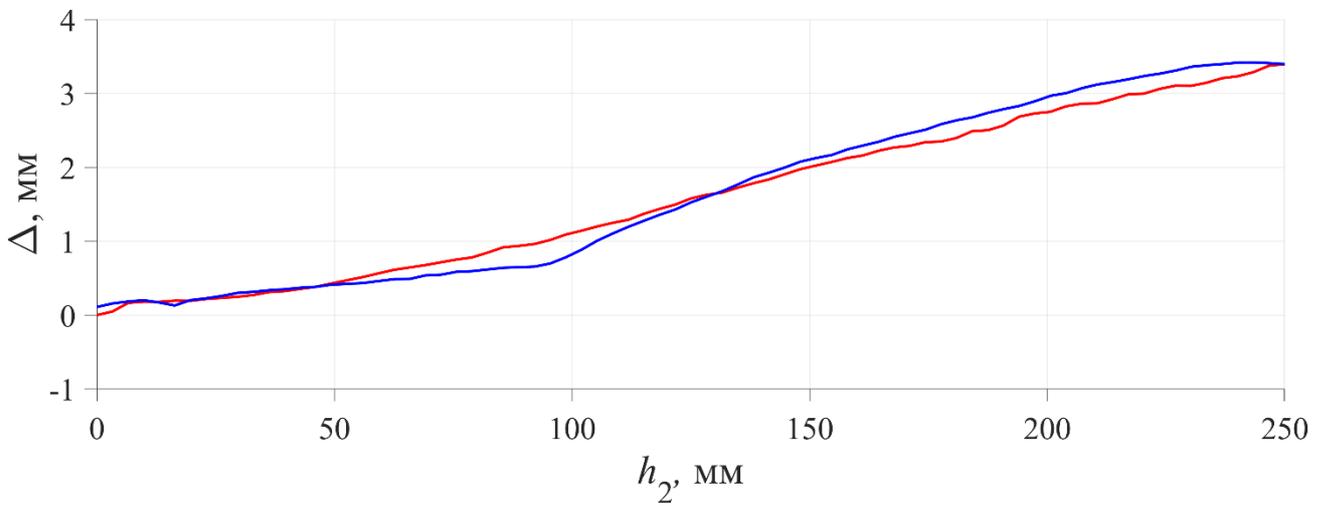
При проведении эксперимента механизм сначала выставлялся в положение с полностью втянутыми штоками до срабатывания концевых выключателей после чего показания индикатора обнулялись (Рисунок 4.17.в). Далее по отдельности поочередно запускались приводы механизма. Шток каждого привода сначала выдвигался на максимально возможную длину до срабатывания концевого выключателя, а затем втягивался обратно. Используемая модель цифрового индикатора часового типа имеет функцию передачи показаний посредством собственного протокола передачи данных по двум проводам: один провод (CLK) служит для передачи синхронизирующего сигнала в виде импульсов, а второй провод (DATA) – для передачи непосредственно показаний индикатора в составе пакетов размером 24 бит определенного формата. Наличие такой функции позволило записывать показания индикатора в реальном времени в процессе движения выходного звена. Для этого индикатор был подключен по трехжильному проводу (CLK, DATA, GND) к промежуточной отладочной плате Arduino Nano, осуществляющей прием и первичную обработку сигнала. С платы полученные данные передавались на компьютер по последовательному порту (UART) и сохранялись в текстовый файл. Средняя частота обновления показаний составила один раз в 0,139 с или 7,194 Гц. Для номинальной скорости движения штока, равной 10 мм/с, это соответствует обновлению показаний каждые 1,39 мм пройденного пути. Сброс показаний индикатора осуществлялся после каждого цикла выдвигания-втягивания штока одного привода. После проведения измерений для всех трех приводов индикатор перезакреплялся таким образом, чтобы ось его штока была примерно ортогональна ее предыдущему положению. Были проведены измерения для трех различных положений оси, являющихся взаимно ортогональными, что позволило оценить примерное отклонение центра контрольного шара от его теоретического положения (Рисунок 4.18).

$$\Delta = \sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2},$$

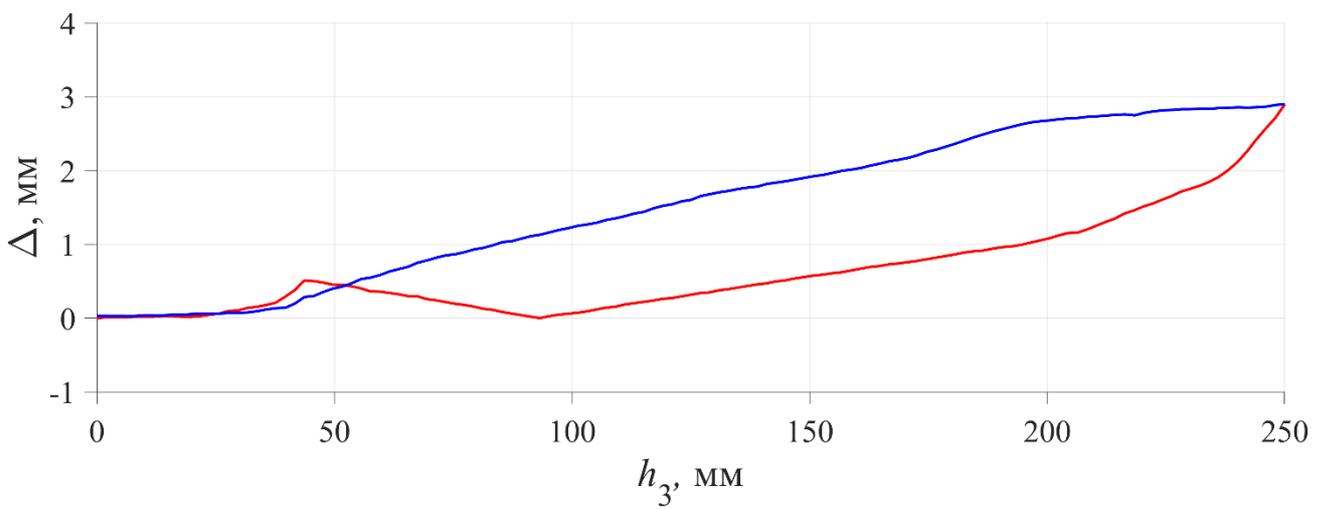
где  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$ ,  $\Delta_3$  – показания индикатора для первого, второго и третьего положения оси его штока соответственно.



а.



б.



в.

Рисунок 4.18. Измеренное отклонение (красный – выдвигание штока, синий – втягивание) при работе: только первого привода (а), только второго привода (б), только третьего привода (в)

По результатам проведенного эксперимента максимальная измеренная величина абсолютного отклонения центра сферического движения составила 3,89 мм, 3,40 мм и 2,90 мм для первого, второго и третьего приводов соответственно. Данные значения, как видно из графиков, достигались при максимальном вылете штоков актуаторов. При этом используемый шарик подшипника выполнен со степенью точности 40, что соответствует отклонению среднего диаметра  $\pm 16$  мкм, а допускаемая абсолютная погрешность индикатора, согласно паспорту, составляет не более  $\pm 10$  мкм при повторяемости  $\pm 3$  мкм. Таким образом, максимальная погрешность показаний индикатора, обусловленная отклонением размеров контрольного шара и собственной погрешностью измерения индикатора, не превышает  $\pm 26$  мкм, что на три порядка меньше измеренных отклонений, а значит в рамках описываемого эксперимента является пренебрежимо малой.

Полученные в результате эксперимента значения отклонения положения центра сферического движения механизма являются существенными, но не критическими. Так, подобный порядок величины отклонения был бы, безусловно, недопустим для устройств, предназначенных для точного ориентирования в пространстве оптических приборов, но в то же время приемлем для различного рода тренажеров-симуляторов, а также устройств для медицинской реабилитации. Наблюдаемый рост значений отклонения при выдвигании штоков приводов может быть объяснен уменьшением жесткости  $i$ -й кинематической цепи и, как следствие, всего механизма при увеличении координаты  $h_i$ . Действительно, при детальном изучении конструкции актуатора (Рисунок 4.1) можно обнаружить, что винт передачи винт-гайка консольно размещается в корпусе актуатора в одном радиальном шариковом подшипнике, находящемся в задней части корпуса. При этом шток актуатора не опирается на корпус, а только касается уплотнительного элемента. В результате при выдвигании штока большая часть поперечной силы воспринимается направляющей стержнем. Можно предположить, что с большой долей вероятности при увеличении жесткости приводных диад в поперечном

направлении, отклонение центра сферического движения от его теоретического положения будет уменьшаться.

Важно отметить, что, несмотря на наличие перемещения центра вращения, в процессе работы выходное звено механизма все равно совершало вращательное движение. Также в конце цикла работы каждого из приводов измеренное отклонение от начального положения составило для первого привода 0,17 мм, для второго привода 0,11 мм и для третьего привода 0,03 мм. При этом прототип механизма конструировался по принципам быстрого прототипирования со значительными допусками размеров и формы деталей. Так, например, толщина слоя печати FDM-принтера составляет 0,2 мм, также имеет место усадка пластика при его остывании. С учетом вышеизложенного, а также принимая во внимание тот факт, что подвижность модели механизма в САПР полностью соответствует теоретической, полученные результаты можно считать подтверждением корректного функционирования предложенной кинематической схемы сферического механизма параллельной структуры с линейными приводами.

Дополнительно стоит отметить, что использование 3D-печати и простых фрезерных и сверлильных операций, а также широкодоступных механических и электронных компонентов, делают изготовление механизма предлагаемой конструкции относительно несложным и доступным. Так, себестоимость изготовления физического прототипа на момент сборки (весна 2025 года) составила порядка 45 тыс. руб. С учетом вышеизложенного предложенная конструкция может быть использована для изготовления аналогичных прототипов в учебных целях, таких как, например, демонстрация основ и базовых принципов конструирования, структурных и кинематических особенностей механизмов параллельной структуры, и, в частности, сферических параллельных механизмов, а также в качестве модельного объекта для разработки и исследования различных систем и алгоритмов управления.

### 4.3. Результаты и выводы по главе

1. Разработана конструкция механизма  $3-(R\underline{P}R)R'R'$ , а также с использованием САД-системы КОМПАС-3D создана его твердотельная модель в трех исполнениях, позволившая подтвердить теоретические выводы о типе подвижности механизма;

2. На базе разработанной твердотельной модели осуществлено изготовление деталей, а также сборка и отладка физического прототипа, с использованием которого проведен натурный эксперимент, подтвердивший принципиальную работоспособность синтезированного механизма;

3. Для исследуемого механизма оптимальная длина второго промежуточного звена, соединяющего приводную диаду с третьим («дуговым») звеном равна нулю, поскольку в таком случае обеспечивается наибольший размер рабочей зоны;

4. Благодаря применению 3D-печати и использованию доступных на широком рынке механических и электронных компонентов, разработанный физический прототип отличается простотой изготовления и относительной дешевизной, что может способствовать использованию данной конкретной конструкции в образовательных целях.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Настоящая работа посвящена вопросам структурного синтеза сферических механизмов параллельной структуры с линейными приводами и анализу их функциональных характеристик, таких как форма и размеры рабочей зоны (с учетом областей особых положений), передаточное отношение в различных точках рабочей зоны, величина усилий, передаваемых с приводов на выходное звено. Основной мотивацией к проведению данного исследования послужил тот факт, что большинство сферических механизмов параллельной структуры использует вращательный тип привода. Линейный тип привода в подобных механизмах используется значительно реже, несмотря на преимущества, которые могут быть реализованы в некоторых видах практических применений. При этом какого-либо общего комплексного подхода к синтезу и анализу сферических параллельных механизмов с линейными приводами в настоящее время не существует, что делает актуальным решение соответствующей проблемы, как с научной, так и с практической точки зрения.

В результате решения поставленных в работе задач были получены следующие основные результаты:

1. Разработан метод структурного синтеза кинематических цепей сферических механизмов параллельной структуры, основанный на анализе винтовых уравнений скоростей. С использованием предложенного метода выявлено девять вариантов структуры кинематической цепи, удовлетворяющих заданным требованиям. При этом установлено, что при условии последовательного расположения кинематических пар, цепь должна включать четыре вращательных и одну призматическую пару, причем две вращательных пары совместно с призматической должны образовывать плоскую диаду, а оси оставшихся двух вращательных пар должны проходить через центр сферического движения;

2. С применением винтового исчисления получены в общем виде геометрические условия возникновения особых положений различных типов для

рассматриваемых кинематических цепей и механизмов, составленных из таких цепей. По результатам анализа указанных условий установлено, что предпочтительными являются те варианты структуры кинематической цепи, у которых плоская диада присоединяется непосредственно к основанию, так как в таком случае становится возможным избежать попадания механизма в особые положения типов «BC» и «ПП»;

3. Для механизма  $3-(RPR)R'R'$  выведены уравнения связи, а также аналитически решены обратная задача о положениях и задача о скоростях, что позволило создать математическую модель кинематики механизма. С применением данной модели проведен итерационный анализ рабочей зоны с определением ее формы и размеров с учетом конструктивных ограничений, а также анализ особых положений и близости к ним с использованием силовых и скоростных критериев. Расчетные алгоритмы реализованы в виде прикладных программ в среде компьютерной алгебры MATLAB, позволяющих гибко изменять геометрические параметры анализируемого механизма;

4. С применением САД-системы КОМПАС 3D разработана конструкция механизма  $3-(RPR)R'R'$  и создана его твердотельная модель в трех исполнениях, для которых средствами САД проведена проверка соответствия подвижности механизма теоретической. При этом установлено, что оптимальная длина второго промежуточного звена механизма из условия максимизации рабочей зоны равна нулю, что учтено в предложенной конструкции. На базе созданной трехмерной модели изготовлены необходимые детали (в том числе посредством 3D-печати), проведена сборка и отладка физического прототипа механизма. Проведен натурный эксперимент, также подтвердивший работоспособность предложенной структурной схемы.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Артоболевский И. И. Теория механизмов для воспроизведения плоских кривых. М.: Издательство Академии наук СССР, 1959. 256 с.
2. Ганиев Р. Ф., Глазунов В. А., Филиппов Г. С. Актуальные проблемы машиноведения и пути их решения. Волновые и аддитивные технологии, станкостроение, роботехника // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2018. № 5. С. 16–25.
3. Глазунов В. А. Механизмы параллельной структуры и их применение: робототехнические, технологические, медицинские, обучающие системы. Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2018. 1036 с.
4. Глазунов В. А., Колискор А. Ш., Крайнев А. Ф. Пространственные механизмы параллельной структуры. М.: Наука, 1991. 95 с.
5. Григорьянц А. Г., Третьяков Р. С., Фунтиков В. А. Повышение качества поверхностных слоев деталей, полученных лазерной аддитивной технологией // Технология машиностроения. 2015. № 10. С. 68–73.
6. Захаров М. Н., Ларюшкин П. А., Сеницына Ю. В., Семенихин А. С., Хрестина А. А. Решение обратной задачи о положениях сферического параллельного манипулятора 3-PRUR // Вестник машиностроения. 2025. Т. 104, № 11. С. 927-931.
7. Карпова Л. И., Никитин Д. А. Тренажеры в отечественной гражданской авиации: история и современность // Научный вестник МГТУ ГА. 2009. №142. С. 37–41.
8. Киселев С. В. Разработка и исследование складных механизмов параллельной структуры, включающих круговую направляющую: дис. ... канд. техн. наук. Москва. 2024. 144 с.
9. Колискор А. Ш. Разработка и исследование промышленных роботов на основе 1-координат // Станки и инструмент. 1982. № 12. С. 21–24.

10. Ларюшкин П. А. Синтез и анализ механизмов параллельной структуры с использованием технически обоснованных условия близости к особым положениям: дис. ... докт. техн. наук. Москва. 2023. 304 с.
11. Ларюшкин П. А. Классификация и условия возникновения особых положений в механизмах параллельной структуры // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2017. № 1 (682). С. 16–23.
12. Ларюшкин П. А., Хрестина А. А., Сеницына Ю. В., Цыганова А. С. Анализ особых положений кинематических цепей сферических параллельных манипуляторов с линейными приводами // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2025. № 7 (784). С. 15–25.
13. Лурье А. И. Аналитическая механика. М.: Физматлит, 1961. 824 с.
14. Лысаков Н. Д., Лысакова Е. Н. Развитие тренажерной подготовки в истории отечественной авиации // История. 2022. Т. 13. №12 (122). С. 1–1.
15. Саркисян Ю. Л., Парилян Т. Ф. Принципы построения пространственных поступательно-направляющих механизмов // Машиноведение. 1988. № 4. С. 12—20.
16. Филиппов Г.С. Кинематический анализ механизма параллельно-последовательной структуры с пятью степенями свободы // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2019. № 8 (713). С. 18–24.
17. Филиппов Г. С., Глазунов В. А., Лактионова М. М., Терехова А. Н., Гаврилина Л. В. Разработка механизмов параллельной структуры с пятью степенями свободы для ортопедических операций и аддитивных технологий // Машиностроение и инженерное образование. 2018. Т. 4. № 57. С. 2–11.
18. Хрестина А.А. Разработка сферического механизма с линейными приводами для использования в системах ориентации // Измерения, автоматизация и моделирование в промышленности и научных исследованиях (ИАМП-2025). Материалы XX юбилейной Всероссийской (с международным участием) научно-технической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых. 22-24 октября, Бийск. 2025. С. 215–217.

19. Хрестина А. А., Исполов Е. М., Ларюшкин П. А. Обобщенное решение обратной задачи о положениях параллельных механизмов n-PRR // Современное машиностроение. Наука и образование. 2025. № 14. С. 280–289.
20. Хрестина А. А., Ларюшкин П. А. Исследование рабочей зоны сферического механизма параллельной структуры с линейными приводами // XXXVII Международная инновационная конференция молодых ученых по современным проблемам машиноведения. Материалы конференции. 9-11 декабря, Москва. 2025. С. 195-198.
21. Хрестина А. А., Ларюшкин П. А., Синицына Ю. В., Антонов А. В. Решение обратной задачи о положениях сферического механизма параллельной структуры с линейными приводами // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2025. №12 (789). С. 12-19.
22. Эрастова К. Г., Ларюшкин П. А. Многокритериальная оптимизация конструкции дельта-робота с четырьмя степенями свободы // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2022. № 1. С. 10–19.
23. Aginaga J., Iriarte X., Plaza A., Mata V. Kinematic design of a new four degree-of-freedom parallel robot for knee rehabilitation // Journal of Mechanical Design. 2018. № 140(9).
24. Al-Samman A. M., Rahman T. A., Hadri M., Khan I., Chua T. H. Experimental UWB indoor channel characterization in stationary and mobility scheme // Measurement. 2017. № 111. Pp. 333–339.
25. Bai S. Optimum Design of Spherical Parallel Manipulators for a Prescribed Workspace // Mechanism and Machine Theory. 2010. № 2 (45). Pp. 200–211.
26. Bai S., Li X., Angeles J. A review of spherical motion generation using either spherical parallel manipulators or spherical motors // Mechanism and Machine Theory. 2019. № 140. Pp. 377–388.
27. Balli S. S, Chand S. Transmission angle in mechanisms (Triangle in mech) // Mechanism and Machine Theory. 2002. № 37 (2). Pp. 175–195.
28. Bandara D. S. V., Gopura R., Hemapala K., Kiguchi K. A multi-DoF Anthropomorphic Transradial Prosthetic Arm // Proceedings of the 5th IEEE RAS/EMBS

International Conference on Biomedical Robotics and Biomechatronics. 2014. Pp. 1039–1044.

29. Batista P., Silvestre C., Oliveira P. Single range aided navigation and source localization // Observability and filter design, Systems and Control Letters. 2011. № 60 (8). Pp. 665–673.

30. Ben Hamida I., Laribi M.A., Mlika A., Romdhane L., Zeghloul S., Car-bone G. Multi-Objective optimal design of a cable driven parallel robot for rehabilitation tasks // Mechanism and Machine Theory. 2021. № 2 (156). Pp 104–141.

31. Birglen L., Gosselin C., Pouliot N., Monsarrat B., Laliberte T. SHaDe, a new 3-DOF haptic device // IEEE Transactions on Robotics and Automation. 2002. № 18(2). Pp. 166–175.

32. Bonev. I.A. The true origins of parallel robots // Режим доступа: URL: <https://www.parallemic.org/Reviews/Review007.html> (дата обращения 14.11.2025).

33. Bonev I. A., Gosselin C. M. Analytical Determination of the Workspace of Symmetrical Spherical Parallel Mechanisms // IEEE Transactions on Robotics. 2006. № 5 (22). Pp. 1011–1017.

34. Bonev I. A., Yu A., Zsombor-Murray P. XY-Theta Positioning Table with Parallel Kinematics and Unlimited Theta Rotation // IEEE International Symposium on Industrial Electronics. 2006. № 4. Pp. 3113–3117.

35. Borel E. Memoire sur les deplacements a trajectoire spheriques. Paris: Memoire presentes par divers savants, 1908. № 33(1). Pp. 1–128.

36. Brem I. V., Laryushkin P. A., Fomin A. S., Antonov A. V. Design, Mobility and Kinematic Analysis of a 4-DOF 3R1T Redundantly Actuated Foldable Parallel Manipulator with a Circular Rail // 2024 6th International Conference on Reconfigurable Mechanisms and Robots (ReMAR), Chicago, IL, USA. 2024. Pp. 309–314.

37. Bricard R. Memoire sur la theorie de l'octaedre articule. Liouville: Journal de Mathematiques pures et appliquees, 1897. № 3. Pp. 113–148.

38. Bridgwater L. B., Ihrke C. A., Diftler M. A., Abdallah M. E., Radford N. A., Rogers J. M., Yayathi S., Askew R. S., Linn D. M. The Robonaut 2 Hand-Designed to

Do Work with Tools // Proceedings of the 2012 IEEE International Conference on Robotics and Automation. 2012. Pp. 3425–3430.

39. Cafolla D., Ceccarelli M., Wang M. F., Carbone G. 3D printing for feasibility check of mechanism design // International Journal of Mechanics and Control. 2016. № 17. Pp. 3–12.

40. Castro M.N., Rasmussen J., Andersen M.S., Bai S. A compact 3-DOF shoulder mechanism constructed with scissors linkages for exoskeleton applications // Mechanism and Machine Theory. 2019. № 132. Pp. 264–278.

41. Cauchy A. Deuxieme memoire sur les polygones et les polyedres // Journal de l'Ecole Polytechnique. 1813. Pp. 87–98.

42. Ceccarelli M. Fundamentals of Mechanics of Robotic Manipulation. 2004. 312 p.

43. Chaker A., Mlika A., Laribi M. A., Romdhane L., Zeghloul S. Clearance and Manufacturing Errors' Effects on the Accuracy of the 3-RCC Spherical Parallel Manipulator // European Journal of Mechanics. 2013. № 37. Pp. 86–95.

44. Chen Q., Zi B., Sun Z., Li Y., Xu Q. Design and development of a new cable-driven parallel robot for waist rehabilitation // IEEE/ASME Transactions on Mechatronics. 2019. № 24(4). Pp. 1497–1507.

45. Christensen S., Bai S. Kinematic analysis and design of a novel shoulder exoskeleton using a double parallelogram linkage // Journal of Mechanical Robotics. 2018. № 10 (4). Article 041008.

46. Clavel R. Conception d'un Robot Parallele Rapide a 4 Degres de Liberte. Lausanne: École Polytechnique Fédérale, 1991. 133 p.

47. Clavel R. Device for the movement and positioning of an element in space. Patent US 4976582. 1990.

48. Dasgupta A., Choi C., Habtour E. Simulation and test vibration-nonlinear dynamic effects in vibration durability of electronic systems // 8th International Conference on Integrated Power Systems. 2014. Pp. 1–10.

49. Dunlop G. R., T. P. Jones. Analysis of rigid-body dynamics for closed-loop mechanisms - its application to a novel satellite tracking device // *Journal of Systems and Control Engineering*. 2003. № 217. Pp. 285–298.
50. Dunlop G. R., T. P. Jones. Position analysis of a 3-dof parallel manipulator // *Mechanism and Machine Theory*. 1997. № 32(8). Pp. 903–920.
51. Dunlop G. R., T. P. Jones. Position analysis of a two dof parallel mechanism—the Canterbury tracker // *Mechanism and Machine Theory*. 1998. № 34(4). Pp. 599–614.
52. El-Sayed M., El-Sayed J. Additive Manufacturing Transition from Rapid Prototyping to Mass Production // *SAE Technical Paper*. 2016. № 1.
53. Enferadi J., Shahi A. On the Position Analysis of a New Spherical Parallel Robot with Orientation Applications // *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*. 2016. № 37. Pp. 151–161.
54. Excell J. The rise of additive manufacturing // *The engineer*. 2013.
55. Fite K. B., Withrow T. J., Shen X., Wait K. W., Mitchell J. E., Goldfarb M. // A gas-actuated anthropomorphic prosthesis for transhumeral amputees // *IEEE Transactions on Robotics*. 2008. № 24(1). Pp. 159–169.
56. French C.W. et al. Multi-axial subassemblage testing (Mast) system: description and capabilities // *13th World Conference on Earthquake Engineering*. 2004. 12 p.
57. Gosselin C., Gagne M. A. Closed-Form Solution for the Direct Kinematics of a Special Class of Spherical Three-Degree-of-Freedom Parallel Manipulators // *Workshop on Computational Kinematics*. 1995. Pp. 231–240.
58. Gosselin C., St-Pierre E., Gagne M. On the Development of the Agile Eye: Mechanical Design, Control Issues and Experimentation // *IEEE Robotics and Automation Magazine*. 1996. № 4 (3). Pp. 29–37.
59. Gosselin C., Wang J. Singularity Loci of a Special Class of Spherical Three Degree-of-Freedom Parallel Mechanisms with Revolute Actuators // *International Journal of Robotics Research*. 2002. № 7 (21). Pp. 649–659.

60. Gosselin C.M., Angeles J. Singularity Analysis of Closed-Loop Kinematic Chains // IEEE Transactions on Robotics and Automatics. 1990. № 6(3). Pp. 281–290.
61. Gough V.E. Contribution to discussion of papers on research in automobile stability // In Proceedings of the Automobile Division of the Institution of Mechanical Engineers. 1957. Pp. 392–394.
62. Grebenstein M. Approaching Human Performance // Springer. 2012. Pp. 115–126.
63. Grebenstein M., Albu-Schaffer A., et al. The DLR Hand Arm System // Proceedings of the 2011 IEEE International Conference on Robotics and Automation. 2011. Pp. 3175–3182.
64. Grebenstein M., Chalon M., Friedl W., Haddadin S., Wimböck T., Hirzinger G., Siegwart R. The hand of the DLR hand arm system: designed for interaction // Journal of Robotics Research. 2012. № 31(13). Pp. 1531–1555.
65. Gwinnett J.E. Amusement device. Patent US 1789680. 1931.
66. Hammond F. L., Howe R. D., Wood R. J. Dexterous High-Precision Robotic Wrist for Micromanipulation // Proceedings of the 2013 16th International Conference on Advanced Robotics (ICAR). 2013. Pp. 1–8.
67. Hess-Coelho T. A. A redundant parallel spherical mechanism for robotic wrist applications // Journal of Mechanical Design (American Society of Mechanical Engineers). 2007. № 8 (129). Pp. 891–895.
68. Hong M. B., Jo Y.-H. Design of a novel 4-DOF wrist-type surgical instrument with enhanced rigidity and dexterity // IEEE/ASME Transactions on Mechatronics. 2013. № 19(2). Pp. 500–511.
69. Hooper J.M., Marco J., Chouchelamane G.H., Chevalier J.S., Williams D. Multi-axis vibration durability testing of lithium ion 18650 NCA cylindrical cells // Journal of Energy Storage. 2018. № 15. Pp. 103–123.
70. Iftekar S.F., Aabid A., Amir A., Baig M. Advancements and Limitations in 3D Printing Materials and Technologies: A Critical Review // Polymers. 2023. № 15 (11). Pp. 2519.

71. Khrestina A., Ispolov E., Medovshchikov A., Laryushkin P. General Solution for the Inverse Kinematics of Parallel Robots with PRR Kinematic Chains // Advances in Mechanical Engineering. MMESE 2025. Lecture Notes in Mechanical Engineering. 2026. Pp. 85-93.
72. Kim C.-J. Multi-axial Vibration Test on MAST System with Field Data // Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering. 2006. № 16 (7). Pp. 704–711.
73. Kim C.-J., Kang Y.J., Lee B.-H. Generation of driving profile on a multi-axial vibration table for vibration fatigue testing // Mechanical Systems and Signal Processing. 2012. № 26. Pp. 244-253.
74. Kim Y.-J., Kim J.-I., Jang W. Quaternion Joint: Dexterous 3-DOF Joint Representing Quaternion Motion for HighSpeed Safe Interaction // Proceedings of the 2018 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS). 2018.Pp. 935–942.
75. Kim Y.-J., Lee Y., Kim J., Lee J.-W., Park K.-M., Roh K.-S., Choi J.-Y. RoboRay Hand: A Highly Backdrivable Robotic Hand with Sensorless Contact Force Measurements // Proceedings of the 2014 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA). 2014. Pp. 6712–6718.
76. Kong X., Gosselin C.M. Type Synthesis of Parallel Mechanisms // Springer, Heidelberg. 2007. № 33.
77. Kumar S., Bongardt B., Simnofske M., Kirchner F. Design and kinematic analysis of the novel almost spherical parallel mechanism active ankle // Journal of Intelligent and Robotic Systems. 2019. № 2 (94). Pp. 303–325.
78. Kundu S. K., Kiguchi K. Development of A 5 DOF Prosthetic Arm for Above Elbow Amputees // Proceedings of the 2008 IEEE International Conference on Mechatronics and Automation. 2008. Pp. 207–212.
79. Laryushkin P. A., Antonov A. A., Fomin A. S., Glazunov V. A. Novel Reconfigurable Spherical Parallel Mechanisms with a Circular Rail // Robotics. 2022. № 2(11). Article 276.

80. Laryushkin P. A., Glazunov V.A. On the Estimation of Closeness to Singularity for Parallel Mechanisms Using Generalized Velocities and Reactions // Proceedings of 14th IFToMM World Congress. 2015. Article 127160.
81. Laryushkin P. A., Khrestina A. A., Sinitsyna Yu. V., Semenov A. V. The Issue of Type Synthesis of Kinematic Chains of Spherical Parallel Mechanisms with Linear Drives // Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 2025. № 2 (54). Pp. 125-132.
82. Lebesgue H. Octaedre articule de Bricard // L'enseignement mathématique. 1967. № 13. Pp. 150–160.
83. Lessard S., Bigras P., Bonev I.A. A new medical parallel robot and its static balancing optimization // ASME. Journal of Medical Devices. 2007. № 1(4). Pp. 272–278.
84. Li Y., Bone G.M. Are parallel manipulators more energy efficient? // IEEE International Symposium on Computational Intelligence in Robotics and Automation. 2001. Pp. 41–46.
85. Liu X.J., Wang J., Oh K.K., et al. A new approach to the design of a delta robot with a desired workspace // Journal of Intelligent and Robotic Systems. 2004. № 2 (39). Pp. 209–225.
86. Lo H.S., Xie S.Q. Optimization of a redundant 4R robot for a shoulder exoskeleton // IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics (AIM). 2013. Pp. 798–803.
87. Majou F., Gosselin C., Wenger P., Chablat D. Parametric stiffness analysis of the Orthoglide // Mechanism and Machine Theory. 2007. № 42 (3). Pp. 296–311.
88. Merlet J.-P. Parallel robots, 2nd ed. Springer: Dordrecht, 2006. 356 p.
89. Mirz C., Uzsynski O., Angeles J., et al. Stiffness optimization of delta robots // ROMANSY23. 2020. Pp. 396–404.
90. Najafi M., Nadealian Z., Rahmanian S., Ghafarinia V. An adaptive distributed approach for the real-time vision-based navigation system // Measurement. 2019. № 145. Pp. 14–21.

91. Ottoboni A., Parenti-Castelli V., Sancisi N., Belvedere C., Leardini A. Articular surface approximation in equivalent spatial parallel mechanism models of the human knee joint: An experiment-based assessment // *The Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*. 2010. № 9(224). Pp. 1121–1132.
92. Pisla D., Nadas I., Tucan P., Albert S., Carbone G., Antal T., Banica A., Gherman B. Development of a control system and functional validation of a parallel robot for lower limb rehabilitation // *MDPI*. 2021. № 10. 277 p.
93. Pollard W.L.V. Position controlling apparatus. Patent US 2286571. 1942.
94. Pond G., Carretero Juan A. Formulating Jacobian matrices for the dexterity analysis of parallel manipulators // *Mechanism and Machine Theory*. 2006. № 41 (12). Pp. 1505–1519.
95. Rastegarpanah A., Rakhodaei H., Saadat M., Rastegarpanah M., Marturi N., Borboni A., Loureiro R.C. Path-planning of a hybrid parallel robot using stiff-ness and workspace for foot rehabilitation // *Advances in Mechanical Engineering*. 2018. № 10(1). Pp. 1–10.
96. Rosheim M. E., Sauter G. F. New High-Angulation Omni-Directional Sensor Mount // *SPIE Free-Space Laser Communication and Laser Imaging II*. 2002. Pp. 163
97. Saafi H., Laribi M.A., Zegloul S., Ibrahim M.Y. Development of a spherical parallel manipulator as a haptic device for a tele-operation system: application to robotic surgery // *IEEE 39th Annual Conference of the Industrial Electronics Society*. 2013. Pp. 4097–4102.
98. Saglia J.A., Tsagarakis N.G., Dai J.S., Caldwell D.G. A High-performance redundantly actuated parallel mechanism for ankle rehabilitation // *The International Journal of Robotics Research*. 2009. № 28(9). Pp. 1216–1227.
99. Sanchez D. Surgical instrument with a universal wrist. US 7121781B2. 2006.
100. Sofka J., Skormin V., Nikulin V., Nicholson D. Omni-Wrist III - a new generation of pointing devices. Part I. Laser beam steering devices - Mathematical modeling // *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*. 2006. № 2 (42). Pp. 718–725.

101. Sone K., Isobe H., Yamada K. High angle active link // Special Issue Special Supplement to Industrial Machines. 2004.
102. Staicu S. Recursive Modelling in Dynamics of Agile Wrist Spherical Parallel Robot // Robotics and Computer-Integrated Manufacturing. 2009. № 2 (25). Pp. 409–416.
103. Stewart D. A platform with Six degrees of freedom // Proceedings of the Institution of mechanical engineers. 1965. № 15 (180). Pp. 371–386.
104. Vega-Heredia M., Muhammad I., Ghanta S., Ayyalusami V., Aisyah S., Elara M.R. Multi-Sensor Orientation Tracking for a Façade-Cleaning Robot // Sensors. 2020. № 5 (20). Article 1483.
105. Wang C., Fang Y., Guo S., Chen Y. Design and kinematical performance analysis of a 3-RUS/RRR redundantly actuated parallel mechanism for ankle rehabilitation // ASME Journal of Mechanisms Robotics. 2013. № 5(4). Article 041003.
106. Wang J., Wu C., Liu X.-J. Performance evaluation of parallel manipulators: Motion/force transmissibility and its index // Mechanism and Machine Theory. 2010. № 45 (10). Pp. 1462–1476.
107. Wang M. F., Ceccarelli M. Design and Simulation of Walking Operation of a Cassino Biped Locomotor // New Trend in Mechanism and Machine Science. Springer. 2015. № 24. Pp. 613–621.
108. Wu G., Shen H. Comparison of 3-DOF Partially Decoupled Spherical Parallel Manipulators with Respect to Lateral Stabilities // Advances in Mechanism and Machine Science. IFToMM WC 2019. Mechanisms and Machine Science. 2019. № 73. Pp. 2099–2108.
109. Wu G., Zou P. Comparison of 3-dof asymmetrical spherical parallel manipulators with respect to motion/force transmission and stiffness // Mechanism and Machine Theory. 2016. № 105. Pp. 369–387.
110. Zheng S., Li Z., Yin Y., Liu Y., Zhang H., Zheng P., Zou X., Multi-robot relative positioning and orientation system based on UWB range and graph optimization // Measurement. 2022. № 195. Article 111068.

111. Zlatanov D., Fenton R.G., Benhabib B. A Unifying Framework for Classification and Interpretation of Mechanism Singularities // Journal of Mechanical Design. 1995. № 4 (117). Pp. 566–572.

112. Zlatanov D., Fenton R.G., Benhabib B. Classification and Interpretation of the Singularities of Redundant Mechanisms // ASME Design Engineering Technical Conferences, Atlanta. 1998. Pp. 1–11.

## Приложение А

### Акты внедрения научных результатов



АКЦИОНЕРНОЕ ОБЩЕСТВО

**КОНЦЕРН МОРИНФОРМСИСТЕМА-АГАТ**КОРПОРАЦИЯ  
МОРСКОГО  
ПРИБОРОСТРОЕНИЯАдрес: шоссе Энтузиастов, 29  
Москва, Россия, 105275Тел.: +7 (495) 673-4063  
Факс: +7 (495) 673-4130ИНН 7720544208  
КПП 772001001ОКПО 17597462  
ОКВЭД 72.19Интернет-сайт: [www.concern-agat.ru](http://www.concern-agat.ru)  
Электронная почта: [info@concern-agat.ru](mailto:info@concern-agat.ru)

#### АКТ

о практическом применении научных результатов, полученных Хрестиной Ариной Артуровной в диссертационной работе на тему «Синтез и анализ сферических механизмов параллельной структуры с линейными приводами».

Настоящим актом удостоверяется, что результаты научных исследований, полученные в диссертационной работе Хрестиной Ариной Артуровной на тему «Синтез и анализ сферических механизмов параллельной структуры с линейными приводами», приняты к использованию в АО «Концерн «Моринсис-Агат» в виде методов расчета при проведении проектных и проверочных расчетов приспособлений для испытаний коммутаторов приемных антенн.

Директор производственно-  
технического комплекса



А.Х. Бекишев

УТВЕРЖДАЮ:

проректор по учебной работе

МГТУ им. Н. Э. Баумана

К.т.н., доцент Альков С. В.



« 12 2025 г.

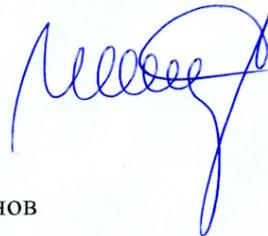
**АКТ**

об использовании результатов диссертационной работы Хрестиной Арины  
Артуровны «Синтез и анализ сферических механизмов параллельной  
структуры с линейными приводами»

Настоящий акт подтверждает, что результаты, полученные в диссертации Хрестиной А. А., используются в Московском государственном техническом университете им. Н. Э. Баумана на кафедре основ конструирования машин при подготовке магистров по направлению подготовки 15.04.01 «Машиностроение». Предложенные автором методы позволяют синтезировать различные схемы сферических механизмов, а также проводить анализ положений, скоростной и силовой анализ механизмов данного типа в рамках научно-исследовательской работы и подготовки выпускных квалификационных работ студентами магистратуры указанной кафедры.

Руководитель НУК РК

к.т.н.



Г. В. Шашурин

Заведующий кафедрой основ

конструирования машин,

д.т.н., профессор



М. Н. Захаров