

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ ИНСТИТУТ МАШИНОВЕДЕНИЯ ИМЕНИ А.А.
БЛАГОНРАВОВА РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи



Чернецов Роберт Александрович

**Разработка и анализ механизмов, обеспечивающих постоянство
точки ввода инструмента в рабочую зону, полученных на основе
использования ременных и конических передач.**

Специальность 05.02.18

Теория механизмов и машин

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата технических наук

Научный руководитель
кандидат технических наук
Алешин А.К.

Москва – 2021

Оглавление

Введение.....	4
Глава 1. Обзор технических решений, обеспечивающих постоянство точки ввода инструмента в рабочую зону и методы исследования, применяемые для данных механизмов.....	8
1.1 Механизмы, обеспечивающие постоянство точки ввода инструмента в рабочую зону.	8
1.2 Обзор методов исследования, которые могут быть применены для механизмов с постоянной точкой ввода инструмента.	18
1.3 Цель и задачи работы.	26
Глава 2. определение числа степеней свободы и решение задачи о положениях механизмов с постоянной точкой ввода выходного звена.....	27
2.1 Определение числа степеней свободы в механизмах с постоянной точкой ввода выходного звена.	27
2.2 Решение задачи о положениях сферического механизмов с постоянной точкой ввода выходного звена.....	37
Глава 3. Решение задач о скоростях и ускорениях механизмов из постоянной точкой ввода инструмента.....	52
3.1 Решение задачи о скоростях механизмов с постоянной точкой ввода инструмента.	52
3.2 Решение задачи об ускорениях для механизма с постоянной точкой ввода инструмента.	61
Глава 4. Динамический анализ механизма с постоянной точкой ввода инструмента и построение действующего экспериментального образца.	82
4.1 Динамический анализ механизма с постоянной точкой ввода выходного звена.....	82
4.2 Разработка действующей модели механизма обеспечивающего постоянство точки ввода выходного звена в рабочую зону.....	98
Заключение.	104
Список использованной литературы.....	106

Аннотация.

В данной работе рассмотрен структурный синтез и анализ механизмов, обеспечивающих постоянство точки ввода инструмента в рабочую зону полученных на основе использования ременных и конических передач.

Кроме того, представлено решение задачи о положениях, задачи о скоростях и ускорениях, задачи динамического анализа, а также разработана и исследована действующая модель механизма с ременными передачами.

Введение.

Актуальность работы.

Современное машиностроение требует создания новых высокоэффективных машин и механизмов. Одной из важных задач в этой связи является разработка устройств для медицинских и исследовательских применений. Речь идет, в частности, о роботизированных хирургических операциях, а также о автоматизированном проведении исследований свойств плазмы. В обоих этих случаях, а также в ряде других необходимо наличие таких механизмов, которые обеспечивают постоянство точки ввода инструмента в рабочую зону.

Необходимо отметить, что в данном направлении достигнуты важные результаты. Один из них связан с роботом da Vinci, в котором для решения данной проблемы используются два дополнительных привода, что утяжеляет конструкцию. Другое решение основано на использовании сферического механизма с круговой направляющей. Наличие такого элемента создает трудности при изготовлении, а также при решении задач о положениях. Еще один подход к решению данной проблемы заключается в использовании шарнирных параллелограммов, что обеспечивает равенство поворотов начального и конечного звеньев в механизме. Однако это устройство в силу наличия двух шарнирных параллелограммов может иметь повышенные показатели по весу.

В связи со сказанным актуальной является задача разработки и исследования новых механизмов, обеспечивающих постоянство точки ввода инструмента в рабочую зону на основе использования ременных либо конических передач. Этому вопросу посвящена данная работа.

Целью данной работы является создание новых эффективных механизмов, обеспечивающих постоянство точки ввода инструмента (рабочего органа) в рабочую зону, а также разработка методик их

кинематического и динамического анализа. Для достижения поставленной цели нужно решить следующие задачи.

Задачи, решаемые в работе.

1) Синтезировать механизмы, обеспечивающие постоянство точки ввода инструмента в рабочую зону, содержащие либо конические передачи, либо ременные передачи.

2) Разработать методику кинематического анализа и представить решения задач о положениях, скоростях и ускорениях, основанные на дифференцировании уравнений связи и на векторном вычислении.

3) Разработать методику динамического анализа, основанную на принципе Даламбера - Лагранжа. Разработать программы динамического анализа и решить конкретные примеры.

4) Разработать действующую модель одного из механизмов, содержащую ременные передачи. Определить характеристики модели, в частности рабочую зону и точность.

Научная новизна заключается в получении новых механизмов, обеспечивающих постоянство точки ввода в рабочую зону. Так же, были разработаны методики алгоритмы и программы их кинематического и динамического анализа, создана действующая модель механизма.

На защиту выносятся:

1) Новые структурные схемы механизмов, обеспечивающие постоянство точки ввода инструмента в рабочую зону

2) Новые методики, алгоритмы и программы кинематического анализа механизмов, обеспечивающие постоянство точки ввода инструмента в рабочую зону

3) Новые методики, алгоритмы и программы динамического анализа механизмов, обеспечивающие постоянство точки ввода инструмента в рабочую зону.

4) Разработанная конструкция действующей модели и механизма, обеспечивающая постоянство точки ввода инструмента в рабочую зону.

Практическая значимость заключается в том, что здесь получены новые механизмы, обеспечивающие постоянство точки ввода инструмента в рабочую зону. Эти механизмы можно эффективно использовать при хирургических операциях, а также при исследовании свойств плазмы. Кроме того, разработаны алгоритмы и программы кинематического и динамического анализа, которые могут быть использованы при исследовании других механизмов.

Методы, применяемые в работе:

В работе использовались методы теории механизмов и машин, теоретической механики, аналитической геометрии, дифференциального и матричного исчисления, компьютерного моделирования.

Достоверность результатов обусловлена строгостью математических выкладок, основанных на фундаментальных положениях механики с использованием общепринятых допущений. Теоретические результаты частично подтверждены с помощью численного и натурального эксперимента.

Апробация работы.

Основные результаты диссертационной работы были представлены:

1) На Международной конференции «Машины, технологии и материалы для современного машиностроения», посвященной 80-летию Института машиноведения им. А.А. Благонравова, ноябрь 2018 г.

2) На XIV Международной конференции по электромеханике и робототехнике "Завалишинские чтения", апрель 2019.

3) На XXXI Международной инновационной конференции молодых ученых и студентов по проблемам машиноведения, ноябрь 2019 г.

4) На IV онлайн – конференции «Проблемы развития теории механизмов и машин. Разработка научных основ и инновационных технологий в станкостроении», март 2020 г.

5) На Международном научном семинаре по теории механизмов и машин им. академика И.И. Артоболевского, январь 2020 г.

Публикации.

По результатам диссертации опубликовано 8 научных работ, в том числе четыре статьи в базе данных Scopus, две статьи в журналах из списка ВАК, два доклада на конференциях.

Структура диссертации.

Диссертация включает введение, четыре главы, заключение и список литературы из 113 наименований. Общий объем диссертации составляет 117 страниц, содержит 45 рисунков.

Глава 1. Обзор технических решений, обеспечивающих постоянство точки ввода инструмента в рабочую зону и методы исследования, применяемые для данных механизмов.

В данной главе рассматриваются различные подходы к построению механизмов, обеспечивающих постоянство точки ввода инструмента в рабочую зону. Кроме того, приводятся различные методы исследования подобного рода механизмов.

1.1 Механизмы, обеспечивающие постоянство точки ввода инструмента в рабочую зону.

В данном параграфе приведены различные технические решения, обеспечивающие постоянство точки ввода инструмента в рабочую зону. При этом могут быть использованы различные принципы построения механизмов, например это могут быть передачи с гибкой связью или конические передачи.

С помощью конических передач можно построить механизм рассмотренный А.Ф. Крайневым [50], обеспечивающий прямолинейное движение точки выходного звена (Рис. 1.1, Рис. 1.2), механизм состоит из основания 1, начального звена 2, конических, зубчатых передач 3 и 4, промежуточного звена 6, связанного через втулку с начальным звеном. Конические зубчатые передачи 3 и 4 должны иметь равные передаточные отношения.

При работе данного механизма начальное звено 2 приводит в движение зубчатую коническую передачу 3, это движение через промежуточное звено 6 передается на коническую зубчатую передачу 4 и затем на выходное звено 5. Длины звеньев $l_5 = l_6$ могут быть произвольными.

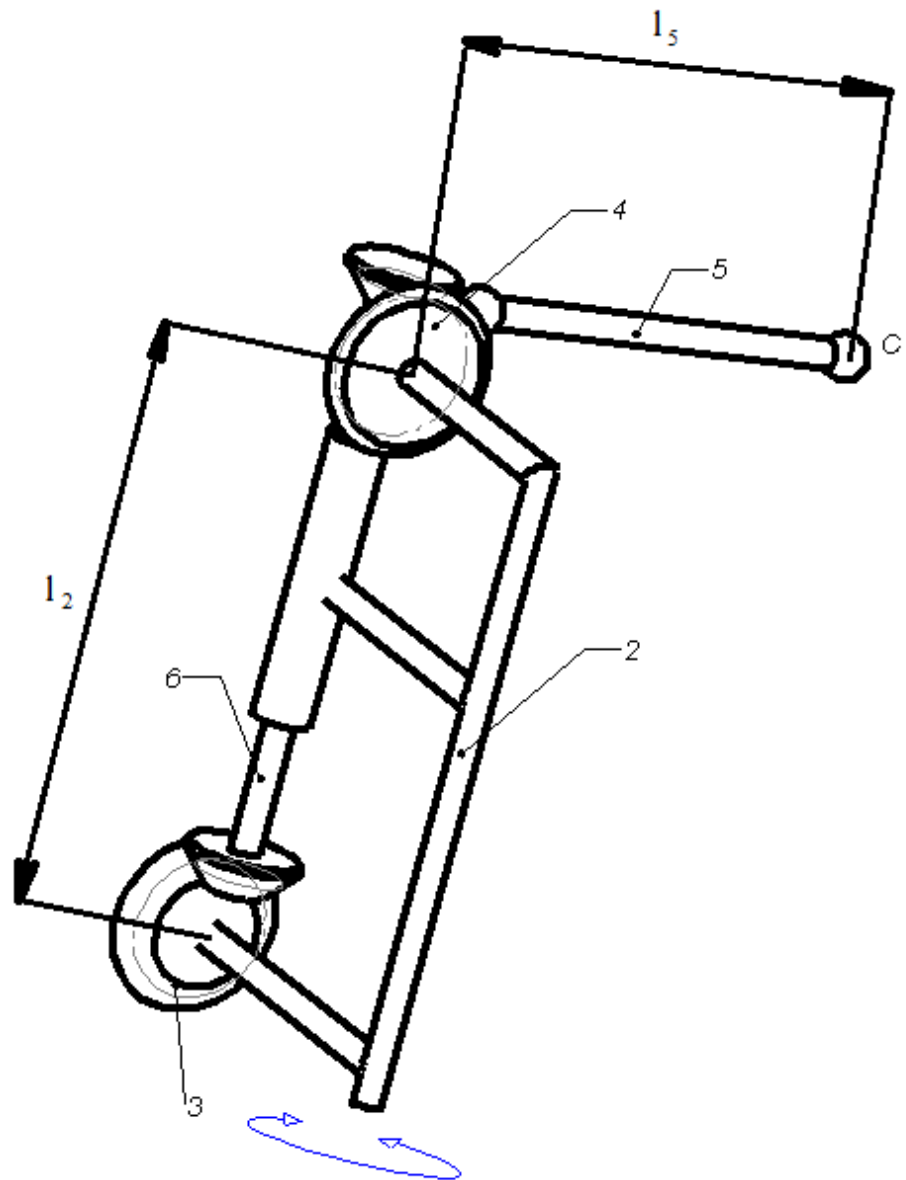


Рис. 1.1

Для того, чтобы обеспечить равный поворот начального и конечного звеньев, можно использовать шарнирные параллелограммы либо передачи с гибкой связью [50].

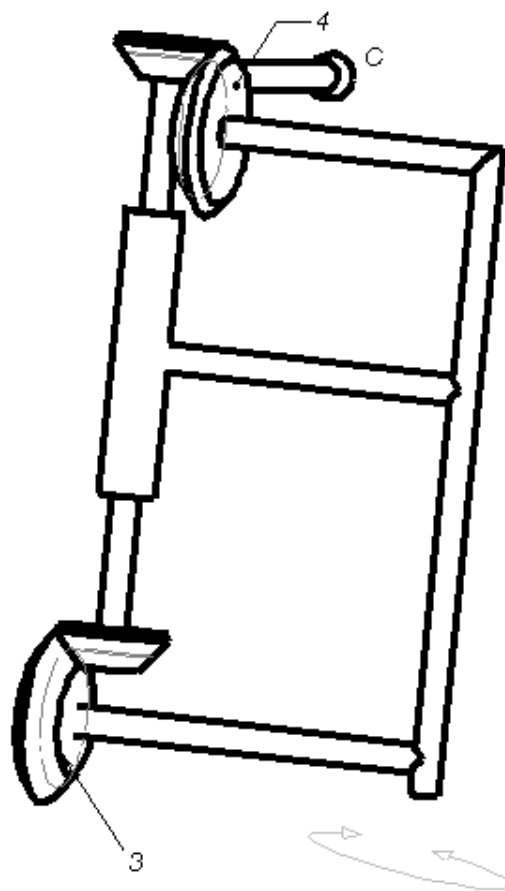


Рис 1.2

На (Рис. 1.3) представлено соединение двух параллелограммов $FGCE$ и $ABCD$, установленных на вращающемся звене GK . Здесь поворот звена EF в точности копируется звеном BO . В данном случае ось звена EF всегда параллельна оси звена AG и BO , а ось звена KG всегда параллельна осот звена ED и звена AB .

Схема, представленная на (Рис 1.4) [50] является аналогичной (Рис 1.3), ее отличие заключается в том, что роль параллелограммов выполняют цепные передачи 3 и 4. Звездочки цепных передач имеют центры вращения G, B, A . Звездочка G жестко соединена со звеном KG и имеется связь со с звездочкой B жестко соединенной со звеном AB . Другая звездочка с осью, расположенной в точке B , жестко связана со звеном BG . Она имеет связь со звездочкой A , жестко связанной со звеном AO .

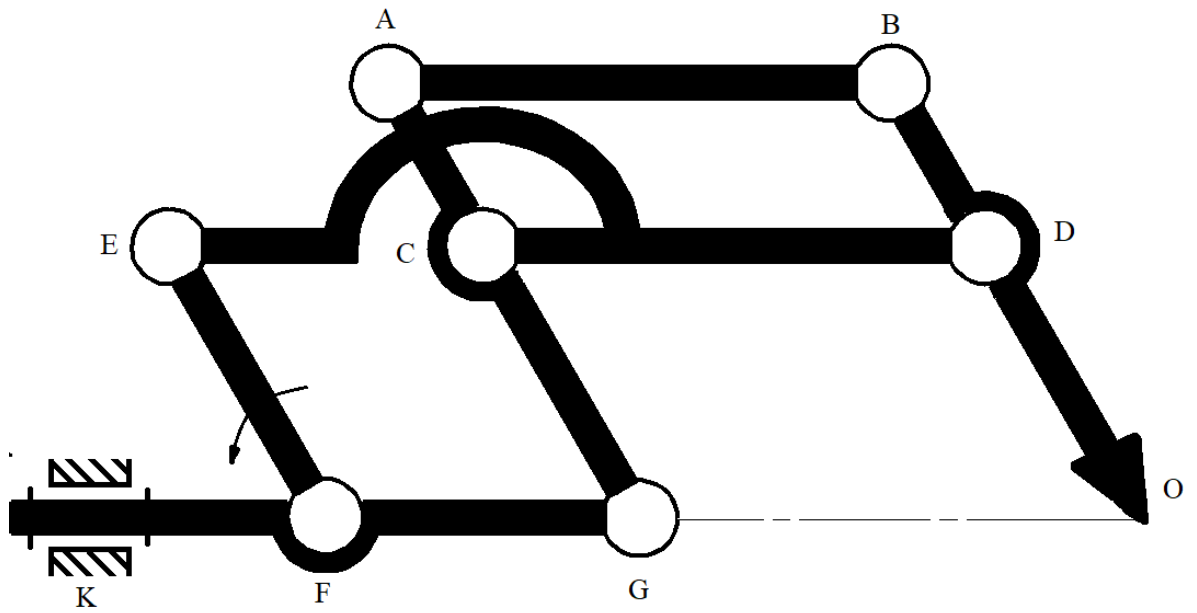


Рис. 1.3

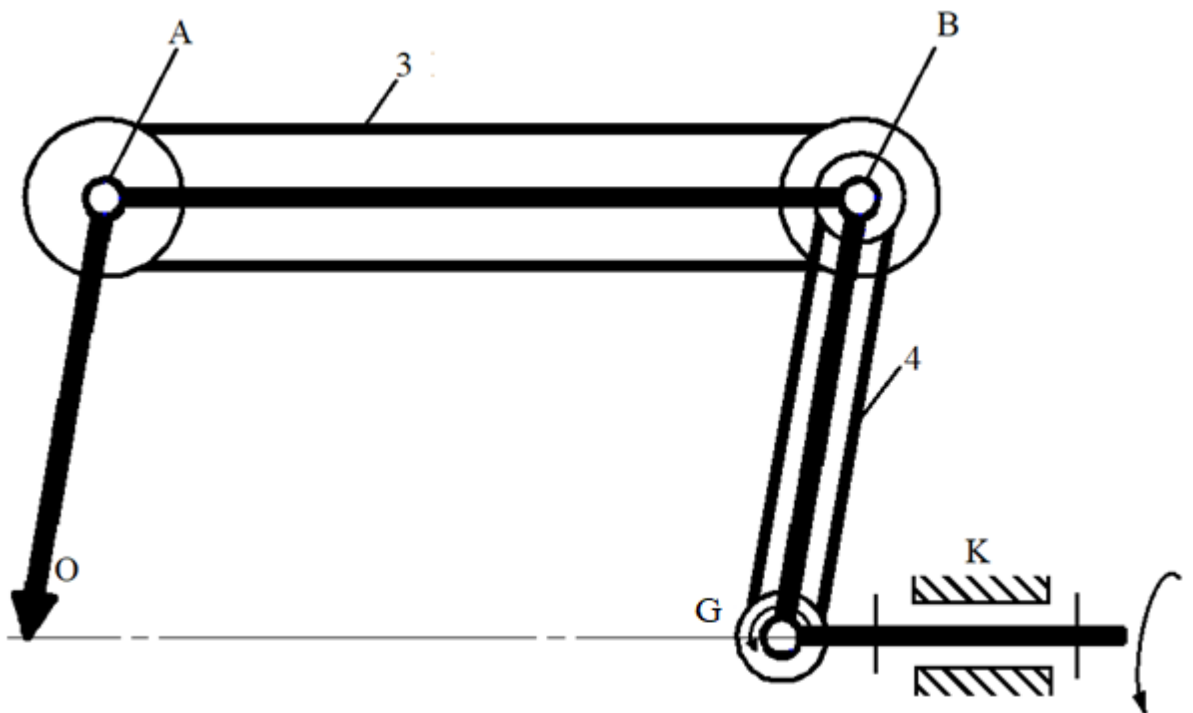


Рис.1.4

Указанные идеи, связанные с использованием двух шарнирных параллелограммов для обеспечения постоянства положения точки выходного звена, в дальнейшем использовали Ж. Ижевич и Д. Войнаровски [97]. Эти авторы предложили свой механизм (Рис. 1.5).

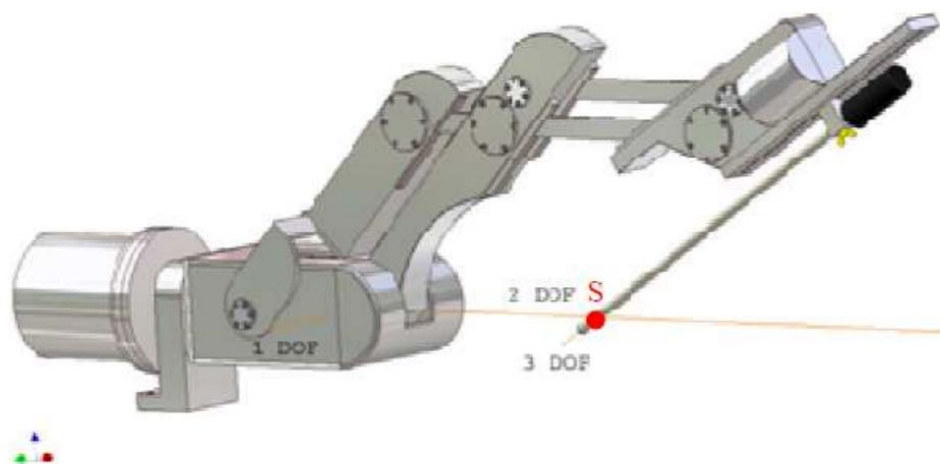


Рис. 1.5

Данный механизм, включающий два шарнирных параллелограмма, дает возможность инструменту, расположенному на выходном звене (Рис. 1.6), двигаться в рабочей зоне, имеющей вид конуса.

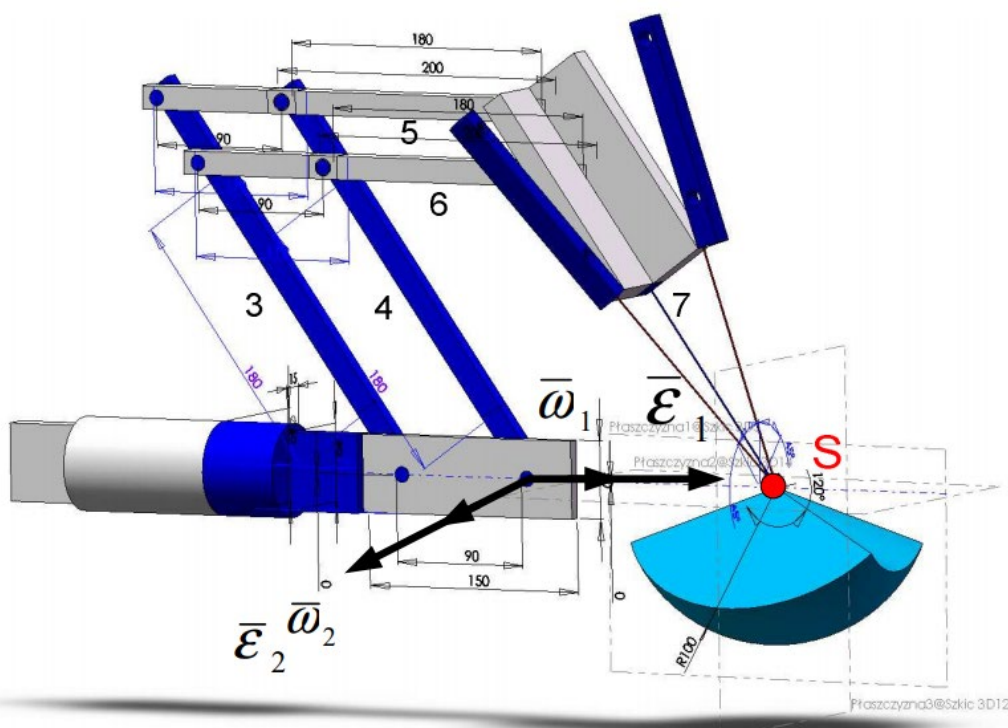


Рис. 1.6

Для проведения хирургических операций на сердце авторы предлагают использовать два подобных механизма, расположенных оппозитно (Рис. 1.7).

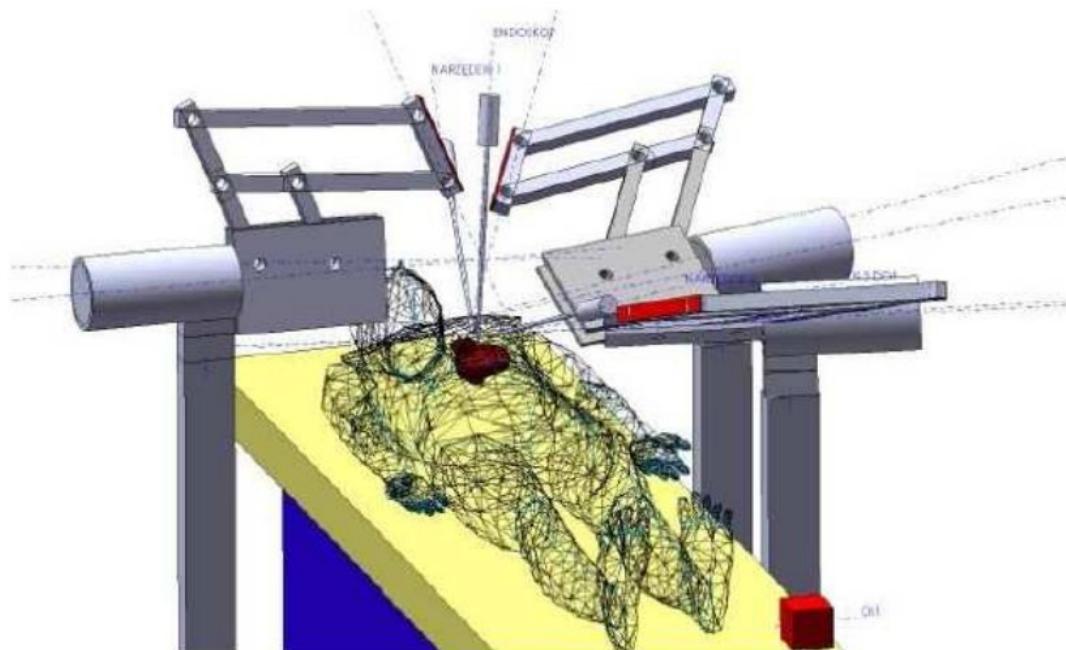


Рис. 1.7

В Институте машиноведения был получен ряд механизмов, обеспечивающих постоянство точки ввода инструмента в рабочую зону. В частности, эта техническая задача может быть решена на основе использования дуговых элементов, являющихся звеньями сферического механизма. Соответствующие исследования были проведены А.В. Духовым с коллегами [25, 27, 28, 29].

Механизм (Рис. 1.8, 1.9, 1.10) имеет два дуговых элемента, на которых расположена каретка, способная перемещаться по указанным элементам. На каретке может размещаться привод, который перемещает ремень на выходное звено вдоль его оси.

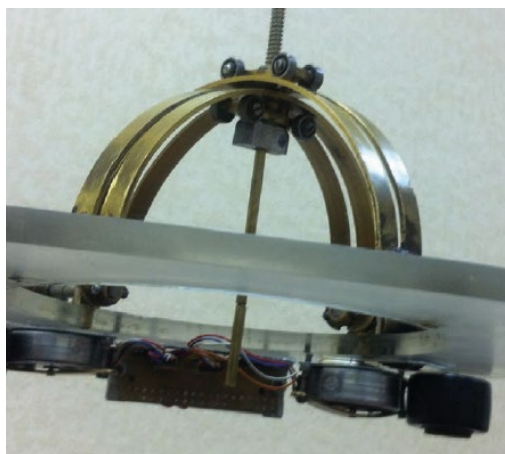


Рис. 1.8



Рис. 1.9



Рис. 1.10

Еще один механизм, разработанный в Институте машиноведение им. А.А. Благонравова РАН для решения задачи обеспечения постоянства точки

ввода инструмента в рабочую область, выполнен в виде круговой направляющей, на которой расположены три приводные каретки (Рис. 1.11, 1.12). Эти механизмы были исследованы в работах Г.С. Филиппова с коллегами [71], а также в работах Е.И. Велиева, Р.Ф. Ганиева с соавторами [9, 10, 111].

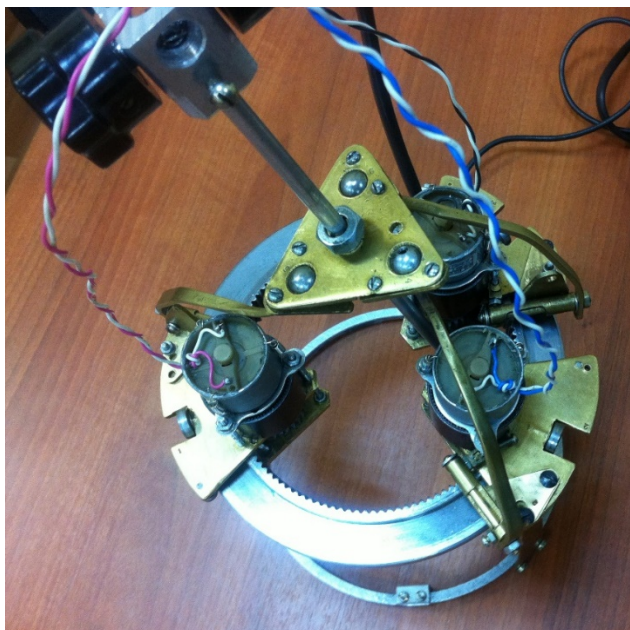


Рис. 1.11



Рис. 1.12

Укажем, что постоянство точки ввода инструмента в рабочую зону может быть обеспечено за счет введения дополнительных приводов в кинематическую цепь механизма последовательной структуры, подобное

решение было использовано при построении известного робота da Vinci (Рис. 1.13). Однако, такое решение требует увеличения количества приводов, что в свою очередь ведет к увеличению веса и увеличению габаритов.



Рис. 1.13

Следует отметить, большие результаты в данной области полученные С.А. Шептуновым с коллегами. [75]

В заключение данного параграфа представим еще некоторые варианты механизмов, обеспечивающих постоянство точки ввода инструмента в рабочую зону. Один из этих механизмов содержит две дуги, его основание выполнено в виде сектора окружности (Рис. 1.14). Другой механизм имеет последовательную структуру (Рис. 1.15). [28]

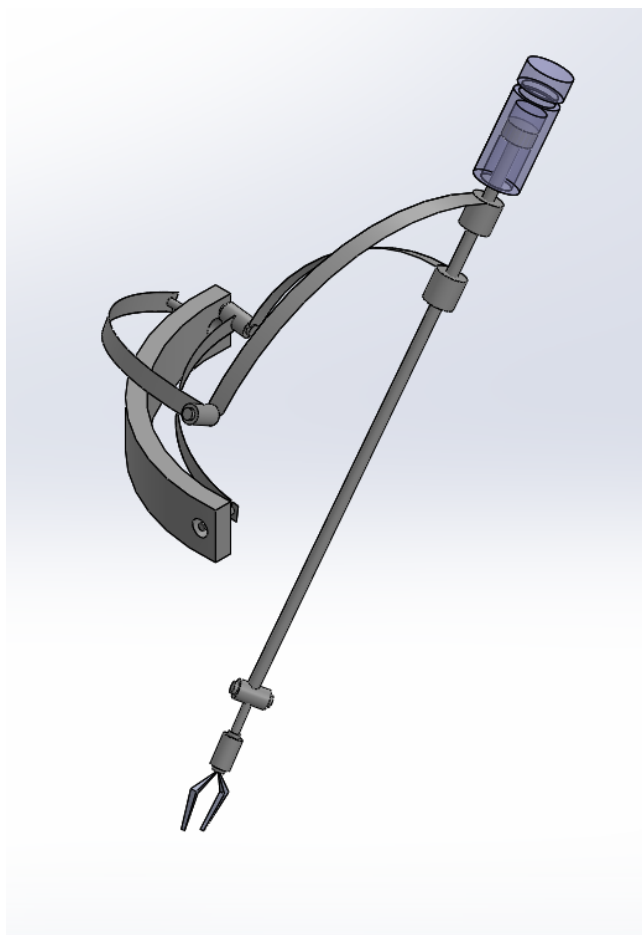


Рис. 1.14

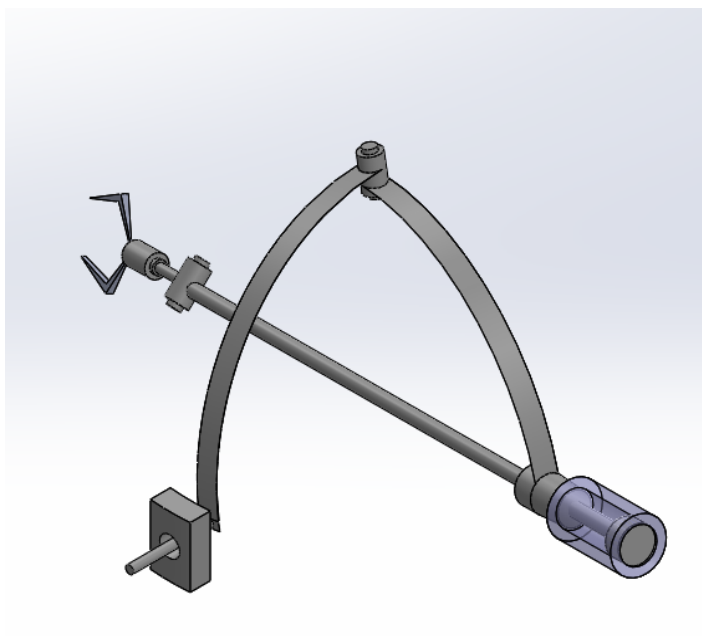


Рис. 1.15

Таким образом, в данном параграфе представлены различные механизмы, обеспечивающие постоянство точки ввода инструмента в рабочую зону.

1.2 Обзор методов исследования, которые могут быть применены для механизмов с постоянной точкой ввода инструмента.

В данном параграфе рассматриваются различные методы, которые могут быть применены для исследования механизмов с постоянной точкой ввода инструмента.

Анализ и синтез механизмов различного типа и назначения основывается на фундаментальных исследованиях классиков науки о машинах: И.И. Артоболевского [5]; Н.Г. Бруевича [7]; Р.Ф. Ганиева [16, 19, 20]; К. В. Фролова. [58, 45, 70]; В.О. Кононенко [19]. Ф.М. Диментберга [34,35]; Н.И. Левитского [56]; Г.В. Крейнина [36, 53]; М.З. Коловского [43]; А.А. Кобринского, А.Е. Кобринского [40, 41]; А.Ф. Крайнева [49, 50, 51, 52]; П.А. Лебедева [55]; А.И. Корендясева [46]; и др.

Основываясь на указанных фундаментальных исследованиях, ряд ученых развили методы анализа и синтеза механизмов. В этой связи можно отметить работы: Е. И. Воробьева [11, 12]; Н.С. Давиташвили [32]; У.А. Джолдасбекова [33]; И.П. Вульфсона [36]; П.Д. Крутько [54]; П. Г. Мудрова [59]; А.Г. Овакимова [60]; Б.И. Павлова [61]; Э.Е. Пейсах [62]; Г.В. Крейнина [39]; Ю.Л. Саркисяна [64, 65]; В.А. Светлицкого и О.С. Нарайкина [66]; А.И. Смелягина [67]; И.М. Соболя и Р.Б. Статникова [68]; К. Сугимото [69]; Ф.Л. Черноусько, Н.Н. Болотника, В.Г. Градецкого [74]; Д. Анджелеса [77]; Д. Денавита и Р. Хартенберга [85]; Г. Гогу [90]; Ж. Эрве [95] и др.

Важные результаты достигнуты в области исследования робототехнических систем, здесь следует отметить работы М. Вукобратовича [13]; Е. И. Воробьева [11, 12]; И.А. Каляева [38]; М. З. Коловского и А.В. Слоуща [44]; В.А. Котельникова [47]; А.Е. Кобринского, А.А. Кобринского [41]; В.И. Краснопольского, А.А. Попова, Т.Н. Мананниковой [48]; Р. Пола

[63]; С.Ф. Яцуна [76]; М. Чеккарелли [81]; А.С. Горобцова с соавторами [31]; А.С. Ющенко [57] и др.

Одним из важнейших направлений развития науки о механизмах является исследование механизмов параллельной структуры, которые имеют несколько кинематических цепей, соединяющих основание и выходное звено, и за счет этого воспринимают нагрузку как пространственные фермы. В силу этого эти устройства обладают повышенными показателями по точности и грузоподъемности.

В этой связи уместно отметить работы: А.Ш. Колискора и К.С. Арзуманяна [4, 42, 43]; В. Аркеляна [3]; В.А. Глазунова [8, 9, 14, 15, 18, 21-30, 71, 73, 87, 88, 89, 99, 100]; С. Брио [6]; Е.Н. Ивашова [37]; А.Г. Овакимова [60]; Ю.Л. Саркисяна и Т.Ф. Парикяна [65]; А. Зоу с соавторами [78]; В. Паренти-Кастелли [80, 106, 107]; М. Чеккарелли [81, 84]; Ф. Венгера и Д. Шабла [82]; Р. Клавеля [83]; Д. Руни и К. Ирла [86]; К. Гослена и Д. Анджелеса [91, 92]; В. Гауфа [93]; Г. Ижевича и Д. Войнаровски [97]; К. Конга и К. Гослена [98]; Ж. - П. Мерле [102]; Д. Стюарта [109]; К. Сугимото [110]; Р.И. Ализаде [2]; М. Чарригато с соавторами [112]; В. Заманова и З. Сотирова [113] и др.

Что касается различных методов анализа и синтеза механизмов, то одним из эффективных подходов является использование винтового и матричного исчисления в этой связи уместно отметить работы Ф.М. Диментберга [24, 34, 35]; И.П. Вульфсона [36]; П.А. Лебедева [55]; А.Г. Овакимова [60]; Э.Е. Пейсаха [62]; Ю.Л. Саркисяна [64]; Д. Денавита и Р. Хартенберга [85]; С.В. Хейло [104, 89] и др.

Можно утверждать, что весьма важным подходом к синтезу и анализу различных механизмов является геометрический подход. Одним из самых последних по времени результатов в данной области [112] является архитектура сферического механизма, который может быть частью более сложных механизмов и который получен на основании рассмотрения взаимных движений подвижной и неподвижной систем координат (Рис 1.16)

соответствующий сферический механизм (Рис. 1.17) может быть применен в разного рода механизмах параллельной структуры (Рис. 1.18, 1.19, 1.20).

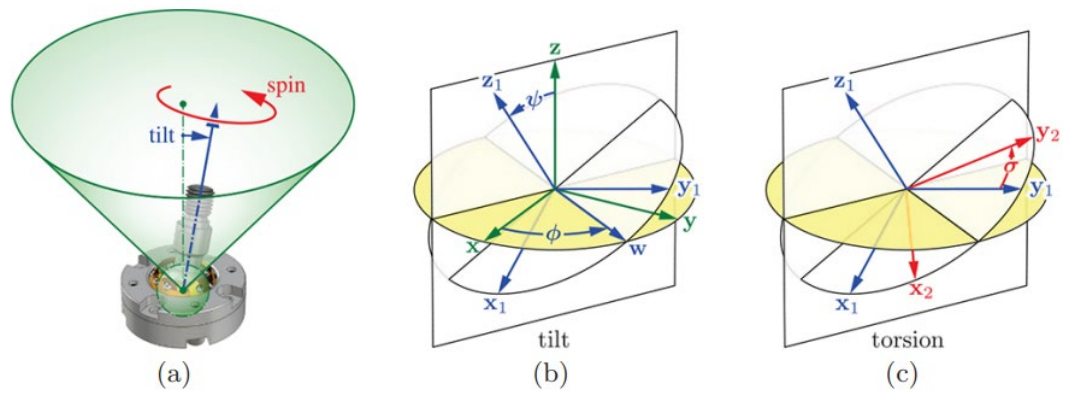


Рис 1.16

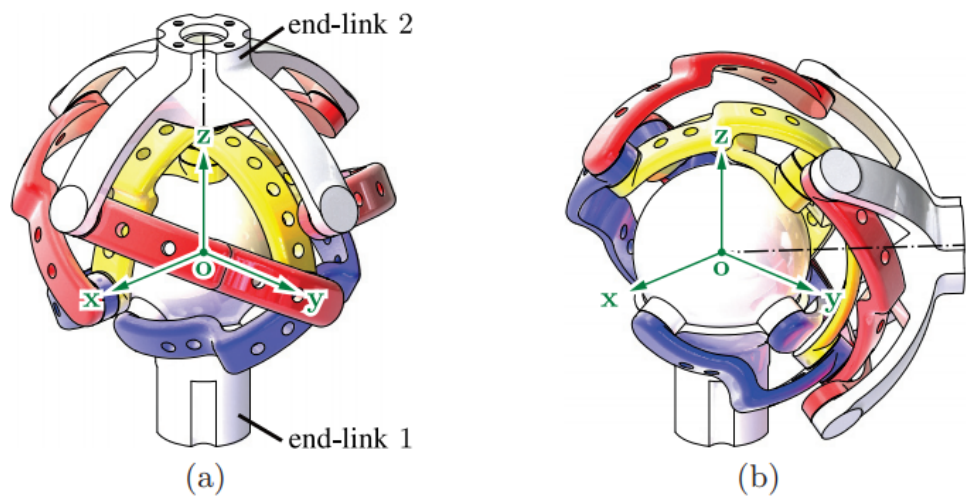


Рис. 1.17

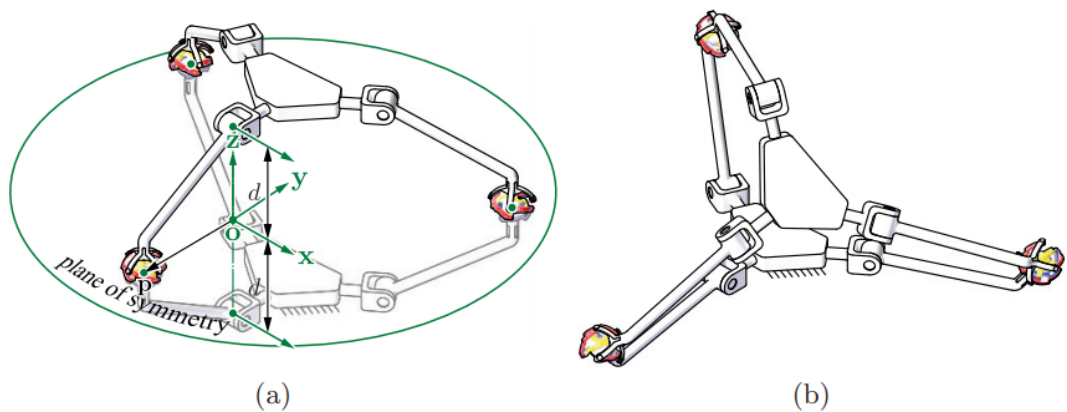


Рис. 1.18

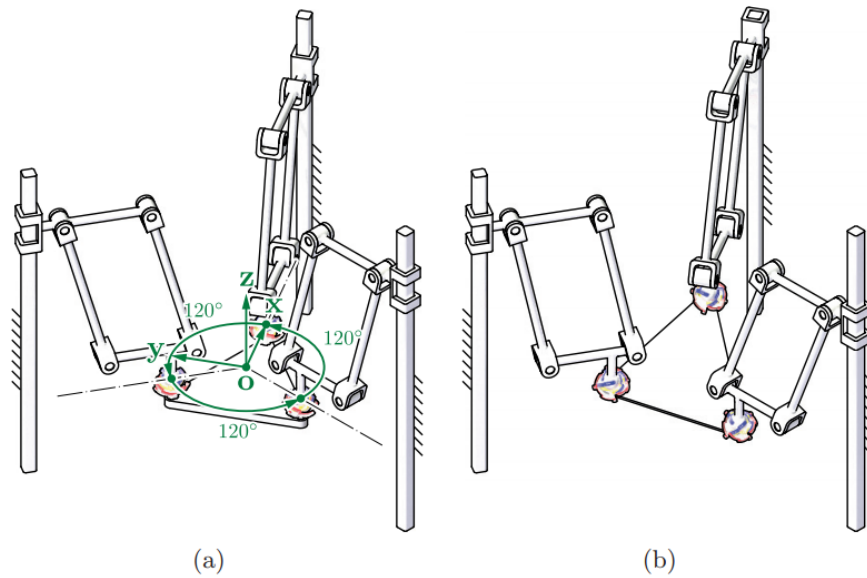


Рис. 1.19

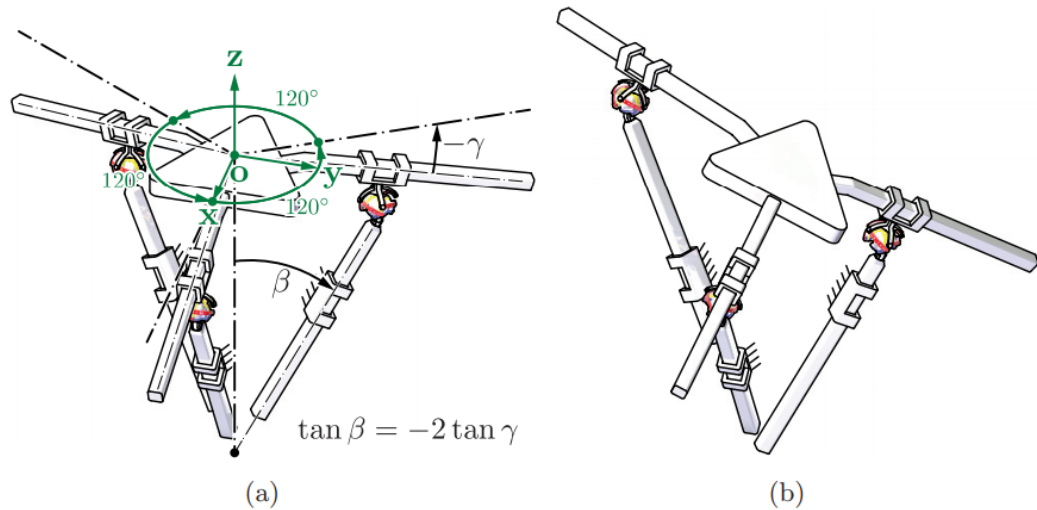


Рис. 1.20

Следует отметить, что одним из методов построения механизмов в тех случаях, когда требуется получить высокую точность перемещений, является замена кинематических пар, выполненных в обычном виде на кинематические пары, выполненные в виде изгибных, упругих элементов (Рис. 1.21-1.25) [78, 101].

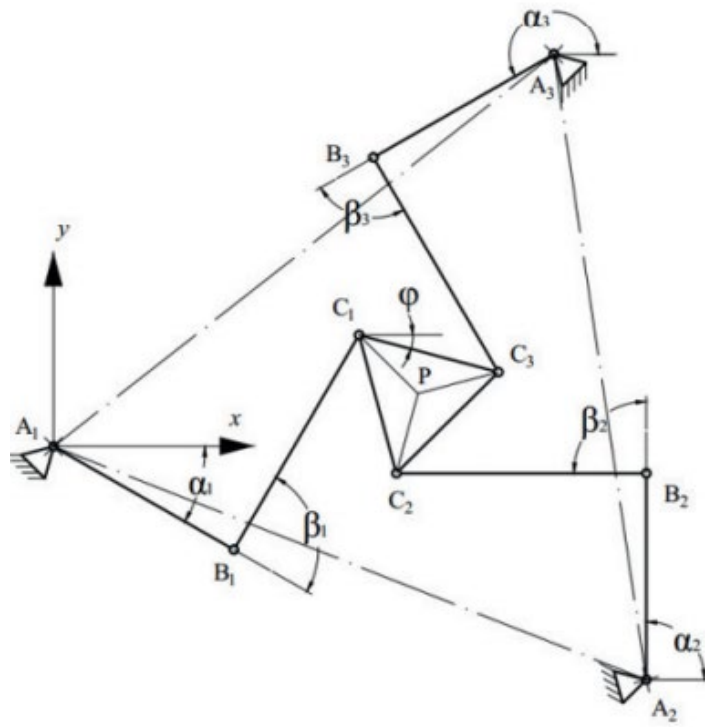


Рис. 1.21

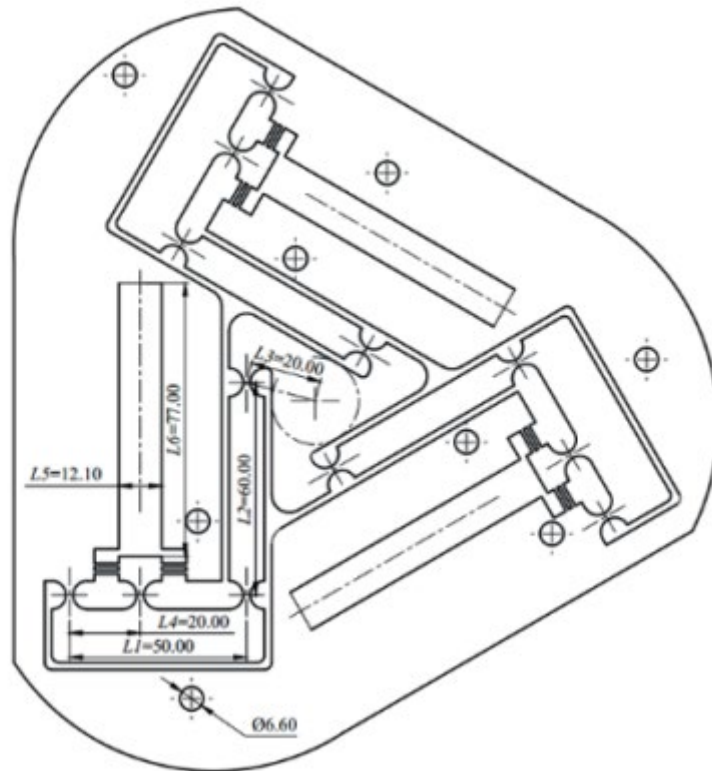


Рис. 1.22

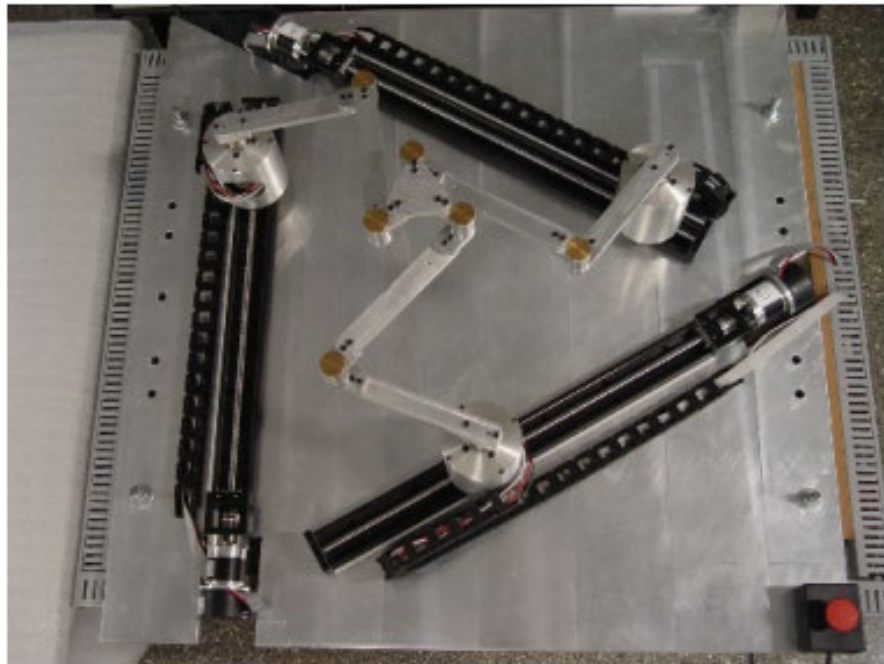


Рис. 1.23

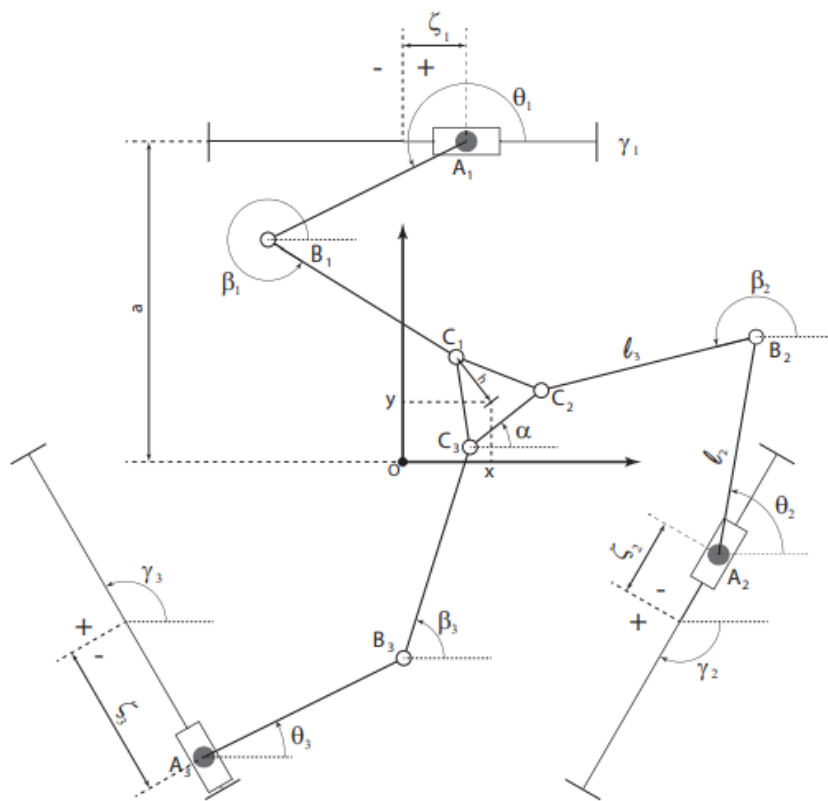


Рис. 1.24

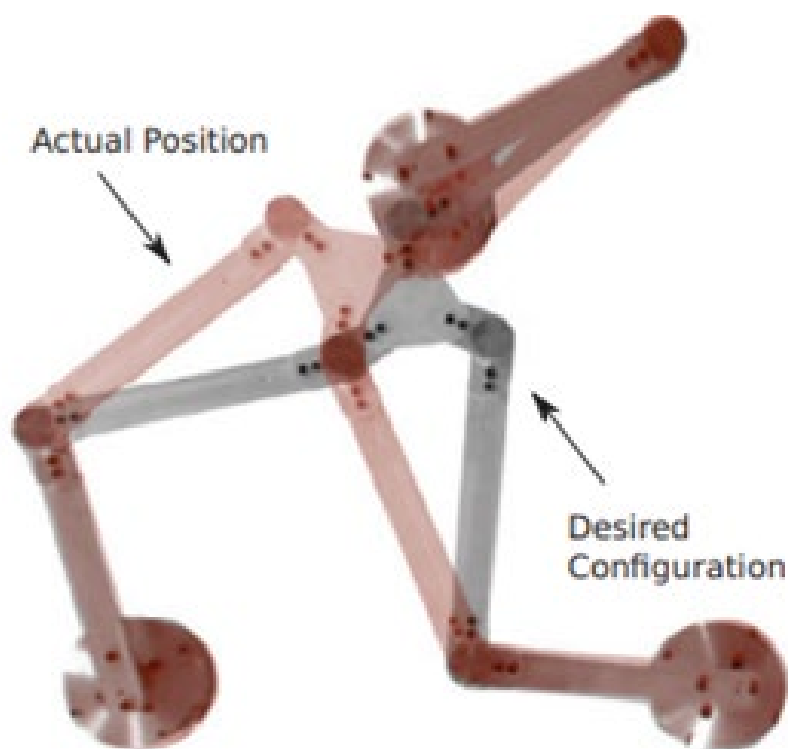


Рис. 1.25

Синтез механизмов разного типа, обеспечивающих постоянство точки ввода инструмента в рабочую зону, должен основываться на изучении технических требований, предъявляемых в соответствии с условиями проведения тех или иных хирургических операций в разных областях медицины, а также в соответствии с условиями решения других технических проблем [8, 9, 17, 18, 19, 46, 71, 72, 78, 96, 101, 112, 94, 103, 108]. В частности, кроме полостных операций, могут быть операции на позвоночнике, при которых нужно обеспечить взаимную фиксацию соседних позвонков (Рис. 1.26) [96]. В данном случае от механизма может потребоваться не только высокая точность, но и высокая жесткость, что связано с заворачиваем винтов в позвонки человека (Рис. 1.27, 1.28).

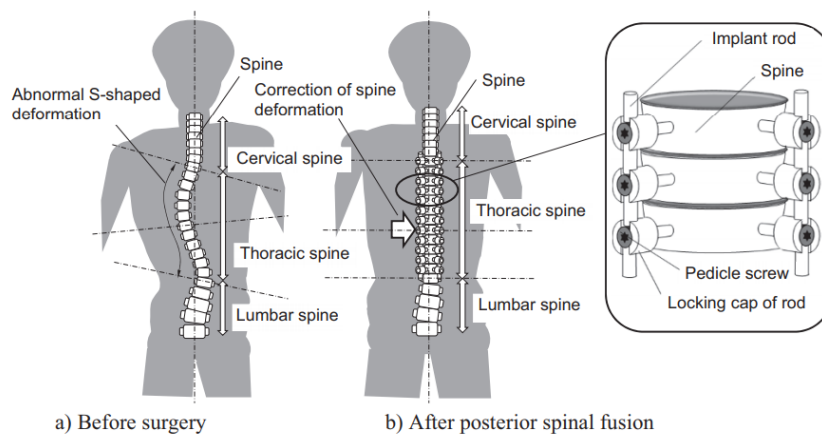


Рис. 1.26

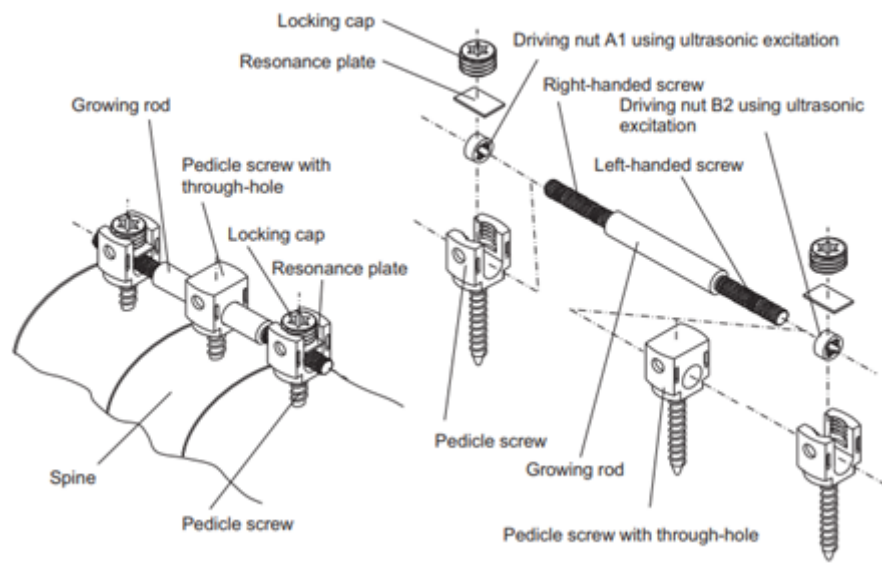


Рис. 1.27

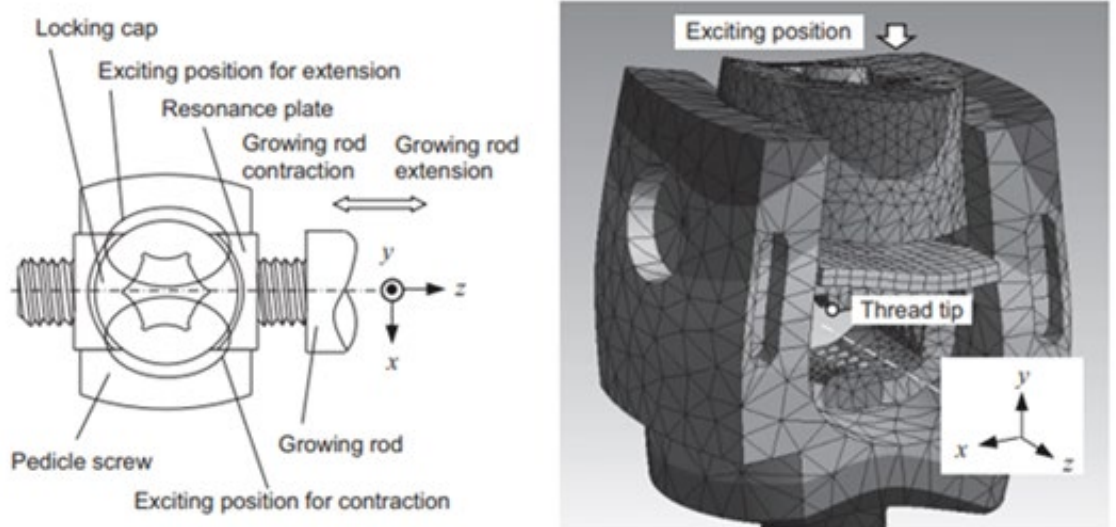


Рис. 1.28

Таким образом, можно отметить, что задача построения механизмов с постоянной точкой ввода инструмента в рабочую зону является актуальной и востребованной в различных областях техники, и для ее решения можно применять различные подходы и методы. Однако, эту техническую задачу нельзя считать полностью решенной, и требуется создание новых механизмов, наиболее эффективно решающих этот вопрос. Этой проблематике посвящена данная работа, а также публикации ее автора [1, 10, 72, 73, 79, 105]

1.3 Цель и задачи работы.

На основании представленного анализа литературы можно сделать вывод, что разработка механизмов с постоянной точкой ввода инструмента в рабочую зону, является важной технической задачей, для решения которой существуют эффективные методы. Указанные методы целесообразно использовать для синтеза новых механизмов, обладающих упомянутым свойством.

Целью данной работы является создание новых эффективных механизмов, обеспечивающих постоянство точки ввода инструмента (рабочего органа) в рабочую зону, а также разработка методик их кинематического и динамического анализа. Для достижения поставленной цели нужно решить следующие задачи.

5) Синтезировать механизмы, обеспечивающие постоянство точки ввода инструмента в рабочую зону, содержащие либо конические передачи, либо ременные передачи.

6) Разработать методику кинематического анализа и представить решения задач о положениях, скоростях и ускорениях, основанные на дифференцировании уравнений связи и на векторном вычислении.

7) Разработать методику динамического анализа, основанную на принципе Даламбера - Лагранжа. Разработать программы динамического анализа и решить конкретные примеры.

8) Разработать действующую модель одного из механизмов, содержащую ременные передачи. Определить характеристики модели, в частности рабочую зону и точность.

Глава 2. определение числа степеней свободы и решение задачи о положениях механизмов с постоянной точкой ввода выходного звена.

В данной главе рассматриваются задачи структурного анализа и задачи о положениях для различных механизмов, характеризующихся наличием постоянной точки ввода выходного звена. Имеются в виду два механизма, один из которых характеризуется наличием конических передач, а другой наличием ременных передач. Кроме того, механизм может содержать параллелограммы

2.1 Определение числа степеней свободы в механизмах с постоянной точкой ввода выходного звена.

В данном параграфе рассмотрим структурный синтез и анализ механизмов, обеспечивающих постоянство точки ввода инструмента в рабочую область. Исходным будет механизм (Рис. 2.1), в котором имеют место четыре последовательно расположенные вращательные кинематические пары, при этом первая кинематическая пара, связанная с основанием, имеет ось, перпендикулярную осям трех других кинематических пар, а оси первой и второй пар пересекаются. Очевидно, что согласно формуле П.О. Сомова - А.П. Малышева данный механизм имеет четыре степени свободы.

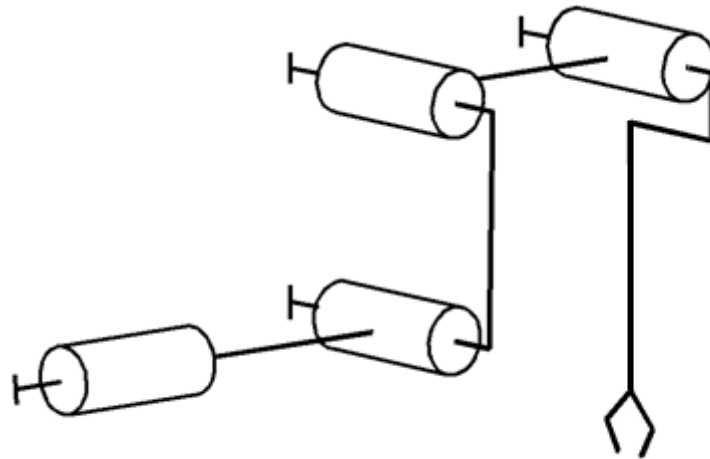


Рис. 2.1

Нам необходимо, чтобы путем ввода дополнительных звеньев и кинематических пар было бы обеспечено такое движение в трех последовательно расположенных вращательных кинематических парах, чтобы остались бы две степени свободы, но при любых движениях оставалось бы постоянным положение одной из точек выходного звена. Эту задачу решим двумя способами - введением конических и зубчатых передач.

Приведем два варианта механизмов, решающих задачу постоянства точки ввода выходного звена. Один из механизмов содержит коническую передачу, другой ременную передачу. Кроме того, механизм может содержать параллелограммы.

Рассмотрим первый из упомянутых механизмов (Рис. 2.2 а) и представим решение задачи по определению числа степеней свободы для механизма с коническими передачами. 3D модель приведена на рисунке (Рис. 2.2 б)

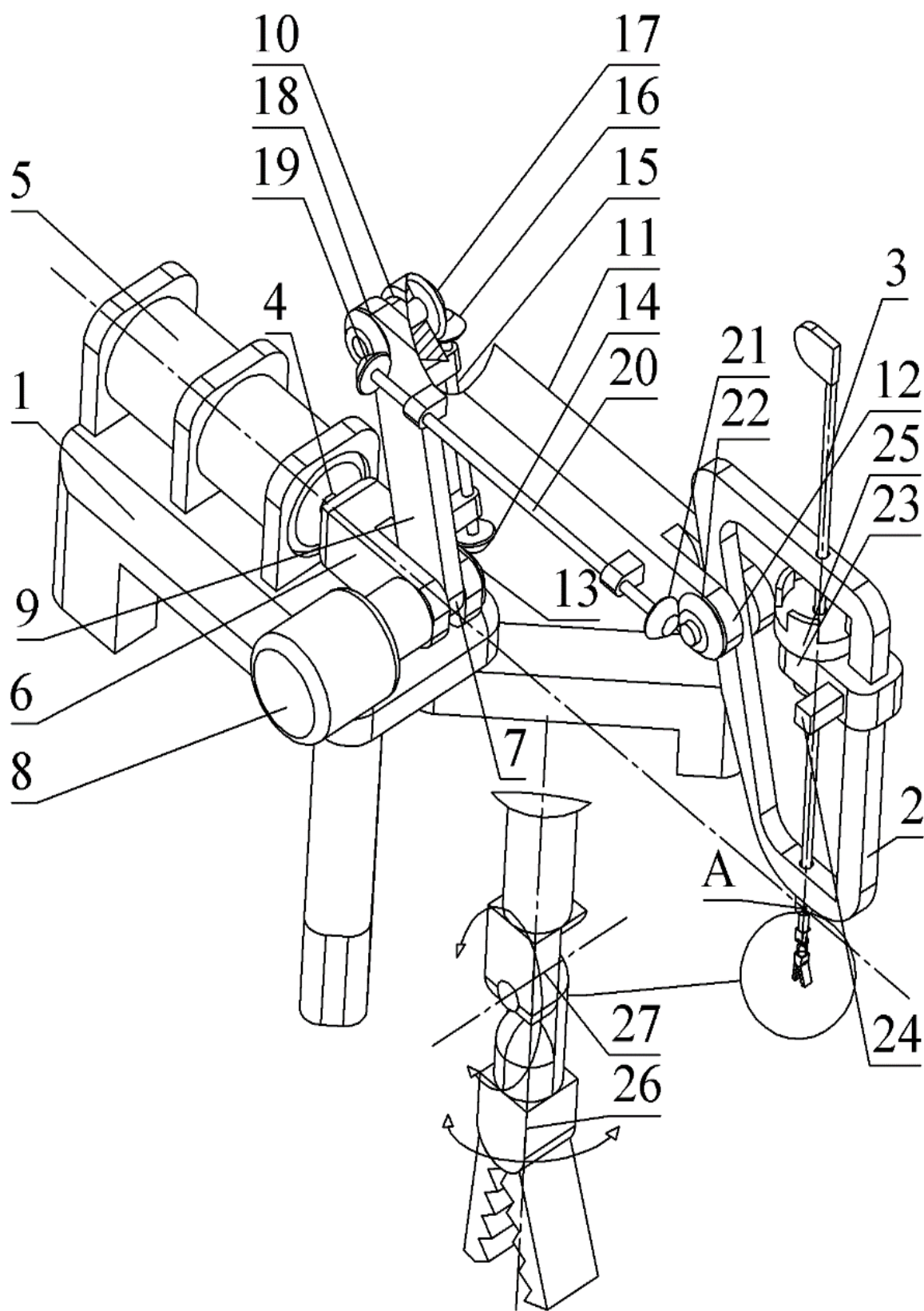


Рис. 2.2 а

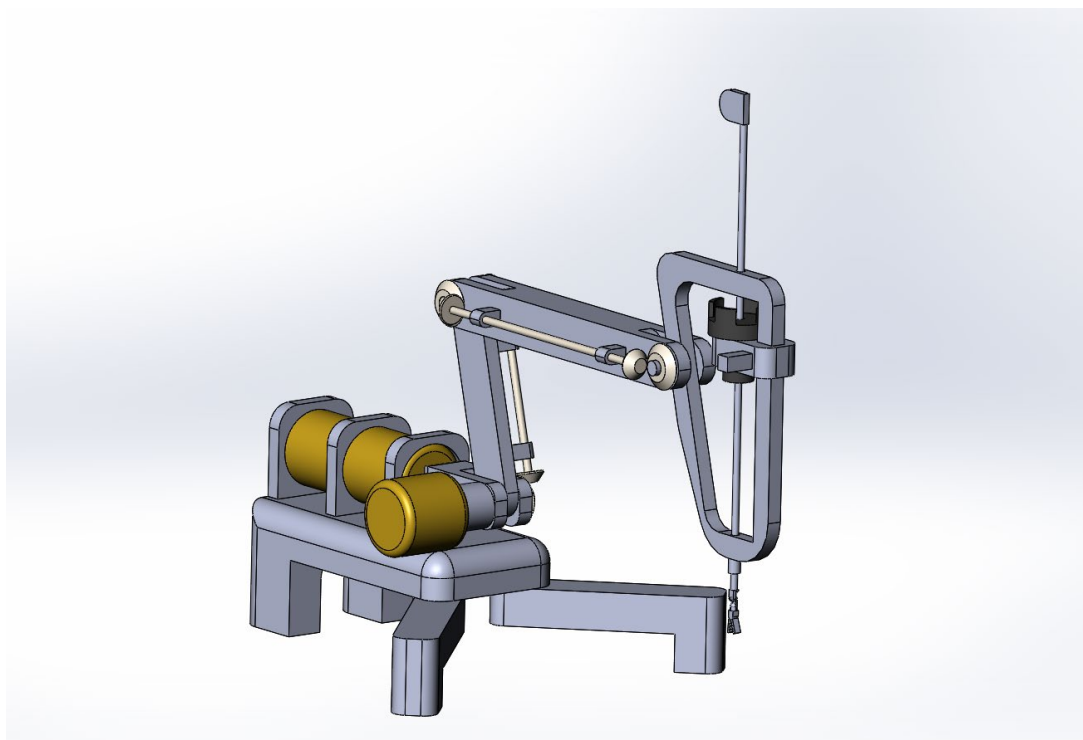


Рис. 2.2 б

Данный механизм, представленный на (Рис. 2.2 а), состоит из размещенного на основании 1 первого вращательного двигателя 5, поворачивающего подвижную платформу 6 с расположенными на ней узлами манипулятора и образует первую кинематическую пару пятого класса. Ось поворота совпадает с осью вала двигателя 5 и пересекается с осью второго вращательного двигателя 8, закрепленного на платформе 6. Вал двигателя 8 связан с одним концом входного звена 9 и поворачивает входное звено вокруг соответствующей оси, образуя вторую кинематическую пару пятого класса. С подвижной платформой 6 жестко сопряжено зубчатое коническое колесо 13 с сопряженным с ним вторым зубчатым колесом 14, связанным посредством вращательного шарнира 15 с входным звеном. Третье коническое зубчатое колесо 16 расположено соосно на одном валу со вторым коническим зубчатым колесом 14 и сопряжено с четвертым коническим зубчатым колесом 17, установленным на промежуточном звене 11. Таким образом, конические шестерни 13 и 17, сопряженные коническими шестернями 14 и 16, образуют первую и вторую пару первого класса и формируют первую зубчатую передачу, обеспечивающую параллельность оси промежуточного звена 11 и

оси первого привода 5 при повороте входного звена 9 вторым вращательным двигателем 8. Звенья 9 и 11 образуют третью кинематическую пару пятого класса. Промежуточное звено 11 связано с выходным звеном 2 посредством четвертой вращательной кинематической пары пятого класса 12. На противоположном от второго двигателя 8 конце входного звена 9 жестко закреплено пятое коническое зубчатое колесо 18, установленное соосно на одном валу с четвертым зубчатым коническим колесом 17. Зубчатое колесо 18 сопряжено с шестым коническим зубчатым колесом 19 с образованием третьей пары первого класса. Зубчатое колесо 19 установлено соосно на одном валу 20 с коническим зубчатым колесом 21, сопряженным с коническим колесом 22 с образованием четвертой пары первого класса. Вал 20 и промежуточное звено 11 образуют пятую пару пятого класса, а промежуточное звено 11 и выходное звено 2 образуют шестую пару пятого класса. Вторая зубчатая передача, образованная колесами 18, 19, 21 и 22, обеспечивает параллельность входного звена 9 и рабочего органа 3, расположенного на жестко связанной с коническим зубчатым колесом 22 рабочей площадке 23. При этом оси первого двигателя 5 и рабочего органа 3 пересекаются в точке А, которая сохраняет свое положение при повороте подвижной платформы 6 и входного звена 9. В этой точке располагается отверстие в перегородке, через которое ведется работа. Поступательное и вращательное перемещения рабочего органа осуществляются последовательно и соосно расположенными двигателями поступательного перемещения 24 и вращательного перемещения 25, установленными на площадке 23. Вращательный двигатель 25 и рабочий орган 3 образуют первую кинематическую пару четвертого класса. Шарниры 26 и 27 с перпендикулярными осями образуют вторую кинематическую пару четвертого класса.

Применим для определения числа степеней свободы формулу Сомова-Мальшева.

Для выходного звена:

Формула Сомова-Мальшева:

$$W = 6 \cdot n - 5 \cdot P_5 - 4 \cdot P_4 - 3 \cdot P_3 - 2 \cdot P_2 - P_1$$

где n – количество промежуточных звеньев цепи, P_5, P_4, \dots, P_1 – количество одно-, двух-, ..., пятиподвижных пар.

Количество пар 5-го класса:

$$P_5 = 6$$

Количество пар 1-го класса:

$$P_1 = 4$$

Количество подвижных звеньев кинематической цепи:

$$n = 6$$

Подставим данные в формулу Сомова-Мальшева:

$$W = 6 \cdot 6 - 5 \cdot 6 - 4 = 36 - 30 - 4 = 2$$

Для рабочего органа:

$$W = 6 \cdot n - 5 \cdot P_5 - 4 \cdot P_4 - 3 \cdot P_3 - 2 \cdot P_2 - P_1$$

где n – количество промежуточных звеньев цепи, P_5, P_4, \dots, P_1 – количество одно-, двух-, ..., пятиподвижных пар.

Количество пар 5-го класса:

$$P_5 = 6$$

Количество пар 4-го класса:

$$P_4 = 1$$

Количество пар 1-го класса:

$$P_1 = 4$$

Количество подвижных звеньев кинематической цепи:

$$n = 7$$

Подставим данные в формулу Сомова-Мальшева:

$$W = 6 \cdot 7 - 5 \cdot 6 - 4 - 4 = 42 - 30 - 4 - 4 = 4$$

Для инструмента:

$$W = 6 \cdot n - 5 \cdot P_5 - 4 \cdot P_4 - 3 \cdot P_3 - 2 \cdot P_2 - P_1$$

где n – количество промежуточных звеньев цепи, P_5, P_4, \dots, P_1 – количество одно-, двух-, ..., пятиподвижных пар.

Количество пар 5-го класса:

$$P_5 = 6$$

Количество пар 4-го класса:

$$P_4 = 2$$

Количество пар 1-го класса:

$$P_1 = 4$$

Количество подвижных звеньев кинематической цепи:

$$n = 8$$

Подставим данные в формулу Сомова-Малышева:

$$W = 6 \cdot 8 - 5 \cdot 6 - 4 \cdot 2 - 4 = 48 - 30 - 8 - 4 = 6$$

Таким образом механизм имеет шесть степеней свободы.

Рассмотрим решение задачи по определению числа степеней свободы для механизма с ременными передачами (Рис. 2.3 а). 3D модель приведена на рисунке (Рис. 2.3 б).

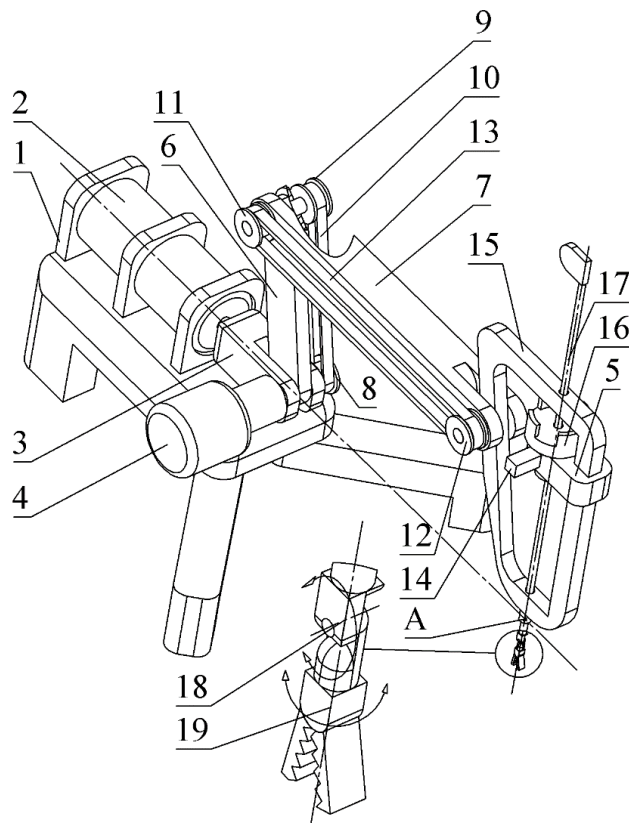


Рис. 2.3 а

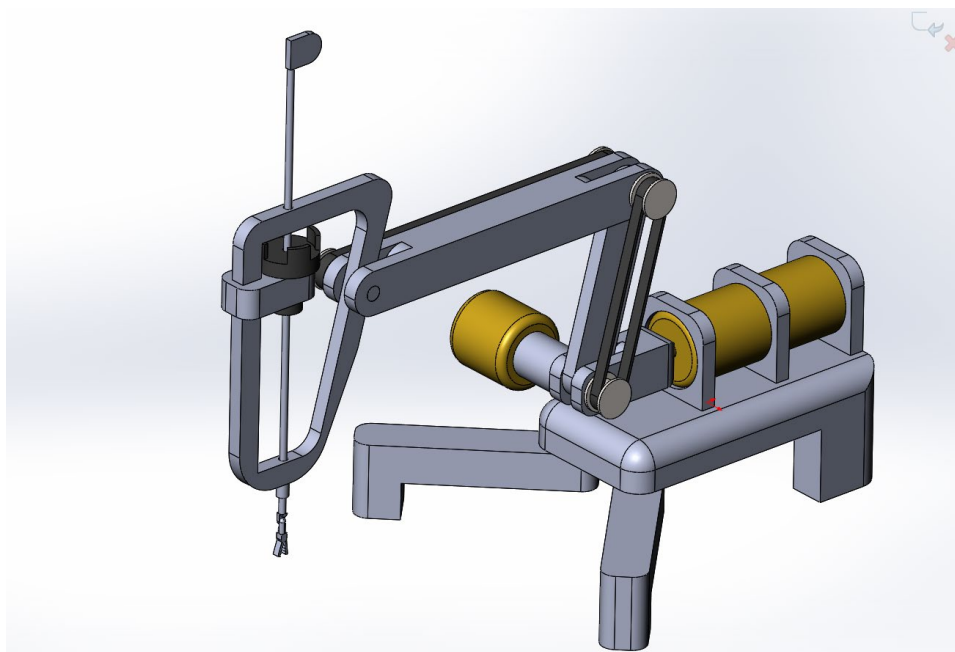


Рис. 2.3 б

Данный механизм, представленный на (Рис. 2.3 а), состоит из основания 1 с закрепленным на нем первым вращательным двигателем 2. Вал двигателя 2 связан с подвижной платформой 3. Основание 1 и платформа 3 образуют первую кинематическую пару пятого класса. На платформе 3 размещен второй вращательный двигатель 4. Оси вращения двигателей 2 и 4 перпендикулярны и пересекаются. Подвижная платформа 3 соединяется с рабочей площадкой 5 двумя взаимосвязанными кинематическими цепями. Первая кинематическая цепь образована двумя сопряженными звеньями: входным 6 и промежуточным 7, образующими вторую кинематическую пару пятого класса. Начало входного звена 6 жестко связано с валом второго вращательного двигателя 4. Вторая кинематическая пара пятого класса расположена между платформой 3 и входным звеном 6. Входное звено 6 связано третьей парой пятого класса с промежуточным звеном 7. С промежуточным звеном 7 связана с возможностью вращения рабочая площадка 5, образуя четвертую кинематическую пару пятого класса.

Вторая кинематическая цепь, связывающая подвижную платформу 3 с рабочей площадкой 5, состоит из двух последовательно установленных ременных передач, каждая из которых содержит по два шкива, связанные

посредством ремня. Входной шкив 8 первой передачи жестко соединен с подвижной платформой 3, а выходной шкив 9 первой передачи - с началом второго звена 7. Шкивы 9 и 10 связывает ремень 10. Входной шкив 11 второй передачи жестко сопряжен с концом входного звена 6 и имеет общую ось с выходным шкивом 9 первой ременной передачи. С выходным шкивом 12 второй ременной передачи, связанным с возможностью поворота с концом промежуточного звена 7 жестко сопряжена рабочая площадка 5. Шкивы 11 и 12 второй ременной передачи связаны ремнем 13. На рабочей площадке 5 установлен поступательный двигатель 14 и соосно с ним выходное звено 15. На одной оси с поступательным двигателем 14 последовательно установлены вращательный двигатель 16 и рабочий орган 17, образуя первую кинематическую пару четвертого класса. Рабочий орган 17 имеет возможность перемещения относительно выходного звена 15. Ось рабочего органа 17 пересекается с осью первого вращательного двигателя 2 в точке А, которая сохраняет свое положение при перемещении звеньев манипулятора. Шарнир инструмента 18, а также шарнир 19, образуют вторую кинематическую пару четвертого класса. Каждая ременная передача отбирает одну степень свободы.

Для определения числа степеней свободы мы применим формулу Сомова-Мальшева.

Для выходного звена:

Формула Сомова-Мальшева:

$$W = 6 \cdot n - 5 \cdot P_5 - 4 \cdot P_4 - 3 \cdot P_3 - 2 \cdot P_2 - P_1$$

где n – количество промежуточных звеньев цепи, P_5, P_4, \dots, P_1 – количество одно-, двух-, ..., пятиподвижных пар.

Количество пар 5-го класса:

$$P_5 = 4$$

Количество пар 1-го класса:

$$P_1 = 2$$

Количество подвижных звеньев кинематической цепи:

$$n = 4$$

Подставим данные в формулу Сомова-Малышева:

$$W = 6 \cdot 4 - 5 \cdot 4 - 2 = 24 - 20 - 2 = 2$$

Для рабочего органа:

Количество пар 5-го класса:

$$P_5 = 4$$

Количество пар 4-го класса:

$$P_4 = 1$$

Количество пар 1-го класса:

$$P_1 = 2$$

Количество подвижных звеньев кинематической цепи:

$$n = 5$$

Подставим данные в формулу Сомова-Малышева:

$$W = 6 \cdot 5 - 5 \cdot 4 - 4 - 2 = 30 - 20 - 4 - 2 = 4$$

Для инструмента:

Количество пар 5-го класса:

$$P_5 = 4$$

Количество пар 4-го класса:

$$P_4 = 2$$

Количество пар 1-го класса:

$$P_1 = 4$$

Количество подвижных звеньев кинематической цепи:

$$n = 7$$

Подставим данные в формулу Сомова-Малышева:

$$W = 6 \cdot 8 - 5 \cdot 6 - 4 \cdot 2 - 4 = 48 - 30 - 8 - 4 = 6$$

Таким образом, данный механизм тоже имеет шесть степеней свободы.

2.2 Решение задачи о положениях сферического механизмов с постоянной точкой ввода выходного звена.

В данном параграфе представим решение обратной задачи о положениях для представленных выше механизмов с постоянной точкой ввода выходного звена. В данном случае не играет роли, какое конкретное конструктивное решение имеет устройство. При этом будем рассматривать вспомогательную схему Рис. 2.4.

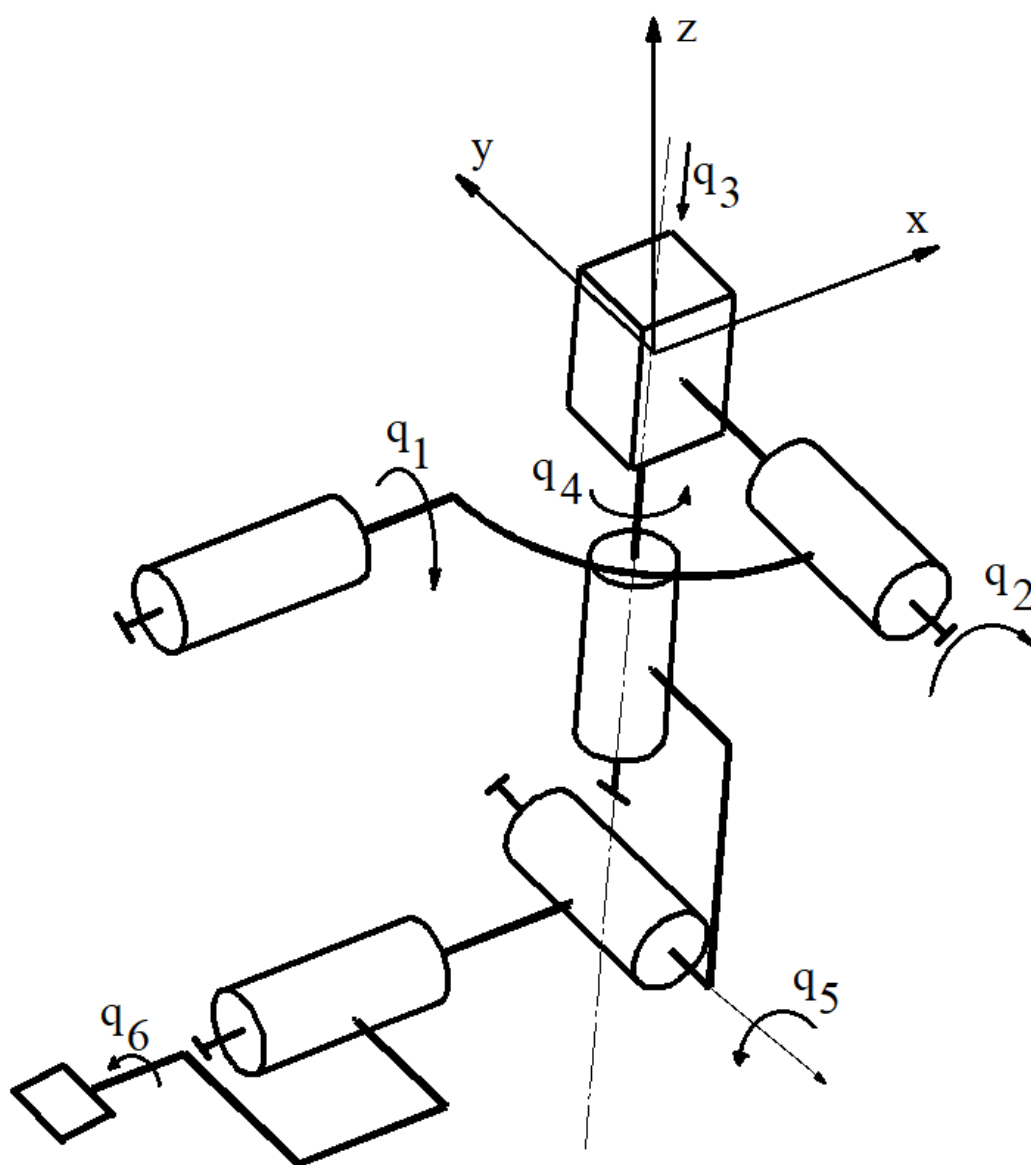


Рис. 2.4

Приведенная выше схема может быть несколько детализирована с учетом конструктивных особенностей элементов в механизме (Рис. 2.5)

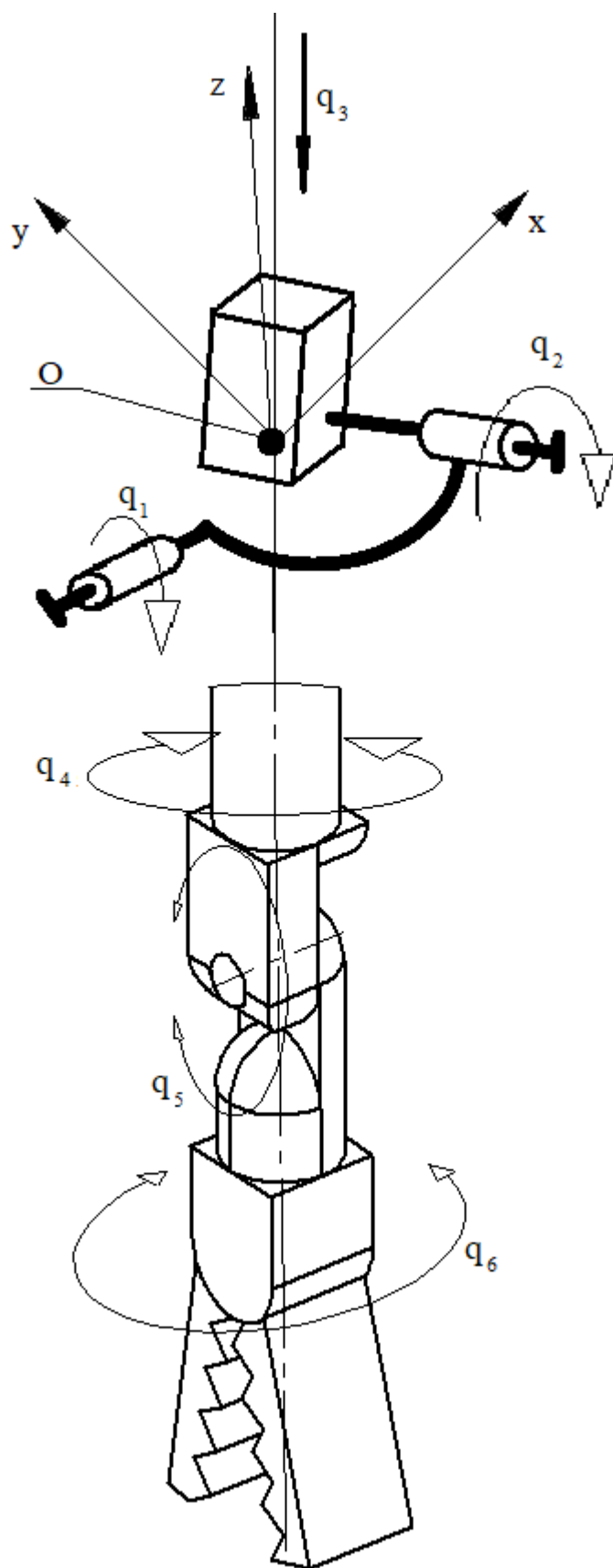


Рис. 2.5

Рассмотрим решение обратной задачи о положениях для манипулятора с постоянной точкой ввода инструмента рис 2.4. За начало координат примем точку ввода, будем иметь ввиду что манипулятор имеет шесть степеней свободы, три из которых направляют инструмент в нужное положение и три определяют ориентацию инструмента.

Положения инструмента по шести абсолютными координатам определяется матрицей Денавита-Хартенберга A_b . Она может быть получена перемножением четырех матриц, три из которых определяют ориентацию инструмента, и одна матрица определяет положение центра координаты подвижной системы, связанной с инструментом.

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 \cos(\alpha) - \sin(\alpha) & 0 & 0 & 0 \\ 0 \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_\beta = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 \sin(\beta) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 \cos(\beta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_\gamma = \begin{bmatrix} \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) & 0 & 0 \\ \sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{xyz} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_b = A_{xyz} \cdot A_\alpha \cdot A_\beta \cdot A_\gamma$$

$$A_b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) & 0 & 0 \\ \sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

С другой стороны, необходимо иметь в виду матрицу A_p , которая получается путем перемножения шести матриц, выражающих перемещение (угловые и линейные), определяющие обобщенные координаты $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$. Получаем матрицу A_p (все элементы записаны так что сначала расположен первый столбец, затем второй и т.д.).

$$A_b = \begin{bmatrix} \cos(\beta) \cdot \cos(\gamma) & \cos(\gamma) \cdot \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) - \cos(\alpha) \cdot \sin(\gamma) & \sin(\alpha) \cdot \sin(\gamma) + \cos(\alpha) \cdot \cos(\gamma) \cdot \sin(\beta) & x \\ \cos(\beta) \cdot \sin(\gamma) & \cos(\alpha) \cdot \cos(\gamma) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) \cdot \sin(\gamma) & \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) \cdot \sin(\gamma) - \cos(\gamma) \cdot \sin(\alpha) & y \\ -\sin(\beta) & \cos(\beta) \cdot \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_6 = \begin{bmatrix} \cos(q_6) & -\sin(q_6) & 0 & 0 \\ \sin(q_6) & \cos(q_6) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} \cos(q_5) & 0 & \sin(q_5) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(q_5) & 0 & \cos(q_5) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} \cos(q_4) & -\sin(q_4) & 0 & 0 \\ \sin(q_4) & \cos(q_4) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} \cos(q_2) & 0 & \sin(q_2) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(q_2) & 0 & \cos(q_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(q_1) & -\sin(q_1) & 0 \\ 0 & \sin(q_1) & \cos(q_1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_p = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot A_4 \cdot A_5 \cdot A_6$$

Укажем что рассматриваемые матрицы равны $A_p = A_b$

$$A_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(q_1) & -\sin(q_1) & 0 \\ 0 & \sin(q_1) & \cos(q_1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(q_2) & 0 & \sin(q_2) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(q_2) & 0 & \cos(q_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(q_4) & -\sin(q_4) & 0 & 0 \\ \sin(q_4) & \cos(q_4) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \cdot \begin{bmatrix} \cos(q_5) & 0 & \sin(q_5) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(q_5) & 0 & \cos(q_5) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(q_6) & -\sin(q_6) & 0 & 0 \\ \sin(q_6) & \cos(q_6) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_p =$$

$$\begin{bmatrix} -(\cos(q_6) \cdot (\sin(q_2) \cdot \sin(q_5) - \cos(q_2) \cdot \cos(q_4) \cdot \cos(q_5)) - \cos(q_2) \cdot \sin(q_4) \cdot \sin(q_6)) \\ \cos(q_6) \cdot (\cos(q_5) \cdot (\cos(q_1) \cdot \sin(q_4) + \cos(q_4) \cdot \sin(q_1) \cdot \sin(q_2)) + \cos(q_2) \cdot \sin(q_1) \cdot \sin(q_5)) + \sin(q_6) \cdot (\cos(q_1) \cdot \cos(q_4) - \sin(q_1) \cdot \sin(q_2) \cdot \sin(q_4))) \\ \cos(q_6) \cdot (\cos(q_5) \cdot (\sin(q_1) \cdot \sin(q_4) - \cos(q_1) \cdot \cos(q_4) \cdot \sin(q_2)) - \cos(q_1) \cdot \cos(q_2) \cdot \sin(q_5)) + \sin(q_6) \cdot (\cos(q_4) \cdot \sin(q_1) + \cos(q_1) \cdot \sin(q_2) \cdot \sin(q_4))) \\ 0 \\ \sin(q_6) \cdot (\sin(q_2) \cdot \sin(q_5) - \cos(q_2) \cdot \cos(q_4) \cdot \cos(q_5)) - \cos(q_2) \cdot \cos(q_6) \cdot \sin(q_4) \\ \cos(q_6) \cdot (\cos(q_1) \cdot \cos(q_4) - \sin(q_1) \cdot \sin(q_2) \cdot \sin(q_4)) - \sin(q_6) \cdot (\cos(q_5) \cdot (\cos(q_1) \cdot \sin(q_4) + \cos(q_4) \cdot \sin(q_1) \cdot \sin(q_2)) + \cos(q_2) \cdot \sin(q_1) \cdot \sin(q_5)) \\ \cos(q_6) \cdot (\cos(q_4) \cdot \sin(q_1) + \cos(q_1) \cdot \sin(q_2) \cdot \sin(q_4)) - \sin(q_6) \cdot (\cos(q_5) \cdot \sin(q_1) \cdot \sin(q_4) - \cos(q_1) \cdot \cos(q_4) \cdot \sin(q_2)) - \cos(q_1) \cdot \cos(q_2) \cdot \sin(q_5)) \\ 0 \\ \cos(q_5) \cdot \sin(q_2) + \cos(q_2) \cdot \cos(q_4) \cdot \sin(q_5) \\ \sin(q_5) \cdot (\cos(q_1) \cdot \sin(q_4) + \cos(q_4) \cdot \sin(q_1) \cdot \sin(q_2)) - \cos(q_2) \cdot \cos(q_5) \cdot \sin(q_1) \\ \sin(q_5) \cdot (\sin(q_1) \cdot \sin(q_4) - \cos(q_1) \cdot \cos(q_4) \cdot \sin(q_2)) + \cos(q_1) \cdot \cos(q_2) \cdot \cos(q_5)) \\ 0 \\ q_3 \cdot \sin(q_2) \\ -(q_3 \cdot \cos(q_2) \cdot \sin(q_1)) \\ q_3 \cdot \cos(q_1) \cdot \cos(q_2) \\ 1 \end{bmatrix}$$

Последовательно найдем все обобщенные координаты.

Начнем с координаты q_3 эта координата характеризует движение оси выходного звена и определяется координатами точки центра координатной системы, связанной с инструментом. Отсюда имеем.

$$q_3 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Далее рассмотрим вторую координату q_2 , которая определяется поворотом второго привода. Она характеризуется смещением центра координат инструмента по оси x и поэтому

$$q_2 = \arcsin\left(\frac{x}{q_3}\right)$$

При определении первой координаты q_1 вновь учитываем смещение центра координатной системы инструмента.

$$q_1 = \arcsin\left(\frac{-y}{q_3 \cdot \cos(q_2)}\right)$$

Направление оси выходного звена характеризуется единичным вектором d_i

$$d_i = \begin{bmatrix} \frac{-x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \frac{-z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \end{bmatrix}$$

направление оси инструмента характеризуется элементами третьего столбца матрицы A_b , скалярное произведение равно сумме попарных произведений координат этого скалярного произведения

Для того чтобы найти q_5 нужно взять скалярное произведение двух единичных векторов, один из которых характеризует ось выходного звена, а другой ось инструмента, ось выходного звена проходит через точки O' и O , соответственно координаты вектора OO' равны x y z , координаты единичного вектора соответствующего этой оси равны указанным координатам x y z деленным на модуль этого вектора. Вектор оси инструмента соответствует оси z подвижной системы координат связанной с инструментом, координаты этого вектора соответствуют элементам 3-го столбца матрицы A_b . Скалярное произведение этих двух единичных векторов находим как сумму попарных произведений координат этих векторов. Затем берем арккосинус этого скалярного произведения и таким образом находим q_5 .

$$q_5 = \arccos \left(\frac{y \cdot \cos(\gamma) \cdot \sin(\alpha) - \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) \cdot \sin(\gamma)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - \frac{x \cdot (\sin(\alpha) \cdot \sin(\gamma) + \cos(\alpha) \cdot \cos(\gamma) \cdot \sin(\beta))}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - \frac{z \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right)$$

для того чтобы найти q_6 нам нужно знать единичный вектор оси 5-й кинематической пары, определяем векторное произведение единичного вектора оси z инструмента (3-й столбец матрицы A_b) и оси рабочего органа (A_b деленная на модуль этого вектора q_3).

$$d_z = \begin{bmatrix} \sin(\alpha) \cdot \sin(\gamma) + \cos(\alpha) \cdot \cos(\gamma) \cdot \sin(\beta) \\ \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) \cdot \sin(\gamma) - \cos(\gamma) \cdot \sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) \end{bmatrix} \times \frac{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$d_z = \begin{bmatrix} \frac{z \cdot (\cos(\gamma) \cdot \sin(\alpha) - \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) \cdot \sin(\gamma))}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - \frac{y \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \frac{x \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - \frac{z \cdot (\sin(\alpha) \cdot \sin(\gamma) + \cos(\alpha) \cdot \cos(\gamma) \cdot \sin(\beta))}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \frac{x \cdot (\cos(\gamma) \cdot \sin(\alpha) - \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) \cdot \sin(\gamma))}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{y \cdot (\sin(\alpha) \cdot \sin(\gamma) + \cos(\alpha) \cdot \cos(\gamma) \cdot \sin(\beta))}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \end{bmatrix}$$

$$d_{zx} = \frac{z \cdot (\cos(\gamma) \cdot \sin(\alpha) - \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) \cdot \sin(\gamma))}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - \frac{y \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$d_{zy} = \frac{x \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - \frac{z \cdot (\sin(\alpha) \cdot \sin(\gamma) + \cos(\alpha) \cdot \cos(\gamma) \cdot \sin(\beta))}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$d_{zz} = \frac{x \cdot (\cos(\gamma) \cdot \sin(\alpha) - \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) \cdot \sin(\gamma))}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{y \cdot (\sin(\alpha) \cdot \sin(\gamma) + \cos(\alpha) \cdot \cos(\gamma) \cdot \sin(\beta))}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$d_z = \sqrt{d_{zx}^2 + d_{zy}^2 + d_{zz}^2}$$

Чтобы сделать его единичным нужно найти его модуль т.е. длину и найденные координаты этого вектора поделить на его модуль

$$d_{iz} = \frac{\begin{bmatrix} d_{zx} \\ d_{zy} \\ d_{zz} \end{bmatrix}}{\sqrt{d_{zx}^2 + d_{zy}^2 + d_{zz}^2}}$$

$$d_{iz} = \frac{\frac{z \cdot (\cos(\gamma) \cdot \sin(\alpha) - \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) \cdot \sin(\gamma))}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{y \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}}{\sqrt{d_{zx}^2 + d_{zy}^2 + d_{zz}^2}} - \frac{\frac{z \cdot (\cos(\gamma) \cdot \sin(\alpha) - \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) \cdot \sin(\gamma))}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - \frac{y \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}}{\sqrt{d_{zx}^2 + d_{zy}^2 + d_{zz}^2}} - \frac{\frac{x \cdot (\cos(\gamma) \cdot \sin(\alpha) - \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) \cdot \sin(\gamma))}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{y \cdot (\sin(\alpha) \cdot \sin(\gamma) + \cos(\alpha) \cdot \cos(\gamma) \cdot \sin(\beta))}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}}{\sqrt{d_{zx}^2 + d_{zy}^2 + d_{zz}^2}}$$

Затем нужно взять арккосинус из скалярного произведения единичного вектора оси y системы координат, связанной с инструментом (2-й столбец, обозначенный матрицей A_b) и найденного вектора оси пары 5 таким образом получим q_6

$$q_6 = \arccos \left(\frac{\begin{aligned} & \left[\begin{array}{l} \cos(\gamma) \cdot \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) - \cos(\alpha) \cdot \sin(\gamma) \\ \cos(\alpha) \cdot \cos(\gamma) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) \cdot \sin(\gamma) \\ \cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha) \end{array} \right] \cdot \\ & \frac{z \cdot (\cos(\gamma) \cdot \sin(\alpha) - \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) \cdot \sin(\gamma))}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{y \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ & \frac{\sqrt{d_{zx}^2 + d_{zy}^2 + d_{zz}^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ & \frac{z \cdot (\cos(\gamma) \cdot \sin(\alpha) - \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) \cdot \sin(\gamma))}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - \frac{y \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ & \frac{\sqrt{d_{zx}^2 + d_{zy}^2 + d_{zz}^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ & \frac{x \cdot (\cos(\gamma) \cdot \sin(\alpha) - \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) \cdot \sin(\gamma))}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{y \cdot (\sin(\alpha) \cdot \sin(\gamma) + \cos(\alpha) \cdot \cos(\gamma) \cdot \sin(\beta))}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ & \frac{\sqrt{d_{zx}^2 + d_{zy}^2 + d_{zz}^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \end{aligned}}{\sqrt{d_{zx}^2 + d_{zy}^2 + d_{zz}^2}} \right)$$

$$q_6 = \arccos \left(\left(\frac{\left(\frac{z \cdot (\cos(\gamma) \cdot \sin(\alpha) - \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) \cdot \sin(\gamma))}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - \frac{y \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) \cdot (\cos(\alpha) \cdot \cos(\gamma) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) \cdot \sin(\gamma))}{\sqrt{d_{zx}^2 + d_{zy}^2 + d_{zz}^2}} \right) \right. \\ \left. + \left(\frac{\left(\frac{z \cdot (\cos(\gamma) \cdot \sin(\alpha) - \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) \cdot \sin(\gamma))}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{y \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) \cdot (\cos(\alpha) \cdot \sin(\gamma) - \cos(\gamma) \cdot \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta))}{\sqrt{d_{zx}^2 + d_{zy}^2 + d_{zz}^2}} \right) \right. \\ \left. + \left(\frac{\left(\frac{x \cdot (\cos(\gamma) \cdot \sin(\alpha) - \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) \cdot \sin(\gamma))}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{y \cdot (\sin(\alpha) \cdot \sin(\gamma) + \cos(\alpha) \cdot \cos(\gamma) \cdot \sin(\beta))}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) \cdot (\cos(\beta) \cdot \sin(\alpha))}{\sqrt{d_{zx}^2 + d_{zy}^2 + d_{zz}^2}} \right) \right)$$

Чтобы найти угол поворота q_4 нужно взять скалярное произведение единичных векторов осей 2-й и 5-й кинематических пар и взять арккосинус получившегося выражения.

$$\begin{aligned}
& \mathbf{q}_4 = \\
= \arccos & \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(q_1) \\ -\sin(q_1) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{z \cdot (\cos(\gamma) \cdot \sin(\alpha) - \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) \cdot \sin(\gamma)) + y \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{y \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \sqrt{d_{zx}^2 + d_{zy}^2 + d_{zz}^2} \\ \frac{z \cdot (\cos(\gamma) \cdot \sin(\alpha) - \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) \cdot \sin(\gamma)) - y \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - \frac{y \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \sqrt{d_{zx}^2 + d_{zy}^2 + d_{zz}^2} \\ \frac{x \cdot (\cos(\gamma) \cdot \sin(\alpha) - \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) \cdot \sin(\gamma)) + y \cdot (\sin(\alpha) \cdot \sin(\gamma) + \cos(\alpha) \cdot \cos(\gamma) \cdot \sin(\beta))}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{y \cdot (\sin(\alpha) \cdot \sin(\gamma) + \cos(\alpha) \cdot \cos(\gamma) \cdot \sin(\beta))}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \sqrt{d_{zx}^2 + d_{zy}^2 + d_{zz}^2} \end{pmatrix} \\
& \mathbf{q}_4 = \\
= \arccos & \left(- \frac{\sin(q_1) \cdot \left(\frac{x \cdot (\cos(\gamma) \cdot \sin(\alpha) - \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) \cdot \sin(\gamma)) + y \cdot (\sin(\alpha) \cdot \sin(\gamma) + \cos(\alpha) \cdot \cos(\gamma) \cdot \sin(\beta))}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{y \cdot (\sin(\alpha) \cdot \sin(\gamma) + \cos(\alpha) \cdot \cos(\gamma) \cdot \sin(\beta))}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right)}{\sqrt{d_{zx}^2 + d_{zy}^2 + d_{zz}^2}} \right) \\
& - \frac{\cos(q_1) \cdot \left(\frac{z \cdot (\cos(\gamma) \cdot \sin(\alpha) - \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) \cdot \sin(\gamma)) - y \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} - \frac{y \cdot \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right)}{\sqrt{d_{zx}^2 + d_{zy}^2 + d_{zz}^2}} \right)
\end{aligned}$$

Таким образом можно определить все обобщенные координаты.

Рассмотрим несколько примеров, в которых вначале зададим значение обобщенных координат, затем найдем абсолютные координаты, и потом вновь определим обобщенные координаты, проверив тем самым правильность решения задачи.

Пусть

$$q_1 = \frac{\pi}{6} = 0,524 \text{ рад}$$

$$q_2 = \frac{\pi}{6} = 0,524 \text{ рад}$$

$$q_3 = 0,01 \text{ м}$$

$$q_4 = 0$$

$$q_5 = 0$$

$$q_6 = 0$$

Тогда

$$A_p = \begin{bmatrix} 0,866 & 0 & 0,5 & 0,005 \\ 0,25 & 0,866 & -0,433 & -0,004 \\ 0 & 0,5 & 0,75 & 0,008 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

В результате решения имеем обобщенные координаты.

$$x = 0,005 \text{ м}$$

$$y = -0,004 \text{ м}$$

$$z = 0,008 \text{ м}$$

$$q_3 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 0,01 \text{ м}$$

$$q_2 = \arcsin\left(\frac{x}{q_3}\right) = 0,51 \text{ рад}$$

$$q_1 = \arcsin\left(\frac{-y}{q_3 \cdot \cos(q_2)}\right) = 0,5 \text{ рад}$$

Расхождение определяется точностью вычислений.

Далее пусть:

$$q_1 = 0$$

$$q_2 = 0$$

$$q_3 = 0,01 \text{ м}$$

$$q_4 = \frac{\pi}{6} = 0,524 \text{ рад}$$

$$q_5 = 0$$

$$q_6 = 0$$

$$A_p = \begin{bmatrix} 0,866 & -0,5 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0,866 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0,01 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Таким образом:

$$x = 0$$

$$y = 0$$

$$z = 0,01 \text{ м}$$

В результате решения получаем:

$$q_3 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 0,01 \text{ м}$$

$$q_4 = \arccos\left(\begin{bmatrix} 0 \\ \cos(q_1) \\ -\sin(q_1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -0,5 \\ 0,866 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = 0,5236 \text{ рад}$$

Далее пусть:

$$q_1 = 0$$

$$q_2 = 0$$

$$q_3 = 0,01 \text{ м}$$

$$q_4 = 0$$

$$q_5 = \frac{\pi}{6} = 0,524 \text{ рад}$$

$$q_6 = \frac{\pi}{6} = 0,524 \text{ рад}$$

$$A_p = \begin{bmatrix} 0,75 & -0,433 & 0,5 & 0 \\ 0,5 & 0,866 & 0 & 0 \\ -0,433 & 0,25 & 0,866 & 0,01 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Таким образом:

$$x = 0$$

$$y = 0$$

$$z = 0,01 \text{ м}$$

при этом:

$$d_i = \frac{\begin{bmatrix} -x \\ \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ -y \\ \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ -z \\ \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \end{bmatrix}}{\sqrt{0^2 + 0^2 + (-0,01)^2}} = \frac{0,866}{0,01} = 0,866$$

$$q_5 = \arccos(0,866) = 0,524 \text{ рад}$$

$$q_3 = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 0,01 \text{ рад}$$

$$d_z = \begin{bmatrix} -0,433 \\ 0,866 \\ 0,25 \end{bmatrix} \times \frac{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,01 \end{bmatrix}}{\sqrt{0^2 + 0^2 + (0,01)^2}} = \begin{bmatrix} 0,866 \\ 0,433 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$d_{iz} = \frac{\begin{bmatrix} 0,866 \\ 0,433 \\ 0 \end{bmatrix}}{\sqrt{|0,433|^2 + |0,866|^2 + |0|^2}} = \begin{bmatrix} 0,8944 \\ 0,4472 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$q_6 = \arccos\left(\begin{bmatrix} -0,433 \\ 0,866 \\ 0,25 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,8944 \\ 0,4472 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = 0,524 \text{ рад}$$

Таким образом обратную задачу о положениях можно считать решенной.

Глава 3. Решение задач о скоростях и ускорениях механизмов из постоянной точкой ввода инструмента.

В данной главе рассмотрим решение задач о скоростях и ускорениях рассматриваемых механизмов, используя результаты решения задач о положениях и принимая во внимание неявные функции, связывающие абсолютные и обобщенные координаты.

3.1 Решение задачи о скоростях механизмов с постоянной точкой ввода инструмента.

В данном параграфе рассмотрим решение задачи о скоростях механизма с постоянной точкой ввода инструмента на основе дифференцирования уравнения связей. Ранее были получены решения задач о положениях. Эти решения можно представить в виде явных и неявных функций, которые затем можно продифференцировать. Будем иметь ввиду абсолютные координаты $x, y, z, \alpha, \beta, \gamma$, а также обобщенные координаты $q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6$.

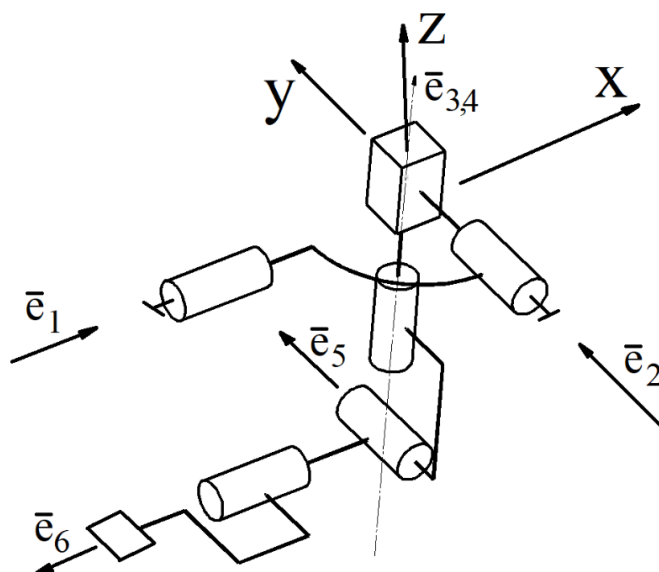


Рис. 3.1

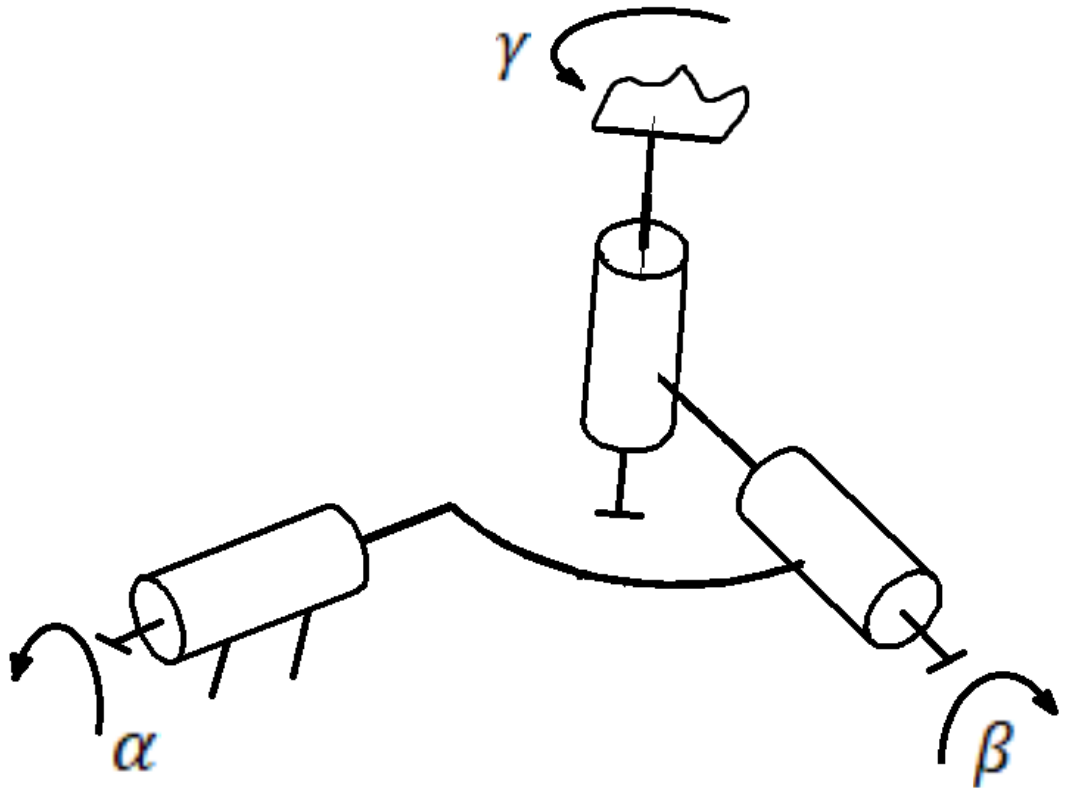


Рис. 3.2

Все обозначения соответствуют приведённым выше.

$$F_1 = x - (q_3 \cdot \sin(q_2))$$

$$F_2 = y + (q_3 \cdot \cos(q_2) \cdot \sin(q_1))$$

$$F_3 = z - (q_3 \cdot \cos(q_1) \cdot \cos(q_2))$$

$$F_4 = \cos(\beta) \cdot \sin(\gamma) -$$

$$-(\cos(q_5) \cdot \cos(q_1) \cdot \sin(q_4) + \cos(q_4) \cdot \sin(q_1) \cdot \sin(q_2)) + \\ + \cos(q_2) \cdot \sin(q_1) \cdot \sin(q_5))$$

$$F_5 = -\sin(\beta) - (\cos(q_5) \cdot (\sin(q_1) \cdot \sin(q_4) - \cos(q_1) \cdot \cos(q_4) \cdot \sin(q_2))) \\ - \cos(q_1) \cdot \cos(q_2) \cdot \sin(q_5))$$

$$F_6 = \cos(\beta) \cdot \sin(\alpha) -$$

$$-(\sin(q_6) \cdot (\sin(q_5) \cdot \sin(q_1) \cdot \sin(q_4) - \cos(q_1) \cdot \cos(q_4) \cdot \sin(q_2)) + \\ + \cos(q_1) \cdot \cos(q_2) \cdot \cos(q_5)) + \cos(q_6) \cdot (\cos(q_4) \cdot \sin(q_1) + \cos(q_1) \cdot \\ \cdot \sin(q_2) \cdot \sin(q_4)))$$

Для F_1

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} F_1 &= 1; \frac{\partial}{\partial y} F_1 = 0; \frac{\partial}{\partial z} F_1 = 0; \frac{\partial}{\partial \alpha} F_1 = 0; \frac{\partial}{\partial \beta} F_1 = 0; \frac{\partial}{\partial \gamma} F_1 = 0; \\ \frac{\partial}{\partial q_1} F_1 &= 0; \frac{\partial}{\partial q_2} F_1 = -(q_3 \cdot \cos(q_2)); \frac{\partial}{\partial q_3} F_1 = -\sin(q_2); \frac{\partial}{\partial q_4} F_1 = 0; \\ \frac{d}{dq_5} F_1 &= 0; \frac{d}{dq_6} F_1 = 0. \end{aligned}$$

Для F_2

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} F_2 &= 0; \frac{d}{dy} F_2 = 1; \frac{\partial}{\partial z} F_2 = 0; \frac{\partial}{\partial \alpha} F_2 = 0; \frac{\partial}{\partial \beta} F_2 = 0; \frac{\partial}{\partial \gamma} F_2 = 0; \\ \frac{\partial}{\partial q_1} F_2 &= q_3 \cdot \cos(q_1) \cdot \cos(q_2); \frac{\partial}{\partial q_2} F_2 = -(q_3 \cdot \sin(q_1) \cdot \sin(q_2)) \\ \frac{\partial}{\partial q_3} F_2 &= \cos(q_2) \cdot \sin(q_1); \frac{\partial}{\partial q_4} F_2 = 0; \frac{\partial}{\partial q_5} F_2 = 0; \frac{\partial}{\partial q_6} F_2 = 0. \end{aligned}$$

Для F_3

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} F_3 &= 0; \frac{\partial}{\partial y} F_3 = 0; \frac{\partial}{\partial z} F_3 = 1; \frac{\partial}{\partial \alpha} F_3 = 0; \frac{\partial}{\partial \beta} F_3 = 0; \frac{\partial}{\partial \gamma} F_3 = 0 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} F_3 &= q_3 \cdot \cos(q_2) \cdot \sin(q_1); \frac{\partial}{\partial q_2} F_3 = q_3 \cdot \cos(q_1) \cdot \sin(q_2) \\ \frac{\partial}{\partial q_3} F_3 &= -(\cos(q_1) \cdot \cos(q_2)); \frac{\partial}{\partial q_4} F_3 = 0; \frac{\partial}{\partial q_5} F_3 = 0; \frac{\partial}{\partial q_6} F_3 = 0. \end{aligned}$$

Для F_4

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} F_4 &= 0; \frac{\partial}{\partial y} F_4 = 0; \frac{\partial}{\partial z} F_4 = 0; \frac{\partial}{\partial \alpha} F_4 = 0; \frac{\partial}{\partial \beta} F_4 = -(\sin(\beta) \cdot \sin(\gamma)); \\ \frac{\partial}{\partial \gamma} F_4 &= \cos(\beta) \cdot \sin(\gamma); \frac{\partial}{\partial q_1} F_4 = 0; \frac{\partial}{\partial q_2} F_4 = \cos(q_5) \cdot \\ &\cdot (\cos(q_1) \cdot \sin(q_4) - \cos(q_1) \cdot \cos(q_4) \cdot \sin(q_2)) - \cos(q_1) \cdot \cos(q_2) \cdot \\ &\cdot \sin(q_5); \frac{\partial}{\partial q_3} F_4 = 0; \frac{\partial}{\partial q_4} F_4 = \sin(q_1) \cdot \sin(q_2) \cdot \sin(q_5) - \cos(q_2) \cdot \\ &\cdot \cos(q_4) \cdot \cos(q_5) \cdot \sin(q_1); \frac{\partial}{\partial q_5} F_4 = -(\cos(q_5) \cdot \\ &\cdot (\cos(q_1) \cdot \cos(q_4) + \sin(q_1) \cdot \sin(q_2) \cdot \sin(q_4))); \frac{\partial}{\partial q_6} F_4 = \cos(q_5) \cdot \end{aligned}$$

$$\cdot (\cos(q_1) \cdot \sin(q_4) + \cos(q_4) \cdot \sin(q_1) \cdot \sin(q_2)) - \\ - \cos(q_2) \cdot \cos(q_5) \cdot \sin(q_1).$$

Для F_5

$$\frac{\partial}{\partial x} F_5 = 0; \frac{\partial}{\partial y} F_5 = 0; \frac{\partial}{\partial z} F_5 = 0; \frac{\partial}{\partial \alpha} F_5 = 0; \frac{\partial}{\partial \beta} F_5 = -\cos(\beta);$$

$$\frac{\partial}{\partial \gamma} F_5 = -(\cos(q_5) \cdot (\cos(q_1) \cdot \sin(q_4) + \cos(q_4) \cdot \sin(q_1) \cdot \sin(q_2))) - \\ - \cos(q_2) \cdot \sin(q_1) \cdot \sin(q_5)); \frac{\partial}{\partial q_1} F_5 = 0; \frac{\partial}{\partial q_2} F_5 = -(\sin(q_6) \cdot (\cos(q_2) \cdot \\ \cdot \sin(q_5) + \cos(q_4) \cdot \cos(q_5) \cdot \sin(q_2))) - \cos(q_6) \cdot \sin(q_2) \cdot \sin(q_4); \\ \frac{\partial}{\partial q_3} F_5 = 0; \frac{\partial}{\partial q_4} F_5 = -(\cos(q_5) \cdot (\cos(q_4) \cdot \sin(q_1) + \cos(q_1) \cdot \sin(q_2) \cdot \\ \cdot \sin(q_4))); \frac{\partial}{\partial q_5} F_5 = \sin(q_5) \cdot (\sin(q_1) \cdot \sin(q_4) - \cos(q_1) \cdot \cos(q_4) \cdot \\ \cdot \sin(q_2) + \cos(q_1) \cdot \cos(q_2) \cdot \cos(q_5)); \frac{\partial}{\partial q_6} F_5 = 0.$$

Для F_6

$$\frac{\partial}{\partial x} F_6 = 0; \frac{\partial}{\partial y} F_6 = 0; \frac{\partial}{\partial z} F_6 = 0; \frac{\partial}{\partial \alpha} F_6 = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta);$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta} F_6 = -(\sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)); \frac{\partial}{\partial \gamma} F_6 = 0; \frac{\partial}{\partial q_1} F_6 = -(\sin(q_6) \cdot (\sin(q_5) \cdot \\ \cdot (\cos(q_1) \cdot \sin(q_4) + \cos(q_4) \cdot \sin(q_1) \cdot \sin(q_2)) - \cos(q_2) \cdot \cos(q_5) \cdot \\ \cdot \sin(q_1)) - \cos(q_6) \cdot (\cos(q_1) \cdot \cos(q_4) - \sin(q_1) \cdot \sin(q_2) \cdot \sin(q_4))); \\ \frac{\partial}{\partial q_2} F_6 = \sin(q_6) \cdot (\cos(q_1) \cdot \cos(q_5) \cdot \sin(q_2) - \cos(q_1) \cdot \cos(q_2) \cdot \\ \cdot \sin(q_4) \cdot \sin(q_5)) - \cos(q_1) \cdot \cos(q_2) \cdot \cos(q_6) \cdot \sin(q_4); \frac{d}{dq_3} F_6 = 0; \\ \frac{\partial}{\partial q_4} F_6 = \cos(q_6) \cdot (\sin(q_1) \cdot \sin(q_4) - \cos(q_1) \cdot \cos(q_4) \cdot \sin(q_2)) - \\ \sin(q_5) \cdot \sin(q_6) \cdot (\cos(q_4) \cdot \sin(q_1) + \cos(q_1) \cdot \sin(q_2) \cdot \sin(q_4)); \\ \frac{\partial}{\partial q_5} F_6 = -(\sin(q_6) \cdot (\cos(q_5) \cdot (\sin(q_1) \cdot \sin(q_4) - \\ - \cos(q_1) \cdot \cos(q_4) \cdot \sin(q_2)) - \cos(q_1) \cdot \cos(q_2) \cdot \sin(q_5));$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q_6} F_6 = & \sin(q_6) \cdot (\cos(q_4) \cdot \sin(q_1) + \cos(q_1) \cdot \sin(q_2) \cdot \sin(q_4)) - \\ & - \cos(q_6) \cdot (\sin(q_5) \cdot (\sin(q_1) \cdot \sin(q_4) - \cos(q_1) \cdot \cos(q_4) \cdot \sin(q_2))) + \\ & + \cos(q_1) \cdot \cos(q_2) \cdot \cos(q_5)). \end{aligned}$$

Указанные частные производные можно внести в матрицы, получим взаимосвязь между обобщенными скоростями, при этом получим взаимосвязь между абсолютными и обобщенными скоростями:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} F_1 & \frac{\partial}{\partial x} F_2 & \frac{\partial}{\partial x} F_3 & \frac{\partial}{\partial x} F_4 & \frac{\partial}{\partial x} F_5 & \frac{\partial}{\partial x} F_6 \\ \frac{\partial}{\partial y} F_1 & \frac{\partial}{\partial y} F_2 & \frac{\partial}{\partial y} F_3 & \frac{\partial}{\partial y} F_4 & \frac{\partial}{\partial y} F_5 & \frac{\partial}{\partial y} F_6 \\ \frac{\partial}{\partial z} F_1 & \frac{\partial}{\partial z} F_2 & \frac{\partial}{\partial z} F_3 & \frac{\partial}{\partial z} F_4 & \frac{\partial}{\partial z} F_5 & \frac{\partial}{\partial z} F_6 \\ \frac{\partial}{\partial \alpha} F_1 & \frac{\partial}{\partial \alpha} F_2 & \frac{\partial}{\partial \alpha} F_3 & \frac{\partial}{\partial \alpha} F_4 & \frac{\partial}{\partial z} F_5 & \frac{\partial}{\partial \alpha} F_6 \\ \frac{\partial}{\partial \beta} F_1 & \frac{\partial}{\partial \beta} F_2 & \frac{\partial}{\partial \beta} F_3 & \frac{\partial}{\partial \beta} F_4 & \frac{\partial}{\partial \beta} F_5 & \frac{\partial}{\partial \beta} F_6 \\ \frac{\partial}{\partial \gamma} F_1 & \frac{\partial}{\partial \gamma} F_2 & \frac{\partial}{\partial \gamma} F_3 & \frac{\partial}{\partial \gamma} F_4 & \frac{\partial}{\partial \gamma} F_5 & \frac{\partial}{\partial \gamma} F_6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial q_1} F_1 & \frac{\partial}{\partial q_1} F_2 & \frac{\partial}{\partial q_1} F_3 & \frac{\partial}{\partial q_1} F_4 & \frac{\partial}{\partial q_1} F_5 & \frac{\partial}{\partial q_1} F_6 \\ \frac{\partial}{\partial q_2} F_1 & \frac{\partial}{\partial q_2} F_2 & \frac{\partial}{\partial q_2} F_3 & \frac{\partial}{\partial q_2} F_4 & \frac{\partial}{\partial q_2} F_5 & \frac{\partial}{\partial q_2} F_6 \\ \frac{\partial}{\partial q_3} F_1 & \frac{\partial}{\partial q_3} F_2 & \frac{\partial}{\partial q_3} F_3 & \frac{\partial}{\partial q_3} F_4 & \frac{\partial}{\partial q_3} F_5 & \frac{\partial}{\partial q_3} F_6 \\ \frac{\partial}{\partial q_4} F_1 & \frac{\partial}{\partial q_4} F_2 & \frac{\partial}{\partial q_4} F_3 & \frac{\partial}{\partial q_4} F_4 & \frac{\partial}{\partial q_4} F_5 & \frac{\partial}{\partial q_4} F_6 \\ \frac{\partial}{\partial q_5} F_1 & \frac{\partial}{\partial q_5} F_2 & \frac{\partial}{\partial q_5} F_3 & \frac{\partial}{\partial q_5} F_4 & \frac{\partial}{\partial q_5} F_5 & \frac{\partial}{\partial q_5} F_6 \\ \frac{\partial}{\partial q_6} F_1 & \frac{\partial}{\partial q_6} F_2 & \frac{\partial}{\partial q_6} F_3 & \frac{\partial}{\partial q_6} F_4 & \frac{\partial}{\partial q_6} F_5 & \frac{\partial}{\partial q_6} F_6 \end{bmatrix}$$

При этом будем считать, что нулевое значение координаты q_5 будет таким, что ось инструмента повернута относительно оси выходного звена механизма обеспечивающего постоянство точки ввода на 90°

$$A_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(q_1) & -\sin(q_1) & 0 \\ 0 & \sin(q_1) & \cos(q_1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(q_2) & 0 & \sin(q_2) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(q_2) & 0 & \cos(q_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(q_4) & -\sin(q_4) & 0 & 0 \\ \sin(q_4) & \cos(q_4) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \cdot \begin{bmatrix} \cos(q_5) & 0 & \sin(q_5) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(q_5) & 0 & \cos(q_5) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(q_6) & -\sin(q_6) & 0 \\ 0 & \sin(q_6) & \cos(q_6) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

В частности, для случая когда:

$$\alpha = 0; \beta = 0; \gamma = 0; q_1 = 0; q_2 = 0; q_3 = -0,1; q_4 = 0; q_5 = 0; q_6 = 0; x = 0; y = 0; z = -0,1$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} F_1 & \frac{\partial}{\partial x} F_2 & \frac{\partial}{\partial x} F_3 & \frac{\partial}{\partial x} F_4 & \frac{\partial}{\partial x} F_5 & \frac{\partial}{\partial x} F_6 \\ \frac{\partial}{\partial y} F_1 & \frac{\partial}{\partial y} F_2 & \frac{\partial}{\partial y} F_3 & \frac{\partial}{\partial y} F_4 & \frac{\partial}{\partial y} F_5 & \frac{\partial}{\partial y} F_6 \\ \frac{\partial}{\partial z} F_1 & \frac{\partial}{\partial z} F_2 & \frac{\partial}{\partial z} F_3 & \frac{\partial}{\partial z} F_4 & \frac{\partial}{\partial z} F_5 & \frac{\partial}{\partial z} F_6 \\ \frac{\partial}{\partial \alpha} F_1 & \frac{\partial}{\partial \alpha} F_2 & \frac{\partial}{\partial \alpha} F_3 & \frac{\partial}{\partial \alpha} F_4 & \frac{\partial}{\partial z} F_5 & \frac{\partial}{\partial \alpha} F_6 \\ \frac{\partial}{\partial \beta} F_1 & \frac{\partial}{\partial \beta} F_2 & \frac{\partial}{\partial \beta} F_3 & \frac{\partial}{\partial \beta} F_4 & \frac{\partial}{\partial \beta} F_5 & \frac{\partial}{\partial \beta} F_6 \\ \frac{\partial}{\partial \gamma} F_1 & \frac{\partial}{\partial \gamma} F_2 & \frac{\partial}{\partial \gamma} F_3 & \frac{\partial}{\partial \gamma} F_4 & \frac{\partial}{\partial \gamma} F_5 & \frac{\partial}{\partial \gamma} F_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial q_1} F_1 & \frac{\partial}{\partial q_1} F_2 & \frac{\partial}{\partial q_1} F_3 & \frac{\partial}{\partial q_1} F_4 & \frac{\partial}{\partial q_1} F_5 & \frac{\partial}{\partial q_1} F_6 \\ \frac{\partial}{\partial q_2} F_1 & \frac{\partial}{\partial q_2} F_2 & \frac{\partial}{\partial q_2} F_3 & \frac{\partial}{\partial q_2} F_4 & \frac{\partial}{\partial q_2} F_5 & \frac{\partial}{\partial q_2} F_6 \\ \frac{\partial}{\partial q_3} F_1 & \frac{\partial}{\partial q_3} F_2 & \frac{\partial}{\partial q_3} F_3 & \frac{\partial}{\partial q_3} F_4 & \frac{\partial}{\partial q_3} F_5 & \frac{\partial}{\partial q_3} F_6 \\ \frac{\partial}{\partial q_4} F_1 & \frac{\partial}{\partial q_4} F_2 & \frac{\partial}{\partial q_4} F_3 & \frac{\partial}{\partial q_4} F_4 & \frac{\partial}{\partial q_4} F_5 & \frac{\partial}{\partial q_4} F_6 \\ \frac{\partial}{\partial q_5} F_1 & \frac{\partial}{\partial q_5} F_2 & \frac{\partial}{\partial q_5} F_3 & \frac{\partial}{\partial q_5} F_4 & \frac{\partial}{\partial q_5} F_5 & \frac{\partial}{\partial q_5} F_6 \\ \frac{\partial}{\partial q_6} F_1 & \frac{\partial}{\partial q_6} F_2 & \frac{\partial}{\partial q_6} F_3 & \frac{\partial}{\partial q_6} F_4 & \frac{\partial}{\partial q_6} F_5 & \frac{\partial}{\partial q_6} F_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0,1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0,1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Проверим указанные матрицы на предмет их вырожденности.

$$\left\| \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\| = 1$$

$$\left\| \begin{bmatrix} 0 & -0,1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0,1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \right\| = -0,1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -0,1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0,1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -0,1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0,1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cccccc} 0 & -0,1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0,1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right] = -0,1$$

Найдем матрицу Якоби, связывающую абсолютную и обобщенную скорость. При этом нужно определить обратную матрицу для той, которая выражает частные производные по абсолютным координатам, и умножить эту обратную матрицу на матрицу частных производных относительно обобщенных координат. При этом имеем:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} F_1 & \frac{\partial}{\partial x} F_2 & \frac{\partial}{\partial x} F_3 & \frac{\partial}{\partial x} F_4 & \frac{\partial}{\partial x} F_5 & \frac{\partial}{\partial x} F_6 \\ \frac{\partial}{\partial y} F_1 & \frac{\partial}{\partial y} F_2 & \frac{\partial}{\partial y} F_3 & \frac{\partial}{\partial y} F_4 & \frac{\partial}{\partial y} F_5 & \frac{\partial}{\partial y} F_6 \\ \frac{\partial}{\partial z} F_1 & \frac{\partial}{\partial z} F_2 & \frac{\partial}{\partial z} F_3 & \frac{\partial}{\partial z} F_4 & \frac{\partial}{\partial z} F_5 & \frac{\partial}{\partial z} F_6 \\ \frac{\partial}{\partial \alpha} F_1 & \frac{\partial}{\partial \alpha} F_2 & \frac{\partial}{\partial \alpha} F_3 & \frac{\partial}{\partial \alpha} F_4 & \frac{\partial}{\partial \alpha} F_5 & \frac{\partial}{\partial \alpha} F_6 \\ \frac{\partial}{\partial \beta} F_1 & \frac{\partial}{\partial \beta} F_2 & \frac{\partial}{\partial \beta} F_3 & \frac{\partial}{\partial \beta} F_4 & \frac{\partial}{\partial \beta} F_5 & \frac{\partial}{\partial \beta} F_6 \\ \frac{\partial}{\partial \gamma} F_1 & \frac{\partial}{\partial \gamma} F_2 & \frac{\partial}{\partial \gamma} F_3 & \frac{\partial}{\partial \gamma} F_4 & \frac{\partial}{\partial \gamma} F_5 & \frac{\partial}{\partial \gamma} F_6 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
& \left[\begin{array}{cccccc}
\frac{\partial}{\partial q_1} F_1 & \frac{\partial}{\partial q_1} F_2 & \frac{\partial}{\partial q_1} F_3 & \frac{\partial}{\partial q_1} F_4 & \frac{\partial}{\partial q_1} F_5 & \frac{\partial}{\partial q_1} F_6 \\
\frac{\partial}{\partial q_2} F_1 & \frac{\partial}{\partial q_2} F_2 & \frac{\partial}{\partial q_2} F_3 & \frac{\partial}{\partial q_2} F_4 & \frac{\partial}{\partial q_2} F_5 & \frac{\partial}{\partial q_2} F_6 \\
\frac{\partial}{\partial q_3} F_1 & \frac{\partial}{\partial q_3} F_2 & \frac{\partial}{\partial q_3} F_3 & \frac{\partial}{\partial q_3} F_4 & \frac{\partial}{\partial q_3} F_5 & \frac{\partial}{\partial q_3} F_6 \\
\frac{\partial}{\partial q_4} F_1 & \frac{\partial}{\partial q_4} F_2 & \frac{\partial}{\partial q_4} F_3 & \frac{\partial}{\partial q_4} F_4 & \frac{\partial}{\partial q_4} F_5 & \frac{\partial}{\partial q_4} F_6 \\
\frac{\partial}{\partial q_5} F_1 & \frac{\partial}{\partial q_5} F_2 & \frac{\partial}{\partial q_5} F_3 & \frac{\partial}{\partial q_5} F_4 & \frac{\partial}{\partial q_5} F_5 & \frac{\partial}{\partial q_5} F_6 \\
\frac{\partial}{\partial q_6} F_1 & \frac{\partial}{\partial q_6} F_2 & \frac{\partial}{\partial q_6} F_3 & \frac{\partial}{\partial q_6} F_4 & \frac{\partial}{\partial q_6} F_5 & \frac{\partial}{\partial q_6} F_6
\end{array} \right]^T = \\
& = \begin{bmatrix} 0 & 0,1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Проверим указанные матрицы на предмет их вырожденности.

$$\begin{aligned}
& \left\| \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\| = 1 \\
& \left\| \begin{bmatrix} 0 & -0,1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0,1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \right\| = -0,1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -0,1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0,1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\
& = \begin{bmatrix} 0 & -0,1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0,1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
& \begin{bmatrix} 0 & -0,1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0,1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = -0,1
\end{aligned}$$

Рассмотрим пример учитывая, что знак перед матрицей Якоби, должен быть взят с минусом.

$$- \begin{bmatrix} 0 & -0,1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0,1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,1 \\ 0,1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Таким образом задача о скоростях решена.

3.2 Решение задачи об ускорениях для механизма с постоянной точкой ввода инструмента.

В данном параграфе рассмотрим случай вырождения неявных функций и решение задач о скоростях и ускорениях на основе векторного метода.

Рассмотрим случай, когда неявные функции выражены следующим образом.

Все обозначения соответствуют приведённым выше.

$$\begin{aligned}
F_1 &= x - (q_3 \cdot \sin(q_2)) \\
F_2 &= y + (q_3 \cdot \cos(q_2) \cdot \sin(q_1)) \\
F_3 &= z - (q_3 \cdot \cos(q_1) \cdot \cos(q_2)) \\
F_4 &= \cos(\beta) \cdot \cos(\gamma) - \\
&-(-(\cos(q_6) \cdot (\sin(q_2) \cdot \sin(q_5) - \cos(q_2) \cdot \cos(q_4) \cdot \cos(q_5))) + \\
&\quad + \cos(q_2) \cdot \sin(q_4) \cdot \sin(q_6)) \\
F_5 &= \cos(\gamma) \cdot \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) - \cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha) - \\
&- (\sin(q_6) \cdot (\sin(q_2) \cdot \sin(q_5) - \cos(q_2) \cdot \cos(q_4) \cdot \cos(q_5))) - \\
&\quad - \cos(q_2) \cdot \cos(q_6) \cdot \sin(q_4)) \\
F_6 &= \sin(\alpha) \cdot \sin(\gamma) + \cos(\alpha) \cdot \cos(\gamma) \cdot \sin(\beta) - \\
&- (\cos(q_5) \cdot \sin(q_2) + \cos(q_2) \cdot \cos(q_4) \cdot \sin(q_5))
\end{aligned}$$

Для F_1

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} F_1 &= 1; \frac{\partial}{\partial y} F_1 = 0; \frac{\partial}{\partial z} F_1 = 0; \frac{\partial}{\partial \alpha} F_1 = 0; \frac{\partial}{\partial \beta} F_1 = 0; \frac{\partial}{\partial \gamma} F_1 = 0; \frac{\partial}{\partial q_1} F_1 = 0 \\
\frac{\partial}{\partial q_2} F_1 &= -(q_3 \cdot \cos(q_2)); \frac{\partial}{\partial q_3} F_1 = -\sin(q_2); \frac{\partial}{\partial q_4} F_1 = 0; \\
\frac{\partial}{\partial q_5} F_1 &= 0; \frac{\partial}{\partial q_6} F_1 = 0.
\end{aligned}$$

Для F_2

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} F_2 &= 0; \frac{\partial}{\partial y} F_2 = 1; \frac{\partial}{\partial z} F_2 = 0; \frac{\partial}{\partial \alpha} F_2 = 0; \frac{\partial}{\partial \beta} F_2 = 0; \frac{\partial}{\partial \gamma} F_2 = 0; \\
\frac{\partial}{\partial q_1} F_2 &= q_3 \cdot \cos(q_1) \cdot \cos(q_2); \frac{\partial}{\partial q_2} F_2 = -(q_3 \cdot \sin(q_1) \cdot \sin(q_2)); \\
\frac{\partial}{\partial q_3} F_2 &= \cos(q_2) \cdot \sin(q_1); \frac{\partial}{\partial q_4} F_2 = 0; \frac{\partial}{\partial q_5} F_2 = 0; \frac{\partial}{\partial q_6} F_2 = 0.
\end{aligned}$$

Для F_3

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x} F_3 &= 0; \frac{\partial}{\partial y} F_3 = 0; \frac{\partial}{\partial z} F_3 = 1; \frac{\partial}{\partial \alpha} F_3 = 0; \frac{\partial}{\partial \beta} F_3 = 0; \frac{\partial}{\partial \gamma} F_3 = 0; \\
\frac{\partial}{\partial q_1} F_3 &= q_3 \cdot \cos(q_2) \cdot \sin(q_1); \frac{\partial}{\partial q_2} F_3 = q_3 \cdot \cos(q_1) \cdot \sin(q_2);
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial q_3} F_3 = -(\cos(q_1) \cdot \cos(q_2)); \frac{\partial}{\partial q_4} F_3 = 0; \frac{\partial}{\partial q_5} F_3 = 0; \frac{\partial}{\partial q_6} F_3 = 0.$$

Для F_4

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} F_4 &= 0; \frac{\partial}{\partial y} F_4 = 0; \frac{\partial}{\partial z} F_4 = 0; \frac{\partial}{\partial \alpha} F_4 = 0; \frac{\partial}{\partial \beta} F_4 = -(\cos(\gamma) \cdot \sin(\beta)); \\ \frac{\partial}{\partial \gamma} F_4 &= -(\cos(\beta) \cdot \sin(\gamma)); \frac{\partial}{\partial q_1} F_4 = 0; \frac{\partial}{\partial q_2} F_4 = \cos(q_6) \cdot \\ &\cdot (\cos(q_2) \cdot \sin(q_5) + \cos(q_4) \cdot \cos(q_5) \cdot \sin(q_2)) - \sin(q_2) \cdot \sin(q_4) \cdot \\ &\cdot \sin(q_6); \frac{\partial}{\partial q_3} F_4 = 0; \frac{\partial}{\partial q_4} F_4 = \cos(q_2) \cdot \cos(q_4) \cdot \sin(q_6) + \cos(q_2) \cdot \\ &\cdot \cos(q_5) \cdot \cos(q_6) \cdot \sin(q_4); \frac{\partial}{\partial q_5} F_4 = \cos(q_6) \cdot \\ &\cdot (\cos(q_5) \cdot \sin(q_2) + \cos(q_2) \cdot \cos(q_4) \cdot \sin(q_5)); \frac{\partial}{\partial q_6} F_4 = \cos(q_2) \cdot \\ &\cdot \cos(q_6) \cdot \sin(q_4) - \sin(q_6) \cdot (\sin(q_2) \cdot \sin(q_5) - \cos(q_2) \cdot \cos(q_4) \cdot \\ &\cdot \cos(q_5)). \end{aligned}$$

Для F_5

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} F_5 &= 0; \frac{\partial}{\partial y} F_5 = 0; \frac{\partial}{\partial z} F_5 = 0; \frac{\partial}{\partial \alpha} F_5 = \sin(\alpha) \cdot \sin(\gamma) + \cos(\alpha) \cdot \\ &\cdot \cos(\gamma) \cdot \sin(\beta); \frac{\partial}{\partial \beta} F_5 = \cos(\alpha) \cdot \cos(\gamma) \cdot \sin(\alpha) \\ &; \frac{\partial}{\partial \gamma} F_5 = -(\cos(\alpha) \cdot \cos(\gamma)) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) \cdot \sin(\gamma); \frac{d}{dq_1} F_5 = 0; \\ \frac{\partial}{\partial q_2} F_5 &= -(\sin(q_6) \cdot (\cos(q_2) \cdot \sin(q_5) + \cos(q_4) \cdot \cos(q_5) \cdot \sin(q_2))) - \\ &- \cos(q_6) \cdot \sin(q_2) \cdot \sin(q_4)); \frac{\partial}{\partial q_3} F_5 = 0; \frac{\partial}{\partial q_4} F_5 = -(\cos(q_5) \cdot (\cos(q_4) \cdot \\ &\cdot \sin(q_1) + \cos(q_1) \cdot \sin(q_2) \cdot \sin(q_4))); \frac{\partial}{\partial q_5} F_5 = \cos(q_2) \cdot \cos(q_4) \cdot \\ &\cdot \cos(q_6) - \cos(q_2) \cdot \cos(q_5) \cdot \sin(q_4) \cdot \sin(q_6); \\ \frac{\partial}{\partial q_6} F_5 &= -(\cos(q_6) \cdot (\sin(q_2) \cdot \sin(q_5) - \cos(q_2) \cdot \cos(q_4) \cdot \cos(q_5))) - \\ &- \cos(q_2) \cdot \sin(q_4) \cdot \sin(q_6)). \end{aligned}$$

Для F_6

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} F_6 &= 0; \frac{\partial}{\partial y} F_6 = 0; \frac{\partial}{\partial z} F_6 = 0; \frac{\partial}{\partial \alpha} F_6 = \cos(\alpha) \cdot \sin(\gamma) - \cos(\gamma) \cdot \\ &\cdot \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta); \frac{\partial}{\partial \beta} F_6 = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) \cdot \cos(\gamma); \frac{\partial}{\partial \gamma} F_6 = \cos(\gamma) \cdot \\ &\cdot \sin(\alpha) - \cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) \cdot \sin(\gamma); \frac{\partial}{\partial q_1} F_6 = 0; \frac{\partial}{\partial q_2} F_6 = \cos(q_4) \cdot \\ &\cdot \sin(q_2) \cdot \sin(q_5) - \cos(q_2) \cdot \cos(q_5); \frac{\partial}{\partial q_3} F_6 = 0; \frac{\partial}{\partial q_4} F_6 = \cos(q_2) \cdot \\ &\cdot \sin(q_4) \cdot \sin(q_5); \frac{\partial}{\partial q_5} F_6 = \sin(q_2) \cdot \sin(q_5) - \cos(q_2) \cdot \cos(q_4) \cdot \\ &\cdot \cos(q_5); \frac{\partial}{\partial q_6} F_6 = 0. \end{aligned}$$

Указанные частные производные можно внести в матрицы, получим взаимосвязь между обобщенными скоростями:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} F_1 & \frac{\partial}{\partial x} F_2 & \frac{\partial}{\partial x} F_3 & \frac{\partial}{\partial x} F_4 & \frac{\partial}{\partial x} F_5 & \frac{\partial}{\partial x} F_6 \\ \frac{\partial}{\partial y} F_1 & \frac{\partial}{\partial y} F_2 & \frac{\partial}{\partial y} F_3 & \frac{\partial}{\partial y} F_4 & \frac{\partial}{\partial y} F_5 & \frac{\partial}{\partial y} F_6 \\ \frac{\partial}{\partial z} F_1 & \frac{\partial}{\partial z} F_2 & \frac{\partial}{\partial z} F_3 & \frac{\partial}{\partial z} F_4 & \frac{\partial}{\partial z} F_5 & \frac{\partial}{\partial z} F_6 \\ \frac{\partial}{\partial \alpha} F_1 & \frac{\partial}{\partial \alpha} F_2 & \frac{\partial}{\partial \alpha} F_3 & \frac{\partial}{\partial \alpha} F_4 & \frac{\partial}{\partial \alpha} F_5 & \frac{\partial}{\partial \alpha} F_6 \\ \frac{\partial}{\partial \beta} F_1 & \frac{\partial}{\partial \beta} F_2 & \frac{\partial}{\partial \beta} F_3 & \frac{\partial}{\partial \beta} F_4 & \frac{\partial}{\partial \beta} F_5 & \frac{\partial}{\partial \beta} F_6 \\ \frac{\partial}{\partial \gamma} F_1 & \frac{\partial}{\partial \gamma} F_2 & \frac{\partial}{\partial \gamma} F_3 & \frac{\partial}{\partial \gamma} F_4 & \frac{\partial}{\partial \gamma} F_5 & \frac{\partial}{\partial \gamma} F_6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial q_1} F_1 & \frac{\partial}{\partial q_1} F_2 & \frac{\partial}{\partial q_1} F_3 & \frac{\partial}{\partial q_1} F_4 & \frac{\partial}{\partial q_1} F_5 & \frac{\partial}{\partial q_1} F_6 \\ \frac{\partial}{\partial q_2} F_1 & \frac{\partial}{\partial q_2} F_2 & \frac{\partial}{\partial q_2} F_3 & \frac{\partial}{\partial q_2} F_4 & \frac{\partial}{\partial q_2} F_5 & \frac{\partial}{\partial q_2} F_6 \\ \frac{\partial}{\partial q_3} F_1 & \frac{\partial}{\partial q_3} F_2 & \frac{\partial}{\partial q_3} F_3 & \frac{\partial}{\partial q_3} F_4 & \frac{\partial}{\partial q_3} F_5 & \frac{\partial}{\partial q_3} F_6 \\ \frac{\partial}{\partial q_4} F_1 & \frac{\partial}{\partial q_4} F_2 & \frac{\partial}{\partial q_4} F_3 & \frac{\partial}{\partial q_4} F_4 & \frac{\partial}{\partial q_4} F_5 & \frac{\partial}{\partial q_4} F_6 \\ \frac{\partial}{\partial q_5} F_1 & \frac{\partial}{\partial q_5} F_2 & \frac{\partial}{\partial q_5} F_3 & \frac{\partial}{\partial q_5} F_4 & \frac{\partial}{\partial q_5} F_5 & \frac{\partial}{\partial q_5} F_6 \\ \frac{\partial}{\partial q_6} F_1 & \frac{\partial}{\partial q_6} F_2 & \frac{\partial}{\partial q_6} F_3 & \frac{\partial}{\partial q_6} F_4 & \frac{\partial}{\partial q_6} F_5 & \frac{\partial}{\partial q_6} F_6 \end{bmatrix}$$

При этом вновь будем считать, что нулевое значение координаты q_5 будет таким, что ось инструмента повернута относительно оси выходного звена механизма обеспечивающего постоянство точки ввода на 90° .

$$A_p = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(q_1) & -\sin(q_1) & 0 \\ 0 & \sin(q_1) & \cos(q_1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(q_2) & 0 & \sin(q_2) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(q_2) & 0 & \cos(q_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(q_4) & -\sin(q_4) & 0 & 0 \\ \sin(q_4) & \cos(q_4) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \cdot \begin{bmatrix} \cos(q_5) & 0 & \sin(q_5) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(q_5) & 0 & \cos(q_5) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(q_6) & -\sin(q_6) & 0 \\ 0 & \sin(q_6) & \cos(q_6) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

В частности, для случая когда:

$$\alpha = 0; \beta = 0; \gamma = 0; q_1 = 0; q_2 = 0; q_3 = -0,1; q_4 = 0; q_5 = 0; q_6 = 0; \\ x = 0; y = 0; z = -0,1$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} F_1 & \frac{\partial}{\partial x} F_2 & \frac{\partial}{\partial x} F_3 & \frac{\partial}{\partial x} F_4 & \frac{\partial}{\partial x} F_5 & \frac{\partial}{\partial x} F_6 \\ \frac{\partial}{\partial y} F_1 & \frac{\partial}{\partial y} F_2 & \frac{\partial}{\partial y} F_3 & \frac{\partial}{\partial y} F_4 & \frac{\partial}{\partial y} F_5 & \frac{\partial}{\partial y} F_6 \\ \frac{\partial}{\partial z} F_1 & \frac{\partial}{\partial z} F_2 & \frac{\partial}{\partial z} F_3 & \frac{\partial}{\partial z} F_4 & \frac{\partial}{\partial z} F_5 & \frac{\partial}{\partial z} F_6 \\ \frac{\partial}{\partial \alpha} F_1 & \frac{\partial}{\partial \alpha} F_2 & \frac{\partial}{\partial \alpha} F_3 & \frac{\partial}{\partial \alpha} F_4 & \frac{\partial}{\partial z} F_5 & \frac{\partial}{\partial \alpha} F_6 \\ \frac{\partial}{\partial \beta} F_1 & \frac{\partial}{\partial \beta} F_2 & \frac{\partial}{\partial \beta} F_3 & \frac{\partial}{\partial \beta} F_4 & \frac{\partial}{\partial \beta} F_5 & \frac{\partial}{\partial \beta} F_6 \\ \frac{\partial}{\partial \gamma} F_1 & \frac{\partial}{\partial \gamma} F_2 & \frac{\partial}{\partial \gamma} F_3 & \frac{\partial}{\partial \gamma} F_4 & \frac{\partial}{\partial \gamma} F_5 & \frac{\partial}{\partial \gamma} F_6 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial q_1} F_1 & \frac{\partial}{\partial q_1} F_2 & \frac{\partial}{\partial q_1} F_3 & \frac{\partial}{\partial q_1} F_4 & \frac{\partial}{\partial q_1} F_5 & \frac{\partial}{\partial q_1} F_6 \\ \frac{\partial}{\partial q_2} F_1 & \frac{\partial}{\partial q_2} F_2 & \frac{\partial}{\partial q_2} F_3 & \frac{\partial}{\partial q_2} F_4 & \frac{\partial}{\partial q_2} F_5 & \frac{\partial}{\partial q_2} F_6 \\ \frac{\partial}{\partial q_3} F_1 & \frac{\partial}{\partial q_3} F_2 & \frac{\partial}{\partial q_3} F_3 & \frac{\partial}{\partial q_3} F_4 & \frac{\partial}{\partial q_3} F_5 & \frac{\partial}{\partial q_3} F_6 \\ \frac{\partial}{\partial q_4} F_1 & \frac{\partial}{\partial q_4} F_2 & \frac{\partial}{\partial q_4} F_3 & \frac{\partial}{\partial q_4} F_4 & \frac{\partial}{\partial q_4} F_5 & \frac{\partial}{\partial q_4} F_6 \\ \frac{\partial}{\partial q_5} F_1 & \frac{\partial}{\partial q_5} F_2 & \frac{\partial}{\partial q_5} F_3 & \frac{\partial}{\partial q_5} F_4 & \frac{\partial}{\partial q_5} F_5 & \frac{\partial}{\partial q_5} F_6 \\ \frac{\partial}{\partial q_6} F_1 & \frac{\partial}{\partial q_6} F_2 & \frac{\partial}{\partial q_6} F_3 & \frac{\partial}{\partial q_6} F_4 & \frac{\partial}{\partial q_6} F_5 & \frac{\partial}{\partial q_6} F_6 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -0,1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Проверим указанные матрицы на предмет их вырожденности.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -0,1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

В данном случае определители равны нулю и обратные матрицы найти нельзя, т.е. система уравнений вырожденная. Чтобы избежать вырожденности рассмотрим векторный подход к решению задач кинематики.

Проведем дифференцирование уравнений, касающихся первых 3-х обобщенных координат, таким образом мы найдем взаимосвязь между скоростями и ускорениями выходного звена и обобщенными скоростями, и ускорениями.

Вновь напишем матрицы преобразования координат.

$$A_{\alpha}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

$$A_{\beta}' = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & 0 & \sin(\beta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) \end{bmatrix}$$

$$A_{\gamma}' = \begin{bmatrix} \cos(\gamma) & -\sin(\gamma) & 0 \\ \sin(\gamma) & \cos(\gamma) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_{xyz} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Радиус-вектор точки центра подвижной координатной системы.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(q_1) & -\sin(q_1) & 0 \\ 0 & \sin(q_1) & \cos(q_1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(q_2) & 0 & \sin(q_2) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(q_2) & 0 & \cos(q_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_3 \cdot \sin(q_2) \\ -(q_3 \cdot \cos(q_2) \cdot \sin(q_1)) \\ q_3 \cdot \cos(q_1) \cdot \cos(q_2) \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x = q_3 \cdot \sin(q_2)$$

$$y = -(q_3 \cdot \sin(q_1) \cdot \cos(q_2))$$

$$z = q_3 \cdot \cos(q_1) \cdot \cos(q_2)$$

Продифференцируем данное соотношение по времени.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dq_2}{dt} \cdot q_3 \cdot \cos(q_2) + \frac{dq_3}{dt} \cdot \sin(q_2)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dq_1}{dt} \cdot q_3 \cdot \cos(q_1) \cdot \cos(q_2) + \frac{dq_2}{dt} \cdot q_3 \cdot \sin(q_1) \cdot \sin(q_2) - \frac{dq_3}{dt} \cdot \sin(q_1) \cdot \cos(q_2)$$

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{dq_1}{dt} \cdot q_3 \cdot \sin(q_1) \cdot \cos(q_2) - \frac{dq_2}{dt} \cdot q_3 \cdot \cos(q_1) \cdot \sin(q_2) + \frac{dq_3}{dt} \cdot \cos(q_1) \cdot \cos(q_2)$$

Найдем вторую производную по времени.

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} = & \left(\frac{d^2q_2}{dt^2} \cdot q_3 \cdot \cos(q_2) - \left(\frac{dq_2}{dt} \right)^2 \cdot q_3 \cdot \sin(q_2) + \frac{dq_2}{dt} \cdot \frac{dq_3}{dt} \cdot \cos(q_2) \right) + \\ & + \left(\frac{d^2q_3}{dt^2} \cdot \sin(q_2) + \frac{dq_2}{dt} \cdot \frac{dq_3}{dt} \cdot \cos(q_2) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} = & \frac{d^2q_2}{dt^2} \cdot q_3 \cdot \cos(q_2) + \frac{d^2q_3}{dt^2} \cdot \sin(q_2) - \left(\frac{dq_2}{dt} \right)^2 \cdot q_3 \cdot \sin(q_2) + 2 \cdot \frac{dq_2}{dt} \cdot \\ & \cdot \frac{dq_3}{dt} \cdot \cos(q_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dt^2} = & \left(-\frac{d^2q_1}{dt^2} \cdot q_3 \cdot \cos(q_1) \cdot \cos(q_2) + \left(\frac{dq_1}{dt}\right)^2 \cdot q_3 \cdot \sin(q_1) \cdot \cos(q_2) + \right. \\ & \left. + \frac{dq_1}{dt} \cdot \frac{dq_2}{dt} \cdot q_3 \cdot \cos(q_1) \cdot \sin(q_2) - \frac{dq_1}{dt} \cdot \frac{dq_3}{dt} \cdot \cos(q_1) \cdot \cos(q_2) \right) \\ & + \left(\frac{d^2q_2}{dt^2} \cdot q_3 \cdot \sin(q_1) \cdot \sin(q_2) + \frac{dq_1}{dt} \cdot \frac{dq_2}{dt} \cdot q_3 \cdot \cos(q_1) \cdot \sin(q_2) + \right. \\ & \left. + \left(\frac{dq_2}{dt}\right)^2 \cdot q_3 \cdot \sin(q_1) \cdot \cos(q_2) + \frac{dq_2}{dt} \cdot \frac{dq_3}{dt} \cdot \cos(q_1) \cdot \cos(q_2) \right) + \\ & + \left(-\frac{d^2q_3}{dt^2} \cdot \sin(q_1) \cdot \cos(q_2) - \frac{dq_1}{dt} \cdot \frac{dq_3}{dt} \cdot \cos(q_1) \cdot \cos(q_2) + \frac{dq_2}{dt} \cdot \frac{dq_3}{dt} \cdot \right. \\ & \left. \cdot \sin(q_1) \cdot \sin(q_2) \right) \end{aligned}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{d^2q_1}{dt^2} \cdot q_3 \cdot \cos(q_1) \cdot \cos(q_2) + \frac{d^2q_2}{dt^2} \cdot q_3 \cdot \sin(q_1) \cdot \sin(q_2) - \frac{d^2q_3}{dt^2} \cdot$$

$$\cdot \sin(q_1) \cdot \cos(q_2) + \left(\frac{dq_1}{dt}\right)^2 \cdot q_3 \cdot \sin(q_1) \cdot \cos(q_2) + \left(\frac{dq_2}{dt}\right)^2 \cdot$$

$$\cdot q_3 \cdot \sin(q_1) \cdot \cos(q_2) + 2 \cdot \frac{dq_1}{dt} \cdot \frac{dq_2}{dt} \cdot q_3 \cdot \cos(q_1) \cdot \sin(q_2) -$$

$$-2 \cdot \frac{dq_1}{dt} \cdot \frac{dq_3}{dt} \cdot \cos(q_1) \cdot \cos(q_2) + 2 \cdot \frac{dq_2}{dt} \cdot \frac{dq_3}{dt} \cdot \cos(q_1) \cdot \cos(q_2)$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \left(-\frac{d^2q_1}{dt^2} \cdot q_3 \cdot \sin(q_1) \cdot \cos(q_2) - \left(\frac{dq_1}{dt}\right)^2 \cdot q_3 \cdot \cos(q_1) \cdot \cos(q_2) + \right. \\ \left. + \frac{dq_1}{dt} \cdot \frac{dq_2}{dt} \cdot q_3 \cdot \sin(q_1) \cdot \sin(q_2) - \frac{dq_1}{dt} \cdot \frac{dq_3}{dt} \cdot \sin(q_1) \cdot \cos(q_2) \right) +$$

$$+ \left(-\frac{d^2q_2}{dt^2} \cdot q_3 \cdot \cos(q_1) \cdot \sin(q_2) + \frac{dq_1}{dt} \cdot \frac{dq_2}{dt} \cdot q_3 \cdot \sin(q_1) \cdot \sin(q_2) - \right. \\ \left. - \left(\frac{dq_2}{dt}\right)^2 \cdot q_3 \cdot \cos(q_1) \cdot \cos(q_2) - \frac{dq_2}{dt} \cdot \frac{dq_3}{dt} \cdot \cos(q_1) \cdot \sin(q_2) \right) +$$

$$+ \left(\frac{d^2q_3}{dt^2} \cdot \cos(q_1) \cdot \cos(q_2) - \frac{dq_1}{dt} \cdot \frac{dq_3}{dt} \cdot \sin(q_1) \cdot \cos(q_2) - \frac{dq_2}{dt} \cdot \frac{dq_3}{dt} \cdot \right. \\ \left. \cdot \cos(q_1) \cdot \sin(q_2) \right)$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{d^2q_1}{dt^2} \cdot q_3 \cdot \sin(q_1) \cdot \cos(q_2) - \frac{d^2q_2}{dt^2} \cdot q_3 \cdot \cos(q_1) \cdot \sin(q_2) + \frac{d^2q_3}{dt^2} \cdot$$

$$\begin{aligned} & \cdot \cos(q_1) \cdot \cos(q_2) - \left(\frac{dq_1}{dt}\right)^2 \cdot q_3 \cdot \cos(q_1) \cdot \cos(q_2) - \left(\frac{dq_2}{dt}\right)^2 \cdot \\ & \cdot q_3 \cdot \cos(q_1) \cdot \cos(q_2) + 2 \cdot \frac{dq_1}{dt} \cdot \frac{dq_2}{dt} \cdot q_3 \cdot \sin(q_1) \cdot \sin(q_2) - \\ & - 2 \cdot \frac{dq_1}{dt} \cdot \frac{dq_3}{dt} \cdot \sin(q_1) \cdot \cos(q_2) - 2 \cdot \frac{dq_2}{dt} \cdot \frac{dq_3}{dt} \cdot \cos(q_1) \cdot \sin(q_2) \end{aligned}$$

Пусть известны обобщенные и абсолютные координаты, а также абсолютные скорости и ускорения:

$$\begin{aligned} q_1 = 0; \quad q_2 = 0; \quad q_3 = -0,1; \quad \frac{dx}{dt} = 1; \quad \frac{dy}{dt} = 1; \quad \frac{dz}{dt} = 1; \quad \frac{d^2x}{dt^2} = 0,2; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = 0,2; \\ \frac{d^2z}{dt^2} = 0,2 \end{aligned}$$

Найдем обобщенные скорости:

$$\begin{aligned} \Delta = \begin{bmatrix} 0 & q_3 \cdot \cos(q_2) & \sin(q_2) \\ -q_3 \cdot \cos(q_1) \cdot \cos(q_2) & q_3 \cdot \sin(q_1) \cdot \sin(q_2) & -\sin(q_1) \cdot \cos(q_2) \\ -q_3 \cdot \sin(q_1) \cdot \cos(q_2) & -q_3 \cdot \cos(q_1) \cdot \sin(q_2) & \cos(q_1) \cdot \cos(q_2) \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} 1 & -0,1 & 0 \\ 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 0,01 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_1 = \begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} & q_3 \cdot \cos(q_2) & \sin(q_2) \\ \frac{dy}{dt} & q_3 \cdot \sin(q_1) \cdot \sin(q_2) & -\sin(q_1) \cdot \cos(q_2) \\ \frac{dz}{dt} & -q_3 \cdot \cos(q_1) \cdot \sin(q_2) & \cos(q_1) \cdot \cos(q_2) \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} 1 & -0,1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 0,1 \end{aligned}$$

$$\Delta_2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{dx}{dt} & \sin(q_2) \\ -q_3 \cdot \cos(q_1) \cdot \cos(q_2) & \frac{dy}{dt} & -\sin(q_1) \cdot \cos(q_2) \\ -q_3 \cdot \sin(q_1) \cdot \cos(q_2) & \frac{dz}{dt} & \cos(q_1) \cdot \cos(q_2) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0,1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = -0,1$$

$$\Delta_3 = \begin{bmatrix} 0 & q_3 \cdot \cos(q_2) & \frac{dx}{dt} \\ -q_3 \cdot \cos(q_1) \cdot \cos(q_2) & q_3 \cdot \sin(q_1) \cdot \sin(q_2) & \frac{dy}{dt} \\ -q_3 \cdot \sin(q_1) \cdot \cos(q_2) & -q_3 \cdot \cos(q_1) \cdot \sin(q_2) & \frac{dz}{dt} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -0,1 & 1 \\ 0,1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 0,1$$

$$\frac{dq_1}{dt} = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 10 \text{ рад/с}$$

$$\frac{dq_2}{dt} = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -10 \text{ рад/с}$$

$$\frac{dq_3}{dt} = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 1 \text{ рад/с}$$

Найдем обобщенные ускорения:

$$\Delta' = \begin{bmatrix} 0 & q_3 \cdot \cos(q_2) & \sin(q_2) \\ -q_3 \cdot \cos(q_1) \cdot \cos(q_2) & q_3 \cdot \sin(q_1) \cdot \sin(q_2) & -\sin(q_1) \cdot \cos(q_2) \\ -q_3 \cdot \sin(q_1) \cdot \cos(q_2) & -q_3 \cdot \cos(q_1) \cdot \sin(q_2) & \cos(q_1) \cdot \cos(q_2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -0,1 & 0 \\ 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 0,01$$

$$\Delta'_1 = \begin{bmatrix} \frac{dx}{dt} + 20 & q_3 \cdot \cos(q_2) & \sin(q_2) \\ \frac{dy}{dt} + 40 & q_3 \cdot \sin(q_1) \cdot \sin(q_2) & -\sin(q_1) \cdot \cos(q_2) \\ \frac{dz}{dt} - 20 & -q_3 \cdot \cos(q_1) \cdot \sin(q_2) & \cos(q_1) \cdot \cos(q_2) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 21 & -0,1 & 0 \\ 41 & 0 & 0 \\ -19 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 4,1$$

$$\Delta'_2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{dx}{dt} + 20 & \sin(q_2) \\ -q_3 \cdot \cos(q_1) \cdot \cos(q_2) & \frac{dy}{dt} + 40 & -\sin(q_1) \cdot \cos(q_2) \\ -q_3 \cdot \sin(q_1) \cdot \cos(q_2) & \frac{dz}{dt} - 20 & \cos(q_1) \cdot \cos(q_2) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 21 & 0 \\ 0,1 & 41 & 0 \\ 0 & -19 & 1 \end{bmatrix} = -2,1$$

$$\Delta'_3 = \begin{bmatrix} 0 & q_3 \cdot \cos(q_2) & \frac{dx}{dt} + 20 \\ -q_3 \cdot \cos(q_1) \cdot \cos(q_2) & q_3 \cdot \sin(q_1) \cdot \sin(q_2) & \frac{dy}{dt} + 40 \\ -q_3 \cdot \sin(q_1) \cdot \cos(q_2) & -q_3 \cdot \cos(q_1) \cdot \sin(q_2) & \frac{dz}{dt} - 20 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -0,1 & 21 \\ 0,1 & 0 & 41 \\ 0 & 0 & -19 \end{bmatrix} = -0,19$$

$$\frac{d^2 q_1}{dt^2} = \frac{\Delta'_1}{\Delta'} = 410 \text{ рад/с}^2$$

$$\frac{d^2 q_2}{dt^2} = \frac{\Delta'_2}{\Delta'} = -210 \text{ рад/с}^2$$

$$\frac{d^2 q_3}{dt^2} = \frac{\Delta'_3}{\Delta'} = -19 \text{ рад/с}^2$$

Перейдем к определению остальных обобщенных скоростей и ускорений. Имеем два соотношения.

$$\bar{\omega} = \frac{dq_1}{dt} \cdot \bar{e}_1 + \frac{dq_2}{dt} \cdot \bar{e}_2 + \frac{dq_3}{dt} \cdot \bar{e}_3 + \frac{dq_4}{dt} \cdot \bar{e}_4 + \frac{dq_5}{dt} \cdot \bar{e}_5 + \frac{dq_6}{dt} \cdot \bar{e}_6$$

$$\bar{\omega} = \frac{d\alpha}{dt} \cdot \bar{e}_\alpha + \frac{d\beta}{dt} \cdot \bar{e}_\beta + \frac{d\gamma}{dt} \cdot \bar{e}_\gamma$$

Разложим эти соотношения по координатам.

$$\begin{aligned}\omega_x &= \frac{d\alpha}{dt} \cdot e_{\alpha x} + \frac{d\beta}{dt} \cdot e_{\beta x} + \frac{d\gamma}{dt} \cdot e_{\gamma x} \\ \omega_y &= \frac{d\alpha}{dt} \cdot e_{\alpha y} + \frac{d\beta}{dt} \cdot e_{\beta y} + \frac{d\gamma}{dt} \cdot e_{\gamma y} \\ \omega_z &= \frac{d\alpha}{dt} \cdot e_{\alpha z} + \frac{d\beta}{dt} \cdot e_{\beta z} + \frac{d\gamma}{dt} \cdot e_{\gamma z}\end{aligned}$$

Исходя из структуры механизма имеем.

$$\overline{e}_\alpha = \overline{e}_1 \qquad \overline{e}_\beta = \overline{e}_2 \qquad \overline{e}_\gamma = \overline{e}_4$$

Здесь \overline{e}_1 \overline{e}_γ единичные векторы, соответствующие рисункам 3.1 3.2, остальные обозначения соответствуют использованным выше. То есть.

$$\begin{aligned}\omega_x &= \frac{d\alpha}{dt} \cdot e_{1x} + \frac{d\beta}{dt} \cdot e_{2x} + \frac{d\gamma}{dt} \cdot e_{4x} \\ \omega_y &= \frac{d\alpha}{dt} \cdot e_{1y} + \frac{d\beta}{dt} \cdot e_{2y} + \frac{d\gamma}{dt} \cdot e_{4y} \\ \omega_z &= \frac{d\alpha}{dt} \cdot e_{1z} + \frac{d\beta}{dt} \cdot e_{2z} + \frac{d\gamma}{dt} \cdot e_{4z}\end{aligned}$$

Запишем это отношение через единичные векторы

$$\begin{aligned}\omega_x &= \frac{dq_1}{dt} \cdot e_{1x} + \frac{dq_2}{dt} \cdot e_{2x} + \frac{dq_4}{dt} \cdot e_{4x} + \frac{dq_5}{dt} \cdot e_{5x} + \frac{dq_6}{dt} \cdot e_{6x} \\ \omega_y &= \frac{dq_1}{dt} \cdot e_{1y} + \frac{dq_2}{dt} \cdot e_{2y} + \frac{dq_4}{dt} \cdot e_{4y} + \frac{dq_5}{dt} \cdot e_{5y} + \frac{dq_6}{dt} \cdot e_{6y} \\ \omega_z &= \frac{dq_1}{dt} \cdot e_{1z} + \frac{dq_2}{dt} \cdot e_{2z} + \frac{dq_4}{dt} \cdot e_{4z} + \frac{dq_5}{dt} \cdot e_{5z} + \frac{dq_6}{dt} \cdot e_{6z}\end{aligned}$$

Запишем единичные векторы осей кинематических пар. В данном случае векторы \overline{e}_1 \overline{e}_2 \overline{e}_3 определяются обобщенными координатами q_1 q_2 q_3 а векторы \overline{e}_4 \overline{e}_5 \overline{e}_6 мы находим из перемножения соответствующих матриц.

$$\begin{aligned}\overline{e}_1 &= [1 \quad 0 \quad 0]^T \\ \overline{e}_2 &= [1 \quad \cos(q_1) \quad \sin(q_1)]^T\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{e}_3 &= [0 \ 0 \ 0]^T \\ \bar{e}_4 &= A_1' \cdot A_2' \cdot [0 \ 0 \ 1]^T \\ \bar{e}_5 &= A_1 \cdot A_2 \cdot A_4 \cdot [0 \ 1 \ 0]^T \\ \bar{e}_6 &= A_\alpha \cdot A_\beta \cdot A_\gamma \cdot [1 \ 0 \ 0]^T \\ \bar{e}_1 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \bar{e}_2 &= \begin{bmatrix} 0 \\ \cos(q_1) \\ \sin(q_1) \end{bmatrix} \\ \bar{e}_3 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \bar{e}_4 &= \begin{bmatrix} \sin(q_2) \\ -(\cos(q_2) \cdot \sin(q_1)) \\ \cos(q_1) \cdot \cos(q_2) \end{bmatrix} \\ \bar{e}_5 &= \begin{bmatrix} -(\cos(q_2) \cdot \sin(q_4)) \\ \cos(q_1) \cdot \cos(q_4) - \sin(q_1) \cdot \sin(q_2) \cdot \sin(q_4) \\ \cos(q_4) \cdot \sin(q_1) - \cos(q_1) \cdot \sin(q_2) \cdot \sin(q_4) \end{bmatrix} \\ \bar{e}_6 &= \begin{bmatrix} \cos(\beta) \cdot \cos(\gamma) \\ \cos(\beta) \cdot \sin(\gamma) \\ -\sin(\beta) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Зададим известные величины:

$$q_1 = 0 \text{ м}; q_2 = 0 \text{ м}; q_3 = -0,1 \text{ м}; q_4 = 0; q_5 = 0; q_6 = -0,1 \text{ м}; x = 0; y = 0;$$

$$z = -0,1 \text{ м}; \frac{dx}{dt} = 1 \text{ м/с}; \frac{dy}{dt} = 1 \text{ м/с}; \frac{dz}{dt} = 1 \text{ м/с}; \frac{d^2x}{dt^2} = 0,2 \text{ м/с}^2;$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 0,2 \text{ м/с}^2; \frac{d^2z}{dt^2} = 0,2 \text{ м/с}^2; \alpha = 0; \beta = 0; \gamma = 0; \frac{dq_1}{dt} = 10 \text{ м/с};$$

$$\frac{dq_2}{dt} = -10 \text{ м/с}; \frac{dq_3}{dt} = 1 \text{ м/с}; \frac{d^2q_1}{dt^2} = 410 \text{ м/с}^2; \frac{d^2q_2}{dt^2} = -210 \text{ м/с}^2;$$

$$\alpha = 0; \beta = 0; \gamma = 0; \frac{d\alpha}{dt} = 0,52 \text{ рад/с}; \frac{d\beta}{dt} = 0,52 \text{ рад/с}; \frac{d\gamma}{dt} = 0,52 \text{ рад/с};$$

$$\text{с}; \frac{d^2\alpha}{dt^2} = 1 \text{ рад/с}^2; \frac{d^2\beta}{dt^2} = 1 \text{ рад/с}^2; \frac{d^2\gamma}{dt^2} = 1 \text{ рад/с}^2; e_{2z} = \sin(q_1); e_{3x} = 0;$$

$$\begin{aligned}
e_{3y} &= 0; \quad e_{3z} = 0; \quad e_{4x} = \sin(q_2); \quad e_{4y} = -(\cos(q_2) \cdot \sin(q_1)); \quad e_{4z} = \cos(q_1) \cdot \\
&\cos(q_2); \quad e_{5x} = -(\cos(q_2) \cdot \sin(q_4)); \quad e_{5y} = \cos(q_1) \cdot \cos(q_4) - \sin(q_1) \cdot \\
&\sin(q_2) \cdot \sin(q_4); \quad e_{5z} = \cos(q_4) \cdot \sin(q_1) - \cos(q_1) \cdot \sin(q_2) \cdot \sin(q_4); \quad e_{6x} = \\
&\cos(\beta) \cdot \cos(\gamma); \quad e_{6y} = \cos(\beta) \cdot \sin(\gamma); \quad e_{6z} = -\sin(\beta);
\end{aligned}$$

Отсюда имеем.

$$\omega_x = \frac{d\alpha}{dt} \cdot e_{1x} + \frac{d\beta}{dt} \cdot e_{2x} + \frac{d\gamma}{dt} \cdot e_{4x} = 0,52$$

$$\omega_y = \frac{d\alpha}{dt} \cdot e_{1y} + \frac{d\beta}{dt} \cdot e_{2y} + \frac{d\gamma}{dt} \cdot e_{4y} = 0,52$$

$$\omega_z = \frac{d\alpha}{dt} \cdot e_{1z} + \frac{d\beta}{dt} \cdot e_{2z} + \frac{d\gamma}{dt} \cdot e_{4z} = 0,52$$

$$\Delta = \begin{bmatrix} e_{4x} & e_{5x} & e_{6x} \\ e_{4y} & e_{5y} & e_{6y} \\ e_{4z} & e_{5z} & e_{6z} \end{bmatrix}$$

$$\Delta = \begin{bmatrix} \sin(q_2) & -(\cos(q_2) \cdot \sin(q_4)) & \cos(\beta) \cdot \cos(\gamma) \\ -(\cos(q_2) \cdot \sin(q_1)) & \cos(q_1) \cdot \cos(q_4) - \sin(q_1) \cdot \sin(q_2) \cdot \sin(q_4) & \cos(\beta) \cdot \sin(\gamma) \\ \cos(q_1) \cdot \cos(q_2) & \cos(q_4) \cdot \sin(q_1) - \cos(q_1) \cdot \sin(q_2) \cdot \sin(q_4) & -\sin(\beta) \end{bmatrix} = \\
= -1$$

$$\Delta_{q_4} = \begin{bmatrix} \omega_x - 10 & e_{5x} & e_{6x} \\ \omega_y + 10 & e_{5y} & e_{6y} \\ \omega_z & e_{5z} & e_{6z} \end{bmatrix}$$

$$\Delta_{q_4} = \begin{bmatrix} \omega_x - 10 & -(\cos(q_2) \cdot \sin(q_4)) & \cos(\beta) \cdot \cos(\gamma) \\ \omega_y + 10 & \cos(q_1) \cdot \cos(q_4) - \sin(q_1) \cdot \sin(q_2) \cdot \sin(q_4) & \cos(\beta) \cdot \sin(\gamma) \\ \omega_z & \cos(q_4) \cdot \sin(q_1) - \cos(q_1) \cdot \sin(q_2) \cdot \sin(q_4) & -\sin(\beta) \end{bmatrix} = \\
= -0,52$$

$$\Delta_{q_5} = \begin{bmatrix} e_{4x} & \omega_x - 10 & e_{6x} \\ e_{4y} & \omega_y + 10 & e_{6y} \\ e_{4z} & \omega_z & e_{6z} \end{bmatrix}$$

$$\Delta_{q_5} = \begin{bmatrix} \sin(q_2) & \omega_x - 10 & \cos(\beta) \cdot \cos(\gamma) \\ -(\cos(q_2) \cdot \sin(q_1)) & \omega_y + 10 & \cos(\beta) \cdot \sin(\gamma) \\ \cos(q_1) \cdot \cos(q_2) & \omega_z & -\sin(\beta) \end{bmatrix} = -10,52$$

$$\Delta_{q_6} = \begin{bmatrix} e_{4x} & e_{5x} & \omega_x - 10 \\ e_{4y} & e_{5y} & \omega_y + 10 \\ e_{4z} & e_{5z} & \omega_z \end{bmatrix}$$

$$\Delta_{q_6} = \begin{bmatrix} \sin(q_2) & -(\cos(q_2) \cdot \sin(q_4)) & \omega_x - 10 \\ -(\cos(q_2) \cdot \sin(q_1)) & \cos(q_1) \cdot \cos(q_4) - \sin(q_1) \cdot \sin(q_2) \cdot \sin(q_4) & \omega_y + 10 \\ \cos(q_1) \cdot \cos(q_2) & \cos(q_4) \cdot \sin(q_1) - \cos(q_1) \cdot \sin(q_2) \cdot \sin(q_4) & \omega_z \end{bmatrix} = 9,48$$

$$\frac{dq_4}{dt} = \frac{\Delta_{q_4}}{\Delta} = 0,52 \text{ рад/с}$$

$$\frac{dq_5}{dt} = \frac{\Delta_{q_5}}{\Delta} = 10,52 \text{ рад/с}$$

$$\frac{dq_6}{dt} = \frac{\Delta_{q_6}}{\Delta} = -9,48 \text{ рад/с}$$

Для определения векторных произведений можно воспользоваться соотношением.

$$\begin{aligned} \bar{e}_1 \times \bar{e}_2 &= \begin{bmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ e_{1x} & e_{1y} & e_{1z} \\ e_{2x} & e_{2y} & e_{2z} \end{bmatrix} = \bar{i} \cdot e_{1y} \cdot e_{2z} - \bar{i} \cdot e_{1z} \cdot e_{2y} - \\ & - \bar{j} \cdot e_{1x} \cdot e_{2z} + \bar{j} \cdot e_{1z} \cdot e_{2x} + \bar{k} \cdot e_{1x} \cdot e_{2y} - \bar{k} \cdot e_{1y} \cdot e_{2x} \end{aligned}$$

Запишем векторные произведения единичных векторов.

$$\bar{e}_1 \times \bar{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -\sin(q_1) \\ \cos(q_1) \end{bmatrix}$$

$$\bar{e}_1 \times \bar{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{e}_1 \times \bar{e}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ -(\cos(q_1) \cdot \cos(q_2)) \\ -(\cos(q_2) \cdot \sin(q_1)) \end{bmatrix}$$

$$\bar{e}_1 \times \bar{e}_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ -(\cos(q_4) \cdot \sin(q_1)) - \cos(q_1) \cdot \sin(q_2) \cdot \sin(q_4) \\ \cos(q_1) \cdot \cos(q_4) - \sin(q_1) \cdot \sin(q_2) \cdot \sin(q_4) \end{bmatrix}$$

$$\bar{e}_1 \times \bar{e}_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ \sin(\beta) \\ \cos(\beta) \cdot \sin(\gamma) \end{bmatrix}$$

$$\bar{e}_2 \times \bar{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{e}_2 \times \bar{e}_4 = \begin{bmatrix} \cos(q_2) \cdot \cos(q_1)^2 + \cos(q_2) \cdot \sin(q_1)^2 \\ \sin(q_1) \cdot \sin(q_2) \\ -(\cos(q_1) \cdot \sin(q_2)) \end{bmatrix}$$

$$\bar{e}_2 \times \bar{e}_5 =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(q_1) \cdot (\cos(q_4) \cdot \sin(q_1) + \cos(q_1) \cdot \sin(q_2) \cdot \sin(q_4)) - \sin(q_1) \cdot (\cos(q_1) \cdot \cos(q_4) + \sin(q_1) \cdot \sin(q_2) \cdot \sin(q_4)) \\ -(\cos(q_2) \cdot \sin(q_1) \cdot \sin(q_4)) \\ \cos(q_1) \cdot \cos(q_2) \cdot \sin(q_4) \end{bmatrix}$$

$$\bar{e}_2 \times \bar{e}_6 = \begin{bmatrix} -(\cos(q_1) \cdot \sin(\beta)) - \cos(\beta) \cdot \sin(\gamma) \cdot \sin(q_1) \\ \cos(\beta) \cdot \cos(\gamma) \cdot \sin(q_1) \\ -(\cos(\beta) \cdot \sin(\gamma) \cdot \cos(q_1)) \end{bmatrix}$$

$$\bar{e}_4 \times \bar{e}_5 =$$

$$= \begin{bmatrix} -(\cos(q_1) \cdot \cos(q_2) \cdot (\cos(q_1) \cdot \cos(q_4) - \sin(q_1) \cdot \sin(q_2) \cdot \sin(q_4))) - \cos(q_2) \cdot \sin(q_1) \cdot (\cos(q_4) \cdot \sin(q_1) + \cos(q_1) \cdot \sin(q_2) \cdot \sin(q_4)) \\ -(\cos(q_1) \cdot \sin(q_4) \cdot \cos(q_2)^2) - \sin(q_2) \cdot (\cos(q_4) \cdot \sin(q_1) + \cos(q_1) \cdot \sin(q_2) \cdot \sin(q_4)) \\ \sin(q_2) \cdot (\cos(q_1) \cdot \cos(q_4) - \sin(q_1) \cdot \sin(q_2) \cdot \sin(q_4)) - \cos(q_2)^2 \cdot \sin(q_1) \cdot \sin(q_4) \end{bmatrix}$$

$$\bar{e}_4 \times \bar{e}_6 = \begin{bmatrix} \cos(q_2) \cdot \sin(\beta) \cdot \sin(q_1) - \cos(\beta) \cdot \cos(q_1) \cdot \cos(q_2) \cdot \sin(\gamma) \\ \sin(\beta) \cdot \sin(q_1) + \cos(\beta) \cdot \cos(\gamma) \cdot \cos(q_1) \cdot \cos(q_2) \\ \cos(\beta) \cdot \sin(\gamma) \cdot \sin(q_2) + \cos(\beta) \cdot \cos(\gamma) \cdot \cos(q_2) \cdot \sin(q_1) \end{bmatrix}$$

$$\bar{e}_5 \times \bar{e}_6 =$$

$$= \begin{bmatrix} -(\sin(\beta) \cdot (\cos(q_1) \cdot \cos(q_4) - \sin(q_1) \cdot \sin(q_2) \cdot \sin(q_4))) - \cos(\beta) \cdot \sin(\gamma) \cdot (\cos(q_4) \cdot \sin(q_1) + \cos(q_1) \cdot \sin(q_2) \cdot \sin(q_4)) \\ \cos(\beta) \cdot \cos(\gamma) \cdot (\cos(q_4) \cdot \sin(q_1) - \cos(q_1) \cdot \sin(q_2) \cdot \sin(q_4)) - \cos(q_2) \cdot \cos(\beta) \cdot \sin(q_4) \\ -(\cos(\beta) \cdot \cos(\gamma) \cdot (\cos(q_1) \cdot \cos(q_4) - \sin(q_1) \cdot \sin(q_2) \cdot \sin(q_4))) - \cos(\beta) \cdot \cos(q_2) \cdot \sin(\gamma) \cdot \sin(q_4) \end{bmatrix}$$

Запишем векторные произведения по координатам.

$$(\bar{e}_1 \times \bar{e}_2)_x = 0$$

$$(\bar{e}_1 \times \bar{e}_2)_y = -\sin(q_1)$$

$$(\bar{e}_1 \times \bar{e}_2)_z = \cos(q_1)$$

$$(\bar{e}_1 \times \bar{e}_3)_x = 0$$

$$(\bar{e}_1 \times \bar{e}_3)_y = 0$$

$$(\bar{e}_1 \times \bar{e}_3)_z = 0$$

$$(\bar{e}_1 \times \bar{e}_4)_x = 0$$

$$(\bar{e}_1 \times \bar{e}_4)_y = -(\cos(q_1) \cdot \cos(q_2))$$

$$(\bar{e}_1 \times \bar{e}_4)_z = -(\cos(q_2) \cdot \sin(q_1))$$

$$(\bar{e}_1 \times \bar{e}_5)_x = 0$$

$$(\bar{e}_1 \times \bar{e}_5)_y = -(\cos(q_4) \cdot \sin(q_1)) - \cos(q_1) \cdot \sin(q_2) \cdot \sin(q_4)$$

$$(\bar{e}_1 \times \bar{e}_5)_z = \cos(q_1) \cdot \cos(q_4) - \sin(q_1) \cdot \sin(q_2) \cdot \sin(q_4)$$

$$(\bar{e}_1 \times \bar{e}_6)_x = 0$$

$$(\bar{e}_1 \times \bar{e}_6)_y = \sin(\beta)$$

$$(\bar{e}_1 \times \bar{e}_6)_z = \cos(\beta) \cdot \sin(\gamma)$$

$$(\bar{e}_2 \times \bar{e}_3)_x = 0$$

$$(\bar{e}_2 \times \bar{e}_3)_y = 0$$

$$(\bar{e}_2 \times \bar{e}_3)_z = 0$$

$$(\bar{e}_2 \times \bar{e}_4)_x = \cos(q_2) \cdot \cos(q_1)^2 + \cos(q_2) \cdot \sin(q_1)^2$$

$$(\bar{e}_2 \times \bar{e}_4)_y = \sin(q_1) \cdot \sin(q_2)$$

$$(\bar{e}_2 \times \bar{e}_4)_z = -(\cos(q_1) \cdot \sin(q_2))$$

$$(\bar{e}_2 \times \bar{e}_5)_x = \cos(q_1) \cdot (\cos(q_4) \cdot \sin(q_1) + \cos(q_1) \cdot \sin(q_2) \cdot \sin(q_4))$$

$$- \sin(q_1) \cdot (\cos(q_1) \cdot \cos(q_4) + \sin(q_1) \cdot \sin(q_2) \cdot \sin(q_4))$$

$$(\bar{e}_2 \times \bar{e}_5)_y = -(\cos(q_2) \cdot \sin(q_1) \cdot \sin(q_4))$$

$$(\bar{e}_2 \times \bar{e}_5)_z = \cos(q_1) \cdot \cos(q_2) \cdot \sin(q_4)$$

$$(\bar{e}_2 \times \bar{e}_6)_x = -(\cos(q_1) \cdot \sin(\beta)) - \cos(\beta) \cdot \sin(\gamma) \cdot \sin(q_1)$$

$$\begin{aligned}
(\overline{\mathbf{e}}_2 \times \overline{\mathbf{e}}_6)_y &= \cos(\beta) \cdot \cos(\gamma) \cdot \sin(q_1) \\
(\overline{\mathbf{e}}_2 \times \overline{\mathbf{e}}_6)_z &= -(\cos(\beta) \cdot \sin(\gamma) \cdot \cos(q_1)) \\
(\overline{\mathbf{e}}_4 \times \overline{\mathbf{e}}_5)_x &= -(\cos(q_1) \cdot \cos(q_2) \\
&\quad \cdot (\cos(q_1) \cdot \cos(q_4) - \sin(q_1) \cdot \sin(q_2) \cdot \sin(q_4))) - \cos(q_2) \\
&\quad \cdot \sin(q_1) \cdot (\cos(q_4) \cdot \sin(q_1) + \cos(q_1) \cdot \sin(q_2) \cdot \sin(q_4)) \\
(\overline{\mathbf{e}}_4 \times \overline{\mathbf{e}}_5)_y &= -(\cos(q_1) \cdot \sin(q_4) \cdot \cos(q_2)^2) - \sin(q_2) \\
&\quad \cdot (\cos(q_4) \cdot \sin(q_1) + \cos(q_1) \cdot \sin(q_2) \cdot \sin(q_4)) \\
(\overline{\mathbf{e}}_4 \times \overline{\mathbf{e}}_5)_z &= \sin(q_2) \cdot (\cos(q_1) \cdot \cos(q_4) - \sin(q_1) \cdot \sin(q_2) \cdot \sin(q_4)) \\
&\quad - \cos(q_2)^2 \cdot \sin(q_1) \cdot \sin(q_4) \\
(\overline{\mathbf{e}}_4 \times \overline{\mathbf{e}}_6)_x &= \cos(q_2) \cdot \sin(\beta) \cdot \sin(q_1) - \cos(\beta) \cdot \cos(q_1) \cdot \cos(q_2) \cdot \sin(\gamma) \\
(\overline{\mathbf{e}}_4 \times \overline{\mathbf{e}}_6)_y &= \sin(\beta) \cdot \sin(q_1) + \cos(\beta) \cdot \cos(\gamma) \cdot \cos(q_1) \cdot \cos(q_2) \\
(\overline{\mathbf{e}}_4 \times \overline{\mathbf{e}}_6)_z &= \cos(\beta) \cdot \sin(\gamma) \cdot \sin(q_2) + \cos(\beta) \cdot \cos(\gamma) \cdot \cos(q_2) \cdot \sin(q_1) \\
(\overline{\mathbf{e}}_5 \times \overline{\mathbf{e}}_6)_x &= -(\sin(\beta) \cdot (\cos(q_1) \cdot \cos(q_4) - \sin(q_1) \cdot \sin(q_2) \cdot \sin(q_4))) \\
&\quad - \cos(\beta) \cdot \sin(\gamma) \cdot (\cos(q_4) \cdot \sin(q_1) + \cos(q_1) \cdot \sin(q_2) \cdot \sin(q_4)) \\
(\overline{\mathbf{e}}_5 \times \overline{\mathbf{e}}_6)_y &= \cos(\beta) \cdot \cos(\gamma) \cdot (\cos(q_4) \cdot \sin(q_1) - \cos(q_1) \cdot \sin(q_2) \cdot \sin(q_4)) \\
&\quad - \cos(q_2) \cdot \cos(\beta) \cdot \sin(q_4) \\
(\overline{\mathbf{e}}_5 \times \overline{\mathbf{e}}_6)_z &= -(\cos(\beta) \cdot \cos(\gamma) \\
&\quad \cdot (\cos(q_1) \cdot \cos(q_4) - \sin(q_1) \cdot \sin(q_2) \cdot \sin(q_4))) - \cos(\beta) \\
&\quad \cdot \cos(q_2) \cdot \sin(\gamma) \cdot \sin(q_4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= \frac{d^2 q_1}{dt^2} \cdot \overline{\mathbf{e}}_1 + \frac{d^2 q_2}{dt^2} \cdot \overline{\mathbf{e}}_2 + \frac{d^2 q_4}{dt^2} \cdot \overline{\mathbf{e}}_4 + \frac{d^2 q_5}{dt^2} \cdot \overline{\mathbf{e}}_5 + \frac{d^2 q_6}{dt^2} \cdot \overline{\mathbf{e}}_6 + \frac{dq_1}{dt} \\
&\quad \cdot \overline{\mathbf{e}}_1 \times \left(\frac{dq_2}{dt} \cdot \overline{\mathbf{e}}_2 + \frac{dq_4}{dt} \cdot \overline{\mathbf{e}}_4 + \frac{dq_5}{dt} \cdot \overline{\mathbf{e}}_5 + \frac{dq_6}{dt} \cdot \overline{\mathbf{e}}_6 \right) + \frac{dq_2}{dt} \\
&\quad \cdot \overline{\mathbf{e}}_2 \times \left(\frac{dq_4}{dt} \cdot \overline{\mathbf{e}}_4 + \frac{dq_5}{dt} \cdot \overline{\mathbf{e}}_5 + \frac{dq_6}{dt} \cdot \overline{\mathbf{e}}_6 \right) + \frac{dq_4}{dt} \\
&\quad \cdot \overline{\mathbf{e}}_4 \times \left(\frac{dq_5}{dt} \cdot \overline{\mathbf{e}}_5 + \frac{dq_6}{dt} \cdot \overline{\mathbf{e}}_6 \right) + \frac{dq_5}{dt} \cdot \overline{\mathbf{e}}_5 \times \frac{dq_6}{dt} \cdot \overline{\mathbf{e}}_6
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{1-6x} &= \frac{dq_1}{dt} \cdot e_{1x} \cdot \left(\frac{dq_2}{dt} \cdot e_{2x} + \frac{dq_4}{dt} \cdot e_{4x} + \frac{dq_5}{dt} \cdot e_{5x} + \frac{dq_6}{dt} \cdot e_{6x} \right) + \frac{dq_2}{dt} \cdot e_{2x} \\ &\quad \cdot \left(\frac{dq_4}{dt} \cdot e_{4x} + \frac{dq_5}{dt} \cdot e_{5x} + \frac{dq_6}{dt} \cdot e_{6x} \right) + \frac{dq_4}{dt} \cdot e_{4x} \\ &\quad \cdot \left(\frac{dq_5}{dt} \cdot e_{5x} + \frac{dq_6}{dt} \cdot e_{6x} \right) + \frac{dq_5}{dt} \cdot e_{5x} \cdot \frac{dq_6}{dt} \cdot e_{6x} \\ \varepsilon_{1-6x} &= -10,67 \text{ рад/с}^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{1-6y} &= \frac{dq_1}{dt} \cdot e_{1y} \cdot \left(\frac{dq_2}{dt} \cdot e_{2y} + \frac{dq_4}{dt} \cdot e_{4y} + \frac{dq_5}{dt} \cdot e_{5y} + \frac{dq_6}{dt} \cdot e_{6y} \right) + \frac{dq_2}{dt} \cdot e_{2y} \\ &\quad \cdot \left(\frac{dq_4}{dt} \cdot e_{4y} + \frac{dq_5}{dt} \cdot e_{5y} + \frac{dq_6}{dt} \cdot e_{6y} \right) + \frac{dq_4}{dt} \cdot e_{4y} \\ &\quad \cdot \left(\frac{dq_5}{dt} \cdot e_{5y} + \frac{dq_6}{dt} \cdot e_{6y} \right) + \frac{dq_5}{dt} \cdot e_{5y} \cdot \frac{dq_6}{dt} \cdot e_{6y} \\ \varepsilon_{1-6y} &= -10,13 \text{ рад/с}^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{1-6z} &= \frac{dq_1}{dt} \cdot e_{1z} \cdot \left(\frac{dq_2}{dt} \cdot e_{2z} + \frac{dq_4}{dt} \cdot e_{4z} + \frac{dq_5}{dt} \cdot e_{5z} + \frac{dq_6}{dt} \cdot e_{6z} \right) + \frac{dq_2}{dt} \cdot e_{2z} \\ &\quad \cdot \left(\frac{dq_4}{dt} \cdot e_{4z} + \frac{dq_5}{dt} \cdot e_{5z} + \frac{dq_6}{dt} \cdot e_{6z} \right) + \frac{dq_4}{dt} \cdot e_{4z} \\ &\quad \cdot \left(\frac{dq_5}{dt} \cdot e_{5z} + \frac{dq_6}{dt} \cdot e_{6z} \right) + \frac{dq_5}{dt} \cdot e_{5z} \cdot \frac{dq_6}{dt} \cdot e_{6z} \\ \varepsilon_{1-6z} &= 10,13 \text{ рад/с}^2\end{aligned}$$

$$\varepsilon_x = \frac{d^2q_1}{dt^2} \cdot e_{1x} + \frac{d^2q_2}{dt^2} \cdot e_{2x} + \frac{d^2q_4}{dt^2} \cdot e_{4x} + \frac{d^2q_5}{dt^2} \cdot e_{5x} + \frac{d^2q_6}{dt^2} \cdot e_{6x} + \varepsilon_{1-6x}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_y &= \frac{d^2q_1}{dt^2} \cdot e_{1y} + \frac{d^2q_2}{dt^2} \cdot e_{2y} + \frac{d^2q_4}{dt^2} \cdot e_{4y} + \frac{d^2q_5}{dt^2} \cdot e_{5y} + \frac{d^2q_6}{dt^2} \cdot e_{6y} + \varepsilon_{1-6y} \\ &= \frac{d^2q_1}{dt^2} \cdot e_{1y} + \frac{d^2q_2}{dt^2} \cdot e_{2y} + \frac{d^2q_4}{dt^2} \cdot e_{4y} + \frac{d^2q_5}{dt^2} \cdot e_{5y} + \frac{d^2q_6}{dt^2} \cdot e_{6y} \\ &\quad + \varepsilon_{1-6y}\end{aligned}$$

$$\Delta = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{4x} & \mathbf{e}_{5x} & \mathbf{e}_{6x} \\ \mathbf{e}_{4y} & \mathbf{e}_{5y} & \mathbf{e}_{6y} \\ \mathbf{e}_{4z} & \mathbf{e}_{5z} & \mathbf{e}_{6z} \end{bmatrix}$$

$$\Delta = \begin{bmatrix} \sin(q_2) & -(\cos(q_2) \cdot \sin(q_4)) & \cos(\beta) \cdot \cos(\gamma) \\ -(\cos(q_2) \cdot \sin(q_1)) & \cos(q_1) \cdot \cos(q_4) - \sin(q_1) \cdot \sin(q_2) \cdot \sin(q_4) & \cos(\beta) \cdot \sin(\gamma) \\ \cos(q_1) \cdot \cos(q_2) & \cos(q_4) \cdot \sin(q_1) - \cos(q_1) \cdot \sin(q_2) \cdot \sin(q_4) & -\sin(\beta) \end{bmatrix} =$$

$$= -1$$

$$\frac{\Delta_{dq_4}}{dt} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_{1-6x} & \mathbf{e}_{5x} & \mathbf{e}_{6x} \\ \varepsilon_y - \varepsilon_{1-6y} & \mathbf{e}_{5y} & \mathbf{e}_{6y} \\ \varepsilon_z - \varepsilon_{1-6z} & \mathbf{e}_{5z} & \mathbf{e}_{6z} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\Delta_{dq_4}}{dt} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x - \varepsilon_{1-6x} & -(\cos(q_2) \cdot \sin(q_4)) & \cos(\beta) \cdot \cos(\gamma) \\ \varepsilon_y - \varepsilon_{1-6y} & \cos(q_1) \cdot \cos(q_4) - \sin(q_1) \cdot \sin(q_2) \cdot \sin(q_4) & \cos(\beta) \cdot \sin(\gamma) \\ \varepsilon_z - \varepsilon_{1-6z} & \cos(q_4) \cdot \sin(q_1) - \cos(q_1) \cdot \sin(q_2) \cdot \sin(q_4) & -\sin(\beta) \end{bmatrix} =$$

$$= 9,13$$

$$\frac{\Delta_{dq_5}}{dt} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{4x} & \varepsilon_x - \varepsilon_{1-6x} & \mathbf{e}_{6x} \\ \mathbf{e}_{4y} & \varepsilon_y - \varepsilon_{1-6y} & \mathbf{e}_{6y} \\ \mathbf{e}_{4z} & \varepsilon_z - \varepsilon_{1-6z} & \mathbf{e}_{6z} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\Delta_{dq_5}}{dt} = \begin{bmatrix} \sin(q_2) & \varepsilon_x - \varepsilon_{1-6x} & \cos(\beta) \cdot \cos(\gamma) \\ -(\cos(q_2) \cdot \sin(q_1)) & \varepsilon_y - \varepsilon_{1-6y} & \cos(\beta) \cdot \sin(\gamma) \\ \cos(q_1) \cdot \cos(q_2) & \varepsilon_z - \varepsilon_{1-6z} & -\sin(\beta) \end{bmatrix} = -200,87$$

$$\frac{\Delta_{dq_6}}{dt} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{4x} & \mathbf{e}_{5x} & \varepsilon_x - \varepsilon_{1-6x} \\ \mathbf{e}_{4y} & \mathbf{e}_{5y} & \varepsilon_y - \varepsilon_{1-6y} \\ \mathbf{e}_{4z} & \mathbf{e}_{5z} & \varepsilon_z - \varepsilon_{1-6z} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\Delta_{dq_6}}{dt} = \begin{bmatrix} \sin(q_2) & -(\cos(q_2) \cdot \sin(q_4)) & \varepsilon_x - \varepsilon_{1-6x} \\ -(\cos(q_2) \cdot \sin(q_1)) & \cos(q_1) \cdot \cos(q_4) - \sin(q_1) \cdot \sin(q_2) \cdot \sin(q_4) & \varepsilon_y - \varepsilon_{1-6y} \\ \cos(q_1) \cdot \cos(q_2) & \cos(q_4) \cdot \sin(q_1) - \cos(q_1) \cdot \sin(q_2) \cdot \sin(q_4) & \varepsilon_z - \varepsilon_{1-6z} \end{bmatrix} =$$

$$= 400,33$$

$$\frac{d^2 q_4}{d^2 t} = \frac{\Delta_{dq_4}}{\Delta} = 9,132 \text{ рад/с}^2$$

$$\frac{d^2 q_5}{d^2 t} = \frac{\Delta \frac{dq_5}{dt}}{\Delta} = -200,87 \text{ рад/с}^2$$

$$\frac{d^2 q_6}{d^2 t} = \frac{\Delta \frac{dq_6}{dt}}{\Delta} = 400,33 \text{ рад/с}^2$$

Таким образом задача об ускорениях решена.

Глава 4. Динамический анализ механизма с постоянной точкой ввода инструмента и построение действующего экспериментального образца.

В данной главе рассмотрим динамический анализ механизма, обладающего свойством сохранения постоянство точки ввода входного звена в рабочую зону, а также приведем сведения о конструкции и параметрах действующих моделей указанного механизма.

4.1 Динамический анализ механизма с постоянной точкой ввода выходного звена.

В данном параграфе приведем модель, описывающую динамику механизма с постоянной точкой ввода выходного звена в рабочую зону, составим уравнения, описывающие динамические свойства этого устройства, а также рассмотрим некоторые конкретные примеры динамического анализа соответствующего механизма.

Динамическая модель описывается рисунком (Рис. 4.1), в данном случае рассматриваем устройство с тремя степенями свободы, поскольку, основная масса механизма перемещается именно по трем степеням свободы.

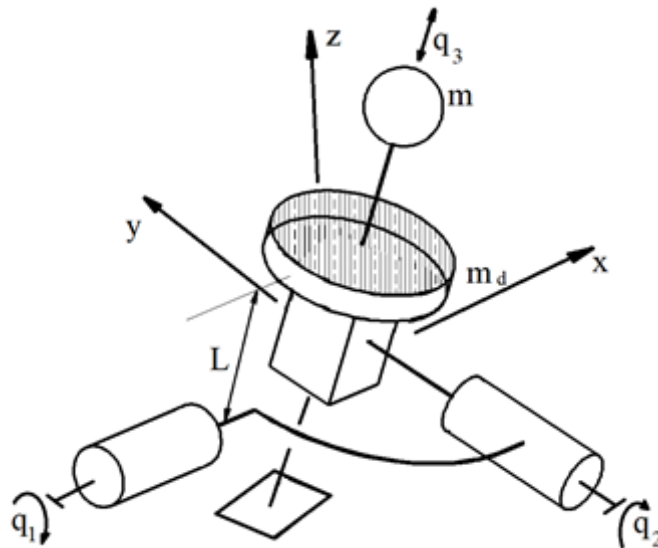


Рис. 4.1

Дело в том, что три первые степени свободы соответствуют наиболее массивным звеньям механизма, обеспечивающим постоянство точки ввода – это шарнирный параллелограмм, который меняет свою конфигурацию, а также соответствующий двигатель и упомянутый шарнирный параллелограмм, который меняет плоскость у его месторасположения. Кроме того, имеет место инструмент, перемещающийся вдоль собственной оси. Соответствующие двигатели и звенья механизма составляют примерно 90% всей его массы. Три последние степени свободы (четвертая пятая и шестая), которые обеспечивают ориентацию инструмента, соответствует гораздо менее массивным частям механизма.

В соответствии с изложенным можно указать на то, что масса m движется подобно движению инструмента, то есть при приближении центра координат инструмента к основанию, масса m удаляется от основания, а углы поворота q_1 и q_2 в данном случае совпадают, масса m примерно равна 0,3 кг.

Что касается массы m_d , то она определяется массой начального, промежуточного и конечного звеньев, а также элементов конических либо ременных передач. Для определения массы m_d можно воспользоваться известным в теории механизмов и машин методом. На рисунке (Рис. 4.1) эта

масса представлена в виде диска, чтобы отобразить имеющиеся моменты инерции относительно двух осей, перпендикулярных оси диска. Однако, оказывается, что указанные моменты инерции гораздо меньше, чем момент инерции, определяемый массой диска и расстоянием до оси вращения.

Согласно методике, применяемой в ТММ, нужно выразить кинетическую энергию соответствующих элементов, а именно начального, выходного и промежуточного звеньев той части механизма, которая обеспечивает постоянство точки ввода инструмента. Кинетическая энергия, упомянутых начального и конечного звеньев, определяется вращением вокруг двух перпендикулярных осей, соответствующих первой и второй степеням свободы, нужно иметь момент инерции этих звеньев и выразить квадраты к угловой скорости. Кинетическая энергия промежуточного звена определяется таким образом, что вся масса как бы сосредоточена на конце конечного звена на расстоянии L от точки вращения.

Сообразно с изложенным, приведем расчет параметров элементов механизма по (Рис. 4.1), используя упрощённую схему исследуемого в данной работе устройства (Рис 4.2), в данном случае имеет место начальное звено (Н), промежуточное звено (П), конечное звено (К), длина начального звена (L), элементы инструмента массой (m). Можно выразить массу m_d относящуюся к инерционным параметрам начального, промежуточного и конечного звеньев. Введем обозначение: m_d - приведенная масса начального, промежуточного и конечного звеньев, M – масса подвижных элементов, связанных с движением инструмента, соответственно T_H T_K T_{Π} – кинетическая энергия указанных звеньев, их скорость определяется скоростями первой и второй кинематической пары.

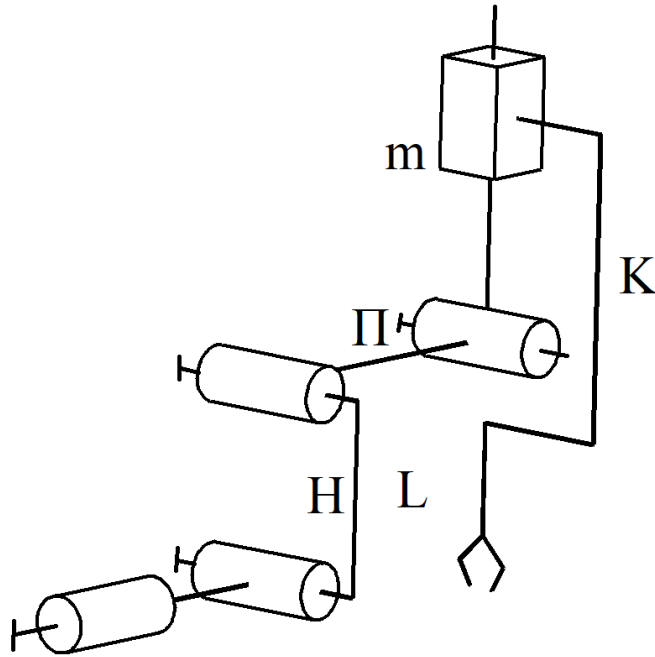


Рис. 4.2

Исходя из изложенного можно записать соотношения:

$$T_{m_d} = \frac{m_d \cdot L^2}{3} \cdot \left(\frac{\left(\frac{dq_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dq_2}{dt}\right)^2}{2} \right)$$

Это выражение для кинетической энергии, где все обозначения пояснены выше. Кинетическая энергия всего механизма равна.

$$T_{m_d} = T_H + T_{\Pi} + T_K$$

$$T = T_H + T_{\Pi} + T_K + T_m$$

Приведем выражение для кинетической энергии отдельных звеньев

$$T_H = J_H \cdot \frac{\left(\frac{dq_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dq_2}{dt}\right)^2}{2}$$

$$T_K = J_K \cdot \frac{\left(\frac{dq_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dq_2}{dt}\right)^2}{2}$$

$$T_{\Pi} = m_{\Pi} \cdot L^2 \cdot \left(\frac{\left(\frac{dq_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dq_2}{dt}\right)^2}{2} \right)$$

$$T_m = m \cdot \left(\frac{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}{2} \right)$$

Момент инерции начального и конечного звеньев равен.

$$J_K = \frac{m_K \cdot L^2}{3}$$

$$J_H = \frac{m_H \cdot L^2}{3}$$

Исходя из изложенного имеем.

$$m_d \cdot L^2 \cdot \left(\frac{\left(\frac{dq_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dq_2}{dt}\right)^2}{2} \right) =$$

$$= \left(m_{\Pi} \cdot L^2 + m_{\Pi} \cdot \frac{L^2}{3} + m_K \cdot \frac{L^2}{3} \right) \cdot \frac{\left(\frac{dq_1}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dq_2}{dt}\right)^2}{2}$$

Приведем выражение для кинетической энергии отдельных звеньев, при этом запишем уравнение для приведенной массы, соответствующей моментам инерции начальному, конечному и промежуточному звеньев.

$$m_d = m_{\Pi} + \frac{m_H}{3} + \frac{m_K}{3}$$

где m_{Π} , m_H , m_K - массы соответствующих звеньев.

Составим уравнения динамики для эквивалентного механизма (Рис. 4.1), соответствующие принципу Даламбера – Лагранжа. Согласно этому подходу,

сума элементарных работ всех активных сил и сил инерции на любом возможном перемещении равна нулю.

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} \cdot \delta x + m_d \cdot \frac{d^2x_d}{dt^2} \cdot \delta x \cdot \frac{\partial x_d}{\partial x} + m_d \cdot \frac{d^2y_d}{dt^2} \cdot \frac{\partial y_d}{\partial x} \cdot \delta x + m_d \cdot \frac{d^2z_d}{dt^2} \cdot \frac{\partial z_d}{\partial x} \cdot \delta x - M_1 \cdot \delta x \cdot \frac{\partial q_1}{\partial x} - M_2 \cdot \delta x \cdot \frac{\partial q_2}{\partial x} - P_3 \cdot \delta x \cdot \frac{\partial q_3}{\partial x} = 0$$

$$m \cdot \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \delta y + m_d \cdot \frac{d^2x_d}{dt^2} \cdot \delta y \cdot \frac{\partial x_d}{\partial y} + m_d \cdot \frac{d^2y_d}{dt^2} \cdot \frac{\partial y_d}{\partial y} \cdot \delta y + m_d \cdot \frac{d^2z_d}{dt^2} \cdot \frac{\partial z_d}{\partial y} \cdot \delta y - M_1 \cdot \delta y \cdot \frac{\partial q_1}{\partial y} - M_2 \cdot \delta y \cdot \frac{\partial q_2}{\partial y} - P_3 \cdot \delta y \cdot \frac{\partial q_3}{\partial y} = 0$$

$$m \cdot \frac{d^2z}{dt^2} \cdot \delta z + m_d \cdot \frac{d^2x_d}{dt^2} \cdot \delta z \cdot \frac{\partial x_d}{\partial z} + m_d \cdot \frac{d^2y_d}{dt^2} \cdot \frac{\partial y_d}{\partial z} \cdot \delta z + m_d \cdot \frac{d^2z_d}{dt^2} \cdot \frac{\partial z_d}{\partial z} \cdot \delta z - M_1 \cdot \delta z \cdot \frac{\partial q_1}{\partial z} - M_2 \cdot \delta z \cdot \frac{\partial q_2}{\partial z} - P_3 \cdot \delta z \cdot \frac{\partial q_3}{\partial z} = 0$$

Здесь M_1, M_2, P_3 – моменты и силы, действующие в приводах, $x, x_d \dots z, z_d$ – координаты соответствующих элементов системы, масса которых m и m_d , q_1, q_2, q_3 – обобщенные координаты, $\delta x, \delta y, \delta z$ – элементарные перемещения по абсолютным координатам.

Учтем кинематические соотношения, обусловленные особенностями механизма, а также ранее рассмотренным выкладкам:

$$x_d = x \cdot \frac{L}{q_3} \quad y_d = y \cdot \frac{L}{q_3} \quad z_d = z \cdot \frac{L}{q_3}$$

Здесь все обозначения объяснены выше. Исходя из приведенных выражений, можно найти кинематические параметры движения массы m_d .

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial q_1} \cdot \frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial x}{\partial q_2} \cdot \frac{dq_2}{dt} + \frac{\partial x}{\partial q_3} \cdot \frac{dq_3}{dt}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{\partial x}{\partial q_1} \cdot \frac{d^2q_1}{dt^2} + \frac{\partial x}{\partial q_2} \cdot \frac{d^2q_2}{dt^2} + \frac{\partial x}{\partial q_3} \cdot \frac{d^2q_3}{dt^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial q_1^2} \cdot \left(\frac{dq_1}{dt}\right)^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial q_1 \cdot \partial q_2} \\ &\quad \cdot \frac{dq_1}{dt} \cdot \frac{dq_2}{dt} + 2 \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial q_1 \cdot \partial q_3} \cdot \frac{dq_1}{dt} \cdot \frac{dq_3}{dt} + 2 \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial q_2 \cdot \partial q_3} \cdot \frac{dq_2}{dt} \cdot \frac{dq_3}{dt} \\ &\quad + \frac{\partial^2 x}{\partial q_2^2} \cdot \left(\frac{dq_2}{dt}\right)^2 + \frac{\partial^2 x}{\partial q_3^2} \cdot \left(\frac{dq_3}{dt}\right)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{\partial y}{\partial q_1} \cdot \frac{d^2q_1}{dt^2} + \frac{\partial y}{\partial q_2} \cdot \frac{d^2q_2}{dt^2} + \frac{\partial y}{\partial q_3} \cdot \frac{d^2q_3}{dt^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial q_1^2} \cdot \left(\frac{dq_1}{dt}\right)^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial q_1 \cdot \partial q_2} \\ &\quad \cdot \frac{dq_1}{dt} \cdot \frac{dq_2}{dt} + 2 \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial q_1 \cdot \partial q_3} \cdot \frac{dq_1}{dt} \cdot \frac{dq_3}{dt} + 2 \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial q_2 \cdot \partial q_3} \cdot \frac{dq_2}{dt} \cdot \frac{dq_3}{dt} \\ &\quad + \frac{\partial^2 y}{\partial q_2^2} \cdot \left(\frac{dq_2}{dt}\right)^2 + \frac{\partial^2 y}{\partial q_3^2} \cdot \left(\frac{dq_3}{dt}\right)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2z}{dt^2} &= \frac{\partial z}{\partial q_1} \cdot \frac{d^2q_1}{dt^2} + \frac{\partial z}{\partial q_2} \cdot \frac{d^2q_2}{dt^2} + \frac{\partial z}{\partial q_3} \cdot \frac{d^2q_3}{dt^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial q_1^2} \cdot \left(\frac{dq_1}{dt}\right)^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial q_1 \cdot \partial q_2} \cdot \frac{dq_1}{dt} \\ &\quad \cdot \frac{dq_2}{dt} + 2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial q_1 \cdot \partial q_3} \cdot \frac{dq_1}{dt} \cdot \frac{dq_3}{dt} + 2 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial q_2 \cdot \partial q_3} \cdot \frac{dq_2}{dt} \cdot \frac{dq_3}{dt} + \frac{\partial^2 z}{\partial q_2^2} \\ &\quad \cdot \left(\frac{dq_2}{dt}\right)^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial q_3^2} \cdot \left(\frac{dq_3}{dt}\right)^2\end{aligned}$$

$$\frac{dx_d}{dt} = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{L}{q_3} - x \cdot \frac{L \cdot \frac{dq_3}{dt}}{q_3^2}$$

$$\frac{d^2x_d}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2} \cdot \frac{L}{q_3} - 2 \cdot \frac{dx}{dt} \cdot \frac{L \cdot \frac{dq_3}{dt}}{q_3^2} + x \cdot \frac{2 \cdot L \cdot \frac{d^2q_3}{dt^2}}{q_3^3}$$

$$\frac{dy_d}{dt} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{L}{q_3} - x \cdot \frac{L \cdot \frac{dq_3}{dt}}{q_3^2}$$

$$\frac{d^2y_d}{dt^2} = \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \frac{L}{q_3} - 2 \cdot \frac{dy}{dt} \cdot \frac{L \cdot \frac{dq_3}{dt}}{q_3^2} + x \cdot \frac{2 \cdot L \cdot \frac{d^2q_3}{dt^2}}{q_3^3}$$

$$\frac{dz_d}{dt} = \frac{dz}{dt} \cdot \frac{L}{q_3} - x \cdot \frac{L \cdot \frac{dq_3}{dt}}{q_3^2}$$

$$\frac{d^2 z_d}{dt^2} = \frac{d^2 z}{dt^2} \cdot \frac{L}{q_3} - 2 \cdot \frac{dz}{dt} \cdot \frac{L \cdot \frac{dq_3}{dt}}{q_3^2} + x \cdot \frac{2 \cdot L \cdot \frac{d^2 q_3}{dt^2}}{q_3^3}$$

Эти соотношения выражают скорость и ускорение звеньев рассматриваемого механизма, входящие в уравнение динамики.

Далее рассмотрим примеры движения данного механизма при наличии различных законов требуемого движения. Пусть необходимо, чтобы законы изменения координат были бы x_t, y_t, z_t .

Примем, что $x_t = 0,1 + 0,01 \sin(\omega t)$, $y_t = 0,1 + 0,01 \cos(\omega t)$, $z_t = 0,1 + 0,01 \sin(\omega t)$, $\omega = 10$ рад/сек. При этом $v_{xt} = 0,01 \omega \cos(\omega t)$, $v_{yt} = -0,01 \omega \sin(\omega t)$, $v_{zt} = 0,01 \omega \cos(\omega t)$, $a_{xt} = -0,01 \omega^2 \sin(\omega t)$, $a_{yt} = -0,01 \omega^2 \cos(\omega t)$, $a_{zt} = -0,01 \omega^2 \sin(\omega t)$.

Параметры механизма следующие $m_d = 0,2$ кг $m = 0,4$ кг.

При определении обобщенных сил принимаем, что реальное ускорение должно быть равно сумме ошибки по положению выходного звена, умноженной на коэффициент K_n , и ошибки по скорости, умноженной на коэффициент K_c :

$$a_x = K_n(x - x_t) + K_c(v_{xt} - v_x),$$

$$a_y = K_n(y - y_t) + K_c(v_{yt} - v_y),$$

$$a_z = K_n(z - z_t) + K_c(v_{zt} - v_z).$$

В данном случае коэффициенты равны: $K_n = 7,2$; $K_c = 0,12$.

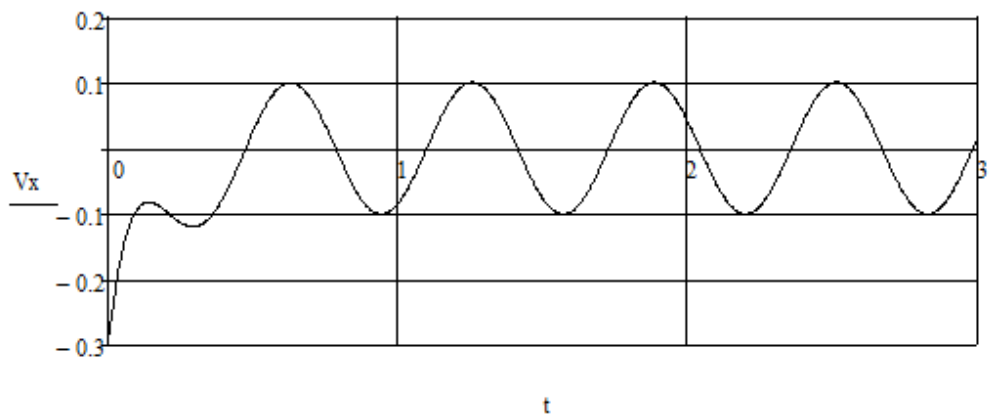
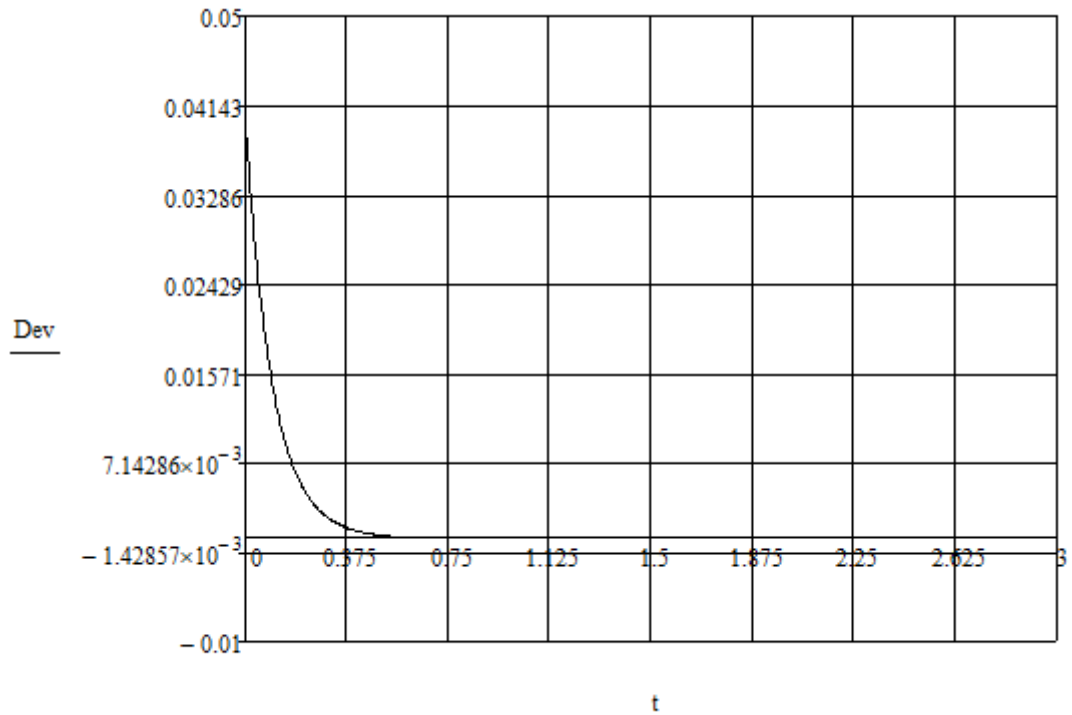
Начальные условия принимаем такие, что скорости равны нулю, а значения координат:

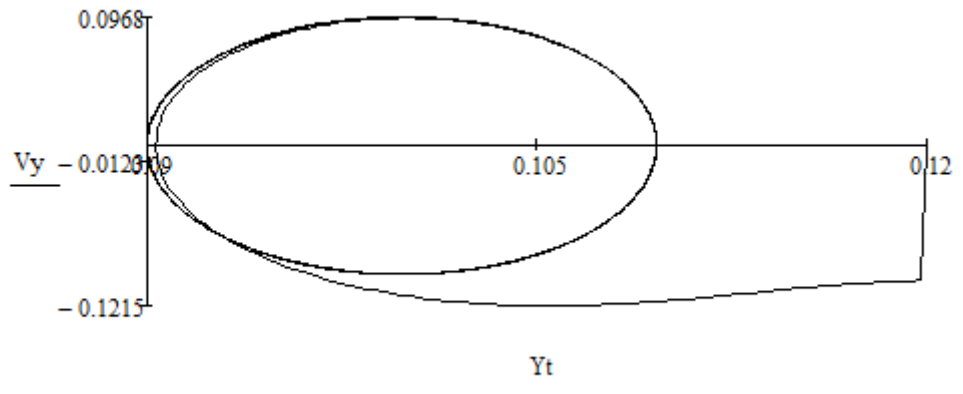
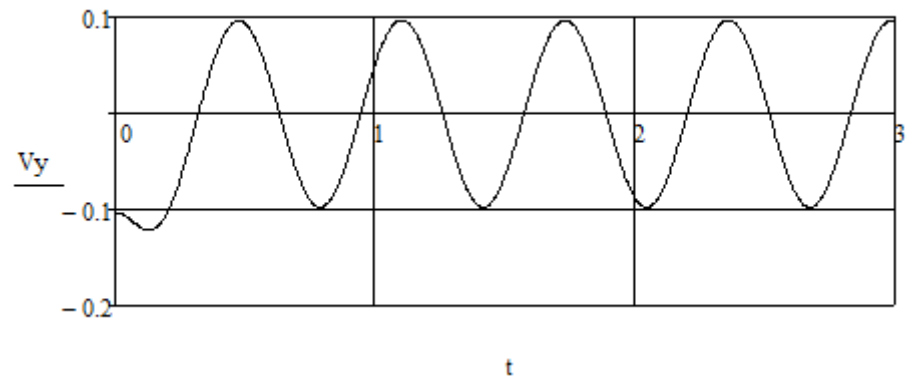
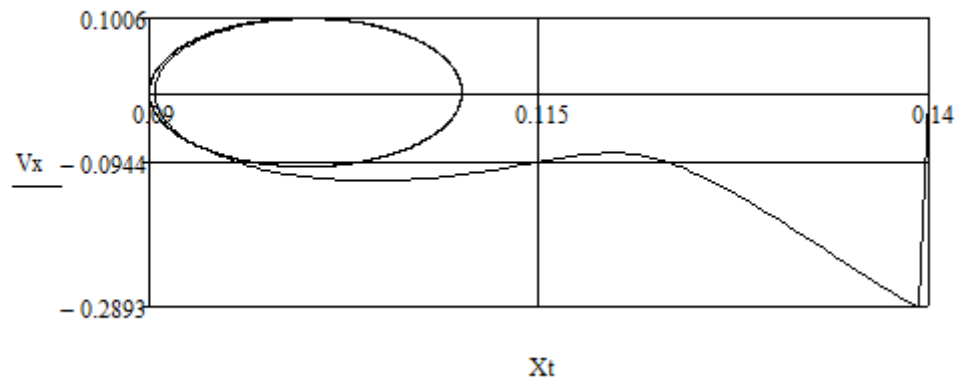
$$x_0 = 0,11 \text{ м}, y_0 = 0,12 \text{ м}, z_0 = 0,15 \text{ м}.$$

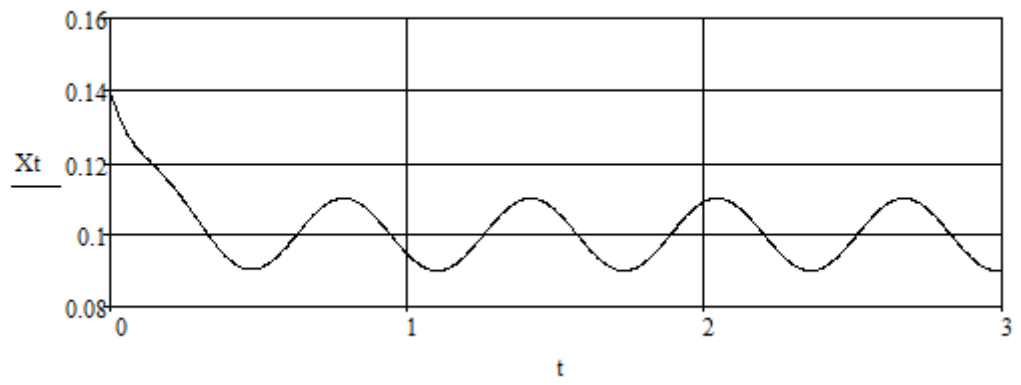
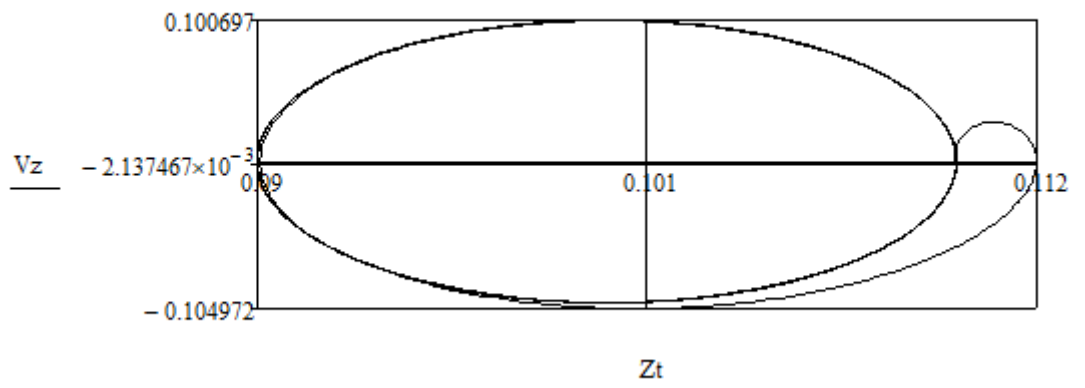
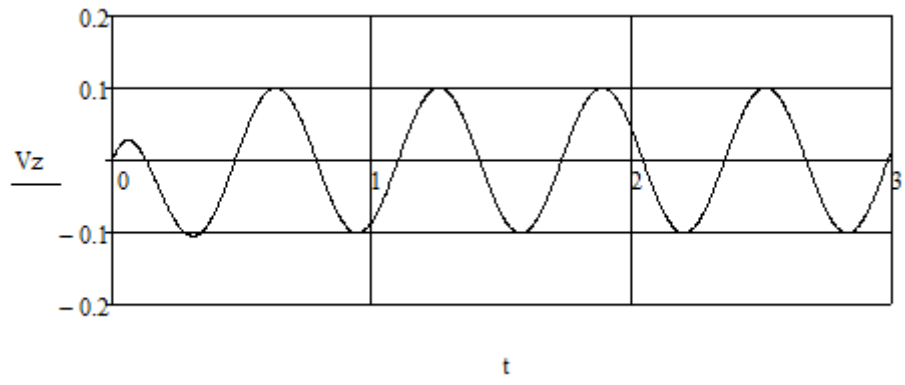
Из приведенных выше уравнений динамики вначале на каждом шаге находим обобщенные силы. Далее на каждом шаге находим реальные ускорения и проводим интегрирование. Результаты работы программы (Рис. 4.3) показывают, что система достаточно эффективно обрабатывает заданный

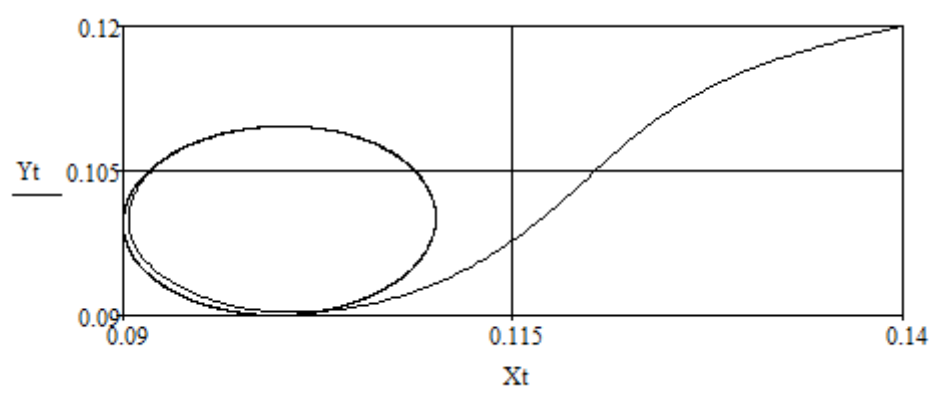
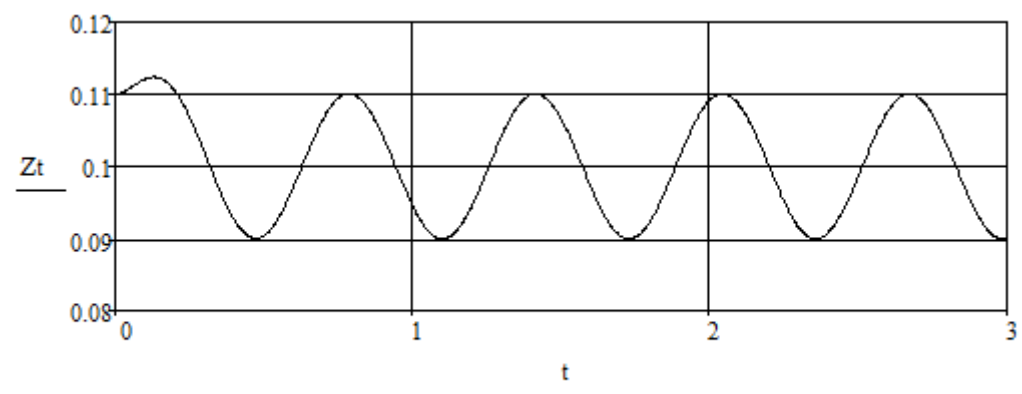
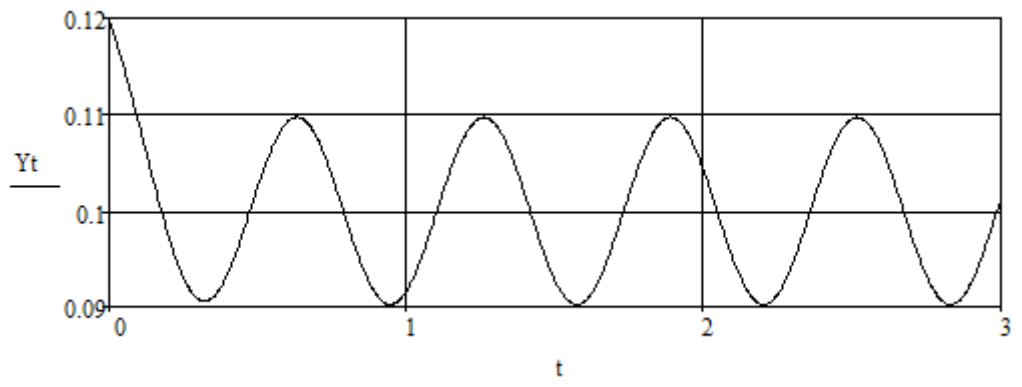
закон движения. На рисунках все обозначения соответствуют примененным выше, Dev означает отклонение.

В случае изменения коэффициентов $K_n=0,12$, $K_c=7,2$ управление происходит не столь эффективно (Рис. 4.4).









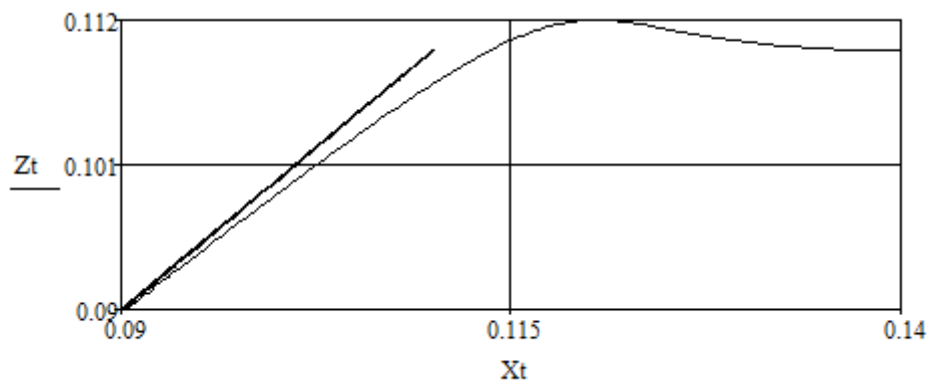
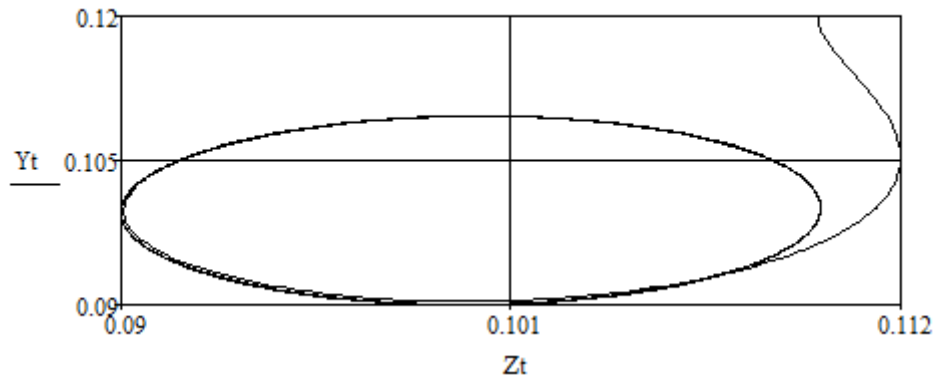
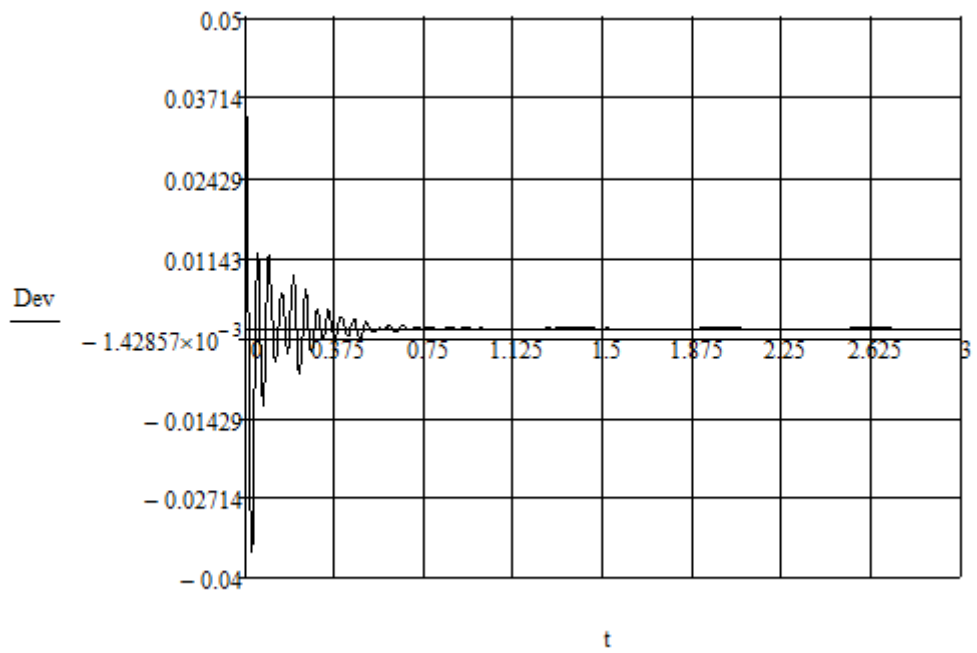
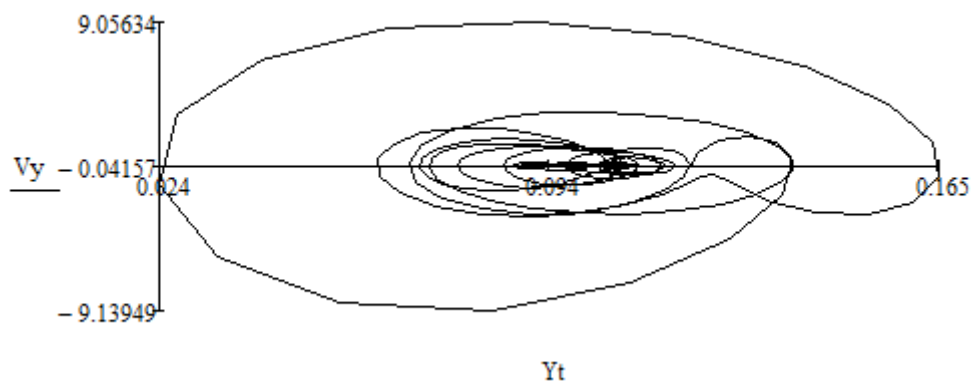
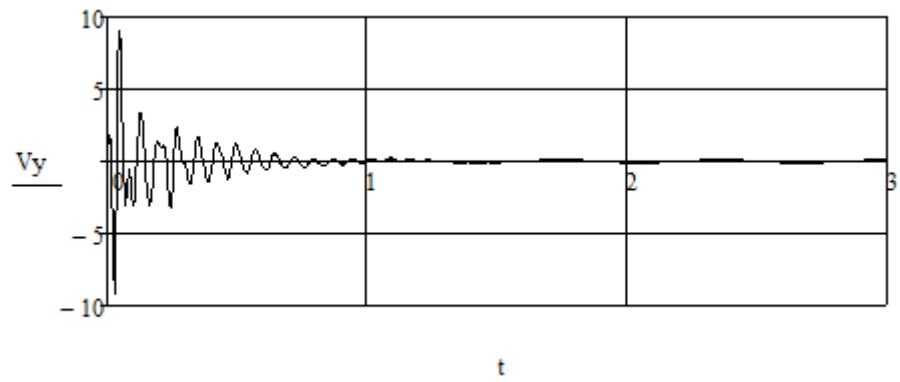
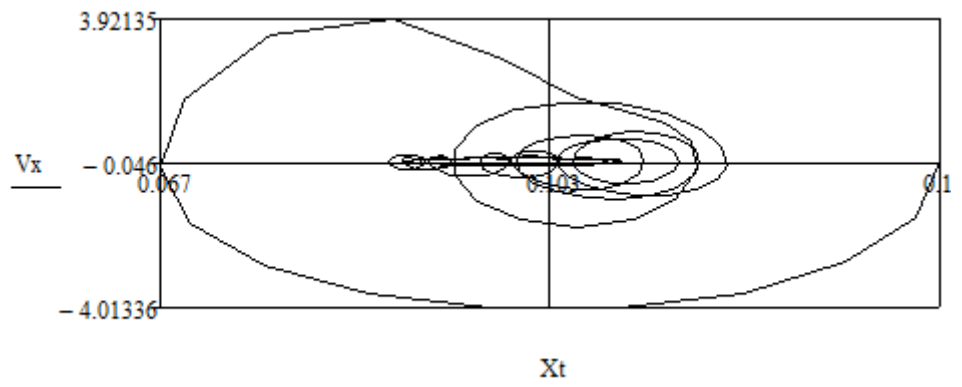
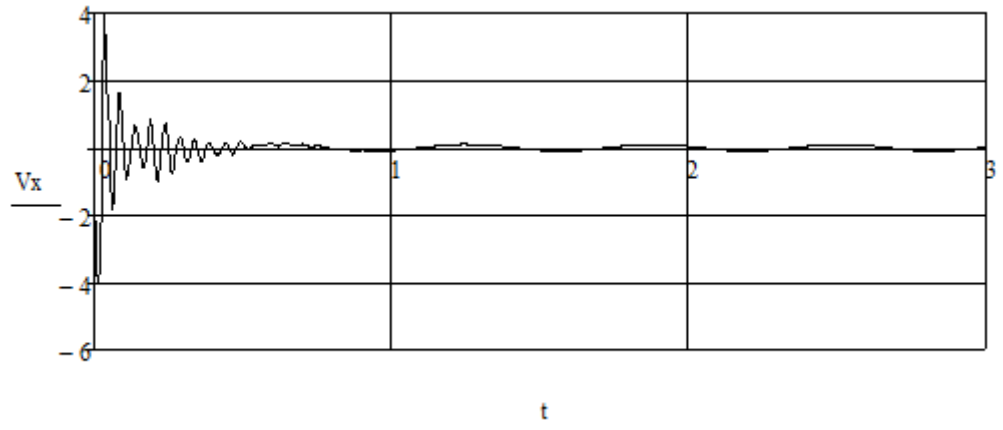
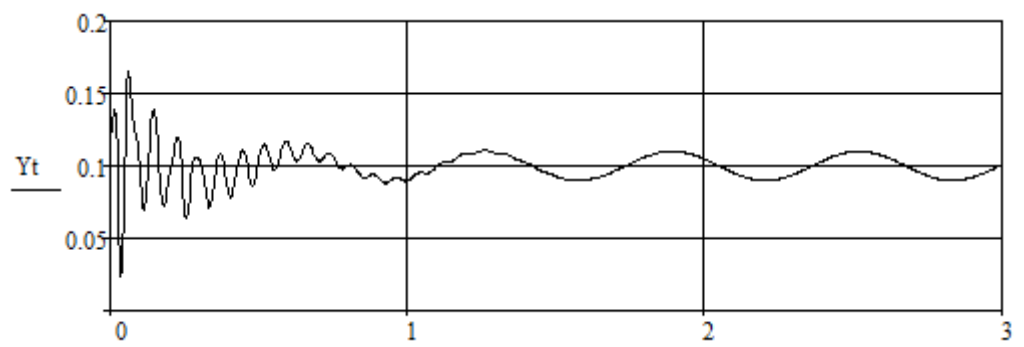
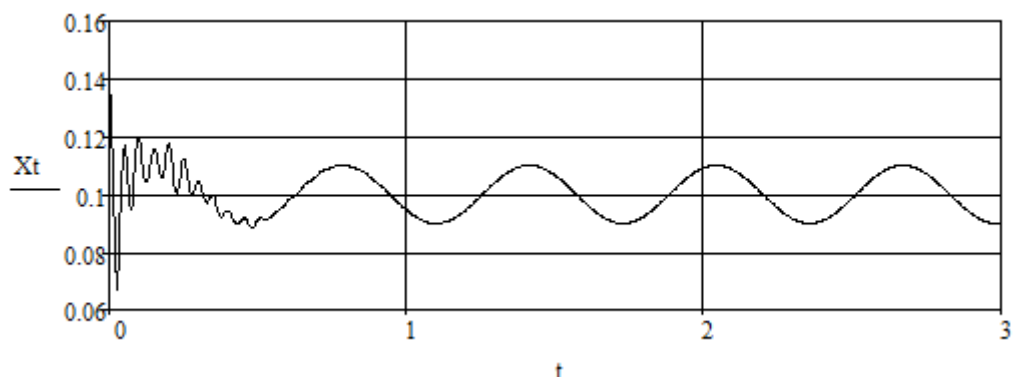
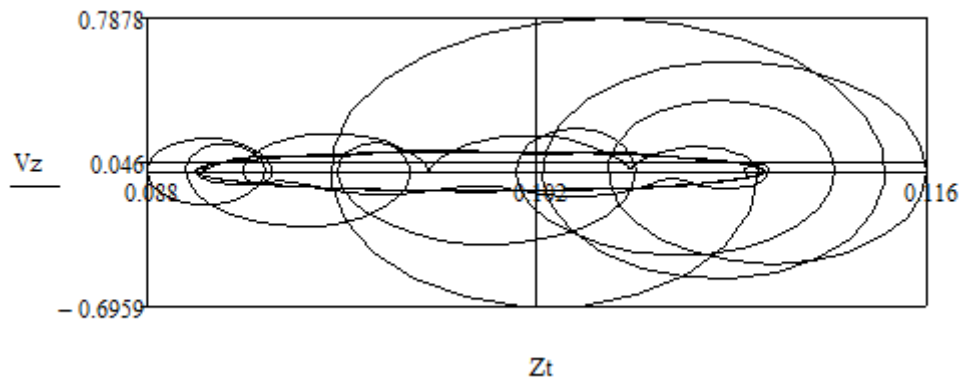
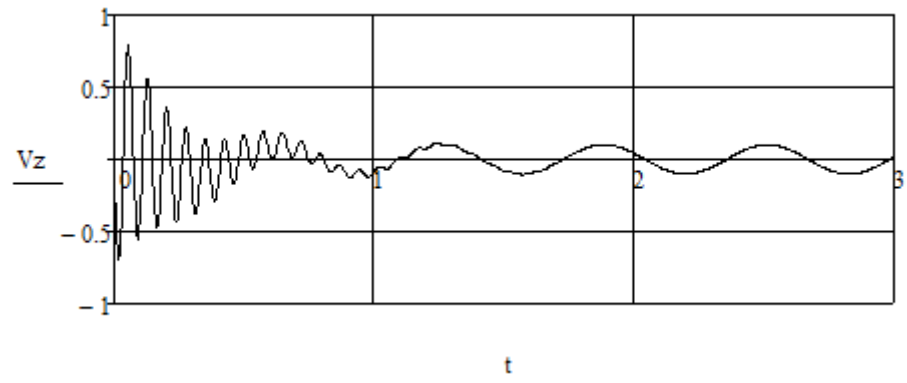


Рис 4.3







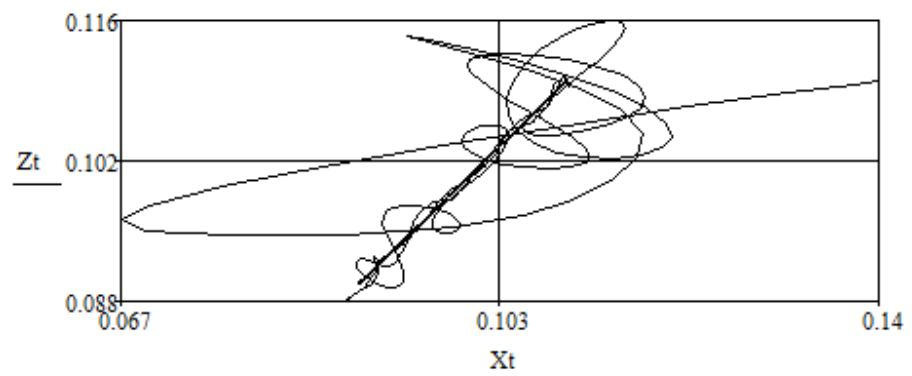
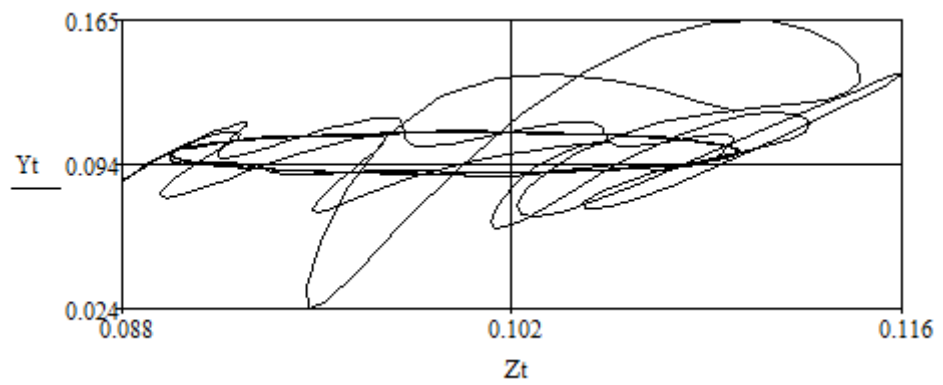
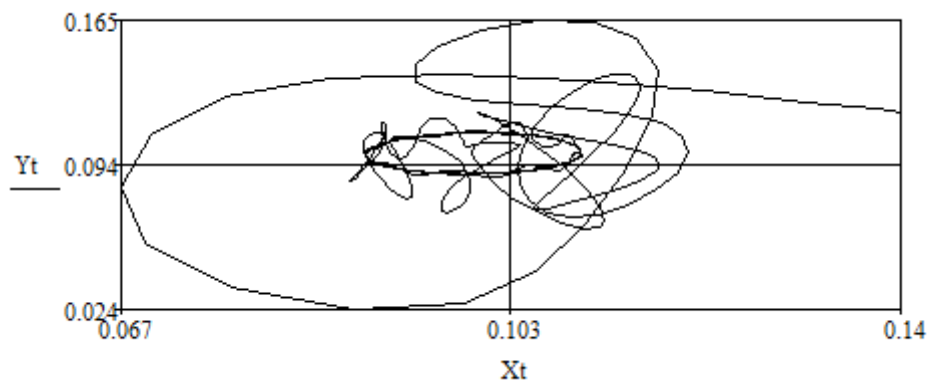
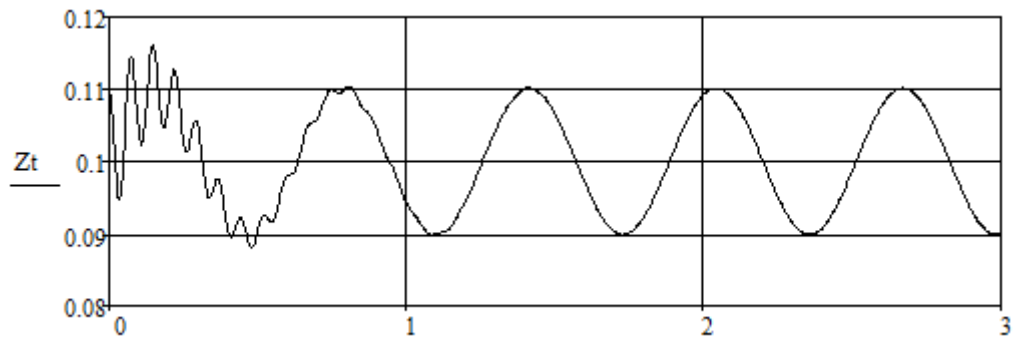


Рис 4.4

Таким образом проведем динамический анализ механизма, обеспечивающего постоянство точки ввода выходного звена. Исследованная модель включала два тела и две степени свободы.

4.2 Разработка действующей модели механизма обеспечивающего постоянство точки ввода выходного звена в рабочую зону.

В данном параграфе представим конструкцию и некоторые параметры механизма обеспечивающего постоянство точки ввода выходного звена в рабочую зону. Данный механизм представляет собой один из вариантов тех устройств, которые получены на основе схемы, содержащей вращательный двигатель, установленный на основании, а также три последовательно расположенных вращательных кинематических пары, оси которых перпендикулярны оси двигателя, установленного на основании.

Разработанный механизм содержит в себе две ременные передачи, и обеспечивает равенство углов поворота звена, сопряженного со вторым двигателем вращательного движения, ось которого пересекает под прямым углом ось первого двигателя (Рис. 4.5), и выходного звена.

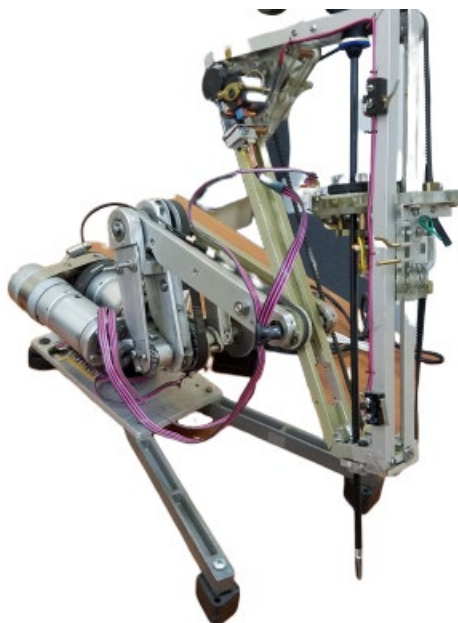


Рис. 4.5

Механизм размещен на основании (Рис. 4.5), первый и второй вращательные двигатели расположены с параллельными осями, на выходном звене размещен рабочий орган.

Более подробно представим расположение двух двигателей, которые обеспечивают вращение выходного звена относительно осей x и y (Рис 4.6), эти двигатели расположены горизонтально с осями, параллельными друг другу. Один из двигателей поворачивает плоскость, в которой расположены начальное, промежуточное и конечное звенья. Второй двигатель изменяет конфигурацию расположения этих звеньев. Соответственно на выходе этого двигателя должна быть расположена коническая передача. На рисунке также представлена конструкция начального звена, которое с помощью подшипников сопряжено с основанием и последующим звеном.

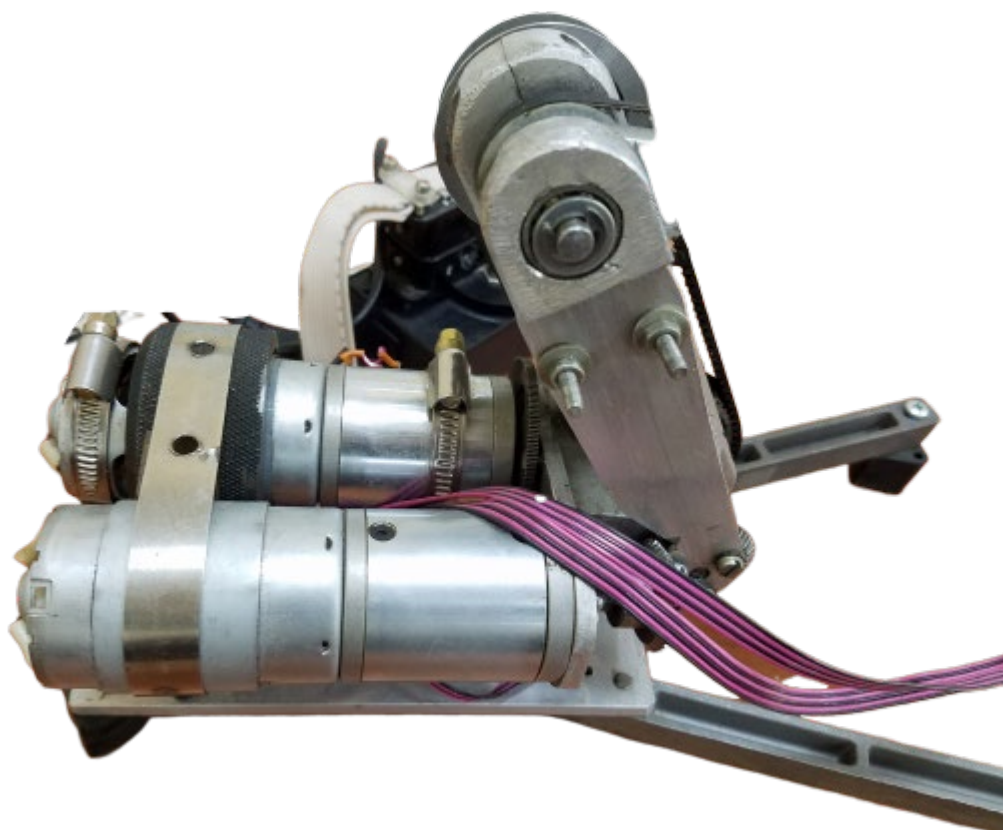


Рис 4.6

В кинематической цепи имеют место две ременные передачи. Одна из этих ременных передач сопрягает входное звено первого двигателя вращательного перемещения с промежуточным звеном (Рис. 4.7, Рис. 4.8)

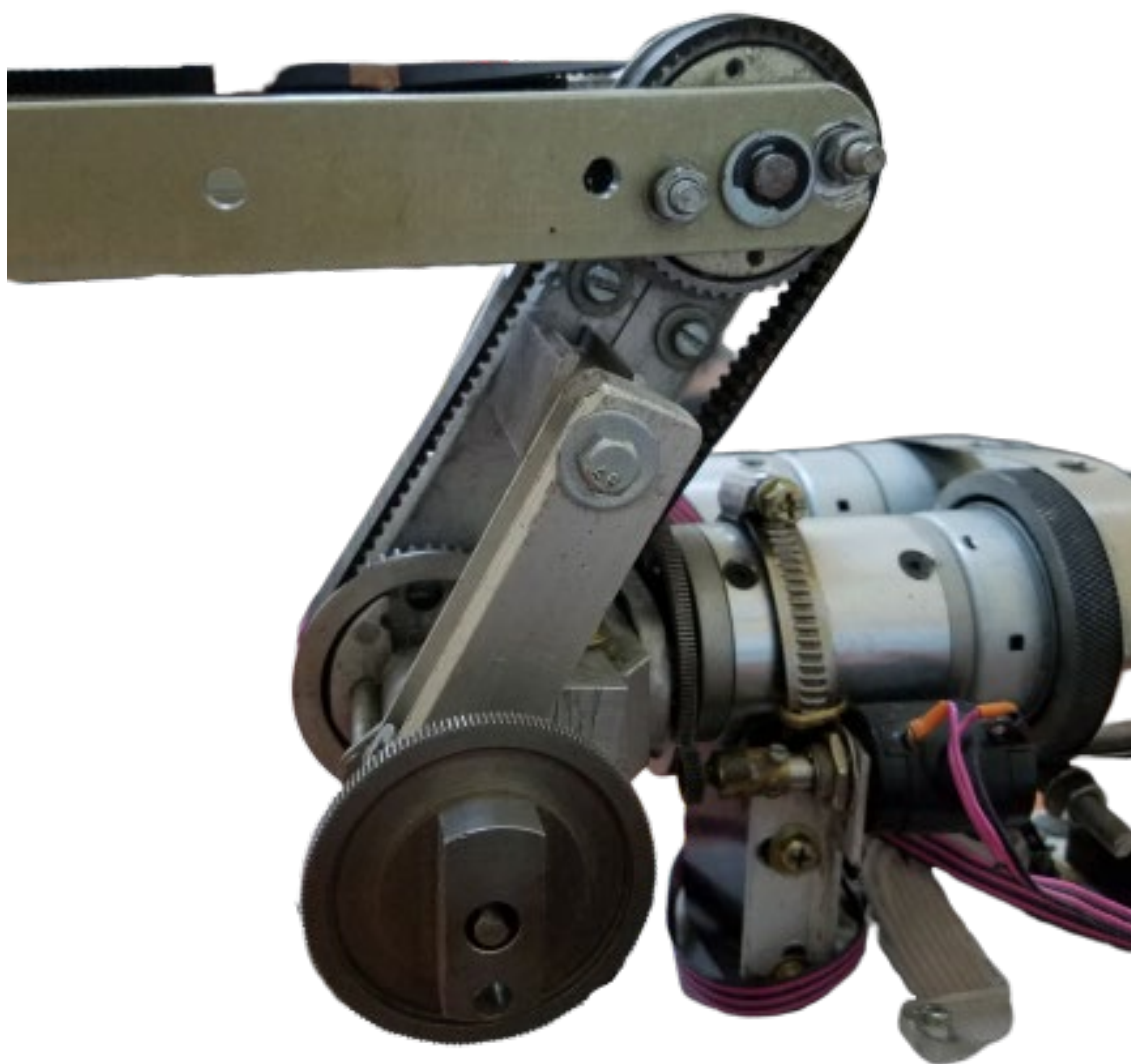


Рис. 4.7

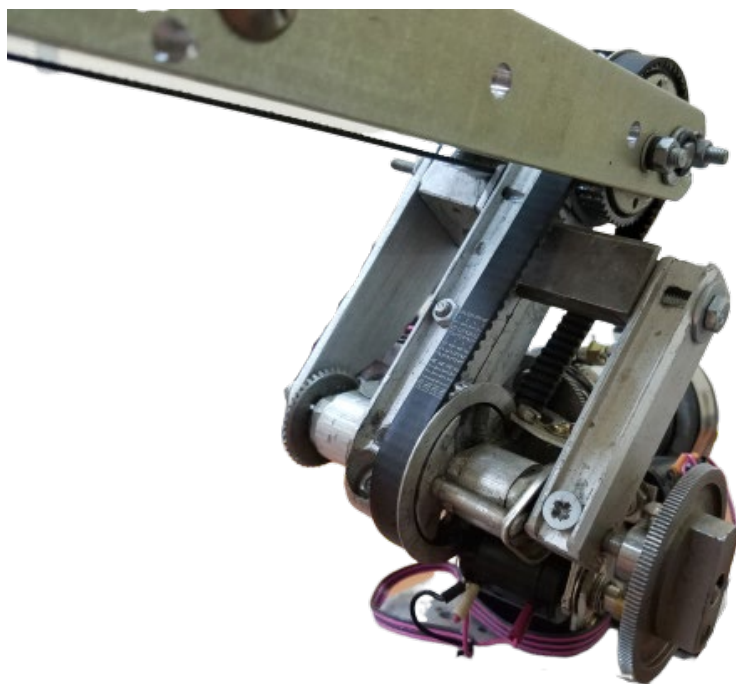


Рис. 4.8

Вторая ременная передача сопрягает начальное звено механизма и выходное звено механизма (Рис. 4.9). С помощью указанных ременных передач обеспечивается равенство углов поворота начального и выходного звеньев.

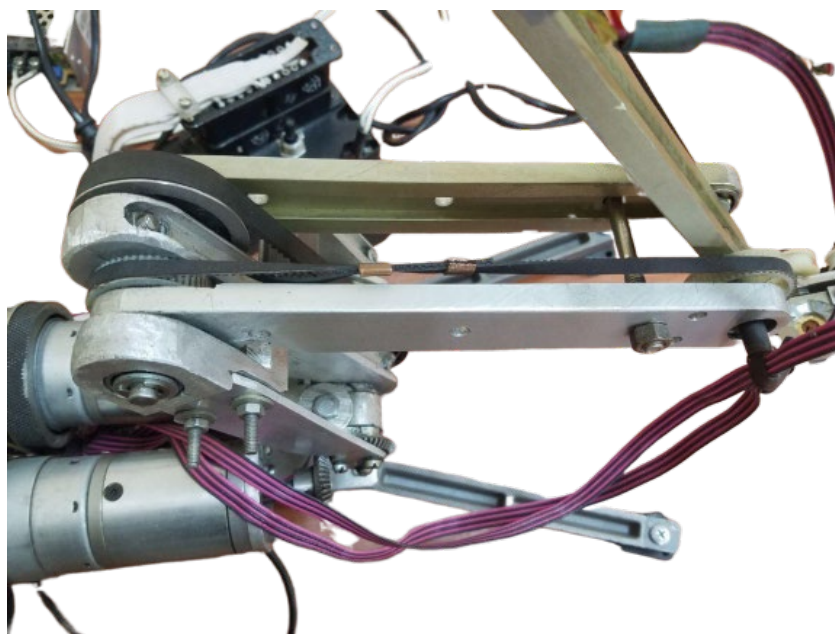


Рис. 4.9

Вращательное движение инструмента, а также поступательное его движение обеспечиваются двигателями вращательного и поступательного перемещения, расположенными на выходном звене (Рис. 4.10)

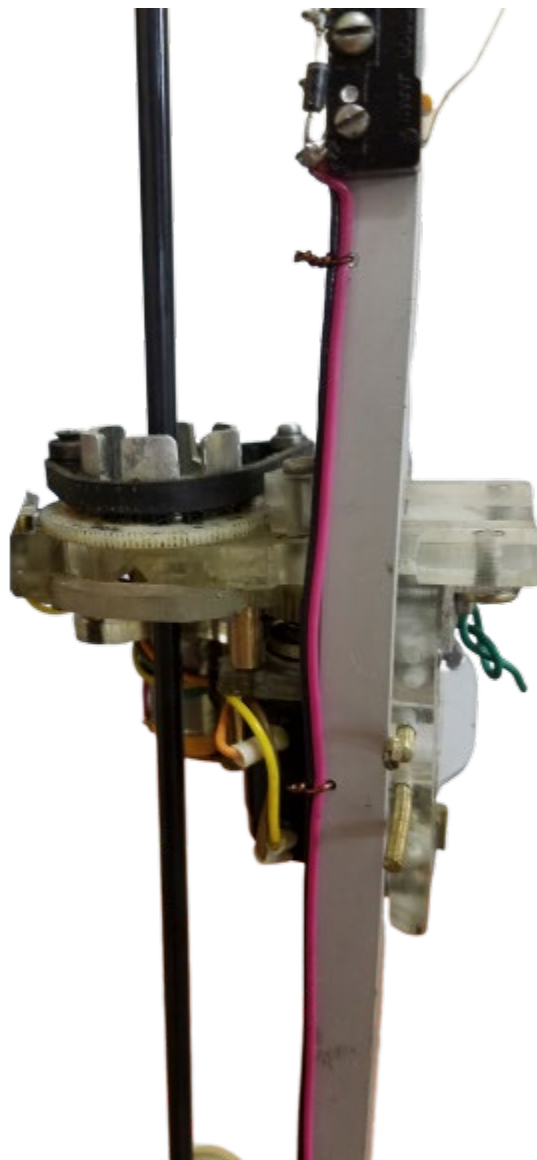


Рис. 4.10

В результате экспериментального исследования установлено, что рабочая зона имеет вид (Рис. 4.11) пространственной фигуры, ограниченной конической поверхностью (угол при основании конуса равен 30°), а также двумя секторами сфер (радиус меньшей сферы равен 0,05 м, радиус большей

сферы равен 0,12 м). Также представлен разрез рабочей зоны (Рис. 4.12) плоскостью, проходящей через ось инструмента.

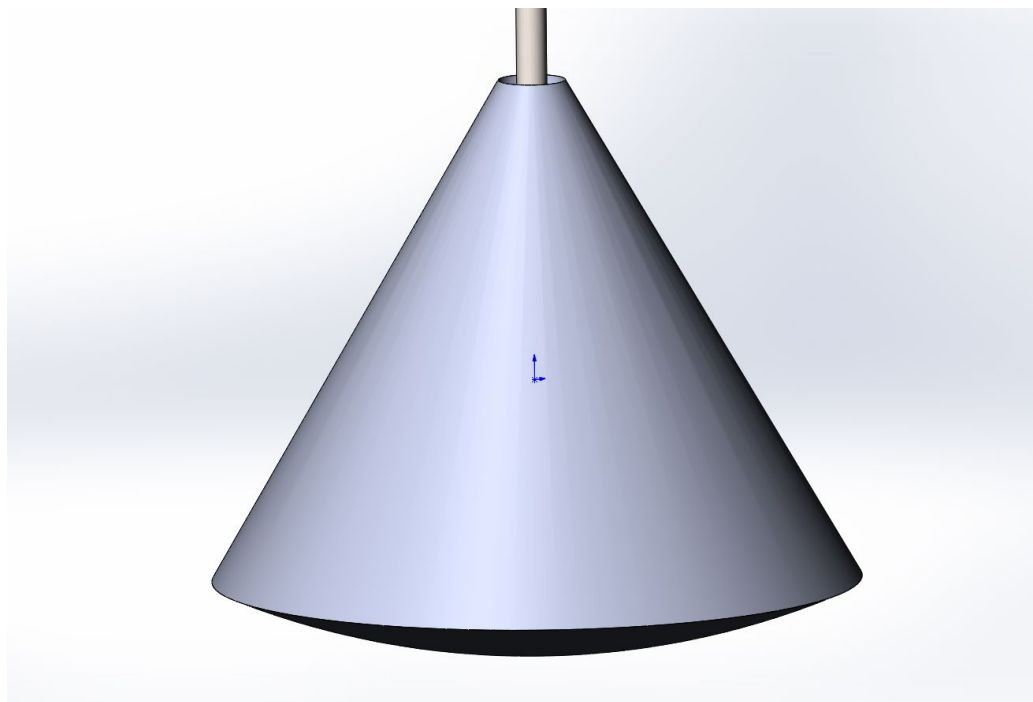


Рис. 4.11

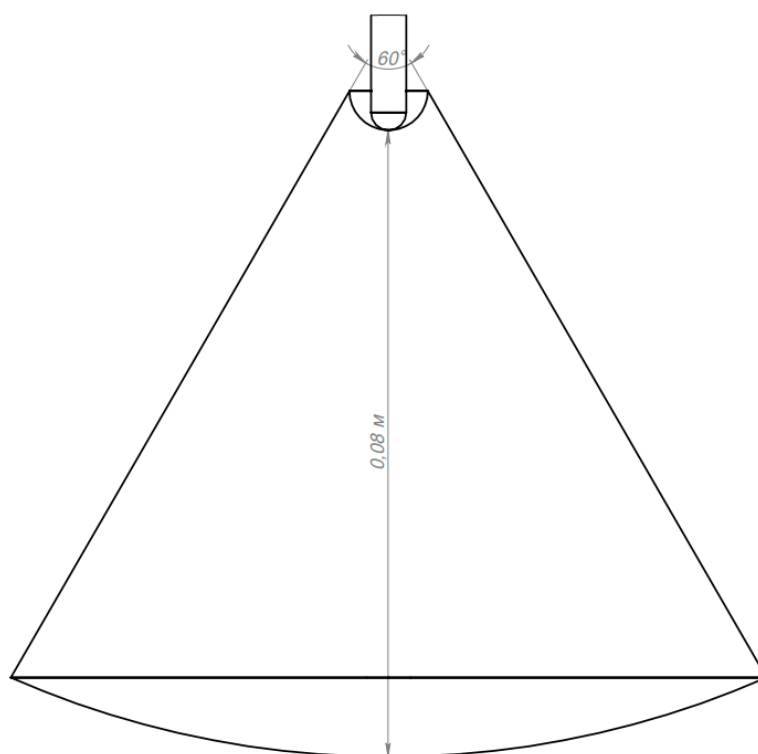


Рис. 4.12

Для управления механизмом разработан соответствующее задающее устройство (джойстик), изготовленный механизм имеет четыре степени свободы. Экспериментально установленная повторяемость равна $\pm 0,04$ мм.

Таким образом, в данном параграфе представлена действующая модель разрабатываемого механизма.

Заключение.

В данной работе решена научная задача синтеза механизмов, обеспечивающих постоянство точки ввода инструмента (рабочего органа) в рабочую зону, а также разработаны методики кинематического динамического анализа, создана действующая модель. Основные результаты работы:

1) Синтезированы два механизма, обеспечивающие постоянство точки ввода инструмента в рабочую зону, один из механизмов содержит конические передачи, другой ременные передачи.

2) Разработана методика кинематического анализа и представлено решение задач о положениях, скоростях и ускорениях, основанное на дифференцировании уравнений связи и на векторном вычислении.

3) Разработана методика динамического анализа, основанная на принципе Даламбера - Лагранжа. Разработаны программы динамического анализа и решены конкретные примеры.

4) Разработана действующая модель одного из механизма, содержащая ременные передачи. Определены характеристики данной модели, в частности рабочая зона и точность.

По работе можно сделать следующие выводы:

1) Механизм, обеспечивающий постоянство точки ввода инструмента в рабочую зону и включающий в себя три последовательно расположенные кинематические пары с параллельными осями, может быть построен таким образом, что вращение в упомянутых трех вращательных

парах согласовано. Указанное согласование может быть обеспечено с помощью шарнирных параллелограммов, конических передач и ременных передач.

2) При кинематическом анализе механизмов, обеспечивающих постоянство точки ввода инструмента в рабочую зону, целесообразно использовать дифференцирование неявных функций, выражающих взаимосвязь между абсолютными и обобщёнными координатами. Особые положения соответствуют нулевому значению третьей обобщённой координаты, а также значениям $\frac{\pi}{2}$ первой и второй обобщённых координат.

3) При динамическом анализе целесообразно представить механизм, обеспечивающий постоянство точки ввода инструмента в рабочую зону, в виде двухмассовой системы с тремя степенями свободы и использовать принцип Даламбера - Лагранжа. Управление, учитывающее отклонения по положению и скорости выходного звена, обеспечивает заданную динамическую точность движения механизма.

4) При разработке действующей модели механизма, обеспечивающего постоянство точки ввода инструмента в рабочую зону, наиболее простая конструкция обеспечивается при использовании ременных передач. Рабочая зона имеет вид пространственной фигуры, ограниченной конической поверхностью (угол при основании конуса равен 20°), а также двумя секторами сфер (радиус меньшей сферы равен 0,05 м радиус большей сферы равен 0,12 м).

Список использованной литературы.

1. Антонов А.В., Чернецов Р.А., Ульянов Е.Е., Иванов К.А. Использование метода хорд для анализа рабочих зон механизма параллельной структуры. //XXXI Международная инновационная конференция молодых ученых и студентов по проблемам машиноведения. 2020. С. 437-440.
2. Ализаде Р.И. Функциональный синтез пространственных трехстепенных манипуляторов. / Проблемы машиностроения и надежности машин. 1994. № 5. С.129-133.
3. Аракелян В., Брио С., Глазунов В.А. Исследование особых положений манипулятора с параллельной структурой «ПАМИНСА». // Проблемы машиностроения и надежности машин. Машиноведение. 2006. № 1. С.80-88.
4. Арзуманян К.С., Колискор А.Ш. Синтез структур ℓ -координатных систем для исследования и диагностирования промышленных роботов / Испытания, контроль и диагностирование гибких производственных систем. М.: Наука. 1988. С.70-81.
5. Артоболевский И.И. Теория механизмов и машин / Учебник для вузов // 4 изд., перераб. и доп. М.: Наука. 1988. 640 с.
6. Брио С., Аракелян В., Глазунов В.А. Условия передачи движения в плоских манипуляторах параллельной структуры. // Машиностроение и инженерное образование. 2010. № 3 (24). С. 2- 13.
7. Бруевич Н.Г. Точность механизмов. М.: Гостехиздат. 1946. 352 с.
8. Велиев Е.И., Ганиев Р.Ф., Глазунов В.А., Филиппов Г.С., Терехова А.Н. Разработка и решение задачи о положениях механизма параллельно-последовательной структуры для хирургических операций как альтернативы роботу Da Vinci //Проблемы машиностроения и надежности машин. 2019. № 4. С. 3-13.

9. Велиев Е.И., Ганиев Р.Ф., Глазунов В.А., Филиппов Г.С. Параллельные и последовательные структуры манипуляторов в роботехирургии. //ДАН. 2019. № 2. С. 166-170.
10. Велиев Е.И., Ганиев Р.Ф., Глазунов В.А., Скворцов С.А., Чернецов Р.А. Разработка и исследование механизмов с постоянной точкой ввода инструмента в рабочую область, предназначенных для хирургических операций и исследования свойств плазмы. // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2020. №6. С. 3-14.
11. Воробьев Е.И. Кинематический анализ пространственных исполнительных механизмов манипуляторов методом матриц/ Механика машин. М.: Наука. 1971. вып. 27/28. С. 30-37.
12. Воробьев Е.И., Диментберг Ф.М. Теория пространственных шарнирных механизмов. М.: Наука. 1991. 262 с.
13. Вукобратович М., Стокич Д. Управление манипуляционными роботами: теория и приложение. М.: Наука. 1985. 384 с.
14. Ганиев Р.Ф., Глазунов В.А., Филиппов Г.С. Актуальные проблемы машиноведения и пути их решения. Волновые и аддитивные технологии, станкостроение, роботехирургия // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2018. № 5. С. 16–25.
15. Гаврюшин С.С., Глазунов В.А., Духов А.В., Тирси К.А. Возможности применения механизмов параллельной структуры в медицине. // Медицина и высокие технологии. 2014. № 4. С. 61-65.
16. Ганиев Р.Ф. Проблемы механики машин и технологий. Перспективы развития Института машиноведения им. А.А. Благонравова РАН. Часть 1 //Проблемы машиностроения и надежности машин. 2010. №1. С. 3-20.
17. Ганиев Р.Ф. Проблемы механики машин и технологий. Перспективы развития Института машиноведения им. А.А. Благонравова РАН. Часть II // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2010. № 3. С. 3-17.

18. Ганиев Р.Ф., Глазунов В.А., Филиппов Г.С. Актуальные проблемы машиноведения и пути их решения. Волновые и аддитивные технологии, станкостроение, роботехника // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2018. № 5. С. 16–25.
19. Ганиев Р. Ф. Кононенко В. О. Колебания твердых тел. М.: Главная редакция физико-математической литературы. 1976. 432 с.
20. Ганиев Р.Ф. Проблемы механики машин и технологий. Перспективы развития Института машиноведения им. А.А. Благонравова РАН. Часть II // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2010. № 3. С. 3-17.
21. Глазунов В.А., Механизмы параллельной структуры и их применение: робототехнические, хирургические, медицинские, обучающие системы. // М.- Ижевск: Институт компьютерных исследований. 2018. 1036 с.
22. Ганиев Р.Ф., Глазунов В.А. Манипуляционные механизмы параллельной структуры и их приложения в современной технике. //ДАН. 2014. Т.459. № 4. С.1-4.
23. Глазунов В.А., Аракелян В., Брио С., Рашоян Г.В. Скоростные и силовые критерии близости к сингулярностям манипуляторов параллельной структуры. // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2012. № 3. С. 10-17.
24. Глазунов В.А., Диментберг Ф.М. Об особом положении пространственного пятизвенника, образованного из двух механизмов Беннета/ Машиноведение. 1984. № 5. С. 50-54.
25. Глазунов В.А., Духов А.В. Информатизация разработки механизмов роботов параллельной структуры для медицинских применений. // Качество. Инновации. Образование. 2015. Т. II. № 5. С. 52-62.
26. Глазунов В.А., Колискор А.Ш., Крайнев А.Ф. Пространственные механизмы параллельной структуры. М.: 1991. 95 с. ISBN 5-02-006759-8.
27. Глазунов В.А., Гаврилина Л.В., Духов А.В., Терехова А.Н. Информационный аспект сотрудничества Института машиноведения им. А.А.

Благонравова РАН с Национальным Центром Научных Исследований (Франция) и перспективы развития медицинской робототехники. // Информатизация и связь. 2013. № 4. С. 39-42.

28. Глазунов В.А., Духов А.В. Информатизация разработки механизмов роботов параллельной структуры для медицинских применений. // Качество. Инновации. Образование. 2015. Т. II. № 5. С. 52-62.

29. Глазунов В.А., Духов А.В., Шептунов С.А., Скворцов С.А., Алешин А.К., Рашоян Г.В., Шалюхин К.А. Левин С.В. Манипуляционные механизмы параллельной структуры и некоторые их применения в медицине. // Качество. Инновации. Образование. «Роботические технологии в медицине» 2016. № S2. С. 84-88.

30. Глазунов В.А., Горобцов А.С., Орлов И.А. Медицинские робототехнические системы. // Медицина и высокие технологии. 2016. №3. С. 35-39.

31. Горобцов А.С., Андреев А.Е., Тарасов П.С., Скориков А.В., Карцов С.К. Синтез устойчивых квазистатических режимов шагания антропоморфного робота. // Известия Волгоградского государственного технического университета. 2016. № 6 (185). С 75-76.

32. Давиташвили Н.С. Динамическое исследование сферических пятизвенных механизмов с учётом упругости звеньев/ Тр. Ин-та прикл. математики. Тбилиси: Изд. ТГУ. 1988. т.29. С.149-195.

33. Джолдасбеков У.А. Графо-аналитические методы анализа и синтеза механизмов высоких классов. Алма-Ата: Наука. 1983. 256с.

34. Диментберг Ф.М. Движение твёрдого тела, осуществляемое действием на его точки тяг-толкателей/ Машиноведение. 1988. № 5. С. 63-69.

35. Диментберг Ф.М. Теория пространственных шарнирных механизмов. М.: Наука. 1982. 336 с.

36. Динамика машин и управление машинами: Справочник/ Асташев В.К., Бабицкий В.И., Вульфсон И.П. и др. Под ред. Крейнина Г.В. М.: Машиностроение. 1988. 240 с.

37. Ивашов Е.Н., Курчанова Н.В., Токарев И.В. Исследование динамических параметров ℓ -координатных манипуляторов. / МИЭМ М. 1989. 14 с. Рук.деп. в ВНИИТЭМР 25.09.89.
38. Каляев И.А., Гайдук А.Р., Капустян С.Г. Модели и алгоритмы коллективного управления в группах роботов. М.: Физматлит. 2009. 280 с.
39. Кинематика, динамика и точность механизмов: Справочник / Под. ред. Г.В. Крейнина. М.: Машиностроение. 1984. 224 с.
40. Кобринский А.А. О механических свойствах манипуляционных систем. / Докл. АН СССР. 1978. т.241. № 4. С.777-780.
41. Кобринский А.А., Кобринский А.Е. Манипуляционные системы роботов: Основы устройства, элементы теории / М.: Наука. 1985. 344 с.
42. Колискор А.Ш. Разработка и исследование промышленных роботов на основе ℓ -координат/ Станки и инструмент. 1982. № 12. С. 21-24.
43. Колискор А.Ш., Правоторова Е.А. Исследование точности движения схвата промышленного робота в пространстве / Машиноведение. 1989. № 1. С. 56-63.
44. Коловский М.З., Слоущ А.В. Основы динамики промышленных роботов. М.: Наука. 1988. 240 с.
45. Конструирование машин, т. I. / Под общей редакцией К.В. Фролова. М.: Машиностроение. 1994. 530 с.
46. Корендясев А.И., Саламандра Б.Л., Тывес Л.И. и др. Манипуляционные системы роботов // Под ред. А.И. Корендясева. М.: Машиностроение. 1989. 472 с.
47. Краснопольский В.А. Котельников М.В., Филиппов Г.С. Физические, математические и числовые модели пристеночной плазмы. Ом. - Ижевск: Институт Компьютерных исследований. 2018. 280. с.
48. Краснопольский В.И., Попов А.А., Мананникова Т.Н., Федоров А.А., Слободянюк В.А., Коваль А.А., Мироненко К.В. Робот-ассистированная хирургия в онкогинекологии. // Онкогинекология. 2014. № 3. 23. с.

49. Крайнев А.Ф. Идеология конструирования. М.: Машиностроение. 2003. 384 с.
50. Крайнев А.Ф. Механизмы машин. Функция, структура, действие. М.: Издательский дом «Спектр» 2016. 176. с.
51. Крайнев А.Ф. Механика от греческого *mechanice (techne)* – искусство построения машин. Фундаментальный словарь. М.: Машиностроение. 2000. 904 с.
52. Крайнев А.Ф., Глазунов В.А., Нагорных В.И. Разработка механизмов параллельной структуры для малых перемещений с упругими изгибными кинематическими парами. / Проблемы машиностроения и надежности машин. Машиноведение. 1992. № 4. С. 79-86.
53. Крейнин Г.В., Акопян А.М., Лунев В.В. К оценке влияния инерционных свойств ведущих звеньев на динамику платформенного механизма / Машиностроение. 1989. № 5. С.51-55.
54. Крутько П.Д. Обратные задачи динамики управляемых систем. Нелинейные модели / М.: Наука. Гл. ред. Физ.-мат. Лит. 1988. 328 с.
55. Лебедев П.А. Кинематика пространственных механизмов. - М., Л.: Машиностроение, 280 с.
56. Левитский Н.И. Теория механизмов и машин. Учеб. пособие для вузов. // 2-е изд., перераб. и доп. М.: Наука. 1990. 592 с.
57. Медведев В.С., Лесков А.Г., Ющенко А.С. Системы управления манипуляционных роботов. - М.: Наука. 1978. 416 с.
58. Механика промышленных роботов: Учебное пособие для втузов/ Под ред. К.В. Фролова, Е.И. Воробьева, кн. 1: Кинематика и динамика/ Е.И. Воробьев, С.А. Попов, Г.И. Шевелева. – М.: Высшая школа.1988. 304 с.
59. Мудров П. Г. Пространственные механизмы с вращательными парами. Казань, Казанский сельскохозяйственный институт им М. Горького. 1976. 265 с.

60. Овакимов А.Г. Об особых положениях одноконтурных пространственных механизмов с несколькими степенями свободы/ Машиноведение. 1989. № 4. С. 11-18.
61. Павлов Б.И. Алгоритмизация решения задач кинематики пространственных механизмов. / Исследование динамических систем на ЭВМ. – М.: Наука. 1982. С.99-110.
62. Пейсах Э.Е. Критерии передачи движения для рычажных механизмов/ Машиноведение. 1986. № 1. С.45-51.
63. Пол Р. Моделирование, планирование траекторий и управление движением робота-манипулятора. – М.: Наука. 1976. 104 с.
64. Саркисян Ю.Л. Аппроксимационный синтез механизмов, М.: Наука. 1982. 304 с.
65. Саркисян Ю.Л., Парикян Т.Ф. Принципы построения пространственных поступательно-направляющих механизмов/ Машиноведение. 1988. №4. С.12-20.
66. Светлицкий В.А., Нарайкин О.С. Упругие элементы машин. М.: Машиностроение. 1984. 264 с.
67. Смелягин А.И. Динамический анализ трехподвижного манипулятора. // Наука. Техника. Технологии. (Политехнический вестник). 2019. №1. С. 23-30.
68. Соболев И.М., Статников Р.Б. Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями. М.: Наука. 1981. 110 с.
69. Сугимото К. Анализ кинематики и динамики манипуляторов с параллельным расположением приводов методами моторной алгебры / Тр.Амер. о-ва инж.-механ. Конструирование и технология машиностроения. 1988. №1. С.279-286.
70. Теория механизмов и механика машин: учеб. для втузов. К. В. Фролов, С. А. Попов, А. К Мусатов и др; под ред. К. В. Фролова, 2-е изд. перераб. и доп. М.: Высшая шк. 1998. 496 с.

71. Филиппов Г.С., Глазунов В.А. перспективы применения механизмов параллельной структуры в аддитивных технологиях изготовления центрального тела сопла турбореактивного двигателя, высокопрецизионных хирургических манипуляциях, зондовой диагностики плазменных потоков. //Проблемы машиностроения и автоматизации. 2018. №3. С. 121-128.
72. Филиппов Г.С., Терехова А.Н., Кассин Д.В., Ульянов Е.Е., Чернецов Р.А. Задача о положениях сферического механизма параллельной структуры с тремя степенями свободы. //Справочник. Инженерный журнал с приложением. 2019. №9. С. 22-26.
73. Чернецов Р.А., Велиев Е.И., Глазунов В.А., Скворцов С.А., Ковалева Н.Л. Определение числа степеней свободы механизмов с постоянной точкой ввода инструмента. //Станкоинструмент. 2019. №4 (017). С. 80-83.
74. Черноусько Ф.Л., Болотник Н.Н., Градецкий В.Г. Манипуляционные роботы: динамика, управление, оптимизация. М.: Наука. 1989. 368 с.
75. Шептунов С.А., Кабак И.С., Суханова Н.В. Дистанционное управление медицинским роботом класса Да Винчи. // Качество. Инновации. Образование. 2016. № S2. С. 136-140.
76. Яцун С.Ф., Рукавицын А.Н. Разработка биоинженерного мехатронного модуля для экзоскелета нижних конечностей человека. // Известия Самарского научного центра РАН. 2012. Т.14. № 4-5. С. 1351-1354.
77. Angeles J. The Qualitative Synthesis of Parallel Manipulators. / Journal of Mechanical Design. 2004. v. 126. P. 617-624.
78. Antai Zhou, Xianmin Zhang, Min Liu A new kind of Multi-Notched Flexure Hinges Based 3-RRR Micro-Positioning Stage. // Springer Nature Switzerland AG. 2019. P. 1589-11598.
79. Antonov. A.V., Aleshin A.K., Glazunov V.A., Rashoyan G.V., Skvortsov S.A., Shalyukhin K.A., Kovaleva N.L., Chernozov R.A. Dynamics of a new parallel structure mechanism with motors mounted on the base outside the

working area. //Proceedings of 14th international conference on electromechanics and robotics “Zavalishin’s readings”. 2019. P. 183-195.

80. Carricato M., Parenti-Castelli V. On the topological and geometrical synthesis and classification of translational parallel mechanisms. / Pr. of the XI World Congress in Mechanism and Machine Science. Tianjin. China. 2004. P. 1624-1628.

81. Ceccarelli M. Fundamentals of Mechanics of Robotic Manipulations. Kluwer Academic Publishers. 2004. 412 p.

82. Chablat D., Wenger Ph., Staicu, S. Dynamics of the Orthoglide parallel robot. // UPB Scientific Bulletin, Series D: Mechanical Engineering. 2009. V. 71 (3). P. 3-16.

83. Clavel R. Device for displacing and positioning an element in space. / Brevet N WO 87/03528. Classification Internationale de brevets: B25J 17/02. Date de publication internationale: 18.06.87.

84. Cofolla D., Wang M., Carbone G., Ceccarelli M. LARMbot: A New Humanoid Robot with Parallel Mechanisms. // Robot Design, Dynamics and Control. Proceedings of ROMANSY XXI CISM-IFTToMM Symposium on Theory and Practice of Robots and Manipulators. Springer. ISSN 0254-1971. 2016. P. 275-283.

85. Denavit J.J., Hartenberg R.S.A. Kinematic Notation for Lower Pair Mechanisms Based on Matrices./ Tr. ASME, Ser.E, J. Appl. Mech. 1955. v.22. No2. P. 215-221.

86. Earl C.F., Rooney J. The Generation of Kinematic Structures for Planar Kinematic Chains./ Pr. of 6th World Congr. on Theory of Machines and Mechanisms. Dec. 15-20. 1983. India. New Delhi. P. 77-88.

87. Fomin A.S., Glazunov V.A., Terekhova A.N. Development of a Novel Rotary Hexapod with a Single Drive. // Robot Design, Dynamics and Control. Proceedings of ROMANSY XXII CISM-IFTToMM Symposium on Theory and Practice of Robots and Manipulators. Springer. ISBN 978-3-319-78962-0. 2018. P. 141-146.

88. Fomin A. S., Glazunov V. A., Paik J. K. The Design of a New Rotary Hexapod with a Single Active Degree of Freedom // *Robotics and Mechatronics*. 2019. P. 57-65.
89. Glazunov V.A., Nosova N.Y., Kheylo S.V., Tsarkov A.V. Design and Analysis of the 6-DOF Decoupled Parallel Kinematics Mechanism. // *Dynamic Decoupling of Robot Manipulators*. 2018. V. 56. P. 125-170.
90. Gogu G. Structural synthesis of fully-isotropic translational parallel robots via theory of linear transformations. / *European Journal of Mechanics, A/Solids*. 2004. v. 23. P. 1021-1039.
91. Gosselin C., Angeles J. The Optimum Kinematic Design of a Spherical Three-Degree-of-Freedom Parallel Manipulator./ *Tr. ASME, J of Mech. Trans., and Autom. in Design*. 1989. No 2. P. 202-207.
92. Gosselin C.M., Angeles J. Singularity analysis of closed-loop kinematic chains. / *IEEE Transactions on Robotics and Automatics*. 1990. v. 6(3). P.281-290.
93. Gough V.E. Contribution to Discussion to Papers on Research In Automobile Stability and Control and in Tyre Performance, by Cornell Staff./ *Fr. Autom. Div. Inst. Mech. Eng.* 1956/57. P. 392-396.
94. Grundfest, S.W., Burdick, J.W., and Slatkin, A.B., "The development of a robotic endoscope," *Proc. IEEE International Conference on Robotics and Automation*. 1995. P. 162-171.
95. Herve J. The Lie group of rigid body displacements, a fundamental tool for mechanism design. / *Mechanism and Machine Theory*. 1991. v. 34. No 8. P. 719-730.
96. Hidetsugu Terada, Koji Makino, Yudai Kitano, Tomohiro Natori, Takaaki Ishii. Deverlopment of an ultrasonic controlled growing rod system for spinal implants // *Springer Nature Switzerland AG*. 2019. P. 1355-1364
97. Ilewicz G., Wojnarowski J. Kinematics of Constant Point Mechanism of Cardiosurgical Telemanipulator // *13th World Congress in Mechanism and Machine Science, Guanajuato, México, 2011*. P. 19-25.

98. Kong X., Gosselin C. Type Synthesis of Parallel Mechanisms. Springer. 2007. 275 p.
99. Laryushkin P.A., Glazunov V.A., Erastova K.G. On the Maximization of Joint Velocities and Generalized Reactions in the Workspace and Singularity Analysis of Parallel Mechanisms. // *Robotica*. Cambridge University Press. 2019. V. 37. P. 675-690.
100. Laryushkin P.A., Glazunov V.A. On the Estimation of Closeness to Singularity for Parallel Mechanisms Using Generalized Velocities and Reactions. // The 14th IFToMM World Congress. Taipei. Taiwan. October 25-30. 2015. DOI Number: 106567/IFToMM.14TH.WC.OS2.021.
101. Maira Martins da Silva, Joao Cavalcanti Santos Redundancy Resolution Schemes for Kinematically Redundant Parallel Manipulators. // Springer Nature Switzerland AG. 2019. P. 1671-1680.
102. Merlet J.-P. Parallel Robots. Kluwer Academic Publishers. 2000. 372 p.
103. Minimally invasive surgery market – Global industry analysis, size, share, growth, trends & forecast, 2013-2019 // Transparency Market Research. Albany. NY. USA. Tech. Rep. 2014.
104. Nhan N. H. K., Tung V.D., Kheylo S.V., Glazunov V.A. Oscillations and control of spherical parallel manipulator. // *International journal of advanced robotic systems*. 2019. №3.
105. Pashchenko V.N., Artemyev A.V., Antonov A.V., Rashoyan G.V., Chernetsov R.A., Ulyanov E.E. Inverse dynamics problem solution for the combined relative manipulation mechanism with five degrees of freedom. // Proceedings of 14th international conference on electromechanics and robotics “Zavalishin’s readings”. 2019. P. 253-263.
106. Parenti-Castelli V, Innocenti C. Direct Displacement Analysis for Some Classes of Spatial Parallel. Mechanisms. // Eighth CISM IFToMM Symp. on Theory and Practice of Robots and Manipulators. 1990. Cracow. Poland. P. 123-130.

107. Parenti-Castelli V, Gregorio R. DI, Bubani F. Workspace and optimal design of a pure translation parallel manipulator. // *Meccanica*. 2000. Pt. 35. № 3. P. 203-214.
108. Sooriakumaran P., Srivastova A., Shariat S.F. A Multinational, Multiinstitutional Study Comparing Positive Surgical Margin Rates among 22393 Open, Laparoscopy, and Robot – assisted Radical Prostatectomy Patients. // *Eur Uro*. 2014. V. 66. №3. P. 450.
109. Stewart D. A Platform with Six Degrees of Freedom. // *Pr. Inst. Mech. Eng.* 1965/1966. v.180. Pt.1. № 15. P.371-386.
110. Sugimoto K. Existence Criteria for Overconstrained Mechanisms: An Extension of Motor Algebra. // *Tr. ASME, J. of Mech. Design*. 1990. № 3. P. 295-298.
111. Veliev E. I., Ganiev R. F., Glazunov V. A., Filippov G. S. Parallel and sequential structures of manipulators in robotic surgery. // *Doklady physics*. №3. 2018. P. 106-109.
112. Yuanqing Wu, J.M. Selig, Marco Carricato Parallel Robots with Homokinetic Joints: The Zero-Torsion Case. // Springer Nature Switzerland AG. 2019. P. 269-278.
113. Zamanov V.B., Sotirov Z.M. Structures and Kinematics of Parallel Topology Manipulating Systems. // *Int. Symp. on Des. and Synthesis*. July 11-13. 1984. Tokyo. P. 453-458.).