Учебное пособие

ПИТЕР

СТАНДАРТ ТРЕТЬЕГО ПОКОЛЕНИЯ

В. А. Семенов

Теория вероятностей и математическая статистика

- Случайные события
- Вычисление вероятностей
- Выборочный метод
- Регрессионный и корреляционный анализы

ДЛЯ БАКАЛАВРОВ И СПЕЦИАЛИСТОВ

РЕКОМЕНДОВАНО УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИМ ОБЪЕДИНЕНИЕМ

Семенов Виктор Александрович

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Серия «Учебное пособие»

Заведующий редакцией	*А. Толстиков*
Руководитель проекта	*Е. Базанов*
Ведущий редактор	*Е. Маслова*
Литературный редактор	*Е. Рафалюк-Бузовская*
Художник	*Л. Адуевская*
Корректоры	*М. Одинокова, Н. Сулейманова*
Верстка	*А. Полянский*

ББК 22.17я7
УДК 519.2(075)

Семенов В. А.

С30 Теория вероятностей и математическая статистика: Учебное пособие. Стандарт третьего поколения. — СПб.: Питер, 2013. — 192 с.: ил.

ISBN 978-5-496-00120-5

Настоящее учебное пособие предназначено для студентов всех специальностей, обучающихся учебным дисциплинам «Математика» и «Высшая математика». Оно может быть также полезно преподавателям при подготовке и организации учебного процесса.

Учебное пособие написано в соответствии с действующими федеральными государственными образовательными стандартами и содержит теоретический материал и задачи для изучения алгебры событий, теории вероятностей и математической статистики. Многочисленные примеры и задачи могут использоваться также и на практических занятиях.

Рекомендовано УМО в области инновационных междисциплинарных общеобразовательных программ в качестве учебного пособия по направлению 010500 «Математическое обеспечение и администрирование информационных систем».

ISBN 978-5-496-00120-5

ООО «Питер Пресс», 192102, Санкт-Петербург, ул. Андреевская (д. Волкова), д. 3, литер А, пом. 7Н.
Налоговая льгота — общероссийский классификатор продукции ОК 005-93, том 2; 95 3005 — литература учебная.
Подписано в печать 02.08.12. Формат 60×90/16. Усл. п. л. 12,000. Тираж 2000. Заказ
Отпечатано с готовых диапозитивов в ИПК ООО «Ленинградское издательство».
194044, Санкт-Петербург, ул. Менделеевская, 9.

Оглавление

Часть 2
ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Предисловие

Настоящее учебное пособие составлено на основе конспекта лекций по теории вероятностей и математической статистике, который по содержанию соответствует учебным программам вузов. В нем последовательно определяются базисные понятия, предусмотренные федеральными государственными образовательными стандартами, формулируются основные теоремы, основная часть из которых доказывается, в том числе с целью формирования у студентов логического мышления, приводятся контрольные вопросы и задачи для использования их на практических занятиях и в самостоятельной работе учащихся. Настоящее учебное пособие может использоваться читателями для проведения исследований, а преподавателями — для подготовки и проведения лекций и занятий практической направленности. В конце пособия приведены предметный указатель, предназначенный для облегчения поиска нужной информации, и статистические таблицы, необходимые для решения некоторых задач. Для контроля правильности решения задач в конце пособия приведены ответы к ним. В перечень задач вошли составленные автором, а также заимствованные из других литературных источников, на которые указаны ссылки.

Автор выражает искреннюю благодарность профессорам В. Д. Лукьянову и И. Е. Погодину, доцентам А. Г. Резниковой, В. И. Лукьянчикову и Т. В. Бырдиной за ценные замечания, сделанные ими при рецензировании настоящей работы.

От автора

О, сколько нам открытий чудных
Готовят просвещенья дух
И опыт, сын ошибок трудных,
И гений, парадоксов друг,
И случай, бог изобретатель.

А. С. Пушкин

Студенты обычно проявляют повышенный интерес к математике во время изучения теории вероятностей и математической статистики. Это в значительной степени связано с тем, что данная теория нужна не только для профессионального обучения — ее понятия и законы проникают в нашу повседневную жизнь в процессе обучения интуитивные представления учащихся о случайности и вероятности трансформируются в четкие представления, знания и умения. Этот раздел математики оказывает существенное влияние на интеллектуальное развитие студентов и занимает особое место в их профессиональном росте. При его изучении закрепляются знания по теории множеств, дифференциальному и интегральному исчислениям, теории рядов.

При проведении занятий практической направленности по теории вероятностей и математической статистике часто возникают затруднения вследствие отсутствия в библиотеке задачника по указанным темам. Настоящее пособие включает в себя задачи и, как надеется автор, будет использовано на практических занятиях.

Методические рекомендации

При использовании методического пособия в самостоятельной работе студентов сначала рекомендуется изучить представленный в нем теоретический материал, затем проверить уровень понимания данного материала с помощью контрольных вопросов, приведенных в пособии, а затем приступить к решению задач из него. В заключение следует сравнить результаты своего решения с ответами, приведенными в конце пособия.

Обозначения

■ — конец доказательства.

Ссылки на формулы в пределах пункта осуществляются по их номеру, например (5).

Ссылки на формулы в пределах главы осуществляются посредством указания номера параграфа, пункта и номера формулы, например (1.2.4), где 1 — номер параграфа текущей главы; 2 — номер пункта § 1; 4 — номер формулы.

Ссылки на формулы, расположенные в другой главе, осуществляются посредством указания номера главы, обозначенной римской цифрой, номера параграфа, пункта и их номера формулы, например (I.1.2.4), где I — номер главы; 1 — номер параграфа, входящего в состав главы; 2 — номер пункта § 1; 4 — номер формулы. Ссылка на формулу, расположенную в другой части, осуществляется путем указания номера части. Символом * помечаются сложные задачи.

Случайные величины обычно обозначаются заглавными буквами латинского алфавита, например X_i, а их реализации — строчными, например x_i. Там, где это правило противоречит общепринятым обозначениям случайной величины, может использоваться строчная буква латинского алфавита, например t, для случайной величины, распределенной по закону Стьюдента, при обозначении результата ее испытаний применяется символ «звездочка», например t^*. Если случайная величина получается выполнением операции усреднения, то в ее обозначении применяется символ «шляпка», например $\bar{X}_n$, и в нижнем символе указывается число элементов, использующихся при усреднении.

Часть 1
ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Глава I
Случайные события

Предметом теории вероятностей являются процессы, на протекание которых оказывают влияние не только контролируемые, но и неконтролируемые факторы. В силу этого традиционный детерминистический подход оказывается невозможным. Теория вероятностей исследует те процессы, которые, в принципе, могут быть воспроизведены неограниченное количество раз при одинаковом наборе условий их воспроизведения и характеризуются свойством повторяемости результатов их осуществления.

Вероятность является следствием неисчерпаемости природы вглубь и вширь. Не все можно точно знать.

§ 1. Классификация событий

Событие — это то, что может произойти или нет при выполнении определенного **комплекса условий**, или, как говорят, при проведении **испытания**. Среди возможных событий выделяют достоверные и невозможные. Если при каждом испытании всегда происходит некоторое событие, то оно называется **достоверным**. Для обозначения достоверного события будет использоваться символ U. Если при испытании некоторое событие заведомо не может произойти, то оно называется **невозможным**. Невозможное событие обозначается символом V.

Если событие A не является достоверным или невозможным, то оно часто называется **случайным**.

Понятие **испытания** в теории вероятности является одним из основных понятий. Оно несколько отличается от понятия испытания или эксперимента в физике или химии.

Часто при проведении физического испытания не все его возможные исходы заранее известны. В отличие от этого теория вероятностей предполагает, что известен перечень всевозможных исходов испытания. Обычно считается также, что испытание может быть воспроизведено любое количество раз. При этом события характеризуются повторяемостью частоты их появления при многократных испытаниях.

В этом случае используется количественная оценка возможности появления событий. Она осуществляется посредством **вероятности** p, которая отражает соотношение контролируемых и неконтролируемых факторов, оказывающих влияние на результаты испытания.

Прежде чем перейти к изучению способов определения вероятности, остановимся более подробно на операциях над событиями.

§ 2. Алгебра событий. Диаграммы Эйлера–Венна[1]

Обычно события обозначаются прописными буквами латинского алфавита. Некоторые из событий оказываются связанными друг с другом. Эта связь выражается отношениями включения и равносильности событий.

❒ **Отношение включения** события A в событие B.

Пусть из того, что произошло событие A, следует, что произошло также событие B. В этом случае говорят, что A влечет за собой B, или A является частным случаем B, или A включено в B. Это обстоятельство обозначают символом $\subset$.

$$A \subset B \text{ или } B \supset A. \tag{1}$$

Отношение «влечет» является отношением порядка на множестве событий. Это означает, что

$$A \subset A, \text{ а также если } A \subset B \text{ и } B \subset C, \text{ то } A \subset C. \tag{2}$$

Первое из выражений (2) называют свойством **рефлексивности** операции включения, а второе — свойством **транзитивности**.

❒ **Отношение равносильности** событий A и B.

Если событие A влечет за собой событие B $(A \subset B)$ и если событие B влечет за собой событие A $(B \subset A)$, то говорят, что A и B **равносильны**. Это записывают

$$A = B. \tag{3}$$

Иначе говоря, эти события или наступают, или не наступают вместе. Поэтому их можно рассматривать как эквивалентные и не отличать одно от другого.

---

[1] Леонард Эйлер (1707–1783) — математик, механик, физик. С 1727 по 1741 г. и с 1766 г. жил и работал в России. Джон Венн (1834–1923) — английский логик.

Одни события могут использоваться для формирования других событий с применением некоторых операций. Совокупность таких операций и их свойства называют **алгеброй** событий. К этим операциям относят следующие.

- **Произведение (пересечение) событий.**

Событие, состоящее в наступлении обоих событий A и B, называют **произведением (пересечением)** событий A и B. Его обозначают

$$A * B \text{ или } A \bigcap B.$$

- **Сумма (объединение) событий.**

Событие, состоящее в наступлении или события A, или события B, или обоих событий вместе, называют **суммой (объединением)** событий A и B. Его обозначают

$$A + B \text{ или } A \bigcup B.$$

- **Унарная (выполняется над одним операндом) операция формирования противоположного события.**

Событие $\overline{A}$ состоит в том, что событие A не произошло. Два события, A и $\overline{A}$, называют **противоположными**. Для них, очевидно, одновременно выполняются следующие соотношения:

$$A + \overline{A} = U, \quad A * \overline{A} = V, \tag{4}$$

где U — достоверное событие; V — невозможное событие.

- **Разность двух событий.**

Событие, состоящее в том, что событие A произошло, а событие B не произошло, называется **разностью** событий A и B. Оно обозначается

$$A - B \text{ или } A \backslash B.$$

Графическая интерпретация перечисленных отношений и операций над событиями осуществляется диаграммами Эйлера—Венна [1], [18]. Они представлены на рис. 1–5.

Операции сложения и умножения событий легко обобщаются на случай, когда число операндов больше двух.

- **Сумма и произведение любого числа событий.**

Событие, заключающееся в наступлении хотя бы одного из событий $A_1, A_2, ..., A_n$, обозначается

$$A_1 + A_2 + ... + A_n$$

и называется **суммой событий** $A_1, A_2, ..., A_n$.

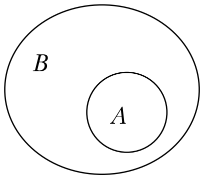


Рис. 1. Иллюстрация отношения включения события A в B ($A \subset B$)

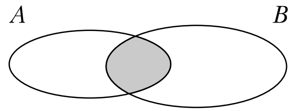


Рис. 2. Иллюстрация операции умножения событий A и B ($A * B$)

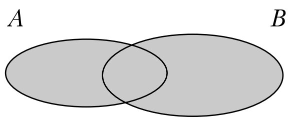


Рис. 3. Иллюстрация операции сложения событий A и B ($A + B$)

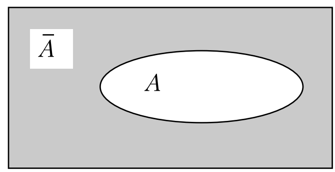


Рис. 4. Иллюстрация операции взятия противоположного события A

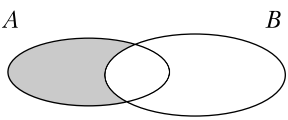


Рис. 5. Иллюстрация разности событий A и B ($A - B$)

Событие, заключающееся в наступлении каждого из событий A_1, A_2, ..., A_n, обозначается

$$A_1 * A_2 * ... * A_n$$

и называется **произведением событий** A_1, A_2, ..., A_n.

❒ **Виды событий и их множеств, свойства операций над событиями.**

Среди всевозможных событий особое место занимают несовместные. Два события A и B называют **несовместными**, если их совместное появление невозможно, то есть если

$$A * B = V. \tag{5}$$

Если событие A есть сумма

$$A = B_1 + B_2 + ... + B_n \tag{6}$$

попарно несовместных событий

$$B_i * B_j = V \text{, где } i \neq j\text{, } i \in [1, n] \text{ и } j \in [1, n], \tag{7}$$

то говорят, что событие A подразделяется на **частные случаи** B_1, B_2, ..., B_n.

Например, если при бросании игральной кости событие A состоит в выпадении четного числа очков, то оно раскладывается на частные случаи выпадения 2, 4, 6 (E_2, E_4, E_6):

$$A = E_2 + E_4 + E_6.$$

События B_1, B_2, ..., B_n образуют **полную группу событий**, если при испытании хотя бы одно из них должно произойти, то есть

$$B_1 + B_2 + ... + B_n = U. \tag{8}$$

Особую полную группу событий составляют **попарно несовместные события**. Например, в случае бросания игральной кости это события E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6, состоящие в выпадении 1, 2, 3, 4, 5, 6 соответственно.

Поскольку из одних событий путем вышеуказанных операций создаются другие, то возникает вопрос о существовании самых простых событий, которые не могут быть представлены в виде суммы несовместных событий. Такие события называют **элементарными**.

Обычно элементарные события представляют собой всевозможные исходы одного испытания. Поскольку результатом одного испытания является только одно элементарное событие, то элементарные события попарно несовместны. Так как всякое испытание заканчивается каким-либо элементарным событием, то сумма всех элементарных событий составляет достоверное событие.

Применяя теорию вероятностей к описанию реальных явлений, следует прежде всего определить, в чем состоит испытание и каковы его возможные исходы, то есть каково множество элементарных событий. Именно этот этап определяет успех исследования и ценность полученных результатов. Например, в случае бросания шестигранной кости можно считать множеством элементарных событий множество событий, состоящих в выпадении 1, 2, 3, 4, 5, 6 соответственно. Можно также считать это множество состоящим всего из двух элементарных событий: выпадение четного и нечетного числа очков. Очевидно, возможностей предсказаний появления тех или иных событий значительно больше в первом случае, чем во втором. Таким образом, формирование множества элементарных событий является важнейшей задачей исследователя.

Три операции над событиями: формирование противоположного события, сложение и произведение событий — являются основными. С их использованием можно определить другие операции, например вычитание событий:

$$A - B = A * \overline{B}.$$

Среди всевозможных событий, получающихся при применении этих трех операций, выделяют достоверное событие U и невозможное событие V. Достоверное событие образуется, например, при сложении всех элементарных событий. Невозможное событие получается, например, при перемножении двух любых элементарных событий или при взятии противоположного события от достоверного события. Множество событий, образующееся при применении к элементарным событиям операций формирования противоположного события, сложения и произведения, называется **полем событий**. Поле событий обладает следующими свойствами:

- если событие A принадлежит полю, то ему принадлежит также событие $\overline{A}$;
- если два события A и B принадлежат полю, то ему принадлежат также события $A * B$, $A + B$.

Основные три действия: формирование противоположного события, сложение и произведение событий, обладают свойствами, перечисленными в табл. 1. Отметим, что каждое событие поля событий может быть представлено в виде суммы элементарных событий. Это означает, что для формирования поля событий достаточным является не три операции, а две. В качестве таковых можно использовать, например, операции формирования противоположного события и сложения.

Три действия: формирование противоположного события, сложение и умножение событий — составляют алгебру событий, а их свойства, перечисленные в табл. 1, — **законы алгебры событий**. Законы под номером 1 называются **коммутативными**, 2 — **ассоциативными**, 3 — **дистрибутивными**, 10 — **законами де Моргана**[1].

Для нескольких операндов свойство дистрибутивности умножения относительно сложения и сложения относительно умножения имеет вид

$$B * \sum_i A_i = \sum_i B * A_i, \tag{9}$$

[1] Морган Огастес (1806–1871) — шотландский математик и логик. Первый президент Лондонского математического общества.

Таблица 1. Свойства основных операций над событиями

№ п/п	**Умножение событий**	**Сложение событий**
1	$A * B = B * A$	$A + B = B + A$
2	$A * (B * C) = (A * B) * C$	$A + (B + C) = (A + B) + C$
3	$A * (B + C) = (A * B) + (A * C)$	$A + (B * C) = (A + B) * (A + C)$
4	$A * A = A$	$A + A = A$
5	$A * V = V$	$A + U = U$
6	$A * U = A$	$A + V = A$
7	$\bar{\bar{A}} = A$	
8	$\bar{U} = V$	$\bar{V} = U$
9	$\bar{A} * A = V$	$\bar{A} + A = U$
10	$\overline{A * B} = \bar{A} + \bar{B}$	$\overline{A + B} = \bar{A} * \bar{B}$

$$B + \prod_i A_i = \prod_i (B + A_i), \tag{10}$$

а законы де Моргана представляются следующими соотношениями:

$$\overline{\sum_i A_i} = \prod_i \bar{A}_i\,, \quad \overline{\prod_i A_i} = \sum_i \overline{A_i}\,. \tag{11}$$

Примечательно, что третий столбец табл. 1 можно получить из второго заменой операции сложения на операцию умножения событий с одновременной заменой достоверного события на невозможное и невозможного события на достоверное. Таким же образом получается второй столбец из третьего. Это свойство законов называется **принципом двойственности**.

Для количественной оценки возможности осуществления событий используют функцию вероятности. Аргументом этой функции является событие, а ее значение — неотрицательное число. Функция вероятности может быть определена на основе следующих подходов:

- определение вероятности на основе элементарного понятия равновозможности (классическое определение вероятности);
- определение вероятности как доли длины, площади, объема и т. д. (геометрическое определение вероятности);

- ❒ аксиоматическое определение вероятности;
- ❒ определение вероятности как частоты появления события при большом количестве испытаний (статистическое определение вероятности).

Перейдем теперь к рассмотрению способов определения вероятности событий.

Контрольные вопросы

1. Что такое событие?
2. Что такое достоверное событие?
3. Что такое невозможное событие?
4. Дайте определение операции сложения двух событий.
5. Дайте определение операции умножения двух событий.
6. Дайте определение операции вычисления разности двух событий.
7. Дайте определение операции образования противоположного события.
8. Какие события называются несовместными, а какие совместными?
9. Что означает утверждение «событие A раскладывается на частные случаи $B_1, B_2, ..., B_n$»?
10. В каком случае события образуют полную группу событий?
11. Охарактеризуйте множество событий, составляющих поле событий.

Задачи

1. Событие A — хотя бы одно из имеющихся изделий бракованное. Событие B — бракованных изделий не меньше трех. Что означают события $\overline{A}$ и $\overline{B}$?
2. Помощник мастера обслуживает 10 ткацких станков. Событие A — хотя бы один из 10 станков потребует текущего ремонта в течение смены. Событие B — все 10 станков не потребуют текущего ремонта в течение смены. Что означают события $A + B$ и AB?
3. Электрическая цепь состоит из соединения элемента a с параллельным соединением двух элементов, b_1 и b_2. Событие A состоит из выхода из строя элемента a, а события B_1 и B_2 состоят из выхода из строя элементов b_1 и b_2. Пусть C — событие разрыва цепи. Выразить события C и $\overline{C}$ через события A, B_1, B_2.
4. Машинно-котельная установка состоит из двух котлов и одной машины. Событие A_k — исправен k-й котел. Событие B — исправна

машина. Событие C — исправна вся машинно-котельная установка. Составьте пространство элементарных событий U. Выразите событие D, когда исправна машина и хотя бы один котел (установка работоспособна). Выразите события C и $\overline{C}$.

5. На трех станках изготавливают однотипные изделия. Событие A_k — изделие, изготовленное на k-м станке, отвечает стандарту. Что означают события:
   а) $A_1A_2A_3$;
   б) $A_1 + A_2 + A_3$;
   в) $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3$;
   г) $A_1A_2\overline{A}_3 + A_1\overline{A}_2A_3 + \overline{A}_1A_2A_3$;
   д) $\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$
   е) $(A_1 + A_2 + A_3) - A_1 * A_2 * A_3)$.
6. Прибор состоит из двух блоков первого типа и трех блоков второго типа. Событие A_k — исправен k-й блок первого типа. Событие B_k — исправен k-й блок второго типа. Прибор работает (событие C), если работают хотя бы один блок первого типа и два блока второго типа. Выразите событие C через события A_k и B_k.
7. Доказать следующие равенства:
   а) $AB + A\overline{B} + \overline{A}B = A + B$;
   б) $(A + B)(A + \overline{B})(\overline{A} + B)(\overline{A} + \overline{B}) = V$;
   с) $(A + B)(A + \overline{B}) + (\overline{A} + \overline{B}) = U$.

Глава II
Вычисление вероятности событий

§ 1. Классическое определение вероятности событий

1.1. Классическая схема испытаний

Предположим, что в результате испытания происходит только одно из n элементарных равновозможных событий E_1, E_2, ..., E_n. Это означает, что достоверное событие U составляет сумма

$$U = E_1 + E_2 + ... + E_n, \quad (1)$$

где $E_i * E_j = V$, если $i \neq j$ (в одном испытании не может быть двух разных исходов).

События E_1, E_2, ..., E_n называют также **результатами испытаний**. Множество элементарных событий обозначим тем же символом $U = \{E_1, E_2, ..., E_n\}$, которым обозначалось достоверное событие.

Понятие равновозможности является основополагающим и не выводится из каких-либо других понятий. Вероятность осуществления каждого из этих элементарных событий считается одинаковой и принимается равной

$$p(E_1) = p(E_2) = ... = p(E_n) = \frac{1}{n}. \quad (2)$$

С учетом определения (2) события множества U называются также равновероятными. На основе множества элементарных событий U образуем поле событий F, применяя к элементарным событиям множества U операции формирования противоположного события, сложения и произведения событий.

Пусть событие A представляется суммой элементарных событий из множества U

$$A = E_{i_1} + E_{i_2} + ... + E_{i_m}, \quad (3)$$

где индексы $i_k \in \{1, \ 2, ..., \ n\}$, то есть каждое событие E_{i_k} является одним из элементарных событий правой части равенства (1). Элементарные события, составляющие сумму (3), называют результатами испытаний, благоприятствующими событию A. Число таких событий обозначим символом m. Тогда вероятность события A вычисляется по формуле:

$$p(A) = \frac{m}{n}. \tag{4}$$

Пример (на классическое вычисление вероятности).

Определить вероятность выпадения четного числа очков при бросании игральной кости.

При бросании игральной кости возможны 6 (n = 6) равновероятных исходов: E_1, E_2, ..., E_6, где индекс символа испытания указывает выпавшее число. Событие A выпадения четного числа очков представляется суммой трех элементарных событий (m = 3)

$$A = E_2 + E_4 + E_6.$$

Таким образом, $p(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

1.2. Свойства функции вероятности, определенной по классической схеме

Вероятность, определенная по формуле (1.1.4), обладает следующими свойствами.

- Для каждого события A поля F

$$p(A) \geq 0. \tag{1}$$

- Для достоверного события U

$$p(U) = 1. \tag{2}$$

- Если событие A подразделяется на частные случаи B и C (т. е. $A = B + C$ и $B * C = V$), то

$$p(B + C) = p(B) + p(C). \tag{3}$$

Первые два свойства очевидны. Докажем третье.

Доказательство.

Пусть m_1 — число элементарных событий, благоприятствующих событию B; m_2 — число элементарных событий, благоприятствующих событию C; n — число всех элементарных событий.

Поскольку события B и C несовместны, то не существует событий, одновременно благоприятствующих и B, и C. Это значит, что число событий, благоприятствующих или B, или C, равно $m_1 + m_2$, то есть

$$p(B+C) = \frac{m_1 + m_2}{n} = \frac{m_1}{n} + \frac{m_2}{n} = p(B) + p(C)\,. \blacksquare$$

Свойство (3) иногда формулируется как теорема **сложения вероятностей**.

❒ Вероятность события $\bar{A}$, противоположного A, равна

$$p(\bar{A}) = 1 - p(A)\,. \qquad (4)$$

Доказательство.

Поскольку

$$\bar{A} + A = U \text{ и } \bar{A} * A = V\,,$$

то

$$p(\bar{A}) + p(A) = p(U) = 1\,.$$

Следовательно,

$$p(\bar{A}) = 1 - p(A)\,. \blacksquare$$

❒ Вероятность невозможного события равна 0, то есть

$$p(V) = 0\,. \qquad (5)$$

Доказательство.

Поскольку

$$U + V = U \text{ и } U * V = V\,,$$

то

$$p(U) + p(V) = p(U)\,.$$

Следовательно,

$$p(V) = 0\,. \blacksquare$$

❒ Если событие A влечет за собой событие B, то есть

$$A \subset B\,,$$

то

$$p(A) \le p(B)\,. \qquad (6)$$

Доказательство.

Пусть m_1 — число элементарных событий, благоприятствующих событию A, а m_2 — число элементарных событий, благоприятствующих событию B. В число m_2 входят события, составляющие число m_1, но, возможно, и еще какие-либо. Поэтому $m_2 \geq m_1$. Следовательно, $\frac{m_2}{n} \geq \frac{m_1}{n}$ или $p(A) \leq p(B)$[1]. ■

❒ Вероятность любого события заключена между нулем и единицей:

$$0 \leq p(A) \leq 1. \tag{7}$$

Доказательство.

Так как

$$V \subset A + V = A \subset U,$$

то

$$p(V) \leq p(A) \leq p(U).$$

Заменяя в последнем соотношении $p(V)$ и $p(U)$ на 0 и 1 соответственно (см. формулы (5) и (2)), получим соотношение (7). ■

При решении задач, связанных с вычислением классической вероятности, бывает необходимым использование понятий и формул комбинаторики. Перейдем к рассмотрению основных понятий комбинаторики: перестановка, сочетание и размещение.

Контрольные вопросы

1. В чем состоит классический способ вычисления вероятности событий?
2. Чему равна вероятность невозможного события?
3. Чему равна вероятность достоверного события?
4. Как выразить вероятность суммы двух несовместных событий, используя вероятности каждого из них в отдельности?
5. Как связаны вероятности двух взаимнопротивоположных событий?

---

[1] Другой вариант доказательства. Так как $A \subset B$, то $B = A + \overline{A} * B$. Тогда $p(B) = p(\quad) + P(\overline{A} * B)$. ■

Задачи

В задачах 1.1–1.5 используется одно и то же условие: «В лото используется 32 одинаковых по физическим свойствам шара, пронумерованных числами от 1 до 32.

1.1. При розыгрыше лото выпал шар. Какова вероятность того, что его номер будет меньше или равен 32?
1.2. При розыгрыше лото выпал шар. Какова вероятность того, что его номер будет больше 32?
1.3. При розыгрыше лото выпал шар. Какова вероятность того, что его номер будет больше 5 и меньше 10?
1.4. При розыгрыше лото выпал шар. Какова вероятность того, что его номер будет больше 10 или меньше 5?
1.5. При розыгрыше лото выпал шар. Какова вероятность того, что его номер будет больше 10 и меньше 5?
1.6. Брошены две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма очков на выпавших гранях — четная, причем на грани хотя бы одной из костей появится пятерка.
1.7. Брошены две игральные кости. Найти вероятности следующих событий: а) сумма выпавших очков равна шести; б) разность выпавших очков равна двум; в) сумма выпавших очков равна четырем, а разность — единице; г) сумма выпавших очков равна девяти, а произведение — двадцати; д) разность выпавших очков равна трем, а произведение — десяти; е) произведение выпавших очков равно двенадцати, а отношение — $\frac{1}{3}$.
1.8. Кубик Рубика, все грани которого окрашены в разные цвета, развалился на 27 частей. Найти вероятность того, что наудачу взятая часть имеет: а) одну окрашенную грань; б) две; в) три; г) четыре окрашенные грани; д) только неокрашенные грани.
1.9. Монета брошена два раза. Найти вероятность того, что хотя бы один раз появится «решка».

§ 2. Элементы комбинаторики

2.1. Перестановки

Пусть рассматривается n различных символов. Их запись, например через запятую, называется **перестановкой**. Каждому символу в перестановке можно сопоставить его порядковый номер в ней начиная с первого. Две перестановки из одного и того же числа одинаковых символов называются одинаковыми, если каждый из n символов занимает положение в перестановке с одним и тем же номером (одно и то же место). В противном случае перестановки считаются различными.

Какое число различных перестановок можно получить, изменяя места расположения символов? Для ответа на этот вопрос приведем следующие рассуждения. Имея n различных символов, можно на первое место поставить по очереди каждый из них в отдельности. В этом случае образуется n различных групп перестановок. Каждая такая группа перестановок имеет одинаковый символ, стоящий на первом месте. После фиксации положения одного символа на первом месте на второе место можно поставить любой из оставшихся $n - 1$ символов, что составляет $n - 1$ возможность. Последовательность этих рассуждений можно продолжить до тех пор, пока не будут зафиксированы $n - 1$ символов и последний оставшийся можно будет расположить только единственным способом на месте с номером n. Таким образом, общее число возможных перестановок n различных символов составляет

$$n * (n-1) * ... * 1 = n!. \tag{1}$$

Пример. Сколькими способами можно расставить на полке 10 книг?

Решение. Существует 10! = 3 628 800 различных способов расстановки 10 книг на полке.

Контрольные вопросы

1. Что такое перестановка из n различных элементов?
2. Какие две перестановки считаются различными?
3. Как вычислить максимальное число различных перестановок из n различных элементов?

Задачи

2.1.1. Класс курсантов численностью 10 человек в течение 10 дней должен выделить по человеку для несения службы дневального по роте. Бросили жребий для определения порядка дежурства. Какова вероятность того, что курсанты будут нести дежурство в порядке списочного состава класса?

2.1.2. На огневой рубеж вызываются 5 курсантов. Каким количеством способов можно расставить их на огневом рубеже?

2.1.3. Готовясь к юбилею института, каждый из 7 членов кафедры принес подарок. Эти подарки смешали и случайным образом распределили между собой. Какова вероятность того, что: а) каждый получит свой подарок; б) ни один не получит свой подарок[1]; в) хотя бы один сотрудник получит свой подарок?

2.2. Сочетания

Рассмотрим те же n различных символов (элементов[2]). Однако сейчас их взаимное расположение не является существенным. То есть эти символы рассматриваются как элементы множества. Пусть из множества, состоящего из n символов, требуется сформировать подмножества из меньшего числа m тех же символов. Каждое из таких подмножеств называется **сочетанием** из n элементов по m, и их количество обозначается как C_n^m. Сколько различных таких подмножеств можно составить? Два сочетания считаются различными, если они состоят или из разного количества элементов или если в состав одного из них входит хотя бы один элемент, отсутствующий во втором.

Теорема.

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \tag{1}$$

Доказательство.

Применим метод математической индукции. Число сочетаний из n элементов по 1, очевидно, равно n, то есть $C_n^1 = n$. Непосредственной подстановкой можно проверить, что в этом случае формула (1) выполняется. Предположим, что формула (1) выполняется вплоть до некоторого значения m. Покажем ее справедливость при $m + 1$. Рассмотрим произвольное сочетание из множества C_n^m. Его можно дополнить до сочетания из n элементов по $m + 1$ всего $n - m$ способами. Эту операцию можно осуществить со всеми сочетаниями из числа C_n^m. Таким образом, можно получить сочетания из n элементов по $m + 1$ элементу в каждом $C_n^m(n-m)$ способами. Среди этих сочетаний, состоящих из $m + 1$ эле-

---

1 Задача повышенной сложности.

2 Термин «элемент» является наиболее распространенным.

ментов, будут встречаться одинаковые. В силу симметрии число одинаковых сочетаний для каждого типа сочетаний будет одним и тем же. Для подсчета числа повторяющихся сочетаний для сочетания определенного типа выберем мысленно одно из вновь образованных сочетаний с $m + 1$ элементами. Сочетания с m элементами, на основе которых будут получены такие же новые сочетания с $m + 1$ элементами, могут быть получены поочередным выкидыванием одного элемента. Легко сообразить, что их число составит $m + 1$. Таким образом, число различных сочетаний из n элементов по $m + 1$ составит

$$C_n^{m+1} = C_n^m \frac{n-m}{m+1} = \frac{n!(n-m)}{m!(n-m)!(m+1)} = \frac{n!}{(m+1)!(n-m-1)!}. \blacksquare$$

Пример 1 (на методику формирования поля событий F).

Пусть группа равновероятных исходов испытаний состоит из трех событий E_1, E_2, E_3. Поле событий состоит из следующих восьми (2^3) элементов: E_1, E_2, E_3, V, $E_1 + E_2$, $E_1 + E_3$, $E_2 + E_3$, $E_1 + E_2 + E_3 = U$. Подсчет количества элементов поля событий осуществляется по формуле

$$1 + n + C_3^2 + C_3^3 = (1+1)^3 = 2^3 = 8.$$

Заменяя первые два слагаемых последнего равенства сочетаниями, получаем

$$C_3^0 + C_3^1 + C_3^2 + C_3^3 = (1+1)^3 = 2^3 = 8,$$

где $C_3^0 = \dfrac{3!}{0!*3!}$ и $0! \equiv 1$.

Очевидно, что для случая n событий поле событий включает в себя 2^n элементов, так как справедливо следующее равенство:

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \cdots + C_n^n = (1+1)^n = 2^n. \qquad (2)$$

Пример 2. Среди 100 фотографий есть одна разыскиваемого преступника. Наудачу выбирают 10 фотографий. Какое количество сочетаний по 10 фотографий, содержащих фотографию разыскиваемого преступника, существует?

Решение. Если убрать одну фотографию преступника, то останется 99 фотографий. Составим всевозможные сочетания из 99 фотографий по 9 в каждом и добавим к каждому сочетанию фотографию преступника. В результате получим искомое множество. Таким образом, всего существует $C_{99}^9 \approx 6,29 * 10^{11}$ сочетаний.

Контрольные вопросы

1. Что такое сочетание из n различных элементов, содержащее $1 \le m \le n$ элементов?
2. Какие два сочетания считаются различными?
3. Как определить максимальное число различных сочетаний из n различных элементов по m элементов в каждом?
4. Как определяется символ $0!$?

Задачи

2.2.1. В распоряжении взвода находятся 30 одинаковых пронумерованных автоматов. Для несения караульной службы необходимо 5 автоматов. Группа курсантов, заступающая в караул, выбрала случайным образом 5 автоматов. Какова вероятность того, что: а) будет выбран автомат № 8; б) будут выбраны автоматы № 10 и 11?

2.2.2. В картотеке из 80 фотороботов содержится фоторобот разыскиваемого преступника. Для проведения розыскных мероприятий отобрали случайным образом 5 фотороботов. Какова вероятность, что среди них содержится фоторобот разыскиваемого преступника?

2.2.3. В классе из 30 курсантов находятся 5 отличников по математике, 10 курсантов, имеющих оценки «хорошо», 14 — «удовлетворительно» и один «неудовлетворительно». Для оценки остаточных знаний курсантов данного класса случайно отобрали трех курсантов. Какова вероятность того, что среди отобранных курсантов окажутся: а) все отличники; б) один отличник и остальные троечники; в) по одному отличнику, хорошисту и троечнику? Какова средняя оценка, полученная отобранной группой курсантов?

2.2.4. В классе из N курсантов M имеет первую группу крови. Из класса случайным образом отобрали n курсантов. Какова вероятность того, что среди них окажется m курсантов с первой группой крови?

2.2.5. В лотерее 10 000 билетов. Из них 50 выигрышные, а остальные нет. Куплено: а) один; б) два; в) три билета. Какова вероятность того, что все купленные билеты выигрышные? Какова вероятность того, что г) хотя бы один билет из трех купленных окажется выигрышным?

2.3. Размещения

Определение. Любой упорядоченный набор m различных элементов, взятых из множества, состоящего из n элементов, называется *размещением*.

Для каждого из C_n^m сочетаний существует $m!$ различных размещений. Следовательно, число размещений из n элементов по m составляет

$$A_n^m = C_n^m * m! = \frac{n!}{(n-m)!}\,. \qquad (1)$$

Пример. В соревновании участвуют 8 команд. Определить максимальное количество различных способов распределения первых трех мест.

Решение.

$$A_n^m = C_8^3 * 3! = \frac{8!}{5!} = 8 * 7 * 6 = 336\,.$$

Контрольные вопросы

1. Что такое размещение из n различных элементов, содержащее m элементов?
2. Какие два размещения считаются различными?
3. Как вычислить максимальное число различных размещений из n различных элементов по m элементов в каждом?

Задачи

2.3.1. Владелец дипломата с кодовым замком забыл установленный им ранее код. Помня, что цифры, установленные на трех колесиках, были разными, он наугад набрал их. Какова вероятность, что замок откроется? Считать, что на кодовое колесико нанесено 10 цифр.

2.3.2. Абонент забыл две последние цифры номера телефона. Помня, что они были различными, он наугад набрал номер. Какова вероятность того, что он позвонит на нужный номер?

2.4. Формула Стирлинга

Для приближенного вычисления факториала в случае больших значений аргумента используется формула **Стирлинга**[1] [10]

[1] Стирлинг Джеймс (1692–1770, Эдинбург) — шотландский математик, член Лондонского королевского общества.

$$n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\,. \qquad (1)$$

2.5. Формула бинома Ньютона

Примечательно, что числа сочетаний C_n^m из n элементов по m являются коэффициентами в формуле **бинома Ньютона** [9]

$$(a+b)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m a^m b^{n-m}\,. \qquad (1)$$

При этом так как 0! = 1, то

$$C_n^0 = 1\,. \qquad (2)$$

§ 3. Геометрическое определение вероятности событий

Во многих случаях применение классического способа вычисления вероятности оказывается невозможным по причине бесконечного числа возможных исходов испытаний. Например, пусть в результате испытания внутри круга радиусом R размещается точка (рис. 1). Предположим, что вероятность попадания точки в область Ц, составляющую часть круга, зависит не от формы и положения этой области, а только от ее площади. Тогда естественно определить вероятность попадания точки в область Ц как

$$p(\text{Ц}) = \frac{S_{\text{ц}}}{\pi R^2}, \qquad (1)$$

где $S_{\text{ц}}$ — площадь области Ц.

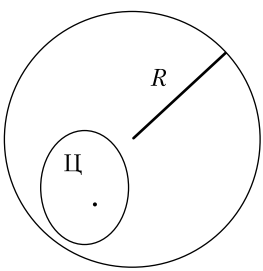


Рис. 1. Геометрический способ вычисления вероятности

Аналогичная ситуация возникает в задаче о встрече. Два человека договорились встретиться в определенном месте между 12 и 13 часами.

Человек, пришедший первым, ждет другого 20 минут и уходит. Чему равна вероятность их встречи, если приход каждого из них в течение указанного часа происходит случайно и моменты прихода независимы?

Решение.

Пусть x — время прихода лица A, y — время прихода лица B. Встреча состоится, если

$$|x - y| \le 20\,. \tag{2}$$

Представим задачу графически в декартовой системе координат, в которой по оси X отложим время x прихода лица A, а по оси Y — время y прихода лица B (рис. 2).

Приход лиц A и B в назначенное место встречи описывается случайной точкой в квадрате на указанной плоскости со стороной 60 мин. Событие «встреча» соответствует попаданию точки в область, определяемую неравенством (2). Более подробно это неравенство можно записать в виде:

$$\text{если } x \ge y\text{, то } x - y \le 20\,,$$

или

$$\text{если } x < y\text{, то } y - x \le 20\,.$$

Эта область на рисунке заштрихована.

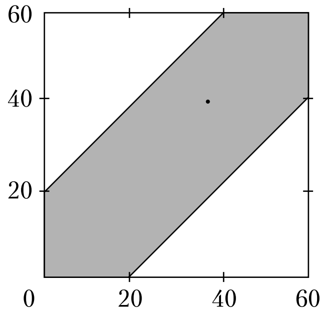


Рис. 2. Геометрический способ вычисления вероятности в задаче о встрече

Вероятность встречи можно вычислить как отношение площади заштрихованной области к площади квадрата, то есть

$$p = \frac{60^2 - 40^2}{60^2} = \frac{5}{9}\,.$$

Приведенные примеры можно использовать при решении задач, в которых целесообразно применение геометрического способа вычисления вероятности.

Контрольные вопросы

В чем состоит геометрический способ вычисления вероятности событий?

Задачи

3.1. На отрезке длиной 1000 мм выделен отрезок длиной 250 мм. На отрезок длиной 1000 мм бросили случайным образом точку. Какова вероятность того, что эта точка попадет на выделенный отрезок?

3.2. На отрезок длиной l бросили случайным образом точку. Какова вероятность того, что эта точка окажется удаленной от концов отрезка на расстояние, большее $l/3$?

3.3. В эллипс $\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$ вписан круг $x^2+y^2=2^2$. В эллипс случайным образом бросили точку. Найти вероятность того, что она окажется в кольце между эллипсом и кругом.

3.4. В круг радиусом R бросили случайным образом точку. Найти вероятность того, что она окажется на расстоянии, меньшем, чем r, от центра круга.

3.5. В круг радиусом R бросили случайным образом точку. Найти вероятность того, что она попадет в правильный, вписанный в круг шестиугольник.

3.6. В равносторонний треугольник случайным образом бросили точку. Найти вероятность того, что она попадет в круг, вписанный в треугольник.

§ 4. Аксиоматическое определение вероятности событий

4.1. Аксиоматическое построение теории вероятностей

Аксиоматическое построение теории вероятностей было предложено А. Н. Колмогоровым [3]. Исходным понятием этой теории является множество U различных элементов, называемых **элементарными** событиями. Это множество может быть конечным или бесконечным, несчетным или счетным. В последнем случае его можно записать в виде последовательности

$$U = \{E_1, E_2, ..., E_n, ...\},$$

где E_i ($i \in \{1, 2, ..., n, ...\}$) — элементарное событие.

На основе него строится множество *F* подмножеств множества *U*. Элементы множества *F* называют случайными событиями. Над ними определяют действия сложения, умножения и взятия противоположного события. Суммой двух множеств является множество элементов, каждый из которых является элементом хотя бы одного из складываемых множеств. Произведением двух множеств (событий) называется множество элементов, каждый из которых входит в состав каждого из перемножаемых множеств. Противоположным множеству *A* называется множество $\bar{A}$, состоящее из всех элементов множества *U*, не являющихся элементами множества *A*. В состав множества *F* включают также пустое множество *V*, не содержащее ни одного элемента.

На множестве *F* определяется функция вероятности *p*, удовлетворяющая следующим аксиомам.

Аксиома 1. Каждому случайному событию *A* ставится в соответствие неотрицательное число

$$p(A) \geq 0, \tag{1}$$

называемое его вероятностью.

Аксиома 2.

$$p(U) = 1. \tag{2}$$

Аксиома 3. Если события $A_1, A_2, ..., A_n$ попарно несовместны, то есть $A_i * A_j = V$ (где $i \neq j$ и $i,\ j \in \{1,\ 2, ...,\ n\}$), то

$$p(A_1 + ... + A_n) = p(A_1) + ... + p(A_n). \tag{3}$$

4.2. Свойства функции вероятности

Из этих аксиом получаются следующие следствия:

$$\forall A \in F \quad p(\bar{A}) = 1 - p(A) \text{ (см. формулу (1.2.4))}; \tag{1}$$

$$p(V) = 0 \text{ (см. (1.2.5))}; \tag{2}$$

если $A \subset B$, то $p(A) \leq p(B)$ (см. формулу (1.2.6)); (3)

$$\forall A \in F \quad 0 \leq p(A) \leq 1 \text{ (см. формулу (1.2.7))}; \tag{4}$$

$$p(A+B)=p(A)+p(B)-p(A\cdot B). \qquad (5)$$

Формула (5) называется теоремой сложения вероятностей произвольных событий.

Из свойств, выраженных соотношениями (5) и (3) следует

$$p(A+B)\le p(A)+p(B). \qquad (6)$$

Обобщая свойство (6) на произвольное число событий, получаем

$$p(A_1+\ldots+A_n)\le p(A_1)+\ldots+p(A_n). \qquad (7)$$

Отметим сначала, что свойства 1–3 классической функции вероятности, представленные формулами (1.2.1)–(1.2.3), составляют содержание аксиом и выполняются автоматически. Приступим к доказательству остальных свойств функции вероятности.

$$1.\ \forall A \quad p(\bar{A})=1-p(A).$$

Доказательство.

Очевидно, что

$$\bar{A}+A=U.$$

Так как

$$\bar{A}*A=V,$$

то

$$p(\bar{A}+A)=p(\bar{A})+p(A)=p(U)=1.$$

Следовательно,

$$p(\bar{A})=1-p(A). \blacksquare$$

$$2.\ p(V)=0.$$

Доказательство.

Очевидно, что

$$V+U=U.$$

Так как

$$V*U=V,$$

то

$$p(V+U)=p(V)+p(U)=p(U) \;\Rightarrow p(V)=0\,.\;\blacksquare$$

3. Если $A \subset B$, то $p(A) \le p(B)$.

Доказательство.

Пользуясь свойствами операций над событиями, приведенными в табл. 2.6.1, получаем следующую цепочку соотношений:

$$B = B*U = B*(A+\bar{A}) = B*A + B*\bar{A} =^{*)}.$$

Поскольку $A \subset B$, то выполняется соотношение $B*A = A$. Это обстоятельство позволяет завершить цепочку тождественных преобразований в виде

$$^{*)}= A + B*\bar{A}\,.$$

Так как

$$A*(B*\bar{A}) = V\,,$$

то, вычислив функцию вероятности от обеих частей последнего равенства, получим

$$p(B) = p(A) + p(B*\bar{A}) \ge p(A)\,.\;\blacksquare$$

4. $\forall A \;\; 0 \le p(A) \le 1$.

Доказательство.

Так как, согласно аксиоме 1, $p(\bar{A}) \ge 0$, то из формулы (2) следует, что $p(A) \le 1$. Снова, учитывая аксиому 1, получаем $0 \le p(A)$. Окончательно

$$0 \le p(A) \le 1\,.\;\blacksquare$$

5. Теорема сложения вероятностей произвольных событий.

$$p(A+B) = p(A) + p(B) - p(A*B)$$

Доказательство.

Пусть события A и B не являются несовместными. Для доказательства настоящей теоремы воспользуемся аксиомой 3. Для этого событие $A + B$ представим в виде суммы несовместных событий. Возможны три следующих представления:

$$A + B = A + B*\bar{A}\,;$$

$$A + B = B + A*\bar{B}\,;$$

$$A+B=A*\overline{B}+B*\overline{A}+A*B\,.$$

В справедливости этих соотношений можно убедиться или с помощью диаграмм Венна, или аналитически. Действительно, например, для первого из соотношений получаем

$$A+B=A+B*(A+\overline{A})=A+B*A+B*\overline{A}=A*U+A*B+$$
$$+B*\overline{A}=A*(U+B)+B*\overline{A}=A*U+B*\overline{A}=A+B*\overline{A}\,.$$

Поскольку сложение событий обладает свойством коммутативности, то справедливость второго равенства следует из справедливости первого. Для обоснования третьего разложения суммы $A + B$ выполним следующие преобразования:

$$A+B=A(B+\overline{B})+B(A+\overline{A})=A*B+A*\overline{B}+B*A+B*\overline{A}=$$
$$=A*\overline{B}+B*\overline{A}+A*B.$$

Применяя аксиому 3 к трем разложениям суммы $A + B$ на частные случаи, получим:

1. $p(A+B)=p(A)+p(B*\overline{A})$.
2. $p(A+B)=p(B)+p(A*\overline{B})$.
3. $p(A+B)=p(A*\overline{B})+p(B*\overline{A})+p(A*B)$.

Выражая из первых двух уравнений вероятности $p(B*\overline{A})$ и $p(A*B)$ и подставляя их в третье, получим

$$p(A+B)=p(A+B)-p(A)+p(A+B)-p(B)+p(A*B)\,.$$

Из последнего равенства после тождественных преобразований получаем следствие 5.

Пример.

Определим функцию вероятности на множестве F так, чтобы выполнялись все три аксиомы А. Н. Колмогорова. Для этого можно выбрать неотрицательные числа p_i и придать им смысл значений функции вероятности, заданной на элементах E_i множества U:

$$p(E_1)=p_1,\;\; p(E_2)=p_2,...,\;\; p(E_n)=p_n\,. \tag{8}$$

Выбирать числа p_i следует так, чтобы выполнялось равенство

$$p_1+p_2+...+p_n=1\,. \tag{9}$$

При этом вероятность произвольного события $(E_{i_1},E_{i_2},...,E_{i_s})$ принимается равной

$$p(E_{i_1}, E_{i_2}, ..., E_{i_s}) = p_{i_1} + ...p_{i_s} . \quad (10)$$

Аксиоматика Колмогорова допускает разные варианты соотношений (8) при условии (9). Выбор нужного варианта должен учитывать реальный процесс. Например, в случае бросания правильной игральной кости следует считать $n = 6$ и

$$p_1 = ... = p_6 = \frac{1}{6} .$$

Отметим, что аксиоматика Колмогорова применима к случаю и счетного (бесконечного) и несчетного множества элементарных событий. В первом случае сумма (9) превращается в ряд. Обобщая основные положения аксиоматической теории вероятностей, отметим, что основными ее элементами являются:

- U — множество элементарных событий;
- F — множество случайных событий;
- $p(A)$ — функция вероятности, определенная на множестве F ($A \in F$).

Контрольные вопросы

1. Какое событие в аксиоматической теории вероятности называется элементарным?
2. Какое событие в аксиоматической теории вероятности называется случайным?
3. Может ли вероятность элементарного события быть меньше нуля?
4. Может ли вероятность, вычисленная для исходного множества U элементарных событий, быть меньше единицы?
5. Как вычисляется вероятность суммы попарно несовместных событий?
6. Сформулируйте основные положения аксиоматической теории вероятности.

§ 5. Статистическое определение вероятности событий

В аксиоматике Колмогорова определение равенств (4.2.8) может представлять сложную задачу. В этих случаях для определения величин вероятностей p_i наступления элементарных событий проводят многократные испытания. Сами вероятности p_i определяют по формуле

$$p_i = \frac{m_i}{n} , \quad (1)$$

где m_i принимают равным числу наступления элементарного события E_i; n — общее число испытаний.

Частотой появления события называют отношение $\frac{m_i}{n}$. В [6] вероятность, определенная по формуле (1), называется эмпирической.

В значительном количестве случаев вероятность отклонения числа p_i от некоторого значения оказывается стремящейся к нулю при неограниченном росте числа испытаний n. В этом состоит закон устойчивости частот. Иллюстрацией закона устойчивости частот являются результаты опытов [1] бросания монеты, приведенные в таблице.

Результаты бросания монеты

Экспериментатор	**Число бросаний**	**Число выпадений герба**	**Частота**
Бюффон	4040	2048	0,5080
К. Пирсон	12 000	6019	0,5016
К. Пирсон	24 000	12 012	0,5005

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте способ определения статистической вероятности события.

Задачи

5.1. С корабля произведено 16 выстрелов по береговой батарее, из которых 12 попали в цель. Найти относительную частоту попаданий в цель.

§ 6. Условная вероятность

Наряду с понятием вероятности события используется понятие условной вероятности. По существу, понятие условной вероятности связано с включением в рассмотрение двух наборов условий, при которых происходят испытания. Причем следующий набор условий включает в себя предыдущий как составную часть. Вероятности, определяемые при первоначальном комплексе условий, называются **безусловными**, а вероятности, определенные при дополнительных условиях, — **условными**.

Рассмотрим следующий пример. Брошены две игральные кости. Чему равна вероятность того, что сумма выпавшего числа очков равна 8 (событие A), если известно, что эта сумма есть четное число очков? В этом примере первоначальным набором условий является бросание двух игральных костей. Дополнительным условием является выпадение четной суммы очков. Запишем возможные результаты испытаний в табл. 1. Число на первой кости будем записывать первым, а число на второй кости — вторым.

Таблица 1. Результаты бросания двух игральных костей

2-я кость / **1-я кость**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(6,1)
2	(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)	(6,2)
3	(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	(5,3)	(6,3)
4	(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	(5,4)	(6,4)
5	(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)	(6,5)
6	(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)	(5,6)	(6,6)

Вероятности выпадения любой пары чисел одинаковы. Всего возможно 36 пар чисел. Если рассматривать совокупность условий как бросание двух костей, а событием A считать выпадение суммы чисел на двух костях, равной 8, то число элементарных событий, благоприятствующих этому событию, равно 5 и вероятность события A равна

$$p(A) = \frac{5}{36}.$$

Если в дополнение к прежнему условию бросания двух костей добавить еще условие B учета только тех испытаний, при которых выпадает четное число очков, то число возможных исходов испытаний становится не 36, а 18. По-прежнему выпадению восьмерки благоприятствуют 5 случаев. Вероятность выпадения восьми очков при новом наборе условий определяется равенством

$$p'(A) = \frac{5}{18}.$$

Отметим также, что вероятность выпадения четного числа очков определяется соотношением

$$p(B) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}.$$

В рамках прежних условий проведения испытаний вероятность выпадения суммы очков, равной 8, при условии выпадения четной суммы очков рассматривают как **условную** и обозначают ее в виде

$$p'(A) = p(A / B) = \frac{5}{18}.$$

Поскольку событие A (сумма чисел на двух костях равна 8) влечет за собой событие B (сумма чисел на двух костях четна), то есть $A \subset B$, то $A = A * A = A * B$ и результат вычисления условной вероятности можно в рассматриваемом случае получить из безусловных вероятностей в виде

$$p'(A) = p(A / B) = \frac{5}{18} = \frac{5}{36} : \frac{1}{2} = \frac{p(A)}{p(B)} = \frac{p(A * B)}{p(B)}.$$

Рассмотренный пример дает возможность определить понятие условной вероятности в рамках классического определения вероятности следующим образом.

Определение условной вероятности.

Пусть при проведении испытания возможно осуществление n равновероятных элементарных событий $A_1, A_2, ..., A_n$. Они, очевидно, будут попарно несовместны.

Пусть событию B благоприятствуют k элементарных событий, событию $A * B$ благоприятствуют r элементарных событий.

Очевидно, что $r \le k$. Пусть при проведении испытаний дополнительным условием является совершение события B. При этом дополнительном условии испытания существует лишь k несовместных равновероятных элементарных события. Среди них, благоприятствующих наступлению события A, будет r элементарных событий. Следовательно, **условная** вероятность представится выражением

$$p(A / B) = \frac{r}{k} = \frac{\frac{r}{n}}{\frac{k}{n}} = \frac{p(A * B)}{p(B)}. \qquad (1)$$

Формулу (1) можно рассматривать как теорему, выражающую вероятность события A, рассчитанную при дополнительном условии осуществления события B через вероятности событий $A * B$ и B, рассчитанные при первоначальном комплексе условий проведения испытания.

$$p(A * B) = p(B) * p(A / B). \qquad (2)$$

Поскольку операция умножения событий является коммутативной, то выполняться будет также следующее соотношение:

$$p(A*B) = p(B*A) = p(A)*p(B/A).$$

Объединяя два последних равенства, получаем

$$p(A*B) = p(A)*p(B/A) = p(B)*p(A/B). \qquad (3)$$

Отметим, что формулу (1) можно использовать также для формального определения понятия условной вероятности.

Формулу (2) для вычисления вероятности произведения двух событий можно распространить на случай произведения произвольного числа n событий $A_1, A_2, ..., A_n$ путем ее последовательного применения. Действительно,

$$\begin{aligned} p(A_1*A_2*...*A_n) &= p(A_1*A_2*...*A_{n-1})* \\ *p(A_n/(A_1*A_2*...*A_{n-1})) &= p(A_1*A_2*...*A_{n-2})* \\ *p(A_{n-1}/(A_1*A_2*...*A_{n-2}))*p(A_n/(A_1*A_2*...*A_{n-1})) &= \\ ... = p(A_1)*p(A_2/A_1)*p(A_3/(A_1*A_2))*...* \\ *p(A_n/(A_1*A_2*...*A_{n-1})). \qquad (4) \end{aligned}$$

Пример. Набирая номер телефона, абонент забыл последние три цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наудачу. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры.

Решение.

Пусть A_1 — событие набора правильной первой цифры;

A_2 — событие набора правильной второй цифры и

A_3 — событие набора правильной третьей цифры.

Тогда искомая вероятность может быть вычислена по формуле (4)

$$p(A_1*A_2*A_3) = p(A_1)*p(A_2/A_1)*p(A_3/(A_1*A_2)).$$

Поскольку при наборе первой цифры имеется возможность набрать одну из 10 цифр {0, 1, ..., 9}, среди которых только одна верная, то

$$p(A_1) = \frac{1}{10}.$$

Набранная первая правильная цифра уже не может быть использована для набора второй цифры, поскольку по условию задачи все они разные. Таким образом, при наборе второй цифры предоставляется возможность набрать любую из 9 оставшихся. Это значит, что

$$p(A_2 / A_1) = \frac{1}{9}.$$

Аналогично

$$p(A_3 /(A_1 * A_2)) = \frac{1}{8}.$$

Окончательно

$$p(A_1 * A_2 * A_3) = \frac{1}{10} * \frac{1}{9} * \frac{1}{8} = \frac{1}{720}. \blacksquare$$

Контрольные вопросы

1. Как определяется понятие условной вероятности?
2. Приведите обозначение условной вероятности.

Задачи

6.1. В ящике 10 белых шаров и 4 черных. Из ящика последовательно вынули два шара. Какова вероятность вынуть второй раз черный шар, если известно, что сначала был вынут: а) черный шар; б) белый шар? Решить задачу, используя формулу (6.1) и непосредственно, используя дополнительные условия.

6.2. В ящике 6 белых шаров и 4 черных. Из ящика последовательно вынули два шара. Какова вероятность вынуть два черных шара?

§ 7. Независимые события. Теорема умножения вероятностей

Понятие о независимых событиях основывается на опыте.

Пример. Пусть бросание двух игральных костей осуществляется так, чтобы выпадение числа на одной кости не влияет на выпадения числа на другой.. Выпадение четного числа очков на первой кости обозначим событием A, а выпадение нечетного числа на второй кости — событием B. Найдем вероятность $p(A * B)$ произведения $A * B$ событий A и B, воспользовавшись табл. (6.1). Событию $A*B$ благоприятствуют 9 случаев, следовательно,

$$p(A * B) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}.$$

Каждому из событий A и B благоприятствуют 18 случаев, следовательно,

$$p(A) = p(B) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}.$$

Пусть при бросании двух игральных костей на первой кости выпало четное число, а на второй — любое число. Таких случаев возможно 18. При этом количество случаев, когда на второй кости выпадает нечетное число, равно 9. Таким образом,

$$p(B / A) = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}.$$

В этом случае формула (6.1.2) приобретает вид

$$p(A * B) = p(A) * p(B / A) = \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

С другой стороны,

$$p(A)p(B) = \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Таким образом, заключаем, что

$$p(A * B) = p(A) * p(B / A) = p(A)p(B), \tag{1}$$

или после сокращения на $p(A)$

$$p(B / A) = p(B). \tag{2}$$

Таким образом, вероятность выпадения нечетного числа на второй кости (событие B) является одинаковой как при бросании двух игральных костей ($p(B)$), так и в испытании бросания двух игральных костей при условии выпадения на первой четного числа очков ($p(B/A)$). В этом случае говорят о независимости события B от события A.

Определение. Событие B называется **независимым** от события A, если выполняется равенство (2).

Понятие независимости событий взаимно, то есть если верно равенство (2), то, как легко проверить, верно равенство

$$p(A / B) = p(A). \tag{3}$$

Действительно, подставив в формуле (6.1.3) вместо условной вероятности $p(B/A)$ правую часть соотношения (2), то есть вероятность $p(B)$, и сократив полученное соотношение на вероятность $p(B)$, получим равенство (3).

Таким образом, если события A и B независимы, то для них выполняется равенство

$$p(A * B) = p(A)p(B). \tag{4}$$

Равенство (4) составляет содержание теоремы умножения вероятностей независимых событий.

Контрольные вопросы

1. Какие два события называются независимыми?
2. Приведите формулу вычисления вероятности произведения двух независимых событий.

Задачи

7.1. В первом ящике 6 белых шаров и 4 черных, а во втором 4 белых и 6 черных. Из каждого ящика вынули по шару. Какова вероятность того, что: а) оба вынутых шара оказались белыми; б) оба вынутых шара оказались черными; в) один из вынутых шаров оказался белым, а другой черным?

7.2. Три стрелка договорились по очереди стрелять по одной и той же мишени до тех пор, пока она не будет поражена. Вероятность поразить цель первым из стрелявших по очереди стрелком равна p_1, вторым — p_2, третьим — p_3. После поражения цели стрельба прекращается. Найти вероятность того, что будет сделан: а) один выстрел; б) два выстрела; в) три выстрела.

7.3. Три курсанта стреляют из пистолета по мишени. Вероятность поражения мишени для первого курсанта равна 0,9, для второго — 0,8, для третьего — 0,7. Найти вероятность того, что в мишень попадет хотя бы один курсант, если каждый из них сделает по одному выстрелу.

7.4. Три стрелка независимо друг от друга стреляют по одной и той же цели. Вероятность попадания по цели первым стрелком равна p_1, вторым — p_2, третьим — p_3. Найти вероятность того, что цель будет поражена: а) один раз; б) два раза; в) три раза; г) ни разу, д) хотя бы один раз.

§ 8. Формула полной вероятности. Формула Байеса

8.1. Формула полной вероятности

Пусть событие B включено в сумму событий $A_1, A_2, ..., A_n$, то есть

$$B \subset A_1 + A_2 + ... + A_n \,. \qquad (1)$$

В частности, события $A_1, A_2, ..., A_n$ могут составлять полную группу событий

$$U = A_1 + A_2 + ... + A_n . \quad (2)$$

Тогда

$$B = B * (A_1 + A_2 + ... + A_n) = \sum_{i=1}^{n} B * A_i . \quad (3)$$

Вычислим вероятность события B, предполагая, что события A_1, A_2, ..., A_n попарно несовместны:

$$A_i * A_j = V \quad \text{при} \quad i \neq j \ \text{и} \ i, j \in [1, n]. \quad (4)$$

Поскольку при проведении испытания выбирается только одна урна, то $A_i * A_j = V$ при $i \neq j$ и i, $i, j \in [1, 3]$. Тогда попарно несовместными будут произведения событий $B * A_i$, и, пользуясь аксиомой 3, получим следующий результат:

$$p(B) = p(\sum_{i=1}^{n} B * A_i) = \sum_{i=1}^{n} p(B * A_i) = \sum_{i=1}^{n} p(A_i) p(B / A_i) .$$

Сохраняя первое и последнее выражение этой цепочки равенств, получим так называемую формулу **полной вероятности** в виде

$$p(B) = \sum_{i=1}^{n} p(A_i) p(B / A_i) . \quad (5)$$

Замечание. Попарная несовместность событий A_1, A_2, ..., A_n, выраженная соотношениями (4), и соотношение (1) означают, что событие B может произойти только с одним из событий A_1, A_2, ..., A_n. Такие события A_1, A_2, ..., A_n иногда называют гипотезами.

Пример. Имеется пять урн:

- 2 урны состава A_1 — по два белых шара и одному черному;
- 1 урна состава A_2 — с 10 черными шарами;
- 2 урны состава A_3 — по три белых шара и одному черному.

Наудачу выбирается урна, а из нее наудачу выбирается шар. Чему равна вероятность того, что вынут белый шар (событие B)?

Решение.

Так как $U = A_1 + A_2 + A_3$, то $B = A_1 * B + A_2 * B + A_3 * B$. Тогда

$$p(B) = p(A_1) p(B / A_1) + p(A_2) p(B / A_2) + p(A_3) p(B / A_3) .$$

Рассчитаем каждую из вероятностей отдельно:

$$p(A_1) = \frac{2}{5}, \ p(A_2) = \frac{1}{5}, \ p(A_3) = \frac{2}{5} .$$

$$p(B / A_1) = \frac{2}{3},\ \ p(B / A_2) = 0,\ \ p(B / A_3) = \frac{3}{4}.$$

Окончательно

$$p(B) = \frac{2}{5} * \frac{2}{3} + \frac{1}{5} * 0 + \frac{2}{5} * \frac{3}{4} = \frac{17}{30}.$$

Контрольные вопросы

1. Напишите формулу вычисления полной вероятности.
2. Обязательно ли сумма всех гипотез в формуле полной вероятности должно составлять достоверное событие?

Задачи

8.1.1. На заводе осуществляется военная приемка одинаковых изделий, выпущенных тремя цехами. Первый цех выпустил 20 изделий, из которых одно оказалось бракованным, второй цех выпустил 40 изделий, из которых 3 оказались бракованными, а третий цех выпустил 40 изделий, из которых 4 оказались бракованными. Наудачу выбрали цех, а потом — изделие, которое он выпустил. Найти вероятность того, что наудачу взятое изделие окажется бракованным.

8.1.2. В оружейном шкафу 30 автоматов. Из них 20 автоматов новой модели и 10 — старой. Часовой, заступая на службу, случайно выбрал автомат. Известно, что вероятность поразить цель очередью из автоматов новой модели составляет 0,9, а из старой — 0,8. Какова вероятность поразить цель при стрельбе часовым одной очередью?

8.1.3. Из n урн выбрали наудачу одну, а из нее наудачу шар. Какова вероятность выбрать белый шар, если вероятность выбора урны с номером i составляет p_i, а вероятность выбрать белый шар из урны с номером i составляет $в_i$ $(\sum_{i=1}^{n} p_i = 1)$? Решить задачу для случая $n = 4, p_1 = 0{,}15, p_2 = 0{,}3, p_3 = 0{,}4, p_4 = 0{,}25, в_1 = 0{,}6, в_2 = 0{,}7, в_3 = 0{,}75, в_4 = 0{,}8$.

8.1.4. В первом учебном классе 32 курсанта, из них 3 имеют калькуляторы; во втором классе 29 курсантов, из них 4 имеют калькуляторы; в третьем классе 20 курсантов, из них 2 имеют калькуляторы; в четвертом классе 19 курсантов, из них 2 имеют калькуляторы. Наудачу выбрали класс, а в нем — курсанта. Какова вероятность того, что он имеет калькулятор?

8.2. Формула Байеса[1]

Пусть имеет место соотношение (8.1.4). Определим вероятность события A_i, если известно, что событие B произошло, по формуле

$$p(A_i / B) = \frac{p(A_i * B)}{p(B)} = \frac{p(A_i)p(B / A_i)}{\sum_{i=1}^{n} p(A_i)p(B / A_i)}. \qquad (1)$$

Формула (1) называется формулой **вероятности гипотез** [7] или формулой **Байеса**. Общая схема применения этой формулы такова. Пусть событие B может осуществляться в различных случаях, относительно которых может быть сделано n гипотез: A_1, A_2, ..., A_n. При этом гипотезы попарно несовместны. Пусть вероятности этих гипотез $p(A_i)$ и вероятности $p(B/A_i)$ известны до испытания. По формуле (1) вероятности гипотез можно сосчитать вероятность каждой из них в случае наступления события B.

Пример.

Предыдущий пример с 5 урнами. Пусть наудачу выбран белый шар (событие B). Какова вероятность, что он оказался выбранным из урн типов A_1, A_2, A_3?

$$p(A_1 / B) =$$

$$= \frac{p(A_1) * p(B / A_1)}{p(A_1) * p(B / A_1) + p(A_2) * p(B / A_2) + p(A_3) * p(B / A_3)} =$$

$$= \frac{\frac{2}{5} * \frac{2}{3}}{\frac{2}{5} * \frac{2}{3} + \frac{1}{5} * 0 + \frac{2}{5} * \frac{3}{4}} = \frac{4}{4 + \frac{9}{2}} = \frac{8}{17},$$

$$p(A_2 / B) =$$

$$= \frac{p(A_2) * p(B / A_2)}{p(A_1) * p(B / A_1) + p(A_2) * p(B / A_2) + p(A_3) * p(B / A_3)} = 0,$$

$$p(A_3 / B) =$$

[1] Байес Томас (1702–1761) — английский математик. Член Лондонского королевского общества. Основные труды относятся к теории вероятностей. Теорема Байеса опубликована в 1763 г.

$$= \frac{p(A_3) * p(B / A_3)}{p(A_1) * p(B / A_1) + p(A_2) * p(B / A_2) + p(A_3) * p(B / A_3)} =$$

$$= \frac{\frac{2}{5} * \frac{3}{4}}{\frac{2}{5} * \frac{2}{3} + \frac{1}{5} * 0 + \frac{2}{5} * \frac{3}{4}} = \frac{3}{\frac{8}{3} + 3} = \frac{9}{17}.$$

Контрольные вопросы

1. Почему формула Байеса называется формулой вероятности гипотез?
2. Назовите событие, являющееся произведением двух разных гипотез.
3. Укажите возможные соотношения между суммой всех гипотез, достоверным событием и событием-условием, использующимся в формуле Байеса.

Задачи

8.2.1. В оружейном шкафу находится 30 автоматов. Из них 10 автоматов новой модели и 20 — старой располагаются вперемежку. Часовой, заступая на службу, случайно выбрал автомат. Известно, что вероятность поразить цель очередью из автоматов новой модели составляет 0,9, а из старой — 0,8. Во время несения службы часовой выпустил одну очередь по цели и поразил ее. Какова вероятность того, что часовой стрелял из автомата: а) новой модели; б) старой модели?

8.2.2. В роте три учебных класса. В первом учебном классе 32 курсанта, из них 3 имеют калькуляторы; во втором классе 29 курсантов, из них 4 имеют калькуляторы; в третьем классе 20 курсантов, из них 2 имеют калькуляторы, и в четвертом классе 19 курсантов, из них 2 имеют калькуляторы. Наудачу выбрали класс, а из него курсанта. Оказалось, что он имеет калькулятор. Определить вероятность того, что он: из а) первого класса; б) второго класса; в) третьего класса; г) четвертого класса.

§ 9. Независимые испытания. Формула Бернулли[1]

9.1. Понятие о независимых испытаниях и формула Бернулли

Пусть в результате испытания событие A может появиться с вероятностью p [5]. Тогда вероятность наступления события $\overline{A}$ равна $q = 1 - p$. Требуется определить вероятность появления события A m раз в результате проведения n независимых испытаний ($0 \le m \le n$). Эта **схема независимых повторных испытаний** была предложена Я. Бернулли.

Приступим к решению задачи. Запишем результаты какой-либо серии испытаний в виде последовательности появления событий A и $\overline{A}$:

$$\underbrace{A\overline{A}AA\overline{A}...A}_{n \text{ раз}}. \qquad (1)$$

В этой последовательности каждому событию можно сопоставить номер испытания, в результате которого оно появилось. Две такие последовательности событий A и $\overline{A}$ будем считать одинаковыми, если одному и тому же номеру будет соответствовать одно и то же событие в каждой последовательности. В противном случае последовательности будем считать различными.

Среди множества всевозможных последовательностей нас будут интересовать только те, в которых содержатся m раз событие A и $n - m$ раз событие $\overline{A}$. Для каждой такой последовательности можно составить сочетание из m различных номеров испытаний, в которых появилось событие A. Поэтому число таких различных последовательностей можно получить как число сочетаний из n первых чисел натурального ряда по m чисел в каждом сочетании, то есть как C_n^m. Вероятность появления каждой такой последовательности равна произведению вероятностей наступления каждого события, поскольку все они независимы, то есть $p^m q^{n-m}$. Действительно, выразим вероятность события (1) через условные вероятности, используя формулу (6.1.4):

$$p(A\overline{A}AA\overline{A}...A) = p(A) * p(\overline{A} / A) * p(A / A\overline{A}) * ... *$$

$$*p(A / A\overline{A}AA\overline{A}...) = p^m * q^{n-m}.$$

В последнем соотношении предполагалось, что каждое последующее событие в серии (1) является независимым от всех предшествующих.

---

[1] Я. Бернулли (1654–1705) — швейцарский математик.

Поскольку каждая такая серия испытаний является несовместной с другой, то справедливо соотношение

$$p_n(m) = p(Б_1 + Б_2 + ... + Б_{C_n^m}) = C_n^m p^m q^{n-m}, \qquad (2)$$

где $Б_i$ — благоприятный исход с номером i, то есть последовательность событий A и $\bar{A}$, содержащая m событий A.

Закон (2) вычисления вероятности появления события A m раз в серии n последовательных независимых испытаний называется **формулой Бернулли**, или биномиальным по следующим причинам. Вероятность совершения событий A или $\bar{A}$ в каждом из серии n независимых испытаний равна единице. Возведенная в степень n, она представится выражением

$$(p+q)^n = 1^n = 1.$$

Возведем сумму в степень, используя формулу бинома Ньютона:

$$(p+q)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m p^m q^{n-m} = 1. \qquad (3)$$

Каждое слагаемое суммы (3) можно рассматривать как вероятность появления события A m раз в серии из n независимых испытаний. Совокупность таких событий (при $0 \le m \le n$) составляет полную группу несовместных событий.

Пример. При проведении зачета методом тестирования знаний студентов используется 5 вопросов. На каждый вопрос предлагается 5 вариантов ответов, среди которых только один верный, а остальные правдоподобные. Зачет студент получает, если даст не менее 3 правильных ответов. Какова вероятность получения зачета студентом, совершенно не знающим предмета, для которого все варианты ответов кажутся одинаково правдоподобными?

Решение. Для студента, совершенно не знающего учебной дисциплины, вероятность правильного ответа на любой из 5 вопросов билета составляет $p = \frac{1}{5}$. Полным набором несовместных (элементарных) событий является получение числа правильных ответов на вопросы билета равным 0, 1, 2, 3, 4, 5. Сумма последних в этом ряду трех элементарных событий составляет событие B получения зачета. Таким образом,

$$p(B) = p_5(3) + p_5(4) + p_5(5) = C_5^3 \left(\frac{1}{5}\right)^3 * \left(\frac{4}{5}\right)^{5-3} +$$

$$+C_5^4\left(\frac{1}{5}\right)^4*\left(\frac{4}{5}\right)^{5-4}+C_5^5\left(\frac{1}{5}\right)^5*\left(\frac{4}{5}\right)^{5-5}=$$

$$=0,0512+0,0064+0,00032=0,05792.$$

9.2. Наиболее вероятное число появления события A в серии из *n* испытаний по схеме Бернулли

Определим теперь число появлений события A в серии из n независимых испытаний, соответствующее наибольшему значению вероятности $p_n(m)$. Исходя из статистического определения вероятности p ее величина будет близкой к значению

$$p\approx\frac{m}{n}\text{, то есть } m\approx p*n. \tag{1}$$

Найдем эту величину более точно путем исследования на максимум функции (9.1.1). Пусть величина m доставляет максимум функции (9.1.1). Тогда будут выполняться следующие неравенства:

$$p_n(m-1)\le p_n(m) \quad \text{и} \quad p_n(m+1)\le p_n(m)\text{, или}$$

$$C_n^{m-1}p^{m-1}q^{n-m+1}\le C_n^m p^m q^{n-m} \quad \text{и} \quad C_n^{m+1}p^{m+1}q^{n-m-1}\le C_n^m p^m q^{n-m}.$$

Подставляя в полученные неравенства известную формулу для числа сочетаний

$$C_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!} \tag{2}$$

и производя тождественные преобразования, получим

$$\frac{1}{(m-1)!(n-m+1)!}\frac{q}{p}\le\frac{1}{m!(n-m)!} \text{ и } \frac{1}{(m+1)!(n-m-1)!}\frac{p}{q}\le\frac{1}{m!(n-m)!},$$

или

$$\frac{1}{(n-m+1)}\frac{q}{p}\le\frac{1}{m} \quad \text{и} \quad \frac{1}{(m+1)}\frac{p}{q}\le\frac{1}{(n-m)},$$

или

$$mq\le pn-mp+p \quad \text{и} \quad pn-pm\le mq+q,$$

или

$$pn-q\le m\le pn+p. \tag{3}$$

Если $pn - q$ не есть целое число, то условиям (3) соответствует только одно решение задачи. Если $pn - q$ является целым числом, то условиям (3) соответствуют два решения задачи.

Контрольные вопросы

1. В чем состоит схема Бернулли независимых испытаний?
2. По какой формуле рассчитывается вероятность наступления события A m раз при n независимых испытаниях?

Задачи

9.1. Монету бросают два раза. Какова вероятность того, что герб выпадет один раз?

9.2. Монету сначала бросают 4 раза, а во второй серии испытаний — 6. Вероятность чего больше: двукратного выпадения «орла» в первой серии или трехкратного во второй?

9.3. Монету бросают 7 раз. Какова вероятность выпадения «орла» более 5 раз?

9.4. В семье трое детей. Найти вероятность того, что среди них: а) двое мальчиков; б) двое девочек. Считать вероятность рождения мальчиков равной 0,52.

9.5. В урне 2 белых и 3 черных шара. Из урны последовательно 5 раз извлекли шар с последующим его возвращением и перемешиванием. Какова вероятность того, что было извлечено 3 белых шара и 2 черных?

9.6. В экзаменационном билете 5 вопросов. На каждый вопрос предлагается 5 вариантов ответов, среди которых только один правильный. Какова вероятность получения проходного балла курсантом, абсолютно незнакомым с предметом, для которого все варианты ответов представляются одинаково правдоподобными?

Замечание. Предполагается, что 3 правильных ответа оцениваются на «3», 4 — на «4», 5 — на «5». В остальных случаях выставляется оценка «2».

9.7. В экзаменационном билете 5 вопросов. Каким должно быть минимальное число вариантов ответов, содержащих только один правильный, чтобы вероятность получения проходного балла курсантом, абсолютно незнакомым с предметом, для которого все варианты ответов представляются одинаково правдоподобными, составила величину менее 0,01?

9.8. Шесть кораблей, идя строем фронта, форсируют линию минного заграждения. Вероятность подрыва каждого из них равна $p = 0{,}6$. Определить наиболее вероятное количество подорвавшихся кораблей [13].

9.9. Вероятность попадания глубинной бомбы в подводную лодку равна $p = 0{,}12$. Сторожевой корабль сбросил 10 бомб. Какова вероятность того, что подводная лодка будет поражена, если для этого требуется не менее двух попаданий [13]?

§ 10. Локальная и интегральная теоремы Муавра–Лапласа

10.1. Локальная теорема Муавра–Лапласа

Использование формулы

$$p_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} \tag{1}$$

Бернулли для больших значений n является затруднительным. Это связано не только с необходимостью возведения чисел p или q в большую степень, но и с необходимостью вычислять коэффициент

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \tag{2}$$

Для облегчения решения этой задачи используют **локальную теорему Муавра—Лапласа**: при вычислении вероятности $p_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$ по схеме Бернулли возможно использование формулы: [4]

$$p_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x), \tag{3}$$

где

$$\varphi(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \tag{4}$$

и

$$x \equiv \frac{m - np}{\sqrt{npq}}.$$

При этом $p \neq 0$ и $p \neq 1$. Функция $\varphi(x)$ носит название нормированной плотности вероятностей нормального закона распределения случайной величины.

Приближенное равенство (3) тем точнее, чем больше число повторных независимых опытов n:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_n(m)}{\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x)} = 1 . \qquad (5)$$

Доказательство формул (3) и (5) можно найти, например, в [1]. Функция $\varphi(x)$ табулирована (см. [1] или прил. 1).

Пример. Найти вероятность того, что событие A наступит ровно 80 раз в 400 испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна 0,2.

Решение.

$$n = 400,\ \ m = 80,\ \ p = 0,2 .\ \ x \equiv \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{80 - 400 * 0,2}{\sqrt{400 * 0,2 * 0,8}} = 0 ;$$

$$\varphi(0) = 0,3989 .\ \ p_{400}(80) \approx \frac{0,3989}{8} = 0,04986 .$$

Точное значение, рассчитанное по формуле Бернулли, — $p_{400}(80) = 0{,}0498$.

Контрольные вопросы

1. В каких случаях целесообразно использовать локальную теорему Муавра—Лапласа?

Задачи

10.1.1. По мишени выстрелили 1000 раз. Вероятность попадания в мишень равна 0,9. Какова вероятность того, что мишень будет поражена 900 раз?

10.1.2. В городе в течение года родилось 1000 детей. Вероятность рождения мальчика составила 0,51. Какова вероятность того, что среди рожденных детей окажется 510 мальчиков?

10.2. Интегральная теорема Муавра—Лапласа

Не менее часто встречаются задачи определения вероятности $p_n(m_1, m_2)$ того, что в n испытаниях событие A появится от m_1 до m_2 раз включительно. Прямое использование формулы Бернулли встречает еще большие затруднения. При тех же условиях, для которых справедлива локальная теорема Муавра—Лапласа, пользуются **интегральной тео-**

ремой Муавра—Лапласа. Она выражается следующим приближенным равенством:

$$p_n(m_1, m_2) \approx \int_{x_1}^{x_2} \varphi(t)dt = \bar{\Phi}(x_2) - \bar{\Phi}(x_1) \ , \qquad (1)$$

где

$$\bar{\Phi}(x) \equiv \int_0^x \varphi(y)dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{y^2}{2}} dy \ , \qquad (2)$$

$$x_1 \equiv \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} \ \text{и} \ x_2 \equiv \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} \ .$$

Функция $\bar{\Phi}(x)$ называется **нормированной функцией Лапласа**. Нормированной она называется потому, что

$$\bar{\Phi}(\infty) - \bar{\Phi}(-\infty) = 1 \ .$$

Она является нечетной, то есть для нее справедливо соотношение

$$\bar{\Phi}(-x) = -\bar{\Phi}(x) \ .$$

Значения этой функции приведены в прил. 2.

Пример. Вероятность того, что деталь не прошла проверку ОТК, равна $p = 0{,}2$. Найти вероятность того, что среди 400 случайно отобранных деталей окажутся непроверенными от 70 до 100 деталей.

Решение.

$$n = 400, \ \ m_1 = 70, \ \ m_2 = 100, \ \ p = 0{,}2, \ \ q = 0{,}8;$$

$$x_1 \equiv \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{70 - 400 * 0{,}2}{\sqrt{400 * 0{,}2 * 0{,}8}} = -1{,}25;$$

$$x_2 \equiv \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{100 - 400 * 0{,}2}{\sqrt{400 * 0{,}2 * 0{,}8}} = 2{,}5;$$

$$p_n(m_1, m_2) \approx \Phi(2{,}5) - \Phi(-1{,}25) = \Phi(2{,}5) + \Phi(1{,}25) =$$

$$= 0{,}4938 + 0{,}3944 = 0{,}8882.$$

Контрольные вопросы

1. В каких случаях целесообразно использовать интегральную теорему Муавра—Лапласа?

Задачи

10.2.1. По мишени выстрелили 1000 раз. Вероятность попадания в мишень равна 0,9. Какова вероятность того, что мишень будет поражена от 400 до 600 раз?

10.2.2. Монету бросили $2n$ раз. Какова вероятность того, что «орел» выпадет от $n - \sqrt{n}$ до $n + \sqrt{n}$ раз? Считать n большим числом.

Глава III
Случайные величины

§ 1. Дискретные случайные величины

1.1. Закон распределения дискретной случайной величины

Пусть при испытании происходят элементарные события, каждому из которых сопоставляется число x_i. Различные числа расположим в виде последовательности

$$x_1, x_2, ..., x_n, ... \tag{1}$$

Эта последовательность может быть конечной или бесконечной. Каждому из чисел x_i можно сопоставить вероятность p_i, равную вероятности появления события, которому сопоставлено это число. При этом в соответствии со свойствами функции вероятности должны выполняться соотношения

$$p_i \geq 0 \text{ и} \tag{2}$$

$$\sum_i p_i = 1, \tag{3}$$

где суммирование распространяется по всем индексам i, то есть по всем элементарным событиям.

В этом случае говорят о задании **дискретной случайной величины** X. Под символом X будет подразумеваться имя дискретной случайной величины, а под символом x_i — одно из ее возможных значений.

Вероятность p_i можно рассматривать как функцию аргумента x_i, принимающего значения из набора (1):

$$p_i = p(x_i). \tag{4}$$

Функцию (4) называют **законом распределения дискретной случайной величины,** или, более точно, **законом распределения вероятностей дискретной случайной величины**.

Закон распределения случайной величины часто представляют в табличном (табл. 1) виде.

Таблица 1. Закон распределения случайной величины X

Значение x_i случайной величины X	x_1	x_2	...	x_n
Вероятность $p_i = p(x_i)$	p_1	p_2	...	p_n

Пример такого представления приведен в табл. 2.

Таблица 2. Пример табличного способа задания дискретной случайной величины X

Значение x_i случайной величины X	1	2	3
Вероятность $p_i = p(x_i)$	0,8	0,16	0,04

Графическое представление этого закона называется **многоугольником распределения вероятностей**. Для данных табл. 2 он представлен на рис. 1.

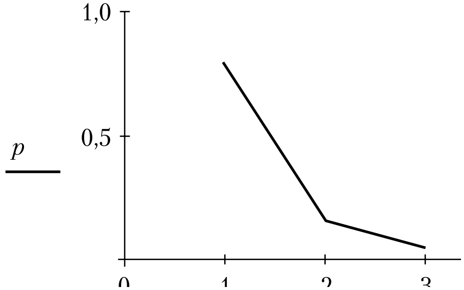


Рис. 1. Многоугольник распределения вероятностей

На графике рис. 1 к случайной величине X имеют отношение лишь точки с координатами (x_i; $p(x_i)$). Остальные участки графика демонстрируют навигацию по этим точкам.

В дальнейшем будем предполагать, что число значений случайной величины конечно и равно n. В большинстве случаев это предположение не ограничит общности полученных результатов, но сделает выкладки более простыми.

В некоторых случаях элементарным событием можно считать появление одного их чисел множества (1). Тогда элементарное событие отождествляется с реализацией случайной величины X.

Для задания дискретной случайной величины наряду с функцией (4) или табл. 1 используется **функция распределения вероятностей** $F(x)$ случайной величины X, определяемая по формуле

$$F(x) \equiv P(X < x) . \quad (5)$$

Функция распределения вероятностей $F(x)$ случайной величины X имеет смысл вероятности того, что в результате испытания случайная величина примет значение, меньшее того, которое указано в аргументе этой функции. Если функция (4) задана на счетном множестве, то равенство (5) определяет функцию $F(x)$ на множестве вещественных чисел. Согласно определению (5), функция распределения вероятностей $F(x)$ для случайной величины, заданной табл. 2, представляется следующим аналитическим выражением:

$$F(x) \equiv \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 1, \\ 0{,}8 & \text{при } 1 < x \le 2, \\ 0{,}96 & \text{при } 2 < x \le 3, \\ 1 & \text{при } 3 < x, \end{cases}$$

а ее график — на рис. 2.

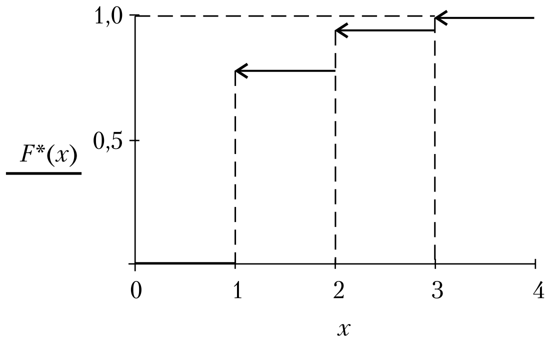


Рис. 2. Функция распределения вероятностей дискретной случайной величины, заданной табл. 2

Контрольные вопросы

1. В какой форме записывается закон распределения дискретной случайной величины X?
2. Дайте определение функции распределения $F(x)$ дискретной случайной величины X.
3. Каким является график функции распределения $F(x)$ дискретной случайной величины X: ступенчатым или плавным?

Задачи

1.1.1. Написать биномиальный закон распределения дискретной случайной величины X, равной числу появлений «решки» при четырех последовательных бросаниях монеты. Построить многоугольник вероятностей дискретной случайной величины X.

1.1.2. По условиям задачи 1.1.1 найти аналитическое выражение функции $F(x)$ распределения вероятностей случайной величины X и построить ее график.

1.2. Функции дискретных случайных величин

Если случайная величина X задана в виде табл. 1.1.1, то случайную величину Y, значения которой y_i вычисляются по известным значениям x_i случайной величины X по формуле

$$y_i = f(x_i), \tag{1}$$

можно задать в виде табл. 1. Поскольку значения y_i появляются вместе со значениями x_i, то вероятности их появления оказываются такими же, как вероятности p_i появления x_i.

Таблица 1. Закон распределения случайной величины $Y = f(X)$

Значение случайной величины $\boldsymbol{Y=f(X)}$	$y_1=f(x_1)$	$y_2=f(x_2)$	...	$y_n=f(x_n)$
Вероятность $\boldsymbol{p_i}$ для значений случайной величины $\boldsymbol{Y}$	p_1	p_2	...	p_n

Если некоторые из значений y_i совпадут, то их следует объединить, сложив соответствующие им вероятности.

Замечание. Обычно равенство (1) записывают в виде

$$Y = f(X), \tag{2}$$

подразумевая под символами X и Y возможные значения, которые могут принимать случайные величины X и Y. Этим пониманием формулы (2) мы будем пользоваться в дальнейшем.

Воспользуемся представлением о функциях случайных величин для определения ее некоторых характеристик.

1.3. Числовые характеристики дискретных случайных величин

Математическим ожиданием дискретной случайной величины X называется выражение вида

$$M[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i = m_x. \tag{1}$$

Математическое ожидание случайной величины имеет смысл ее среднего значения. Действительно, пусть в серии из n опытов значение x_i появилось m_i раз. При этом выполняется соотношение

$$n = \sum_{i=1}^{n} m_i .$$

Тогда среднее значение случайной величины представляется выражением

$$\bar{x} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \cdots + x_n m_n}{n} = x_1 \frac{m_1}{n} + \cdots + x_n \frac{m_n}{n} =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i m_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \approx \sum_{i=1}^{n} x_i p_i ,$$

где в соответствии с формулой (1.5.1) главы I

$$p_i \approx \frac{m_i}{n} .$$

Последнее соотношение подобно формуле для центра масс нескольких тел. По аналогии величину $M[X] = m_x$ называют **центром распределения вероятностей случайной величины**.

Аналогичным образом определяется математическое ожидание функции Y случайной величины X, заданной соотношением (1.2.2):

$$M[Y] = \sum_{i=1}^{n} y_i p_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) p_i = m_y , \tag{2}$$

Заметим, что формула (2) позволяет вычислить математическое ожидание $M[Y]$ случайной величины Y, используя ее задание в виде табл. 1.2.2 или задание случайной величины X и зависимость (1.2.1).

По случайной величине X строят **центрированную случайную величину** X_0 по формуле

$$X_0 = X - m_x . \tag{3}$$

Отметим, что центрированная случайная величина X_0 является частным случаем функции (1.2.2) случайной величины. Такое название она получила вследствие того, что ее математическое ожидание равно нулю. Действительно, применяя формулу (2), получим

$$M[X_0] = M[X - m_x] = \sum_{i=1}^{n}(x_i - m_x)p_i = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i - \sum_{i=1}^{n} m_x p_i =$$

$$= m_x - m_x \sum_{i=1}^{n} p_i = 0 .$$

Следующей числовой характеристикой дискретной случайной величины является ее **дисперсия**. Она характеризует величину отклонения случайной величины от ее среднего значения. Дисперсия определяется соотношением

$$D[X] = M[(X - m_x)^2] = \sum_{i=1}^{n}(x_i - m_x)^2 p_i . \qquad (4)$$

Из соотношения (4) видно, что для определения дисперсии используется функция случайной величины X, определяемая по правилу $(X - m_x)^2$. Часто дисперсию представляют в другом виде, а именно

$$D[X] = \sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - 2x_i m_x + m_i^2)p_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - 2m_x \sum_{i=1}^{n} x_i p_i + m_x^2 =$$

$$= M[X^2] - M^2[X] = M[X^2] - m_x^2 . \qquad (5)$$

Для получения характеристики рассеивания случайной величины от ее среднего значения используют также **среднее квадратическое отклонение**[1], определяемое по формуле

$$\sigma[X] = \sqrt{D[X]} . \qquad (6)$$

Математические ожидания случайных величин $X - m_x$ и $(X - m_x)^2$ называются **центральными моментами первого** и **второго порядков**. Помимо них используют также центральные моменты более высоких порядков, например третьего:

$$M[(X - m_x)^3] = \sum_{i=1}^{n}(x_i - m_x)^3 p_i . \qquad (7)$$

Если величина X распределена симметрично относительно своего математического ожидания, то ее центральный момент третьего порядка равен 0. Это означает, что величина центрального момента третьего порядка может служить мерой асимметрии закона распределения вероятностей случайной величины X.

---

1 Другой, менее распространенный вариант — «квадратичное».

Аналогично величины $M[X]$ и $M[X^2]$ являются начальными моментами первого и второго порядков.

Наряду с перечисленными характеристиками случайной величины используют моду M_o и медиану M_d. **Модой** называют то значение x_i, вероятность p_i появления которого является максимальной. **Медианой** называют то значение x_i, для которого вероятность появления случайной величины, меньшей или большей этого значения, является одинаковой.

Замечание. Формула (1) представляет собой начальный момент первого порядка дискретной случайной величины X. Помимо него используются начальные моменты порядка m, вычисляемые по формуле

$$M[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i^m p_i. \tag{8}$$

Пример. Производится один выстрел по объекту. Вероятность попадания p. Определить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение числа попаданий по объекту.

Решение. Число попаданий X по объекту при одном выстреле является случайной величиной и составляет или 1, или 0. Случайная величина X имеет закон распределения, представленный в табл. 1.

Таблица 1. Закон распределения числа попаданий при одном выстреле

Значение случайной величины $\boldsymbol{x}$	1	0
Вероятность $p(x)$ случайной величины	p	$Q = 1 - p$

$$M[x] = 1 * p + 0 * q = p; \tag{9}$$

$$D[x] = (1-p)^2 p + (0-p)^2 q = q^2 p + p^2 q = pq; \tag{10}$$

$$\sigma[x] = \sqrt{pq}. \tag{11}$$

Контрольные вопросы

1. Как определяется математическое ожидание дискретной случайной величины X?
2. Как определяется дисперсия дискретной случайной величины X?
3. Как определяется среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины X?
4. Что такое мода дискретной случайной величины X?

5. Что такое медиана дискретной случайной величины X?
6. Дайте определение центральному моменту порядка n дискретной случайной величины X.
7. Дайте определение начальному моменту порядка n дискретной случайной величины X.

Задачи

1.3.1. Дискретная случайная величина X задана законом распределения, приведенным в следующей таблице.

Таблица. Закон распределения дискретной случайной величины X

x_i	1	2	3	4	5
p_i	0,15	0,1	0,3	0,3	0,15

Определить математическое ожидание и дисперсию случайной величины X.

1.4. Биномиальное распределение

Как пример распределения дискретной случайной величины рассмотрим схему Бернулли проведения повторных независимых испытаний, считая вероятность появления события A в одном испытании равной p. Пусть число этих испытаний равно n. Для этой схемы испытаний рассматривают два типа случайных величин. Это ранее рассмотренная случайная величина M[1] — число появлений события A, а также частота

$$X = \frac{M}{n}.$$

Остановимся на последней. Она, очевидно, принимает следующий ряд значений:

$$\frac{0}{n}, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n}{n}.$$

Вероятность появления частоты, равной $\frac{m}{n}$, составляет величину

$$p_n\left(\frac{m}{n}\right) = C_n^m p^m q^{n-m}. \qquad (1)$$

[1] M — имя случайной величины, m — ее значение.

Таким образом, закон распределения вероятностей появления события A и их частот в серии из n испытаний может быть представлен табл. 1.

Таблица 1. Закон распределения частот $\left(\frac{m}{n}\right)$ появления события A в серии из n испытаний

M	0	1	2	…	m	…	n
$X = \frac{M}{n}$	$\frac{0}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\frac{2}{n}$	…	$\frac{m}{n}$	…	$\frac{n}{n}$
$p_n\left(\frac{m}{n}\right)$	q^n	$C_n^1 pq^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	…	$C_n^m p^m q^{n-m}$	…	p^n

Оба закона распределения случайной величины M (см. формулу Бернулли (II.9.1.1)) и X называются **биномиальными**.

Определим числовые характеристики дискретной случайной величины M. Вычислим сначала ее математическое ожидание. Для этого продифференцируем бином Ньютона

$$(p+q)^n = \sum_{m=0}^{n} C_n^m p^m q^{n-m}$$

по переменной p, считая p и q независимыми переменными. В результате получим

$$n(p+q)^{n-1} = \sum_{m=0}^{n} C_n^m m p^{m-1} q^{n-m}. \tag{2}$$

Умножим последнее соотношение на p:

$$np(p+q)^{n-1} = \sum_{m=0}^{n} C_n^m m p^m q^{n-m}.$$

Учтем, наконец, что $p + q = 1$, получим

$$np = \sum_{m=1}^{n} m C_n^m p^m q^{n-m} = M[M]. \tag{3}$$

Формула (3) позволяет определить вероятность p в виде

$$p = \frac{M[M]}{n}. \tag{4}$$

Вычислим теперь дисперсию случайной величины M. Для этого воспользуемся соотношением

$$D[M] = M\left[M^2\right] - M^2[M]. \quad (5)$$

Для вычисления $D[M]$ требуется определить $M[M^2]$. Для этого воспользуемся тем же приемом: продифференцируем

$$n(n-1)(p+q)^{n-2} = \sum_{m=0}^{n} C_n^m m(m-1)p^{m-2}q^{n-m} =$$

$$= \sum_{m=0}^{n} m^2 C_n^m p^{m-2}q^{n-m} - \sum_{m=0}^{n} mC_n^m p^{m-2}q^{n-m}.$$

Полученное соотношение умножим на p^2 и положим $p + q = 1$:

$$n(n-1)p^2 = \sum_{m=0}^{n} m^2 C_n^m p^m q^{n-m} - \sum_{m=0}^{n} mC_n^m p^m q^{n-m} =$$

$$= M\left[M^2\right] - M[M] = M\left[M^2\right] - np.$$

Выражая из последнего соотношения

$$M\left[M^2\right] = n(n-1)p^2 + np \quad (6)$$

и подставляя полученное соотношение в (5) с учетом (3), получим

$$D[M] = M\left[M^2\right] - M^2[M] = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 =$$

$$= np(1-p) = npq. \quad (7)$$

Степень рассеивания случайной величины M относительно ее среднего значения оценивается средним квадратическим отклонением $\sigma[M]$, а также коэффициентом вариации C, определяемыми соотношениями

$$\sigma[M] = \sqrt{D[M]} = \sqrt{npq} \text{ и} \quad (8)$$

$$C = \frac{\sigma[M]}{M[M]} = \frac{\sqrt{npq}}{np} = \sqrt{\frac{q}{np}}. \quad (9)$$

Из последнего соотношения видно, что относительная ошибка при определении среднего значения дискретной случайной величины M стремится к нулю по мере роста числа повторных испытаний n.

Задачи

1.4.1. В условиях задачи 1.1.1 рассчитать математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение и коэффициент вариации дискретной случайной величины X.

1.4.2. Стрелком сделано десять выстрелов. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле составляет 0,7. Найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение и коэффициент вариации дискретной случайной величины X — числа попаданий в мишень.

1.4.3. На подводной лодке имеется шесть торпедных аппаратов. Противолодочный самолет обнаружил подводную лодку и атаковал ее. Подводная лодка маневрировала во время атаки, однако из-за близких разрывов глубинных бомб создалась возможность выхода торпед из строя. Вероятность того, что произвольно взятая торпеда осталась исправной, равна $p = 0{,}8$. Определить: а) закон распределения вероятностей числа исправных торпед; б) математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение числа исправных торпед M.

1.5. Геометрическое распределение

Рассмотрим схему Бернулли проведения испытаний. Пусть наступление события A рассматривается как успех. Тогда p — вероятность наступления успеха в одном испытании. Очевидно, вероятность того, что первые k испытаний окажутся неуспешными и успех наступит в $k + 1$ испытании, определится соотношением

$$P(X = k) \equiv p_k = p(1-p)^k = pq^k, \ k = 0, \ 1, \ldots \tag{1}$$

Здесь случайной величиной X обозначено число неудачных испытаний, после которых наступает успех. Закон (1) называется **геометрическим распределением**, поскольку последовательность вероятностей

$$p, \ \ pq, \ \ pq^2, \ldots, \ \ pq^k, \ldots \tag{2}$$

где $q \equiv 1 - p$, характеризующих последовательные значения случайной величины X, составляет геометрическую прогрессию. Легко проверить, что условие нормировки для функции вероятности

$$\sum_{k=0}^{\infty} pq^k = \frac{p}{1-q} = \frac{p}{p} = 1 \tag{3}$$

выполняется. В случае геометрического распределения рассматривается случайная величина X, она принимает бесконечное множество значений (см. формулу (1)), поэтому символ суммы превращается в символ ряда.

Теорема. Математическое ожидание случайной величины X, имеющей геометрическое распределение, определяется выражением

$$M[X] = \frac{1-p}{p}, \tag{4}$$

- а дисперсия

$$D[X] = \frac{1-p}{p^2}. \tag{5}$$

Доказательство.

$$M[X] = \sum_{k=0}^{\infty} kpq^k = p\sum_{k=0}^{\infty} kq^k = p\left(\sum_{k=0}^{\infty}(k+1-1)q^k\right) =$$

$$= p\left(\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)q^k - \left(\sum_{k=0}^{\infty} q^k\right)\right) = p\left(S(q) - \frac{1}{1-q}\right), \tag{6}$$

где $S(q) \equiv \sum\limits_{k=0}^{\infty}(k+1)q^k$. (7)

Найдем сумму ряда (7), выполнив его почленное интегрирование

$$\int_0^q S(t)dt \equiv \sum_{k=0}^{\infty}\int_0^q (k+1)t^k dt = \sum_{k=0}^{\infty} q^{k+1} = \frac{q}{1-q}. \tag{8}$$

Продифференцировав правую и левую части равенства по q, получаем искомое выражение для функции $S(q)$ в виде

$$S(q) = \left(\frac{q}{1-q}\right)' = \frac{1-q+q}{(1-q)^2} = \frac{1}{(1-q)^2}. \tag{9}$$

Подставив выражение (9) в формулу (6), получим

$$M[X] = p\left(\frac{1}{(1-q)^2} - \frac{1}{1-q}\right) = \frac{p(1-1+q)}{(1-q)^2} = \frac{q}{1-q} = \frac{1-p}{p}. \ \blacksquare$$

Для доказательства соотношения (5) воспользуемся формулой (1.3.5). Для этого вычислим

$$M[X^2] = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 pq^k = p\sum_{k=0}^{\infty} k^2 q^k = p\left(\sum_{k=0}^{\infty}(k+1-1)^2 q^k\right) =$$

$$= p\left(\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)^2 q^k - 2\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)q^k + \sum_{k=0}^{\infty} q^k\right) =$$

$$= p\left(S_1(q) - 2S(q) + \frac{1}{1-q}\right), \tag{10}$$

где $S_1(q) \equiv \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)^2 q^k = \left(\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)q^{k+1}\right)' = |i \equiv k+1| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} iq^i\right)' =$

$$= \left(\sum_{i=0}^{\infty} iq^i\right)' = \left(\sum_{k=0}^{\infty} kq^k\right)' = \left(\frac{M[X]}{p}\right)' = \left(\frac{q}{(1-q)^2}\right)' =$$

$$= \frac{(1-q)^2 + 2q(1-q)}{(1-q)^4} = \frac{1-q^2}{(1-q)^4} = \frac{1+q}{(1-q)^3}.$$

Подставляя последнее выражение в формулу (10), получим

$$M[X^2] = p\left(\frac{1+q}{(1-q)^3} - 2\frac{1}{(1-q)^2} + \frac{1}{1-q}\right) =$$

$$= \frac{1+q-2(1-q)+(1-q)^2}{(1-q)^2} = \frac{q(1+q)}{(1-q)^2}.$$

Пользуясь формулой (4) и последним соотношением, получим

$$D[X] = M[X^2] - M^2[X] = \frac{q(1+q)}{(1-q)^2} - \left(\frac{q}{1-q}\right)^2 =$$

$$= \frac{q}{(1-q)^2} = \frac{1-p}{p^2}. \ \blacksquare$$

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте интерпретацию геометрического распределения дискретной случайной величины в терминах успеха.

Задачи

1.5.1. Из орудия ведется стрельба по цели до первого попадания. Вероятность попадания в цель при одном выстреле составляет величину 0,4. Составить закон распределения случайной величины X числа израсходованных снарядов не попавших в цель.

1.5.2. Определить среднее число израсходованных снарядов, необходимых для поражения цели, а также дисперсию и среднее квадратическое отклонение в условиях задачи 1.5.1.

1.6. Многомерные дискретные случайные величины

Пусть две случайные величины X и Y определены на одном и том же пространстве элементарных событий. Обозначим значения, которые они принимают, соответственно как

$$x_1, x_2, ..., x_n, ... \text{ и } y_1, y_2, ..., y_n, ...$$

Предположим также, что законами распределения вероятностей этих случайных величин будут $\{f(x_i)\}$ и $\{g(y_j)\}$ соответственно. Всевозможные пары чисел $\{x_i, y_j\}$ можно рассматривать как новое элементарное событие. Его вероятность обозначим как

$$P(X = x_i, Y = y_j) = p(x_i, y_j) = p_{ij}. \qquad (1)$$

Формула (1) задает функцию вероятности для **двумерной случайной величины**. Эта функция должна удовлетворять следующим условиям:

$$p(x_i, y_j) \geq 0 \text{ и } \sum_{i,j} p(x_i, y_j) = 1, \qquad (2)$$

где суммирование распространяется на всевозможные перестановки индексов i и j. Вероятность того, что в результате испытания случайная величина X примет значение x_i, а случайная величина Y — какое-либо из множества допустимых значений, с одной стороны, представляется суммой $\sum_j p(x_i, y_j)$, а с другой — функцией $f(x_i)$, поэтому выполняется соотношение

$$\sum_j p(x_i, y_j) = f(x_i), \qquad (3)$$

где суммирование распространяется на всевозможные значения индекса j.

Аналогично

$$\sum_i p(x_i, y_j) = g(y_j), \qquad (4)$$

где суммирование распространяется на всевозможные значения индекса i.

Часто закон распределения вероятностей двумерной случайной величины удобно представлять в виде таблицы. Заголовками строк такой таблицы являются значения одной случайной величины, а заголовками столбцов — значения другой случайной величины. В пересечении строк и столбцов размещают величины вероятностей (1) (табл. 1).

Таблица 1. Закон распределения двумерной случайной величины

X \ Y	y_1	y_2	...	y_n
x_1	p_{11}	p_{12}		p_{1n}
x_2	p_{21}	p_{22}		p_{2n}
...				
x_m	p_{m1}	p_{m2}		p_{mn}

Для двумерной случайной величины вводят понятие условной вероятности. Например, вероятностью того, что при проведении испытания случайная величина X примет значение x_i при условии, что случайная величина Y примет значение y_i, называют величину

$$P(X = x_i \ / \ Y = y_j) = \frac{p(x_i, y_j)}{g(y_j)}. \tag{5}$$

Аналогично определяется вероятность того, что при проведении испытания случайная величина Y примет значение y_j при условии, что случайная величина X примет значение x_i

$$P(Y = y_j \ / \ X = x_i) = \frac{p(x_i, y_j)}{f(x_i)}. \tag{6}$$

Случайные величины X и Y называют **взаимно независимыми** или просто независимыми, если выполняется соотношение

$$p(x_i, y_j) = f(x_i)g(y_j) \tag{7}$$

для всевозможных значений двумерной случайной величины. В этом случае таблица распределения вероятностей двумерной случайной величины может быть получена из таблиц законов распределения отдельных случайных величин путем перемножения вероятностей.

Системы более чем двух случайных величин определяются аналогично определению двумерной случайной величины.

Контрольные вопросы

1. На каком множестве событий определена функция вероятности для двумерной дискретной случайной величины?

2. Как связана функция вероятности для одномерной случайной величины с функцией вероятности для двумерной дискретной случайной величины?
3. Определите понятие условной вероятности для двумерной дискретной случайной величины.
4. Какие дискретные случайные величины X и Y называют взаимно независимыми?

Задачи

1.6.1. В одном ящике находится десять одинаковых шаров: два с номером 1, два с номером 2 и шесть с номером 3. В другом ящике также находится 10 одинаковых шаров: четыре с номером 1, три с номером 2 и три с номером 3. Из каждого ящика случайным образом извлекли по шару. Пусть X — номер извлеченного шара из первого ящика, а Y — из второго. Составить таблицу закона распределения двумерной дискретной случайной величины (X, Y).

1.6.2. Используя таблицу закона распределения $p(x_i, y_j)$ двумерной дискретной случайной величины (X, Y), составленную в результате решения задачи (1.6.1), составить таблицы законов распределения $f(x_i)$ и $g(y_j)$ дискретных случайных величин X и Y, а также таблицы $P(X = x_i \mid Y = y_j)$ и $P(Y = y_j \mid X = x_i)$ условных вероятностей. Проверить, выполняется ли соотношение $p(x_i, y_j) = f(x_i)\, g(y_j)$.

1.7. Свойства математического ожидания

Теорема 1. Математическое ожидание постоянной величины равно постоянной

$$M[C] = C. \tag{1}$$

Доказательство.

Постоянную C можно рассматривать как дискретную случайную величину, принимающую единственное значение, равное C, с вероятностью, равной единице. Откуда по определению

$$M[C] = C * 1 = C. \blacksquare$$

Теорема 2. Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания.

$$M[AX] = AM[X]. \qquad (2)$$

Доказательство.

Пусть дискретная случайная величина X описывается множеством пар значений (x_i, p_i), где $i = 1, 2, ..., n, ...$ Тогда дискретная случайная величина AX описывается множеством пар значений (Ax_i, p_i), где $i = 1, 2, ..., n, ...$ По определению математического ожидания

$$M[AX] = \sum_{i=1}^{\infty} Ax_i p_i = A\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i = AM[x]. \blacksquare$$

Теорема 3. Математическое ожидание суммы нескольких случайных величин равно сумме математических ожиданий этих величин:

$$M[X_1 + X_2 + ... + X_n] = M[X_1] + M[X_2] + ... + M[X_n]. \qquad (3)$$

Доказательство.

Доказательство проведем для суммы двух дискретных случайных величин X и Y. Пусть эти случайные величины заданы законами распределения (x_i, p_i), где $i = 1, 2, ..., n, ...$, и (y_i, q_i), где $i = 1, 2, ..., n, ...$, соответственно. Пусть сумма случайных величин $X + Y$ принимает всевозможные значения $x_i + y_j$ с вероятностями p_{ij}, где $i, j = 1, 2, ..., n, ...$ Тогда математическое ожидание новой случайной величины $X + Y$ выражается соотношением

$$M[X+Y] = \sum_{i,j=1}^{\infty} (x_i + y_j) p_{ij} = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} (x_i + y_j) p_{ij} = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} +$$

$$+\sum_{j=1}^{\infty} y_j \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij} = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i + \sum_{j=1}^{\infty} y_j q_j = M[X] + M[Y], \blacksquare$$

где

$$p_i = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}, \quad q_j = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij}.$$

Теорема 4. Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий

$$M[X * Y] = M[X] * M[Y]. \qquad (4)$$

Доказательство.

Пусть эти случайные величины заданы законами распределения (x_i, p_i), где $i = 1, 2, ..., n, ...$, и (y_i, q_i), где $i = 1, 2, ..., n, ...$, соответственно.

Поскольку случайные величины X и Y являются независимыми, то их произведение $X*Y$ принимает всевозможные значения $x_i\, y_j$ с вероятностями (см. формулу (1.6.7) $p_{ij} = p_i q_j$, где $i,\ j = 1, 2, ..., n, ...$ Тогда математическое ожидание новой случайной величины $X*Y$ выражается соотношением

$$M\left[X*Y\right] = \sum_{i,j=1}^{\infty} x_i y_j p_{ij} = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} x_i y_j p_i q_j = \sum_{i=1}^{\infty}\left(x_i p_i \sum_{j=1}^{\infty} y_j q_j\right) =$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{\infty} x_i p_i\right) * \left(\sum_{j=1}^{\infty} y_j q_j\right) = M\left[X\right] * M\left[Y\right]. \ \blacksquare$$

Контрольные вопросы

1. Перечислите основные свойства математического ожидания дискретной случайной величины.

1.8. Свойства дисперсии

Свойства дисперсии случайной величины являются следствием того, что она является неким математическим ожиданием (см. (1.3.1)).

Теорема 1. Дисперсия постоянной величины C равна нулю, так как

$$D[C] = M[C^2] - M^2\left[C\right] = C^2 - C^2 = 0\,. \qquad (1)$$

Теорема 2. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возводя его в квадрат,

$$D[AX] = A^2 D\left[X\right]. \qquad (2)$$

Доказательство.

$$D[AX] = M[A^2 X^2] - M^2\left[AX\right] = A^2\left\{M[X^2] - M^2\left[X\right]\right\} = A^2 D[X]\,. \ \blacksquare$$

Теорема 3. Дисперсия суммы независимых случайных величин X и Y равна сумме их дисперсий

$$D\left[X+Y\right] = D\left[X\right] + D\left[Y\right]. \qquad (3)$$

Доказательство.

$$D\left[X+Y\right] = M\left[X^2 + 2X*Y + Y^2\right] - M^2\left[X+Y\right] = M\left[X^2\right] +$$

$$+2M[X*Y] + M\left[Y^2\right] - M^2\left[X\right] - 2M\left[X\right]M\left[Y\right] - M^2\left[Y\right] =$$

$$= \left\{M\left[X^2\right] - M^2[X]\right\} + \left\{M\left[Y^2\right] - M^2[Y]\right\} +$$

$$= 2 * \left\{M[X * Y] - M[X]M[Y]\right\} = D[X] + D[Y]. \blacksquare$$

В настоящем доказательстве использовано соотношение (1.7.4) для независимых случайных величин. Оказывается, что полученный результат остается верным для суммы попарно независимых случайных величин $X_1, X_2, ..., X_n$:

$$D[X_1 + X_2 + ... + X_n] = D[X_1] + D[X_2] + ... + D[X_n].$$

Контрольные вопросы

1. Перечислите основные свойства дисперсии дискретной случайной величины.

§ 2. Непрерывные случайные величины

2.1. Определение

Помимо дискретных существуют случайные величины, которые могут принимать любые значения из некоторого интервала числовой оси. Такие случайные величины называют **непрерывными**. Например, рост или вес человека. В дальнейшем предполагается, что областью определения непрерывной случайной величины будет отрезок $[a, b]$. Под символами a или b могут пониматься в том числе и символы $-\infty$ или ∞.

2.2. Функция распределения непрерывной случайной величины (НСВ)

Считается, что случайная величина X задана, если известна функция $F(x)$, имеющая смысл вероятности того, что при проведении испытания случайная величина X примет значение, меньшее заданного значения x:

$$F(x) \equiv P(X < x). \tag{1}$$

$F(x)$ называется **функцией распределения** случайной величины X, или ее **интегральным законом распределения**. Она, очевидно, является неубывающей функцией. Ее максимум достигается при максимальном значении аргумента и по условию нормировки он равен 1:

$$F(b) = 1. \tag{2}$$

Соотношение (2) выражает тот достоверный факт, что в результате испытания случайная величина X примет какое-либо значение из области своих допустимых значений.

График функции $F(x)$ называется **интегральной кривой распределения**. Например, для нормально распределенной случайной величины он имеет характерный вид, изображенный на рис. 1.

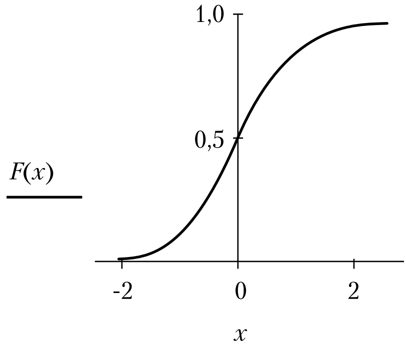


Рис. 1. Интегральная кривая распределения

Иногда наряду с функцией распределения используют функцию **обеспеченности** $\Psi(x) \equiv 1 - F(x)$. Она, очевидно, имеет смысл вероятности того, что при испытании случайная величина X примет значение, не меньшее, чем x:

$$P(X \geq x) = \Psi(x) \equiv 1 - F(x). \qquad (3)$$

Пользуясь функцией распределения, можно вычислить вероятность попадания случайной величины X в заданный интервал $[\alpha, \beta) \subset [a, b]$. Событие попадания случайной величины X в интервал $[a, \beta)$ можно представить в виде суммы двух несовместных событий: ее попадания в интервал $[a, \alpha)$ и ее попадания в интервал $[a, \beta)$. Пользуясь теоремой сложения вероятностей, получаем

$$F(\beta) = F(\alpha) + P(\alpha \leq x < \beta).$$

Откуда

$$P(\alpha \leq x < \beta) = F(\beta) - F(\alpha). \qquad (4)$$

Замечание. Равенство (1) распространяется также на случай дискретной случайной величины.

2.3. Плотность вероятностей непрерывной случайной величины

Для описания непрерывных случайных величин используется также функция **плотности вероятностей непрерывной случайной величины** (или плотности распределения случайной величины) X. Она определяется из соотношения

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}. \qquad (1)$$

Пользуясь методами интегрального исчисления, можно по функции $f(x)$ восстановить функцию распределения по формуле

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt. \qquad (2)$$

Используя свойство аддитивности определенного интеграла по промежутку интегрирования, формулу (2.2.4) можно представить в виде

$$P(\alpha \le x < \beta) = F(\beta) - F(\alpha) =$$

$$= \int_a^\beta f(x)dx - \int_a^\alpha f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx. \qquad (3)$$

Дифференциал $dF(x) = f(x)\,dx$ можно интерпретировать как вероятность попадания случайной величины в интервал $[x, x + dx)$:

$$P(x \le X < x + dx) \approx dF(x) = f(x)\,dx. \qquad (4)$$

Равенство (2.2.2) в терминах плотности вероятностей примет вид

$$F(b) = \int_a^b f(x)dx = 1. \qquad (5)$$

Контрольные вопросы

1. Перечислите способы описания непрерывной случайной величины X.
2. Какой смысл имеет функция распределения $F(x)$ непрерывной случайной величины X?
3. Определите понятие плотности вероятностей непрерывной случайной величины X.
4. Как определить вероятность попадания непрерывной случайной величины X в интервал $[\alpha, \beta)$ при проведении ее испытания, если задана а) ее функция распределения $F(x)$, б) ее плотность вероятностей $f(x)$?

Задачи

2.3.1. Непрерывная случайная величина X принимает значения в интервале [0; 10] с плотностью вероятностей, равной $f(x) = 0{,}1$. Найти вероятность попадания случайной величины в интервал [5; 9] в результате одного испытания. Решить задачу с использованием функции плотности вероятностей $f(x)$ и функции распределения $F(x)$.

2.4. Числовые характеристики непрерывной случайной величины

Математическим ожиданием случайной величины X называется выражение

$$M[X] \equiv m_X = \int_a^b x f(x)dx\,. \qquad (1)$$

Математическое ожидание иногда называют *средним значением* или, что встречается реже, *центром распределения вероятности случайной величины*. Если $M[X] \neq 0$, то можно построить центрированную случайную величину Y по формуле

$$Y \equiv X - M[X]. \qquad (2)$$

В этом случае математическое ожидание случайной величины Y оказывается равным нулю. Действительно,

$$M\left[Y\right] \equiv \int_a^b (x - M[X]) f(x)dx = M[X] - M[X] = 0\,. \qquad (3)$$

Дисперсией случайной величины X называется математическое ожидание квадрата центрированной случайной величины

$$D\left[X\right] \equiv D_X \equiv M\left[Y^2\right] = \int_a^b (x - M[X])^2 f(x)dx\,. \qquad (4)$$

Для вычисления дисперсии может быть применена другая формула:

$$D\left[X\right] \equiv M\left[Y^2\right] = M\left[(X - M\left[X\right])^2\right] = M[X^2 - 2XM\left[X\right] +$$

$$+M^2\left[X\right]] = M\left[X^2\right] - 2M^2\left[X\right] + M^2\left[X\right] = M\left[X^2\right] - M^2\left[X\right]. \qquad (5)$$

Средним квадратическим отклонением случайной величины X от среднего значения называется квадратный корень от дисперсии

$$\sigma[X] = \sqrt{D[Y]} = \sqrt{\int_a^b (x - M[X])^2 f(x)dx}\,. \qquad (6)$$

Модой M_0 непрерывной случайной величины X называется то ее значение, при котором плотность вероятности имеет максимальное значение

$$f(M_0) = \max_{x \in [a,b]} f(x)\,. \qquad (7)$$

Медианой M_d непрерывной случайной величины X называется то ее значение, относительно которого равновероятно получение большего или меньшего значения случайной величины, то есть

$$P(x < M_d) = P(x \geq M_d) = \int_a^{M_d} f(x)dx = \int_{M_d}^{b} f(x)dx = \frac{1}{2}\,. \qquad (8)$$

Величины $M[X]$ и $M[X^2]$ называются начальными моментами первого и второго порядков соответственно, а величины $M[X - M[X]]$ и $D[X] = M[(X - M[X])^2]$ — центральными моментами. Легко понять, что центральными и начальными моментами порядка n называют величины $M[X^n]$ и $M[(X - M[X])^n]$ соответственно.

Контрольные вопросы

1. Как определяется математическое ожидание непрерывной случайной величины X?
2. Как определяется дисперсия непрерывной случайной величины X?
3. Как определяется среднее квадратическое отклонение непрерывной случайной величины X?
4. Что такое мода непрерывной случайной величины X?
5. Что такое медиана непрерывной случайной величины X?
6. Дайте определение центральному моменту порядка n непрерывной случайной величины X.
7. Дайте определение начальному моменту порядка n непрерывной случайной величины X.

2.5. Свойства числовых характеристик непрерывной случайной величины

Свойства математического ожидания и дисперсии непрерывной случайной величины совпадают с аналогичными свойствами дискретной случайной величины. Доказательство этого положения осуществляется аналогично тому, как это делалось для дискретных случайных величин.

§ 3. Примеры законов распределения случайных величин

3.1. Нормальное распределение

Если на появление случайной величины действует большое количество примерно равнозначных факторов, то плотность распределения вероятностей случайной величины представляется выражением

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2D}}, \tag{1}$$

где m и D — константы.

Формула (1) называется **нормальным** законом распределения. Для функции (1) выполняется условие нормировки (2.3.5). Действительно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi D}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-m)^2}{2D}} dx = \left| \begin{matrix} y = \dfrac{x-m}{\sqrt{D}} \\ dy = \dfrac{dx}{\sqrt{D}} \end{matrix} \right| =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = 1.$$

Математическое ожидание нормально распределенной случайной величины вычисляется по формуле

$$M[x] = \frac{1}{\sqrt{2\pi D}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{(x-m)^2}{2D}} dx =^{*)}.$$

Для вычисления настоящего интеграла выполним следующие преобразования:

$$de^{-\frac{(x-m)^2}{2D}} = e^{-\frac{(x-m)^2}{2D}} \left(-\frac{x-m}{D} \right) dx.$$

Откуда после тождественных преобразований

$$\frac{x}{D} e^{-\frac{(x-m)^2}{2D}} dx = \frac{m}{D} e^{-\frac{(x-m)^2}{2D}} dx - de^{-\frac{(x-m)^2}{2D}}. \tag{2}$$

В формуле для математического ожидания заменим подынтегральное выражение

$$^{*)}= \frac{1}{\sqrt{2\pi D}}\left(m\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-m)^2}{2D}}dx - D\int_{-\infty}^{\infty} de^{-\frac{(x-m)^2}{2D}} \right) =$$

$$= m - \frac{D}{\sqrt{2\pi D}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2D}} \Bigg|_{-\infty}^{\infty} = m .$$

Окончательно для нормально распределенной случайной величины

$$M[x] = m . \qquad (3)$$

При вычислении дисперсии нормально распределенной случайной величины воспользуемся равенством

$$D[x] = M\left[x^2\right] - M^2[x].$$

Определим сначала математическое ожидание случайной величины x^2.

$$M\left[x^2\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi D}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{(x-m)^2}{2D}} dx =^{*)} .$$

Умножим выражение (2) на x и подставим его под знак интеграла:

$$^{*)}= \frac{1}{\sqrt{2\pi D}}\left(m\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-\frac{(x-m)^2}{2D}}dx - D\int_{-\infty}^{\infty} xde^{-\frac{(x-m)^2}{2D}} \right) =^{*)} .$$

Применяя метод интегрирования по частям во втором интеграле, получим

$$^{*)}= m^2 - \sqrt{\frac{D}{2\pi}}\left[xe^{-\frac{(x-m)^2}{2D}} \Bigg|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-m)^2}{2D}} dx \right] = m^2 + D .$$

Окончательно

$$D[x] = m^2 + D - m^2 = D . \qquad (4)$$

Таким образом, в формуле (1) два параметра m и D нормального закона распределения случайной величины имеют смысл математического ожидания и дисперсии соответственно.

Весьма часто встречается задача определения вероятности $P(a \le x < b)$ того, что в результате проведения испытания случайная величина окажется в промежутке $[a, b)$. Она решается выполнением следующих преобразований:

$$P(a \le x < b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D}} \int_a^b e^{-\frac{(x-m)^2}{2D}} dx =$$

$$= \left| \begin{aligned} y &= \frac{x-m}{\sqrt{D}} \\ dy &= \frac{dx}{\sqrt{D}} \end{aligned} \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{a-m}{\sqrt{D}}}^{\frac{b-m}{\sqrt{D}}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy\,. \qquad (5)$$

Вычисление последнего интеграла осуществляется с помощью нормированной функции Лапласа, которая определяется по формуле (II.10.2.2).

С введением нормированной функции Лапласа искомый интеграл (5) примет вид

$$P(a \le x < b) = \bar{\Phi}\left(\frac{b-m}{\sqrt{D}}\right) - \bar{\Phi}\left(\frac{a-m}{\sqrt{D}}\right)\,. \qquad (6)$$

В силу нечетности нормированной функции Лапласа ее табулируют только для положительных значений аргумента. Особое значение имеет вычисление вероятности в интервале, симметричном относительно математического ожидания. При этом $b - m = m - a$ и формула (6) приобретает вид

$$P(a \le x < b) = 2\bar{\Phi}\left(\frac{b-m}{\sqrt{D}}\right)\,. \qquad (7)$$

Примечательно, что рост нормированной функции Лапласа происходит довольно быстро для значений аргумента в диапазоне от 0 до 1, а затем резко замедляется. Действительно, при $b - m = m - a = \sqrt{D} = \sigma$

$$P(a \le x < b) = 2\bar{\Phi}(1) \approx 0,68\,,$$

при $b - m = m - a = 2\sqrt{D} = 2\sigma$

$$P(a \le x < b) = 2\bar{\Phi}(2) \approx 0,9544\,,$$

а при $b - m = m - a = 3\sqrt{D} = 3\sigma$

$$P(a \le x < b) = 2\bar{\Phi}(3) \approx 0,997\,. \qquad (8)$$

Последнее соотношение говорит о том, что случайная величина попадет в интервал, симметричный относительно математического ожидания, длиной 6σ практически со 100%-ной вероятностью. В этом состоит так называемое правило «трех сигм».

Замечание. Помимо нормированной функции Лапласа используют **интеграл вероятностей**, или **функцию ошибок**, определяемую соотношением

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-x}^{x} e^{-t^2} dt \ . \tag{9}$$

Легко убедиться, что обе функции связаны соотношением

$$\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) = 2\bar{\Phi}(x) \ . \tag{10}$$

Для сокращения записи нормального закона распределения используют следующие обозначения:

$$n(x, m, \sigma) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \tag{11}$$

и

$$N(x, m, \sigma) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}} dt \ , \tag{12}$$

где $\sigma \equiv \sqrt{D}$.

График плотности распределения вероятностей нормально распределенной случайной величины $n(x, 0, 1)$ представлен на рис. 1, ее функции $N(x, 0, 1)$ распределения вероятностей — на рис. 2.

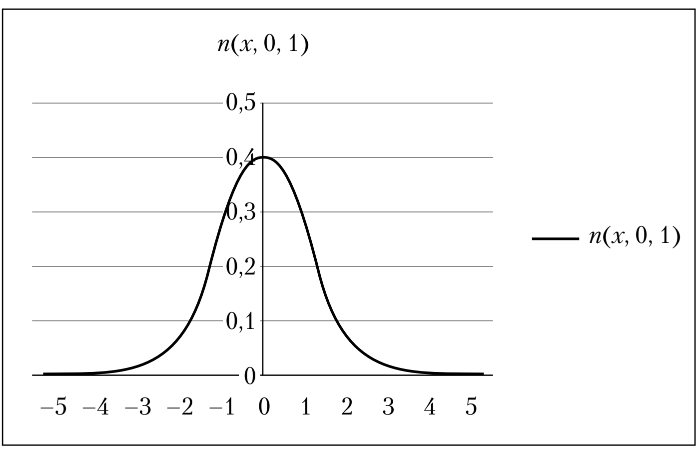


Рис. 1. Плотность распределения вероятностей $n(x, 0, 1)$ нормально распределенной случайной величины

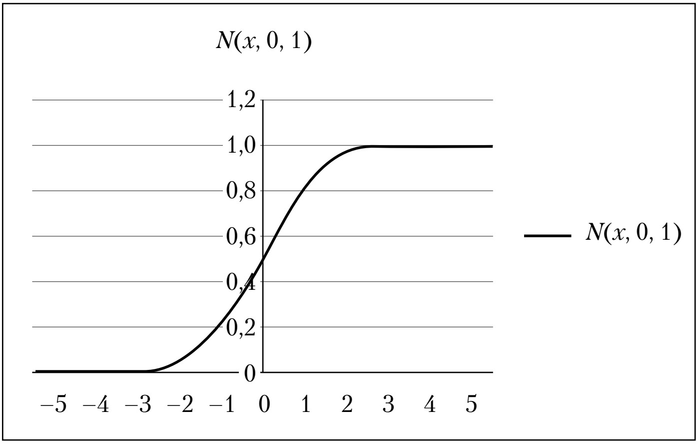


Рис. 2. Функция распределения вероятностей $N(x, 0, 1)$ нормально распределенной случайной величины

Контрольные вопросы

1. Каким количеством параметров описывается нормальное распределение непрерывной случайной величины X?
2. Каков смысл параметров нормального распределения непрерывной случайной величины X?
3. Какие нормализованные функции используют для описания нормального распределения непрерывной случайной величины X?
4. Сформулируйте правило «трех сигм».

Задачи

3.1.1. Случайная величина X распределена по нормальному закону с математическим ожиданием $m = 50$ и дисперсией $D = 100$. Найти вероятность попадания случайной величины в интервалы: а) (0; 20); б) (40; 60).

3.1.2. Предприятие выпускает изделие длиной $m = 50$ м и дисперсией $D = 0{,}01$ м^2. Указать интервал, в который попадет длина выпускаемого изделия с вероятностью 0,9, симметричный относительно стандартной длины.

3.1.3. Стрельба ведется в заданном направлении на заданное расстояние. Предполагая, что дальность полета снаряда распределена по нормальному закону со средним квадратическим отклонением, равным 80 м, определить: а) вероятность недолета снаряда до цели на расстояние более 10 м; б) вероятность перелета цели на расстояние более 20 м; в) вероятность недолета снаряда до цели на расстояние не более 10 м и перелета до цели на расстояние не более 20 м.

3.1.4. Кораблю поставлена задача скрытно выставить минную банку на фарватере шириной 10 кабельтовых[1]. Средняя квадратическая ошибка места корабля — 5 кабельтовых. Размерами банки можно пренебречь. Определить: а) вероятность того, что задача будет решена; б) какова должна быть средняя квадратическая ошибка, чтобы мины были выставлены в фарватере с вероятностью 0,9; в) записать плотность вероятностей, функцию распределения места выставленного на фарватере минного заграждения и построить их графики.

3.2. Закон равномерного распределения вероятностей

Среди всевозможных законов распределения своей простотой выделяется закон равномерного распределения вероятностей

$$f(x) = \frac{1}{b-a}, \text{ где } x \in [a, b]. \qquad (1)$$

График его представлен на рис. 1.

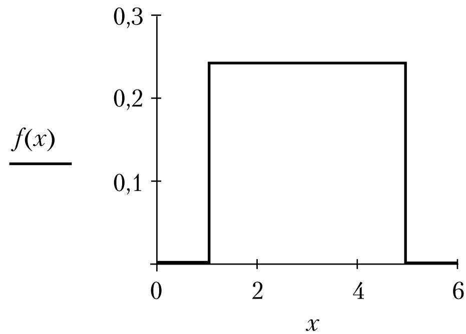


Рис. 1. Закон равномерного распределения вероятностей ($a = 1$, $b = 5$)

Функция распределения равномерно распределенной случайной величины имеет вид

[1] Кабельтов — внесистемная единица измерения расстояния, использующаяся в мореплавании. Международный кабельтов = 1/10 морской мили == 6 угловых секунд меридиана = 185,2 м.

$$F(x) = \int_{a}^{x} \frac{dx}{b-a} = \frac{x-a}{b-a}. \tag{2}$$

Ее график представляет собой отрезок прямой линии, изображенный на рис. 2.

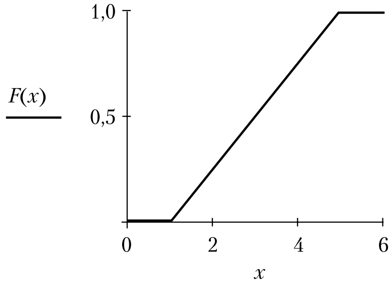


Рис. 2. Функция распределения равномерно распределенной случайной величины ($a = 1$, $b = 5$)

Математическое ожидание и дисперсия равномерно распределенной величины определяются по формулам

$$M[X] = \int_{a}^{b} \frac{x dx}{b-a} = \frac{b+a}{2} \quad \text{и} \tag{3}$$

$$D[X] = \int_{a}^{b} \frac{(x - M[X])^2 dx}{b-a} = \frac{(b-a)^2}{12} \tag{4}$$

соответственно.

Равномерно распределенная случайная величина имеет большое значение. Оно определяется тем, что все системы программирования имеют генератор этой случайной величины. С ее помощью можно воспроизводить или, как говорят, разыгрывать любую другую случайную величину.

Контрольные вопросы

1. Каким количеством параметров описывается равномерное распределение непрерывной случайной величины X?

Задачи

3.2.1. По условию задачи 2.3.1 определить математическое ожидание и дисперсию непрерывной случайной величины.

3.2.2. Случайная величина X имеет равномерное распределение в интервале $[-4; 2]$.

Найти: а) плотность вероятностей $f(x)$; б) функцию распределения $F(x)$; в) математическое ожидание и дисперсию; г) вероятность того, что в результате испытания случайная величина X окажется в диапазоне $[-2, 2]$. Построить графики функций $f(x)$ и $F(x)$ [13].

3.2.3. Случайная величина X имеет равномерное распределение и числовые характеристики $m_X = -1$; $D_X = \dfrac{1}{3}$. Найти функции плотности вероятностей $f(x)$ и распределения $F(x)$ [13].

3.2.4*. Азимутальный лимб имеет цену деления 1°. Определить вероятность p сделать ошибку в пределах 10′, если отсчет округляется до ближайшего целого числа градусов (по правилам математического округления). Найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение ошибки округления X [13], выраженной в минутах.

3.3. Распределение Пуассона

Рассмотрим предельный переход в формуле Бернулли (II.9.1.1) при $n \to \infty$ и условии

$$np = a\,, \tag{1}$$

где a — постоянное число. Естественно, что $p \to 0$. Выполним следующие тождественные преобразования:

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ np=a}} p_n(m) = \lim_{\substack{n\to\infty \\ np=a}} C_n^m p^m q^{n-m} = \lim_{\substack{n\to\infty \\ np=a}} \frac{n!}{m!(n-m)!}\, p^m q^{n-m} =^{*)}.$$

Разделив сначала числитель и знаменатель дроби на $(n - m)!$ с учетом равенства $q = 1 - p$, а затем, умножив и разделив результат на n^m с учетом равенства (1), получим

$$^{*)}= \lim_{\substack{n\to\infty \\ np=a}} \frac{n(n-1)...(n-m+1)}{m!}\, p^m \,\frac{(1-p)^n}{(1-p)^m} = \lim_{\substack{n\to\infty \\ np=a}} \frac{a^m}{m!}(1-\frac{1}{n}) * ...$$

$$... * (1-\frac{m-1}{n}) * (1-\frac{a}{n})^n = \lim_{\substack{n\to\infty \\ np=a}} \frac{a^m}{m!}(1-\frac{a}{n})^n =$$

$$= \frac{a^m}{m!} \lim_{\substack{n\to\infty \\ np=a}} (1-\frac{a}{n})^n = \frac{a^m}{m!} e^{-a}.$$

Или окончательно

$$p_\infty(m) \equiv \lim_{\substack{n\to\infty \\ np=a}} p_n(m) = \lim_{\substack{n\to\infty \\ np=a}} C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{a^m}{m!} e^{-a}. \qquad (2)$$

Формула (2) представляет **закон Пуассона** распределения случайной величины M, принимающей целочисленные значения от 0 до ∞. Проверим выполнение условия равенства единицы вероятности достоверного события:

$$P(U) = \sum_{m=0}^{\infty} p_\infty(m) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^m}{m!} e^{-a} = e^{-a} e^{a} = 1. \qquad (3)$$

Определим числовые характеристики закона распределения Пуассона. Вычислим сначала математическое ожидание случайной величины M:

$$M[M] = \sum_{m=0}^{\infty} m p_\infty(m) = \sum_{m=0}^{\infty} m \frac{a^m}{m!} e^{-a} = e^{-a} \sum_{m=1}^{\infty} m \frac{a^m}{m!} =$$

$$= e^{-a} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a^{m-1}}{(m-1)!} a = e^{-a} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a^{m-1}}{(m-1)!} a =$$

$$= a e^{-a} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a^i}{i!} = a e^{-a} e^{a} = a. \qquad (4)$$

Таким образом, в распределении Пуассона параметр a имеет смысл математического ожидания m случайной величины M.

Определим теперь дисперсию случайной величины, воспользовавшись формулой (4). Для этого сосчитаем сначала $M[M^2]$:

$$M[M^2] = \sum_{m=0}^{\infty} m^2 \frac{a^m}{m!} e^{-a} = \sum_{m=1}^{\infty} m \frac{a^m}{(m-1)!} e^{-a} =$$

$$= e^{-a} \sum_{m=1}^{\infty} ((m-1)+1) \frac{a^m}{(m-1)!} = e^{-a} \left\{ \sum_{m=2}^{\infty} \frac{a^m}{(m-2)!} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a^m}{(m-1)!} \right\} =$$

$$= e^{-a} \left\{ a^2 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a^i}{i!} + a \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a^i}{i!} \right\} = a^2 + a. \qquad (5)$$

Окончательно получим

$$D[M] = M\left[M^2\right] - M^2[M] = a^2 + a - a^2 = a. \qquad (6)$$

Отметим, что если некоторая дискретная случайная величина, принимающая целочисленные значения, характеризуется равенством математического ожидания и дисперсии, то это является первым признаком того, что она распределена по закону Пуассона.

Пример. Пусть вероятность попадания в цель при каждом выстреле составляет 0,001. По цели выстрелили 5000 раз. Найти вероятность попадания в цель двумя или более выстрелами.

Решение.

Прежде всего отметим, что поставленная задача совпадает со схемой испытаний Бернулли, где $p = 0{,}001$. В соответствии с этой схемой наиболее простой путь решения данной задачи состоит в вычислении выражения

$$P(M \geq 2) = 1 - P(0) - P(1) = 1 - C_{5000}^{0} p^{0} q^{5000} - C_{5000}^{1} p^{1} q^{4999},$$

где M — число попаданий в цель при 5000 выстрелах.

Большие числа последнего выражения делают эту вычислительную задачу не слишком простой.

Воспользуемся тем, что число испытаний в условиях задачи является весьма значительным (5000), а вероятность попадания $p = 0{,}001$ при одиночном выстреле весьма малым. Это позволяет схему испытаний Бернулли заменить более простой схемой испытаний Пуассона. Для нее вычисляем постоянную a по формуле

$$a = np = 5000 * 0,001 = 5.$$

Число попаданий при 5000 выстрелах считаем распределенным по закону (2)

$$p_{\infty}(m) = \frac{5^{m}}{m!} e^{-5}$$

и вероятность попадания в цель двумя и более выстрелами вычисляем по более простой формуле

$$P(M \geq 2) = 1 - P(0) - P(1) \approx 1 - e^{-5} - 5e^{-5} = 1 - 6e^{-5} \approx 0,9596.$$

Рассмотренный пример показывает, что если существуют основания считать некоторую случайную величину распределенной по закону Пуассона, то, определив только ее математическое ожидание (среднее значение) или дисперсию, по формуле (2) получаем закон ее распределения.

Контрольные вопросы

1. Каким количеством параметров описывается закон Пуассона дискретной случайной величины X?
2. Являются ли одинаковыми математическое ожидание и дисперсия дискретной случайной величины, распределенной по закону Пуассона?

3. Опишите множество значений, которые может принимать случайная величина, распределенная по закону Пуассона?
4. Из какого закона выводится закон Пуассона как его предельная форма?
5. Какие случайные величины можно приближенно считать распределенными по закону Пуассона?

Задачи

3.3.1. Автоматическая телефонная станция получает в среднем 600 вызовов в час. Какова вероятность того, что за минуту она получит 10 вызовов?

3.3.2. Среди семян огурцов содержится 0,5% невсхожих. Какова вероятность получить 5 невсхожих семян среди 1000 семян огурцов, отобранных случайно?

3.3.3. В течение суток на командный пункт поступает в среднем 120 радиограмм. Определить вероятность того, что за 0,6 часа: а) не поступит ни одной радиограммы; б) поступит три или четыре радиограммы [13].

3.3.4. На радиомаяк-ответчик в среднем поступает 15 запросов в час. Считая число запросов случайной величиной, распределенной по закону Пуассона, определить вероятность того, что за 4 мин: а) поступит три запроса; б) поступит хотя бы один запрос [13].

3.3.5. Число обнаружений подводной лодки в районе ее боевого патрулирования противолодочными силами является случайной величиной, распределенной по закону Пуассона с параметром $a = 2$. Определить вероятность обнаружить подводную лодку 5 раз [13].

3.4. Показательное (экспоненциальное) распределение

При анализе надежности систем и в теории массового обслуживания используется непрерывная случайная величина t[1] с плотностью вероятности

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}; & \lambda > 0, \ t \ge 0 \\ 0 & ; \ t < 0 \end{cases}. \qquad (1)$$

Закон (1) называется **показательным** или **экспоненциальным**. График функции (1) представлен на рис. 1.

[1] Здесь, следуя традиции, мы отступаем от правила обозначения имени случайной величины прописной буквой, а ее значения — строчной буквой.

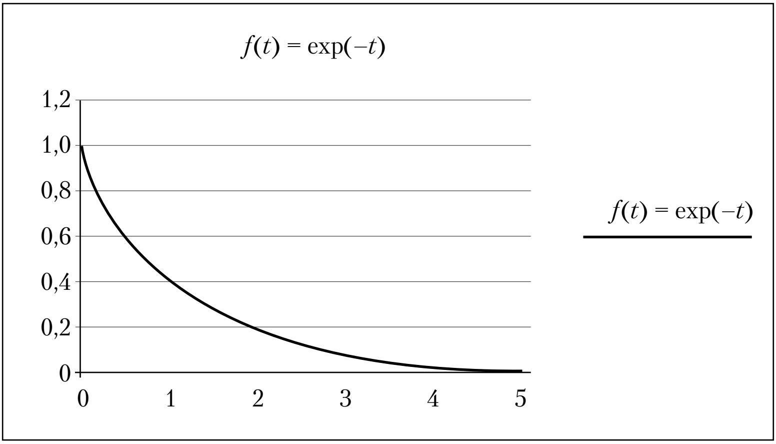


Рис. 1. График плотности вероятности случайной величины, имеющей экспоненциальный закон распределения ($\lambda = 1$)

Функция распределения $F(t)$ случайной величины t определяется выражением

$$F(t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda\tau} d\tau = -\int_0^t de^{-\lambda\tau} = 1 - e^{-\lambda t}. \tag{2}$$

Ее график представлен на рис. 2.

Показательному закону распределения подчиняются такие случайные величины t, как продолжительность телефонного разговора, время безотказной работы ЭВМ, время распада радиоактивного атома.

Математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение случайной величины t определяются, как легко убедиться, выражениями

$$M[t] = \int_0^\infty \tau\lambda e^{-\lambda\tau} d\tau = \frac{1}{\lambda}; \tag{3}$$

$$D[t] = M\left[t^2\right] - M^2[t] = \frac{1}{\lambda^2}; \tag{4}$$

$$\sigma = \sqrt{D[t]} = \frac{1}{\lambda} \tag{5}$$

соответственно.

Контрольные вопросы

1. Каким количеством параметров описывается показательный закон распределения непрерывной случайной величины X?

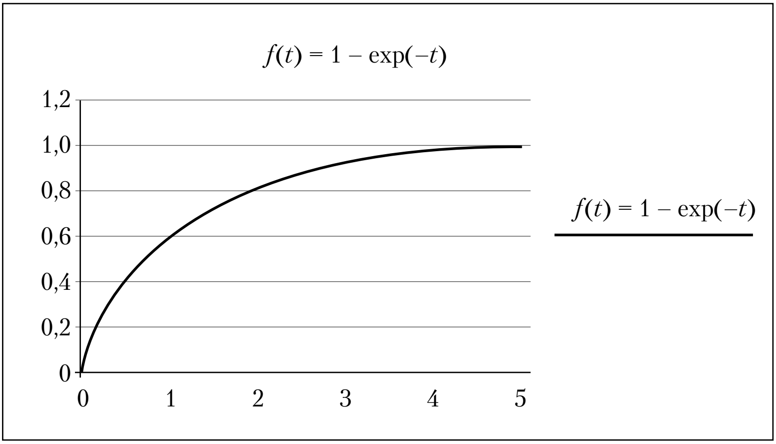


Рис. 2. График функции распределения случайной величины, имеющей экспоненциальный закон распределения ($\lambda = 1$)

2. Какой закон распределения непрерывной случайной величины характеризуется одинаковостью математического ожидания и среднего квадратического отклонения?
3. В каких областях знаний находит применение показательный закон распределения непрерывной случайной величины X?

Задачи

3.4.1. Длительность t службы электроприбора часто можно рассматривать как случайную величину, распределенную по показательному закону $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$. Построить график плотности вероятности этой величины, если $\lambda = 1$.

3.4.2. Время t (час) непрерывной работы радиостанции помех до момента выхода ее из строя подчинено показательному закону с плотностью вероятностей выхода ее из строя

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-0,2t}; & t \ge 0 \\ 0 \quad ; & t < 0. \end{cases}$$

Определить следующие характеристики случайной величины:
а) коэффициент λ;
б) функцию распределения $F(t)$ случайной величины t;
в) математическое ожидание и дисперсию случайной величины t;
г) вероятность того, что радиостанция помех будет работоспособна в промежутке времени от 5 до 7 часов работы с момента ее последнего ремонта.

3.4.3. Вероятность $F(t)$ обнаружения цели за время наблюдения t определяется формулой $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$, где λ — положительное число. Определить математическое ожидание времени наблюдения, необходимого для обнаружения цели, и вероятность того, что за время наблюдения, меньшее найденного математического ожидания, цель будет обнаружена [13].

3.4.4. Время безотказной работы корабельного радиоэлектронного оборудования в боевом походе является случайной величиной, распределенной по показательному закону. Определить, пользуясь функцией обеспеченности, вероятность безотказной работы оборудования в течение десятисуточного похода, если среднее время безотказной работы составляет 200 суток [13].

3.4.5. Противолодочный комплекс производит поиск подводной лодки в некотором районе. Вероятность обнаружения подводной лодки определяется формулой $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$, где t — время поиска; λ — постоянный коэффициент, имеющий смысл числа обнаружений подводной лодки в единицу времени. Обнаруженная подводная лодка подвергается однократной атаке, при которой противолодочный комплекс расходует весь свой боезапас. Вероятность ее поражения равна p. Определить вероятность $F(10)$ того, что за 10 часов поиска подводная лодка будет поражена, если $\lambda = 0{,}1$ час$^{-1}$ и $p = 0{,}6$ [12].

3.4.6. Время T безотказной работы радиоаппаратуры является случайной величиной, имеющей показательное распределение с плотностью вероятностей $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, где λ — постоянная; t — значение времени T безотказной работы радиоаппаратуры. Определить вероятность безотказной работы радиоаппаратуры в течение времени $\dfrac{1}{2\lambda}$ и $\dfrac{1}{\lambda}$ [13].

3.4.7. Радиоаппаратура за 10 000 часов работы выходит из строя в среднем 10 раз. Найти вероятность p выхода из строя радиоаппаратуры за 100 часов работы [13].

3.4.8. Боевая информационная управляющая система на больших противолодочных ракетных крейсерах работает до отказа в среднем 400 часов. Найти вероятность того, что система будет работать без отказа не менее 600 часов [13].

§ 4. Многомерные случайные величины. Случайные процессы

4.1. Введение

Часто результат опыта описывается не одной, а несколькими случайными величинами (СВ): (X_1, ..., X_n). Например, рост и вес человека. В этом случае принято говорить, что указанные величины образуют **систему** СВ (X_1, ..., X_n) или **многомерную** СВ. Описание двумерной дискретной случайной величины приведено в пункте 1.6 настоящей главы.

Многомерные ДСВ рассмотрим на примере двумерной СВ (X, Y). Закон распределения двумерной СВ задается с помощью следующей таблицы.

Таблица. Закон распределения ДСВ

X \ Y	y_1	y_2	...	y_n
x_1	p_{11}	p_{12}		p_{1n}
x_2	p_{21}	p_{22}		p_{2n}
...				
x_m	p_{m1}	p_{m2}		p_{mn}

Здесь $x_1 < x_2 < ... < x_m$, $y_1 < y_2 < ... < y_n$, p_{ij} — вероятность события, заключающегося в одновременном выполнении равенств $X = x_i$, $Y = y_j$. При этом

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1 .$$

Для дискретных СВ используется также функция распределения $F(x)$. Она имеет смысл вероятности того, что при проведении эксперимента случайная величина примет значение, меньшее, чем то, которое указано в аргументе $F(x) = P(X < x)$.

4.2. Многомерные непрерывные случайные величины (НСВ)

Многомерные НСВ рассмотрим на примере двумерной СВ (X, Y). Закон распределения двумерной СВ задается функцией распределения $F(x, y)$. Она имеет смысл вероятности того, что в результате проведения испытания случайная величина X окажется меньше x, а случайная величина Y — меньше y:

$$F(x,y) = P(X < x, Y < y) . \qquad (1)$$

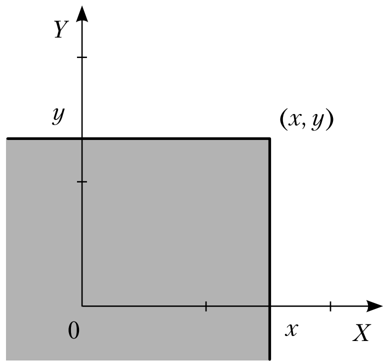


Рис. 1. Область определения функции распределения вероятностей двумерной НСВ

Функция распределения $F(x, y)$ имеет смысл вероятности попадания НСВ в затемненную область на рис. 1.

Функция распределения $F(x, y)$ обладает следующими свойствами:

$$0 \le F(x,y) \le 1. \tag{2}$$

$$F(+\infty,+\infty) = 1. \tag{3}$$

$$F(-\infty,-\infty) = 0. \tag{4}$$

$$F(-\infty,y) = 0 \text{ и } F(x,-\infty) = 0. \tag{5}$$

$$F(x,+\infty) = F_1(x) \text{ и } F(+\infty,y) = F_2(y). \tag{6}$$

Если $x_2 > x_1$ или $y_2 > y_1$, то

$$F(x_2,y_2) \ge F(x_1,y_1). \tag{7}$$

Эти свойства являются следствиями свойств функции вероятности.

Функция, определяемая равенством

$$f(x,y) = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}, \tag{8}$$

называется **плотностью**[1] **распределения вероятностей** двумерной НСВ. В соответствии со свойствами двойного интеграла, получаем, что обе функции связаны соотношением

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta. \tag{9}$$

[1] Ее называют также плотностью вероятностей, или плотностью вероятности.

Поскольку $F(x, y)$ является неубывающей функцией своих аргументов, то

$$f(x,y) \geq 0. \tag{10}$$

Двойной интеграл (9) обладает свойством аддитивности по области интегрирования, так же как и вероятность от суммы несовместных событий равна сумме вероятностей каждого события. Следовательно, для определения вероятности $P((X, Y) \in D$ попадания двух случайных величин X и Y в область D плоскости XOY следует проинтегрировать плотность вероятностей $f(x, y)$ по этой области:

$$P((X,Y) \subset D) = \iint\limits_{(B)} f(x,y)dxdy. \tag{11}$$

Зная функцию плотности вероятностей двумерной случайной величины, можно получить функции плотности вероятностей одномерных случайных величин. Для этого надо продифференцировать по переменной x первое из соотношений (6) и по y — второе. С учетом равенства (9) получим

$$f_1(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy \text{ и} \tag{12}$$

$$f_2(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx. \tag{13}$$

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте определение понятия «многомерная случайная величина».
2. Каким образом из известного закона распределения многомерной (двумерной) случайной величины можно получить закон распределения одномерной случайной величины?

Задачи

4.2.1. Плотность вероятностей двумерной случайной величины (X, Y) задана функцией

$$f(x,y) = \frac{1}{\pi^2(1+x^2+x^2y^2+y^2)}.$$

Проверить условие (3) нормировки этой функции и определить вероятность $P((X,Y) \subset D)$ попадания случайной величины (X, Y) в прямоугольную область D с вершинами $O(0, 0)$, $A(0, 1)$, $C(\sqrt{3}, 0)$ [11].

4.2.2. Система случайных величин (X, Y) равномерно распределена внутри круга радиуса R:

$$f(x, y) = \begin{cases} C, & x^2 + y^2 \le R^2, \ (C = \text{const}), \\ 0, & x^2 + y^2 > R^2. \end{cases}$$

Найти постоянную C [11].

4.2.3. Система случайных величин (X, Y) подчинена закону распределения с плотностью вероятностей

$$f(x, y) = \begin{cases} a(x^2 + y^2), & x^2 + y^2 \le R^2, \ (a = \text{const}), \\ 0, & x^2 + y^2 > R^2. \end{cases}$$

Найти коэффициент a [11].

4.2.4. Система случайных величин (X, Y) подчинена закону распределения с плотностью вероятностей

$$f(x, y) = \begin{cases} a(x + y), & \text{в области } D, \\ 0, & \text{вне области } D. \end{cases}$$

Область D — квадрат, ограниченный прямыми $x = 0, x = 3, y = 0, y = 3$. Требуется: 1) определить коэффициент a [11]; 2) вычислить вероятность попадания случайной точки (X, Y) в квадрат Q, ограниченный прямыми $x = 1, x = 2, y = 1, y = 2$ [11].

4.3. Числовые характеристики (моменты) многомерных СВ

Для дискретных многомерных СВ используются следующие числовые характеристики.

❒ **Математическое ожидание**

$$M[X] = m_x = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij}x_i = \sum_{i=1}^{m} x_i \sum_{j=1}^{n} p_{ij} = \sum_{i=1}^{m} x_i p_{ix}$$

$$\text{и } M[Y] = m_y = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij}y_j = \sum_{j=1}^{n} y_j \sum_{i=1}^{m} p_{ij} = \sum_{j=1}^{n} y_j p_{yj}, \qquad (1)$$

где $p_{ix} = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}$, $p_{yj} = \sum_{i=1}^{m} p_{ij}$ — вероятности того, что в одном испытании случайная величина X примет значение x_i, а случайная величина Y примет значение y_j соответственно.

❒ **Дисперсия**

$$D[X] = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij}(x_i - m_x)^2 = \sum_{i=1}^{m}(x_i - m_x)^2 p_{ix}$$

$$\text{и } D[Y] = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij}(y_j - m_y)^2 = \sum_{i=1}^{m}(y_j - m_y)^2 p_{yj}. \tag{2}$$

❒ **Корреляционный момент** (ковариация) двух случайных величин X и Y

$$C_{XY} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij}(x_i - m_x)(y_j - m_y) = M[XY] - M[X]M[Y], \tag{3}$$

где

$$M[XY] = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij} x_i y_j. \tag{4}$$

В [17] доказывается следующее соотношение:

$$C_{XY} \le \sqrt{D[X]}\sqrt{D[Y]}.$$

❒ **Коэффициент корреляции**

$$r_{XY} = \frac{C_{XY}}{\sqrt{D[X]}\sqrt{D[Y]}} = \frac{C_{XY}}{\sigma[X]\sigma[Y]}. \tag{5}$$

Если случайные величины X и Y являются независимыми, то есть выполняется соотношение

$$M[XY] = M[X]M[Y], \tag{6}$$

то $C_{XY} = 0$ и $r_{XY} = 0$. Поэтому корреляционный момент и коэффициент корреляции используются для оценки степени зависимости случайных величин друг от друга.

Для непрерывных многомерных СВ используются следующие числовые характеристики.

1. **Начальным моментом** a_{ks} называется величина

$$a_{ks} = M[X^k Y^s] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x^k y^s f(x,y)\,dxdy. \tag{7}$$

Наибольшее распространение получили следующие начальные моменты первого порядка:

$$a_{10} = M[X] = m_x = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x,y)dxdy = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf_1(x)dx \tag{8}$$

и

$$a_{01} = M[Y] = m_y = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} yf(x,y)dxdy = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} yf_2(y)dy, \tag{9}$$

где[1] $f_1(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$ и $f_2(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$. (10)

2. **Центральным моментом** C_{ks} называется величина

$$C_{ks} = M[(X-m_x)^k(Y-m_y)^s] =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x-m_x)^k(y-m_y)^s f(x,y)dxdy. \tag{11}$$

Наибольшее распространение получили следующие центральные моменты второго порядка:

$$C_{20} = M[(X-m_x)^2] = D[X] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x-m_x)^2 f(x,y)dxdy =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x-m_x)^2 dx \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x-m_x)^2 f_1(x)dx, \tag{12}$$

$$C_{02} = M[(Y-m_y)^2] = D[Y] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (y-m_y)^2 f(x,y)dxdy =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (y-m_y)^2 dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (y-m_y)^2 f_2(y)dy \text{ и} \tag{13}$$

$$C_{11} \equiv C_{XY} = M[(X-m_x)(Y-m_y)] = \tag{14}$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x-m_x)(y-m_y)f(x,y)dxdy = M[XY] - M[X]M[Y].$$

Момент C_{XY} называется корреляционным. Наряду с ним используют коэффициент корреляции

$$r_{XY} = \frac{C_{XY}}{\sigma_x\sigma_y}, \tag{15}$$

где $\sigma_x = \sqrt{D[X]}$ и $\sigma_y = \sqrt{D[Y]}$.

---

1 См. обозначения (4.2.12) и (4.2.13).

Если случайные величины X и Y независимы, то есть

$$f(x,y) = f_1(x)f_2(y)\,, \tag{16}$$

то $C_{XY} = 0$, $r_{XY} = 0$. Поэтому, так же как и для ДСВ, корреляционный момент и коэффициент корреляции служат для оценки степени зависимости случайных величин друг от друга. Если $C_{XY} = 0$, то случайные величины называют **некоррелированными**. Некоррелированные СВ не обязательно независимы.

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте определение понятия «многомерная случайная величина».
2. Как вычислить математическое ожидание и дисперсию одной из двух дискретных случайных величин, если известен закон распределения двумерной дискретной случайной величины?
3. Как определяются корреляционный момент и коэффициент корреляции двумерной дискретной случайной величины?
4. Как определяется начальный момент a_{ks} двумерной непрерывной случайной величины?
5. Как вычислить математическое ожидание каждой из двух непрерывных случайных величин, если известен закон распределения двумерной непрерывной случайной величины?
6. Как определяется центральный момент C_{ks} двумерной непрерывной случайной величины?
7. Как вычислить дисперсию каждой из двух непрерывных случайных величин, если известен закон распределения двумерной непрерывной случайной величины?
8. Как определяется корреляционный момент и коэффициент корреляции двумерной непрерывной случайной величины и какова его связь с центральными моментами?

Задачи

4.3.1. В двух ящиках находятся по 6 шаров. В 1-м ящике: один шар с номером 1, два шара с номером 2, три шара с номером 3; во 2-м ящике: два шара с номером 1, три шара с номером 2, один шар с номером 3. Пусть X — номер шара, вынутого из первого ящика, Y — номер шара, вынутого из второго ящика. Из каждого ящика вынули по шару. Составить таблицу закона распределения системы случайных величин (X, Y). Найти m_x, m_y, $D[X]$, $D[Y]$, r_{XY}.

4.3.2. По условию задачи 4.2.2 найти m_x, m_y, C_{XY}.

4.3.3. По условию задачи 4.2.4 найти: 1) математические ожидания m_x и m_y; 2) средние квадратические отклонения σ_x и σ_y; 3) корреляционный момент C_{XY} и коэффициент корреляции r_{XY}.

4.4. Функции СВ. Зависимые и независимые СВ

Для уяснения смысла коэффициента корреляции рассмотрим случай линейной функциональной зависимости двух случайных величин:

$$Y = aX + b. \tag{1}$$

Очевидно, что

$$M[Y] = aM[X] + b,$$

$$\begin{aligned} C_{XY} &= M[(Y - M[Y])(X - M[X])) = \\ &= M[a(X - M[X])^2) = aD[X]. \end{aligned} \tag{2}$$

$$D[Y] = a^2 D[X] + D[b] = a^2 D[X].$$

$$r_{XY} = \frac{C_{XY}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{aD[X]}{\sqrt{D[X]}|a|\sqrt{D[X]}} = \begin{cases} 1 & \text{при } a > 0; \\ -1 & \text{при } a < 0. \end{cases} \tag{3}$$

То есть если две случайные величины связаны между собой линейной функциональной зависимостью, то коэффициент корреляции равен ± 1. Если $r_{XY} > 0$, то говорят, что корреляция положительна, в противном случае — отрицательна.

Следует отметить также условность в использовании коэффициента корреляции для оценки зависимости между случайными величинами. Ибо известны примеры [19], когда зависимые случайные величины имели коэффициент корреляции, равный нулю. Пусть, например, случайная величина X распределена симметрично относительно начала координат, то есть $M[X] = 0$, а случайная величина Y является функцией случайной величины X: $Y = X^2$. Тогда, очевидно, выполняются следующие соотношения:

$$M[X * Y] = M[X^3] = 0 \text{ и } M[X] * M[Y] = 0.$$

Следовательно, коэффициент корреляции $r_{X,Y} = 0$, несмотря на то что случайная величина Y является функцией случайной величины X.

Представление о зависимости случайных величин находит отражение в функции условной плотности вероятностей.

Определение. Функция $f(x / y)$ называется [11] плотностью вероятностей непрерывной случайной величины X при условии, что случайная величина Y приняла значение, равное y. Аналогично определяется функция $f(y / x)$.

Для определения связи вновь введенных функций $f(x / y)$ и $f(y / x)$ воспользуемся формулой (6.1) гл. 1 условной вероятности. По аналогии с ней функции условной вероятности определяются следующим образом:

$$f(x / y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)} \text{ и } f(y / x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)}, \tag{4}$$

или

$$f(x / y) = \frac{f(x, y)}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dx} \text{ и } f(y / x) = \frac{f(x, y)}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dy}. \tag{5}$$

Условные плотности вероятности обладают всеми свойствами безусловной плотности вероятности, и в частности свойством нормировки:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x / y)dx = 1 \text{ и } \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(y / x)dy = 1.$$

Понятие условной плотности вероятности позволяет определить понятие **независимости** одной случайной величины от другой.

Определение. Случайная величина X называется независимой от случайной величины Y, если

$$f(x / y) = f_1(x). \tag{6}$$

Аналогично случайная величина Y называется независимой от случайной величины X, если

$$f(y / x) = f_2(y). \tag{7}$$

С учетом соотношений (1) понятие независимости между двумя случайными величинами X и Y эквивалентно следующему равенству:

$$f(x, y) = f_1(x)f_2(y). \tag{8}$$

Отметим, что формула (8) совпадает с формулой (1.6.7), которая использовалась для определения понятия независимости дискретных СВ. Если условие (5) не выполняется, то случайные величины называют **зависимыми**.

Важной представляется задача определения функции плотности вероятностей случайной величины, являющейся функцией других случайных величин, для которых эти функции известны. Рассмотрим частный случай этой задачи, когда случайные величины X, Y и Z связаны соотношением

$$Z = X + Y .$$

Пусть функции плотности вероятностей случайных величин X и Y описываются функциями $f_x(x)$ и $f_y(y)$. Определим функцию $f_z(z)$ плотности распределения случайной величины Z. Ее функция распределения дается соотношением

$$F_z(z) = \iint\limits_{x+y<z} f(x,y)dxdy ,$$

где $f(x, y)$ — плотность вероятности системы случайных величин (X, Y).

Рассмотрим частный случай независимых случайных величин

$$f(x,y) = f_x(x)f_y(y) .$$

С учетом этого последнего соотношения получаем

$$F_z(z) = \iint\limits_{x+y<z} f_x(x)f_y(y)dxdy = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx \int\limits_{-\infty}^{z-x} f_x(x)f_y(y)dy =$$

$$= \left|t = y + x\right| = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx \int\limits_{-\infty}^{z} f_x(x)f_y(t-x)dt =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{z} dt \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_x(x)f_y(t-x)dx = \int\limits_{-\infty}^{z} f_z(t)dt ,$$

где

$$f_z(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_x(x)f_y(t-x)dx .$$

Применим полученную формулу для случая сложения двух случайных величин, равномерно распределенных на промежутке $[a,b]$:

$$f_x(x) = f_y(y) = \frac{1}{b-a} .$$

В формуле для функции $f_z(t)$ будем считать, что если аргументы подынтегральных функций выходят за пределы промежутка $[a, b]$, то функции обращаются в 0. Тогда

$$f_z(t) = \frac{1}{b-a}\int\limits_{a}^{b} f_y(t-x)dx = \begin{vmatrix} y = t-x \\ dy = -dx \end{vmatrix} = -\frac{1}{b-a}\int\limits_{t-a}^{t-b} f_y(y)dy =$$

$$= \frac{1}{b-a}\int_{t-b}^{t-a} f_y(y)dy = \begin{cases} \dfrac{t-2a}{(b-a)^2} & \text{при } 2a \le t \le a+b; \\ \dfrac{2b-t}{(b-a)^2} & \text{при } a+b < t \le 2b. \end{cases}$$

Случайная величина t, очевидно, находится в промежутке $[2a, 2b]$. За пределами указанного промежутка функцию $f_z(t)$ будем также считать равной 0. Вычислим ее сначала для $t \in [2a, a+b]$. Аргумент $(t-x) \in [t-b, t-a]$. Правая граница последнего диапазона попадает в интервал$[a, b]$, а левая — только для $t-b \ge a$. Таким образом, длина промежутка интегрирования, в котором $f_y(t-x) \ne 0$, равна $t-2a$. Следовательно, искомая плотность вероятностей дается выражением

$$f_z(t) = \frac{t-2a}{(b-a)^2} \text{ при } t \in [2a, a+b].$$

Вычислим теперь $f_z(t)$ в интервале $t \in [a+b, 2b]$. Аргумент $(t-x) \in [t-b, t-a]$. Левая граница последнего диапазона попадает в интервал $[a, b]$, а правая — только для $t-a \le b$. Таким образом, длина промежутка интегрирования, в котором $f_y(t-x) \ne 0$, равна $2b-t$. Следовательно, искомая плотность вероятностей дается выражением

$$f_z(t) = \frac{2b-t}{(b-a)^2} \text{ при } t \in [a+b, 2b].$$

Окончательно

$$f_z(t) = \begin{cases} \dfrac{t-2a}{(b-a)^2} & \text{при } t \in [2a, a+b]; \\ \dfrac{2b-t}{(b-a)^2} & \text{при } t \in [a+b, 2b]. \end{cases}$$

Функция $f_z(t)$ носит название закона распределения Симпсона. Ее график представлен на рис. 1. Примечательным является тот факт, что сумма двух равномерно распределенных случайных величин оказалась случайной величиной, распределенной по «треугольному» закону.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение понятия условной плотности вероятности случайной величины.

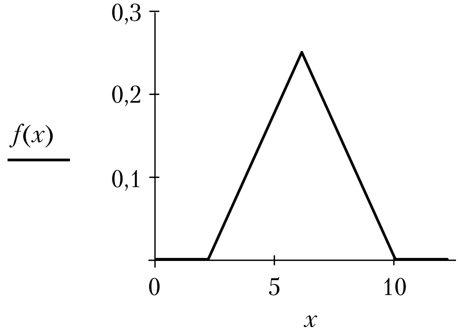


Рис. 1. Плотность вероятности суммы двух равномерно распределенных случайных величин ($a = 1$, $b = 5$)

2. Дайте определение понятия независимости случайной величины X от случайной величины Y.

Задачи

4.4.1. В соответствии с условием задачи 4.2.1 найти $f_1(x)$, $f_2(y)$, $f(x\,|\,y)$, $f(y\,|\,x)$. Установить, являются ли случайные величины X и Y зависимыми.

4.4.2. Система случайных величин (X, Y) равномерно распределена внутри круга радиусом r:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi r^2}, & x^2 + y^2 \le r^2, \\ 0, & x^2 + y^2 > r^2. \end{cases}$$

Найти $f_1(x)$, $f_2(y)$, $f(x\,|\,y)$, $f(y\,|\,x)$. Установить, являются ли случайные величины X и Y зависимыми [11].

4.5. Понятие о цепях Маркова

Многие технические системы можно рассматривать как находящиеся в одном из n возможных состояний: $S_1, S_2, \ldots, S_n$. Переход из одного состояния в другое происходит скачкообразно по вероятностным закономерностям. Если вероятность таких переходов определяется только текущим состоянием системы и не зависит от предшествующих, то последовательность таких переходов называется **марковским**[1] процессом или **марковской** цепью. Иначе говоря, марковской цепью называется последовательность номеров состояний системы.

Пример. Электронасос может находиться в трех состояниях:

- S_1 — исправен;
- S_2 — неисправен из-за отказа гидравлической части;
- S_3 — неисправен из-за отказа электрической части.

Если возможен ремонт гидравлической части, то электронасос может перейти из состояния S_2 в исправное состояние S_1. Возможные состояния технической системы и переходы между ними представлены графически на рис. 1.

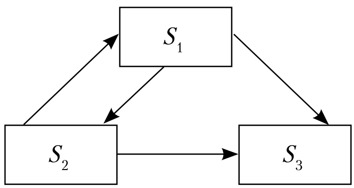


Рис. 1. График состояний технической системы

Переход из состояния в состояние обозначается стрелками. Отметим, что из состояния S_3 нет выходящей стрелки. Это значит, что если система попадет в это состояние, то она из него уже не выйдет. В данном случае: если выйдет из строя электрическая часть насоса, то она ремонту не подлежит и насос больше работать не будет. Такие состояния называются состояниями **без выхода**.

4.6. Размеченный граф состояний технического устройства. Уравнения Колмогорова для вероятности состояний

Пусть техническая система может находиться в одном из трех состояний: S_1, S_2, S_3 с вероятностями $p_1(t)$, $p_2(t)$ и $p_3(t)$ соответственно. Очевидно, что

$$p_1(t) + p_2(t) + p_3(t) = 1\,. \tag{1}$$

Предположим, что система находится в состоянии S_i. Из текущего состояния S_i система может перейти в состояние S_j. Пусть вероятность

[1] Андрей Марков (1856–1922) — русский математик. Его младший брат и сын также были математиками.

этого перехода за время Δt может быть выражена величиной $\pi_{ij}(\Delta t)$. Если существует предел

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\pi_{ij}(\Delta t)}{\Delta t} \equiv \lambda_{ij}, \tag{2}$$

то он называется **условной плотностью вероятности перехода системы из состояния S_i в состояние S_j**. В дальнейшем будем считать, что все условные плотности вероятности являются постоянными:

$$\lambda_{ij} = \text{const}. \tag{3}$$

Если рядом со стрелками, обозначающими переход системы из одного состояния в другое, проставить символы λ_{ij}, то граф состояний будет называться размеченным. Определим вероятность нахождения системы в состоянии S_1 в момент времени $t + \Delta t$. Система будет находиться в состоянии S_1 в момент времени $t + \Delta t$ вследствие трех различных причин:

- в момент времени t она уже находилась в состоянии S_1 и в течение последующего интервала времени Δt из него не вышла;
- в момент времени t она находилась в состоянии S_2 и в течение последующего интервала времени Δt из него перешла в состояние S_1;
- в момент времени t она находилась в состоянии S_3 и в течение последующего интервала времени Δt из него перешла в состояние S_1.

Три перечисленные возможности образуют полную группу попарно несовместных событий (гипотез), и вероятность системы находиться в состоянии S_1 в момент времени $t + \Delta t$ может быть вычислена по формуле полной вероятности, то есть как сумма вероятностей перечисленных событий в виде

$$p_1(t + \Delta t) = p_1(t)(1 - (\lambda_{12} + \lambda_{13})\Delta t) + p_2\lambda_{21}\Delta t + p_3\lambda_{31}\Delta t.$$

Перенесем функцию $p_1(t)$ в левую часть уравнения, разделим обе его части на Δt и перейдем к пределу при $\Delta t \to 0$. В результате получим

$$\frac{dp_1}{dt} = -(\lambda_{12} + \lambda_{13})p_1 + \lambda_{21}p_2 + \lambda_{31}p_3. \tag{4}$$

Аналогичным образом можно составить уравнения для вероятностей $p_2(t)$ и $p_3(t)$. В результате получим следующую систему уравнений, описывающих поведение технической системы:

$$\begin{cases} \dfrac{dp_1}{dt} = -(\lambda_{12} + \lambda_{13})p_1 + \lambda_{21}p_2 + \lambda_{31}p_3 \\ \dfrac{dp_2}{dt} = \lambda_{12}p_1 - (\lambda_{21} + \lambda_{23})p_2 + \lambda_{32}p_3 \\ \dfrac{dp_3}{dt} = \lambda_{13}p_1 + \lambda_{23}p_2 - (\lambda_{31} + \lambda_{32})p_3. \end{cases} \tag{5}$$

Система (5) называется системой уравнений Колмогорова. Начальными условиями для системы дифференциальных уравнений (5) могут быть следующие:

$$p_1(0) = 1, \ p_2(0) = p_3(0) = 0. \tag{6}$$

В стационарном состоянии левые части системы уравнений (5) равны нулю. Любое из уравнений системы (5) является линейной комбинацией двух других. Найдем стационарное решение системы (5). Исключая, например, p_3 и используя (1), получим:

$$\begin{cases} -(\lambda_{12} + \lambda_{13})p_1 + \lambda_{21}p_2 + \lambda_{31}(1 - p_1 - p_2) = 0 \\ \lambda_{12}p_1 - (\lambda_{21} + \lambda_{23})p_2 + \lambda_{32}(1 - p_1 - p_2) = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -(\lambda_{12} + \lambda_{13} + \lambda_{31})p_1 + (\lambda_{21} - \lambda_{31})p_2 = -\lambda_{31} \\ (\lambda_{12} - \lambda_{32})p_1 - (\lambda_{21} + \lambda_{23} + \lambda_{32})p_2 = -\lambda_{32}. \end{cases}$$

Решая последнюю систему уравнений относительно p_1 и p_2, с учетом равенства (1), получим стационарное решение задачи.

4.7. Понятие о случайных процессах

Определение. **Случайной функцией** аргумента t называется случайная величина, зависящая от этого аргумента.

Случайную функцию можно также рассматривать как числовую функцию 2 аргументов: один аргумент — событие из множества U элементарных событий, а второй — действительная величина t

$$X(t) = \varphi(e, t),$$

где $e \in U$ — элементарное событие, $t \in T$ — действительное число.

Если T — числовая последовательность, то $X(t)$ — случайная последовательность. Если T — числовой интервал, то $X(t)$ — случайная функция действительного аргумента. Если T — время, то $X(t)$ — **случайный процесс**.

4.7.1. Способы описания случайных функций

Если зафиксировать аргумент $t = t_1$, то случайную функцию можно рассматривать как случайную величину с функцией плотности вероятностей $f_1(x)$. Аналогично если зафиксировать аргумент $t = t_2$, то случайную функцию можно рассматривать как случайную величину с функцией плотности вероятностей $f_2(x)$. В целом переменную t можно рассматривать как вторую в функции плотности вероятности $f_1(x, t)$. Индекс $_1$ в знаке функции означает, что характеристика относится к одномерной случайной величине.

Таким образом, между введенными функциями существует связь

$$f_1(x) = f_1(x; t_1) \text{ и } f_2(x) = f_1(x; t_2). \quad (1)$$

Совокупность двух случайных величин можно рассматривать как двумерную случайную величину с плотностью вероятностей $f_2(x_1, x_2; t_1, t_2)$, зависящую от параметров t_1 и t_2. Зная двумерную плотность вероятностей случайной функции, можно определить ее одномерную плотность вероятности по формуле (4.2.12):

$$f_1(x_1; t_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_2 . \quad (2)$$

С помощью таких построений можно создать множество многомерных случайных величин любой размерности. Однако для описания случайных функций ограничиваются следующими характеристиками:

- математическим ожиданием;
- дисперсией;
- корреляционной функцией.

Математическое ожидание случайной функции представляет собой центр, около которого располагаются всевозможные ее реализации. Оно вычисляется с использованием одномерной плотности вероятности $f_1(x; t)$ по формуле

$$m(t) = M[X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_1(x; t)\, dx. \quad (3)$$

Дисперсия является мерой рассеивания всевозможных реализаций случайной функции относительно ее математического ожидания. Она также выражается через одномерную плотность вероятности по формуле

$$D(t) = M\left[\left(X(t) - m(t)\right)^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - m(t)\right)^2 f_1(x;\, t)\, dx. \qquad (4)$$

Корреляционная функция отражает степень изменчивости случайной функции. Для ее вычисления требуется уже двумерная плотность вероятности:

$$C(t_1, t_2) = M[(X(t_1) - m(t_1))(X(t_2) - m(t_2))] =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x_1 - m(t_1))(x_2 - m(t_2)) f_2(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2. \qquad (5)$$

Отметим,

$$C(t, t) = D(t)\,. \qquad (6)$$

Корреляционной теорией случайных процессов называется теория, ограничивающаяся рассмотрением функций $m(t)$ и $C(t_1, t_2)$.

Отметим следующие свойства корреляционной функции:

- $C(t_1, t_2) = C(t_2, t_1)$;
- $\left|C(t_1, t_2)\right| \le \sigma(t_1)\sigma(t_2)$;
- если к случайному процессу прибавить неслучайную функцию, то его корреляционная функция не изменится;
- если случайный процесс умножить на неслучайную функцию $\varphi(t)$, то его корреляционная функция умножится на $\varphi(t_1)\varphi(t_2)$;
- корреляционной функцией связи двух случайных процессов $X(t)$ и $Y(t)$ называется функция вида

$$C_{xy}(t_1, t_2) = M[X_0(t_1) Y_0(t_2)] =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x(t_1))(y - m_y(t_2)) f(x, y, t_1, t_2) dx dy. \qquad (7)$$

Случайные процессы называются некоррелированными, если

$$C_{xy}(t_1, t_2) = 0\,.$$

4.7.2. Стационарные случайные процессы

Стационарным называют случайный процесс, в котором математическое ожидание является постоянным:

$$m(t) = m = \text{const}\,, \qquad (1)$$

а корреляционная функция зависит только от разности $t_2 - t_1 = \tau$

$$C(t_1, t_2) = C(\tau)\,. \tag{2}$$

Для этих процессов и дисперсия постоянна. Действительно,

$$D(t) = C(t,t) = C(0) = \text{const}. \tag{3}$$

Для стационарных случайных процессов свойства корреляционной функции приобретают вид:

$$C(\tau) = C(-\tau).$$

$$|C(\tau)| \le D.$$

4.7.3. Эргодические случайные процессы

Для описания стационарного случайного процесса требуется множество всех его реализаций, которые следует подвергнуть статистической обработке. Однако в ряде случаев те же результаты можно получить, используя всего одну реализацию случайного процесса. В этом случае математическое ожидание и корреляционная функция вычисляются по формулам:

$$m = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt; \tag{1}$$

$$C(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T (x(t)-m)(x(t+\tau)-m)dt. \tag{2}$$

Такие стационарные случайные процессы называются **эргодическими**. Для того чтобы стационарный случайный процесс обладал свойством эргодичности, достаточно, чтобы

$$C(\tau) \underset{\tau\to\infty}{\to} 0. \tag{3}$$

4.7.4. Линейные однородные и неоднородные преобразования над случайными процессами

Линейные однородные преобразования.

Линейным однородным преобразованием над случайным процессом называется преобразование, обладающее следующими свойствами:

- $L_o\left[X(t)+Y(t)\right] = L_o\left[X(t)\right] + L_o\left[Y(t)\right]$;
- $L_o\left[CX(t)\right] = CL_o\left[X(t)\right]$.

Линейные однородные преобразования не меняют вид закона распределения.

Если из одного процесса получается другой посредством линейного однородного преобразования вида [14]

$$Y(t) = L_o[X(t)], \tag{1}$$

то его математическое ожидание и корреляционная функция могут быть вычислены по аналогичным функциям первого случайного процесса. Для этого используются следующие формулы:

$$m_y(t) = L_o[m_x(t)] \tag{2}$$

и

$$C_y(t_1, t_2) = L_o(t_2)[L_o(t_1)[C_x(t_1, t_2)]]. \tag{3}$$

где $L_o(t_1)$ и $L_o(t_2)$ — линейное однородное преобразование, выполняемое один раз по переменной t_1 и другой раз по переменной t_2.

Линейные неоднородные преобразования.

Линейными неоднородными преобразованиями называются преобразования, определяемые соотношением

$$L_H[X(t)] = L_o[X(t)] + \varphi(t). \tag{4}$$

Каноническое разложение случайного процесса.

Каноническим разложением случайного процесса называется его представление в виде [14]

$$X(t) = m_x(t) + \sum_{k=1}^{n} X_k \varphi_k(t), \tag{5}$$

где X_k — центрированные некоррелированные случайные величины; $\varphi_k(t)$ — неслучайная функция.

Каноническое разложение корреляционной функции.

Каноническое разложение корреляционной функции можно получить [14], подставив функцию (5) в формулу (4.7.1.5). В результате получим

$$C_y(t_1, t_2) = \sum_{k=1}^{n} D_k \varphi_k(t_1) \varphi_k(t_2). \tag{6}$$

Задачи

4.7.1. Случайный процесс [15] задан в виде $X(t) = \xi t + b$, где ξ — случайная величина, распределенная по нормальному закону с параметрами m_ξ и σ_ξ; b — число. Найти: 1) математическое ожидание $m_X(t)$ и дисперсию $D_X(t)$ случайного процесса; 2) одномерную плотность вероятности $f_1(x; t)$; 3) корреляционную функцию $C(t_1, t_2)$.

4.7.2. Случайный процесс имеет характеристики

$$m_X(t) = t^3 + 2t^2 + 6 \text{ и}$$

$$C_X(t_1, t_2) = \cos t_1 \cos t_2.$$

Определить аналогичные характеристики случайного процесса

$$Y(t) = t\frac{dX(t)}{dt} - 3t^2.$$

4.7.3. Случайный процесс задан каноническим разложением

$$X(t) = 5 + t^2 + X_1 t + X_2 t^2 + X_3 t^3.$$

Известны также дисперсии коэффициентов разложения: $D_1 = 4$, $D_2 = 3$, $D_3 = 2$.

Найти математическое ожидание, корреляционную функцию и дисперсию производной $Y(t) = \dfrac{dX(t)}{dt}$ процесса.

§ 5. Закон больших чисел

5.1. Введение

Теория больших чисел основывается на задании функции вероятности на множестве случайных, в частности элементарных, событий. Очень часто это задание базируется на экспериментальных фактах. В связи с этим встает вопрос о том, насколько точно можно экспериментально определить вероятность осуществления элементарных событий. Правильно ли выбрана функция плотности вероятностей? Какова вероятность оценок параметров закона распределения, полученных при обработке экспериментальных данных? Ответ на эти и другие вопросы дает закон больших чисел.

5.2. Понятие о законе больших чисел

Предположим, что необходимо измерить вероятность наступления некоторого события A при проведении испытания. Для ответа на этот вопрос проводится серия из n испытаний. В этой серии измеряется число m наступлений события A. Тогда оценка вероятности p наступления события A в одном испытании дается соотношением

$$p \approx \frac{m}{n}.$$

Казалось бы, точное значение p можно получить, совершив предельный переход в последнем соотношении

$$p = \lim_{n\to\infty} \frac{m}{n}.$$

Последнее утверждение неверно, ибо возможно, что при проведении n испытаний число m может совпасть, например, с n. Последнее соотношение следует понимать иначе. А именно в том смысле, что вероятность отклонения частоты от величины p на заданное значение будет стремиться к нулю при $n \to \infty$. В этом состоит закон больших чисел.

5.3. Понятие сходимости по вероятности

Рассмотрим последовательность непрерывных случайных величин

$$X_1, X_2, ..., X_n, ...$$

Говорят, что последовательность сходится по вероятности к постоянной a, если

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \lim_{n\to\infty} P(|X_n - a| > \varepsilon) = 0 \;\text{ или}$$

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - a| < \varepsilon) = 1. \tag{1}$$

Члены последовательности случайных величин, сходящейся по вероятности, имеют возрастающие функции плотности вероятности в области точки a.

5.4. Закон больших чисел в форме Чебышева (теорема Чебышева) и Бернулли

5.4.1. Неравенство Чебышева

Пусть

$$m \equiv M[X].$$

$$P(|X - m| > \varepsilon) = \int\limits_{|x-m|>\varepsilon} f(x)dx \le \int\limits_{|x-m|>\varepsilon} \frac{(x-m)^2}{\varepsilon^2} f(x)dx \le$$

$$\le \frac{1}{\varepsilon^2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^2 f(x)dx = \frac{D[x]}{\varepsilon^2}.$$

Окончательно

$$P(|X - m| > \varepsilon) \le \frac{D[X]}{\varepsilon^2}. \qquad (2)$$

Вычитая из 1 обе части неравенства, получим

$$P(|X - m| < \varepsilon) \ge 1 - \frac{D[X]}{\varepsilon^2}. \qquad (3)$$

Соотношения (2) и (3) называются неравенствами Чебышева.

Задачи

5.4.1. Монету подбрасывают 1000 раз. Используя неравенство Чебышева, оценить снизу вероятность отклонения частоты появления «герба» от $\frac{1}{2}$ меньше, чем на 0,1 [12]. Полученный результат сравнить с результатом применения интегральной теоремы Муавра—Лапласа.

5.4.2. Шестигранную кость подбрасывают 10 000 раз. Оценить снизу вероятность отклонения частоты появления шести очков от ее математического ожидания меньше, чем на 0,01 [12].

5.4.3. В урне 100 белых и 100 черных шаров. Вынули с возвращением 50 шаров. Оценить снизу вероятность того, что количество белых шаров из числа вынутых удовлетворяет двойному неравенству $15 < m < 35$ [11].

5.4.4. Пусть в результате 100 независимых опытов найдены значения случайной величины X: $x_1, x_2, ..., x_{100}$. Пусть математическое ожидание $M[X] = 10$ и дисперсия $D[X] = 1$. Оценить снизу вероятность того, что абсолютная величина разности между средним арифметическим наблюдаемых значений случайной величины и математическим ожиданием будет меньше $\frac{1}{2}$ [12].

5.4.5. Пусть в результате 200 независимых опытов найдены значения случайной величины X: $x_1, x_2, ..., x_{200}$, причем $M[X] = D[X] = 2$. Оценить снизу вероятность того, что абсолютная величина разности между средним арифметическим наблюдаемых значений случайной величины и математическим ожиданием будет меньше $\frac{1}{5}$ [12].

5.4.6. В каждой из двух урн имеется по 10 шаров с номерами от 1 до 10. Испытание заключается в вынимании (с последующим возвращением) из каждой урны по шару. Случайная величина X — сумма номеров шаров, вынутых из двух урн. Произведено 100 испытаний. Оценить снизу вероятность попадания суммы $\sum_{i=1}^{100} x_i$ в интервал (800, 1400) [12].[1]

5.4.2. Закон больших чисел в форме Чебышева

Рассмотрим последовательность непрерывных случайных величин

$$X_1, X_2, ..., X_n, ...$$

с одинаковыми математическим ожиданием m и дисперсией D. Составим среднее арифметическое из n первых величин последовательности

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i . \qquad (4)$$

Тогда последовательность $\bar{X}_n$ сходится по вероятности к m, то есть справедливо соотношение

$$P(\left|\bar{X}_n - m\right| < \varepsilon) \underset{n\to\infty}{\to} 1 \quad \forall\varepsilon > 0 . \qquad (5)$$

Доказательство.

Применим к случайной величине (4) неравенство Чебышева в форме (3):

$$P(\left|\bar{X}_n - M[\bar{X}_n]\right| < \varepsilon) \ge 1 - \frac{D[\bar{X}_n]}{\varepsilon^2} . \qquad (6)$$

Определим математическое ожидание и дисперсию $\bar{X}_n$:

$$M[\bar{X}_n] = M[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M[X_i] = m . \qquad (7)$$

$$\bar{D} = D[\bar{X}_n] = D[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i] = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D[X_i] = \frac{D}{n} , \qquad (8)$$

где $D[\ ]$ — символ операции вычисления дисперсии случайной величины, указанной в квадратных скобках,

---

[1] Воспользоваться формулой $\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n-1)(2n+1)}{6}$ суммы квадратов n первых натуральных чисел.

$$D \equiv D[X_i].$$

С учетом соотношений (7) и (8) неравенство (6) принимает вид

$$P(\left|\bar{X}_n - m\right| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D}{\varepsilon^2 n}. \qquad (9)$$

Перейдя в (9) к пределу при $n \to \infty$, получим соотношение (5). ■

Итак, среднее арифметическое независимых случайных величин, имеющих одинаковые математические ожидание и дисперсию, сходятся по вероятности к математическому ожиданию. Это позволяет считать среднее арифметическое результатов измерения какой-либо величины оценкой ее математического ожидания.

5.4.3. Закон больших чисел в форме Бернулли

Теорема Чебышева позволяет доказать теорему Бернулли. Пусть событие A в испытании появляется с вероятностью p. Определим случайную величину $X = 1$, если произойдет событие A, и $X = 0$, если произойдет событие A. Составим случайную величину на основе независимых повторных испытаний

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Очевидно, что

$$M[X_i] = p \text{ и } D[X_i] = pq.$$

В соответствии с теоремой Чебышева

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \underset{n\to\infty}{\to} 1 \quad \forall\varepsilon > 0.$$

Таким образом, частота появления события A в n испытаниях сходится по вероятности к вероятности этого события.

5.5. Понятие о центральной предельной теореме Ляпунова

В теореме Чебышева не говорится о законах распределения случайных величин. Однако они бывают важны. Среди многих законов выделяется нормальный. Это обстоятельство связано с центральной предельной теоремой Ляпунова. Она заключается в следующем: пусть

$$X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots \text{ —}$$

взаимно независимые случайные величины. Пусть среди них нет доминирующей. Составим случайную величину

$$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n + \ldots .$$

Тогда при больших величинах n случайная величина Y будет распределена приблизительно по нормальному закону с математическим ожиданием и дисперсией, определяемыми соотношениями

$$M[Y] = \sum_{i=1}^{n} M[x_i] \text{ и } D[Y] = \sum_{i=1}^{n} D[x_i].$$

Часть 2

ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

Глава I
Выборочный метод

§ 1. Задачи математической статистики. Статистический материал

Пусть требуется определить функцию распределения $F(x)$ некоторой непрерывной случайной величины X. Кроме того, возможно, потребуется определение параметров распределения, таких как, например, математическое ожидание m, среднее квадратическое отклонение σ или дисперсия D. Предположим также, что никакими априорными сведениями об этой случайной величине мы не располагаем. Единственный выход в решении этой задачи состоит в проведении испытаний и получении реализаций этой случайной величины. Пусть в результате проведения n опытов получен ряд значений

$$x_1, x_2, ..., x_n. \tag{1}$$

Ряд (1) значений случайной величины x называется **выборкой из генеральной совокупности** с функцией распределения $F(x)$. Он служит основным статистическим материалом, несущим сведения о случайной величине. Выборка содержит приближенные сведения о генеральной совокупности. Процесс составления выборки называется **выбором**. Процесс выбора должен быть организован так, чтобы выборка хорошо представляла генеральную совокупность, или, как говорят, была **репрезентативной**. Непосредственные результаты измерений располагают в табличной форме (табл. 1) в том порядке, в котором они появились при проведении экспериментов. Такая таблица называется [11] **статистическим** рядом[1].

Содержание понятия генеральной совокупности зависит от конкретной задачи. Если есть ограниченное число объектов, например деталей, и требуется определить их характеристики по выбранному конечному

[1] В книге [16] этим термином обозначается последовательность элементов вариационного ряда с указанием частот n_i повторения результатов измерений.

Таблица 1. Пример статистического ряда

Номер опыта	1	2	...	n
Результаты измерения случайной величины $\boldsymbol{X}$	x_1	x_2	...	x_n

количеству объектов, то генеральной совокупностью в этом случае является перечень измеряемых характеристик всех имеющихся объектов. Если изучается случайная величина методом проведения ее испытаний и число испытаний может быть каким угодно, то объем генеральной совокупности можно считать бесконечным.

§ 2. Построение эмпирической функции распределения

Важным этапом статистической обработки выборки является построение эмпирической функции распределения случайной величины X. Для этого требуется сначала провести сортировку результатов измерения, приведенных в табл. 1.1, например по возрастанию значений случайной величины. Если статистический ряд окажется слишком большим, то, возможно, сортировку целесообразно провести с использованием компьютера. В качестве примера построения эмпирической функции распределения рассмотрим статистический ряд из 5 измерений водоизмещения корабля, представленный в табл. 1.

Таблица 1. Статистический ряд измерений водоизмещения корабля

Номер опыта	1	2	3	4	5
Водоизмещение $\boldsymbol{V_i}$, $м_3$	5250	5370	5390	5370	5180

Расположим результаты измерения в порядке возрастания водоизмещения. В результате получится **вариационный** ряд, представленный в табл. 2.

Определение. **Вариационным рядом** называется последовательность всех элементов выборки, расположенных в неубывающем порядке. Одинаковые результаты измерения повторяются. Одновременно изменяется нумерация опытов.

Таблица 2. Отсортированный статистический (вариационный) ряд измерений водоизмещения корабля

Номер опыта	1	2	3	4	5
Водоизмещение $\boldsymbol{V_i}$, $м_3$	5180	5250	5370	5370	5390

Экспериментальный график функции распределения вероятности водоизмещения корабля строится на основе определения самой функции $F(x)$: значение функции есть вероятность того, что в результате одного испытания случайная величина окажется меньше своего аргумента. Заменяя вероятность ее статистической оценкой, получаем, что статистическая функция распределения вычисляется по формуле

$$F^*(x) = \frac{\text{число измерений со значениями} < x}{\text{общее число измерений}}. \qquad (1)$$

В результате проведенной серии экспериментов величина водоизмещения ни разу не оказалась меньше значения 5180 м^3, поэтому ордината экспериментальной функции $F(x)$ будет нулем для значений аргумента, меньших 5180. На промежутке от 5180 до 5250 случайная величина только один раз из 5 приняла значение, меньшее 5250. Поэтому вероятность того, что в результате одного опыта водоизмещение примет значение в указанном промежутке, следует принять равной $\frac{1}{5}$ и т. д. В результате появится **статистическая функция распределения**, представленная на рис. 1.

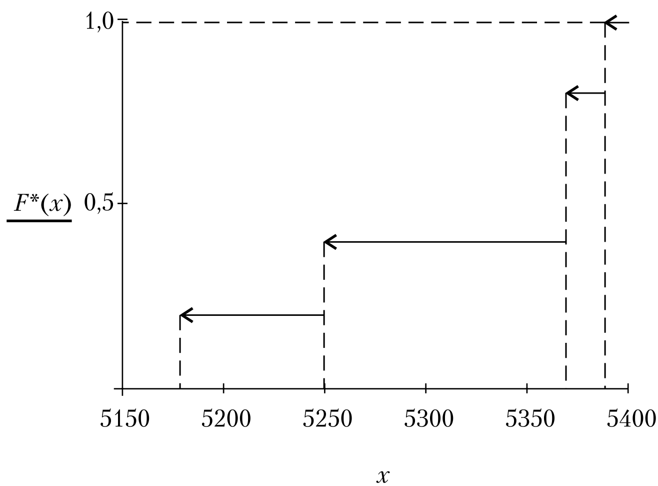


Рис. 1. Статистическая функция распределения

По закону больших чисел в форме Бернулли величина, определяемая формулой (1), сходится по вероятности к своему математическому ожиданию при неограниченном возрастании числа опытов.

Причем в качестве события А (см. ч. 1, п. III.5.4.3) следует считать попадание результата измерения в интервал $(-\infty, x)$.

§ 3. Построение гистограммы

При большом числе измерений использование статистического ряда вызывает затруднения. В этом случае результаты наблюдений объединяют в группы. Их группировка осуществляется предварительным разбиением области изменения случайной величины на промежутки: $\Delta_1 = [x_{\min},\ a_1),\ \Delta_2 = [a_1,\ a_2),\ ...,\ \Delta_k = [a_{k-1},\ x_{\max}]$. Их длины могут быть одинаковыми (h) или различными. Затем подсчитывается число измерений m_i, попавших в интервал i. Совокупность интервалов Δ_i и чисел m_i называется **группированным статистическим рядом** [16]. Для каждой группы сначала вычисляется отношение $\frac{m_i}{n}$, где n — общее число результатов измерений. Оно называется частотой[1]. Новый объект, состоящий из групп и частот, называется [11] **статистической совокупностью**. И наконец, для каждой группы вычисляется относительная частота $\frac{m_i}{nh}$, при этом получают еще один новый объект, состоящий из совокупности групп и относительных частот. Этот объект удобно представить графически. По оси абсцисс откладывается случайная величина, а по оси ординат — относительная частота, постоянная в промежутке своего определения. Такой график называется **гистограммой** (рис. 1). Площадь каждого прямоугольника, составляющего гистограмму, равна частоте попадания измерений случайной величины в заданный интервал, то есть является оценкой вероятности попадания измерения в заданный интервал. Это означает, что гистограмма представляет собой аналог функции плотности вероятностей. Число групп выбирают таким, чтобы в каждую из них попало достаточно много результатов измерений и число групп тем не менее было достаточно большим.

Кроме гистограммы для наглядного представления дискретной случайной величины (ДСВ) строят **полигон** распределения (рис. 2). Он похож на многоугольник распределения вероятностей ДСВ (см. ч. 1,

---

[1] В литературе существует разнобой в терминологии. В одних книгах [16] частотой называют m_i, отношение $\frac{m_i}{n}$ — относительной частотой, а $\frac{m_i}{nh}$ — приведенной частотой, в других [1] частотой называют отношение $\frac{m_i}{n}$.

гл. III, § 1, п. 1.1), полученный в результате эксперимента. Для построения полигона распределения дискретной случайной величины используют декартову систему координат, в которой по оси абсцисс откладывают середины групп значений СВ, а по оси ординат — относительные частоты ее появления в соответствующей группе, определенные из эксперимента. Полученные соседние точки соединяют отрезками прямых.

Пример. Последовательно измерены 100 амплитуд отклонений корабля θ_m на правый и левый борт в некоторых реальных условиях плавания [11]. Отклонения лежали между –20° и +20°. Результаты измерений приведены в табл. 1 при условии, что интервал для подсчета частот принят равным 5°.

Для построения гистограммы $G(x)$ (рис. 1) использованы первая и пятая, а при построении функции распределения F^* (рис. 3) — первая и шестая строки табл. 1.

Таблица 1. Статистическая совокупность для амплитуд отклонений корабля

Группы, град	–20 ÷ –15	–15 ÷ –10	–10 ÷ –5	–5 ÷ 0	0 ÷ 5	5 ÷ 10	10 ÷ 15	15 ÷ 20
Середины групп $\tilde{x}_i$, град	–17,5	–12,5	–7,5	–2,5	2,5	7,5	12,5	17,5
Число отклонений m_i в группе	2	8	17	24	26	13	6	4
Частота p^*	0,02	0,08	0,17	0,24	0,26	0,13	0,06	0,04
Относительная частота, $G \equiv \frac{p^*}{5}$; $\frac{1}{\text{град}}$	0,004	0,016	0,034	0,048	0,052	0,026	0,012	0,008
F^*	0,02	0,1	0,27	0,51	0,77	0,9	0,98	1

Рекомендации по выбору числа групп.

Очевидно, что для каждой случайной величины и для определенного объема выборки существует оптимальное число групп, включающих в себя диапазон изменения случайной величины, а также их размер и место расположения. Если взять много групп, то гистограмма будет иметь гребенчатую форму. Если взять мало групп, то гистограмма будет мало похожа на функцию плотности вероятностей.

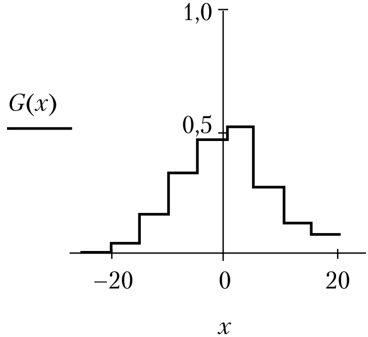


Рис. 1. Гистограмма амплитуд углов отклонений корабля

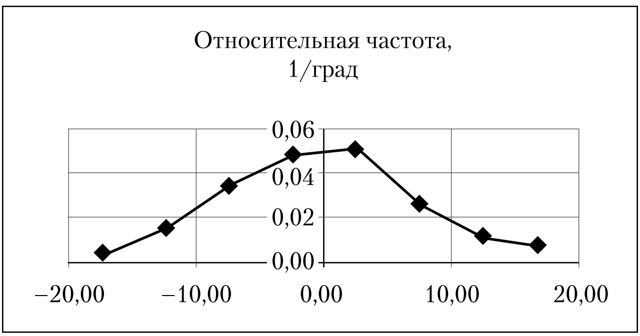


Рис. 2. Полигон амплитуд углов отклонений корабля

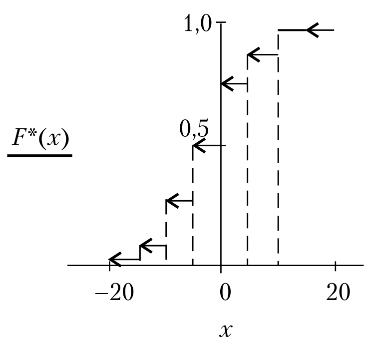


Рис. 3. Статистическая функция распределения амплитуд углов отклонений корабля

Возникает также следующий вопрос: каким должно быть число групп — четным или нечетным? Если выбирать число групп четным, то трудно будет уловить максимум функции плотности вероятности. Поэтому лучше выбирать это число нечетным. Рекомендации по выбору числа групп предлагаются в работе И. У. Алексеевой (журнал «Измерительная техника». № 5. 1975). Для законов, близких к равномерному, число k групп определяется формулой

$$k = \frac{4}{\varepsilon} \ln \frac{n}{10},$$

где $\varepsilon = \dfrac{\sigma^2}{\sqrt{\mu_4}}$ — контрэксцесс, σ — среднее квадратичное отклонение, μ_4 — четвертый центральный момент. Однако обычно упрощают эту формулу и используют следующее соотношение:

$$k = 5 \ln \frac{n}{10}. \qquad (1)$$

Для законов, имеющих ярко выраженный экстремум, число k групп увеличивается в 2 раза и оценивается выражением

$$k = 10 \ln \frac{n}{10}. \qquad (2)$$

Для определения числа k применяется также формула

$$k = \log_2 n + 1. \qquad (3)$$

Пример. Произведем расчет числа k по формулам (1–3) для $n = 100$:

$k \approx 11{,}5$ — по формуле (1);

$k \approx 23$ — по формуле (2);

$k \approx 7{,}6$ — по формуле (3).

Контрольные вопросы

1. Что такое генеральная совокупность и выборка из нее?
2. Какая выборка называется репрезентативной?
3. Что такое статистический, вариационный ряд?
4. Как составляется статистическая функция распределения?
5. Как составляется гистограмма?
6. Каково назначение гистограммы?
7. Как составляется полигон частот?

§ 4. Использование статистического ряда для вычисления математического ожидания и дисперсии

4.1. Оценка математического ожидания случайной величины *X*

Статистический ряд (1.1) используется прежде всего для вычисления оценки математического ожидания исследуемой случайной величины

$$m \approx \bar{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \,. \qquad (1)$$

Число, рассчитанное по формуле (1), можно рассматривать как результат испытания случайной величины $\bar{X}_n$, определяемой соотношением

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \,, \qquad (2)$$

где $X_i = X$ — случайная величина X, разыгранная в испытании с номером i.

В соответствии с законом больших чисел в форме Чебышева случайная величина (2) сходится по вероятности к оцениваемому математическому ожиданию:

$$M[X] \equiv m \,. \qquad (3)$$

Это свойство в математической статистике называют **состоятельностью**[1] этой оценки математического ожидания. Дополнительным положительным свойством оценки (1) является равенство ее математического ожидания оцениваемому математическому ожиданию:

$$M\left[\bar{X}_n\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M\left[X_i\right] = \frac{1}{n} n * m = m \,. \qquad (4)$$

Это свойство называется **несмещенностью** оценки (1) математического ожидания.

Для большого числа измерений используют средние значения групп $\tilde{x}_i$, число измерений m_i, попадающих в группы, и частоты p_i^*. При этом используют формулу

[1] Состоятельная оценка — статистическая оценка параметра распределения вероятностей, обладающая тем свойством, что при увеличении числа наблюдений вероятность отклонения оценки от оцениваемого параметра на величину, превосходящую некоторое заданное число, стремится к нулю.

$$\bar{x}_n = \frac{\sum_{i=1}^{k} \tilde{x}_i m_i}{n} = \sum_{i=1}^{k} \tilde{x}_i p_i^*, \tag{5}$$

где k — число групп,

$$p_i^* \equiv \frac{m_i}{n}.$$

Оценка (5) математического ожидания имеет форму средневзвешенного значения.

4.2. Оценка дисперсии случайной величины *X*

Подобно формулам (IV.1.4.1.1) и (IV.1.4.1.5), для вычисления дисперсии можно использовать или непосредственные результаты измерений, то есть статистический ряд (1.1), или результаты его предварительной обработки, представленные в табл. 3.1.

Вполне естественной будет оценка дисперсии, базирующаяся на статистическом ряде, в виде

$$D \approx \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n}. \tag{1}$$

Число, получаемое в результате применения формулы (1), можно рассматривать как испытание случайной величины

$$\hat{D}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}_n\right)^2}{n}, \tag{2}$$

где, так же как в предыдущем параграфе, $X_i = X$ — случайная величина X, разыгранная в испытании с номером i, а $\bar{X}_n$ определяется формулой (4.1.2).

Выясним сначала, является ли оценка (1) несмещенной. Для этого определим математическое ожидание случайной величины (2):

$$M[\hat{D}_n] = M\left[\frac{\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}_n\right)^2}{n}\right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} M[(X_i - \bar{X}_n)^2] =^{*)}.$$

В последнем выражении в круглых скобках вычтем и прибавим математическое ожидание m случайной величины X. В результате получим

$$^{*)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M\left[(X_i - m + m - \bar{X}_n)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left\{M\left[(X_i - m)^2\right] + 2M\left[(X_i - m)(m - \bar{X}_n)\right] + M\left[(m - \bar{X}_n)^2\right]\right\}. \quad (3)$$

Вычислим отдельно математические ожидания под знаком суммы:

$$M\left[\left(X_i - m\right)^2\right] = D\left[X\right] \equiv D,$$

где D — искомая дисперсия случайной величины X.

$$M\left[(X_i - m)(m - \bar{X}_n)\right] = M\left[(X_i - m)\left(m - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{n} M\left[(X_i - m)\sum_{j=1}^{n}(m - X_j)\right] = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} M(X_i - m)(m - X_j) =$$

$$= \frac{1}{n}\left\{M\left[-(m - X_j)^2\right] + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} M(X_i - m)(m - X_j)\right\} =$$

$$= -\frac{D}{n} + \frac{1}{n}\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} M[X_i - m]M[m - X_j] = -\frac{D}{n}.$$

Последнее соотношение справедливо для независимых случайных величин X_i и X_j $(i \neq j)$, что и предполагается. Наконец, рассмотрим третье математическое ожидание, встречающееся в формуле (3):

$$M\left[(m - \bar{X}_n)^2\right] = M\left[\left(m - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j\right)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{n^2} M\left[\left(\sum_{j=1}^{n}(m - X_j)\right)^2\right] = \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n} M\left[(m - X_j)^2\right] +$$

$$+ \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} M\left[2(m - X_i)(m - X_j)\right] = \frac{1}{n^2} nD = \frac{D}{n}.$$

Найденные математические ожидания подставим в исходную формулу (3). В результате получим

$$M[\hat{D}_n] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(D - 2\frac{D}{n} + \frac{D}{n}\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} D\frac{n-1}{n} = D\frac{n-1}{n}. \qquad (4)$$

Таким образом, видно, что математическое ожидание случайной величины (2) отличается от искомой дисперсии. Получилась так называемая смещенная оценка дисперсии. Однако положение легко исправить. Для этого из соотношения (4) выразим дисперсию D. В результате получим

$$D = \frac{n}{n-1}M[\hat{D}_n] = M\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2}{n-1}\right] = M[D_n^*], \qquad (5)$$

где $$\bar{D}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_n)^2}{n-1}. \qquad (6)$$

Случайная величина D_n^* используется для вычисления несмещенной оценки дисперсии по формуле

$$\bar{d}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_n)^2}{n-1}. \qquad (7)$$

При делении области изменения случайной величины на группы формулу (5) преобразуем к виду

$$D \approx \bar{d}_n = \frac{n}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\tilde{x}_i - \bar{x}_n)^2 p_i^*, \qquad (8)$$

где $\tilde{x}_i$ — средние значения групп; $p_i^* = \frac{m_i}{n}$ — частоты; m_i — число измерений, попадающих в группы.

Пример.

Вычислим оценки математического ожидания и дисперсии результатов эксперимента по определению амплитуд качки корабля по формулам (4.5) и (6).

$$\bar{x}_n = \sum_{i=1}^{k}\tilde{x}_i p_i^* = 17,5 * (0,04 - 0,02) + 12,5 * (0,06 - 0,08) +$$

$$+ 7,5 * (0,13 - 0,17) + 2,5(0,26 - 0,24) = 17,5 * 0,02 - 12,5 * 0,02 -$$
$$-7,5 * 0,03 + 2,5 * 0,02 = 5 * 0,02 - 7,5 * 0,03 + 2,5 * 0,02 = -0,075.$$

$$\bar{d}_n = \frac{n}{n-1}\sum_{i=1}^{k}(\tilde{x}_i - \bar{x}_n)^2 p_i^* = \frac{100}{99}\{(-17,5 + 0,075)^2 * 0,02 +$$

$$+(-12,5 + 0,075)2*0,08 + (-7,5 + 0,075)2*0,17 + (-2,5 + 0,075)2*0,24 +$$
$$+ (2,5 + 0,075)2 * 0,26 + (7,5 + 0,075)2 * 0,13 + (12,5 + 0,075)2 * 0,06 +$$

$$+(17,5+0,075)^2 * 0,04)\} \approx \frac{100}{99}[6,0726+12,3505+9,3722+1,4114+$$

$$+1,724+7,4595+9,4878+12,3552] \approx 60,8417.$$

$$\sigma \approx \bar{\sigma}_n = \sqrt{\bar{d}_n} = 7,8\,.$$

Контрольные вопросы

1. Напишите формулу для оценки математического ожидания случайной величины по ее вариационному ряду.
2. Напишите формулу для несмещенной оценки дисперсии.
3. Какая оценка характеристики случайной величины называется несмещенной?
4. Какая оценка характеристики случайной величины называется состоятельной?

Задачи

1.1. В результате испытания случайная величина X приняла следующие значения:

2, 5, 7, 1, 10, 5, 9, 6, 8, 6, 2, 3, 7, 6, 8, 3, 8, 10, 6, 7, 3, 9, 4, 5, 6.

Требуется: 1) составить таблицу, устанавливающую зависимость между значениями случайной величины и числом ее появлений в выборке; 2) построить статистическую функцию распределения; 3) изобразить полигон распределения [11]; 4) рассчитать оценки математического ожидания m и дисперсии σ.

1.2. В результате испытания случайная величина X приняла следующие значения:

16, 17, 9, 13, 21, 11, 7, 7, 19, 5, 17, 5, 20, 18,
11, 4, 6, 22, 21, 15, 15, 23, 19, 25, 1.

Требуется: 1) составить таблицу статистической совокупности, разбив промежуток 0,25 на пять участков, имеющих одинаковые длины; 2) построить гистограмму относительных частот [11]; 3) рассчитать оценки математического ожидания m и дисперсии σ, используя таблицу статистической совокупности.

1.3. Дано распределение дискретной случайной величины (статистическое распределение), полученное экспериментально:

X	11	12	13	14
p_x	0,4	0,1	0,3	0,2

Найти статистическую функцию распределения и построить ее график [11].

Глава II
Оценка параметров распределения

§ 1. Точечные оценки неизвестных параметров распределения по выборке

Для оценки математического ожидания и дисперсии случайной величины X проводятся несколько ее испытаний. Пусть в результате их получен ряд значений

$$x_1, x_2, \ldots, x_n. \tag{1}$$

Уже отмечалось, что оценка среднего значения дается соотношением

$$\bar{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\,, \tag{2}$$

а дисперсии

$$D \approx \bar{d}_n = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}_n)^2}{n-1}\,. \tag{3}$$

§ 2. Случайная величина, распределенная по закону Стьюдента

Если рассматривать формулы (1.2, 1.3) как определения новых случайных величин (I.4.1.2) и (I.4.2.6) соответственно, то ясно, что полученные оценки дают лишь приближенные значения математического ожидания m и дисперсии D случайной величины X. Как можно оценить отличие, например, оценки $\bar{x}_n$ от математического ожидания m?

Для ответа на этот вопрос достаточно определить вероятность того, что реализация случайной величины $\bar{X}_n$ будет отличаться от точного значения математического ожидания m случайной величины X не более чем на заданную величину ε_β:

$$P(\left|m - \bar{X}_n\right| < \varepsilon_\beta) = \beta. \tag{1}$$

Интервал длиной $2\varepsilon_\beta$ и вероятность β называются **доверительными**. Для определения доверительных интервала и вероятности используют случайную величину, распределенную по закону Стьюдента. Но, прежде чем приступить к его изучению, рассмотрим соображения, связанные с выбором доверительных интервала и вероятности.

§ 3. Выбор величины доверительного интервала

Очевидно, что величины **доверительных** полуинтервала ε_β и вероятности β взаимосвязаны. Если увеличивается полуинтервал ε_β, то растет доверительная вероятность β. Возникают три типа задач, связанных с определением доверительных вероятности β, полуинтервала ε_β и числа испытаний n. Первый тип задач связан с определением вероятности β попадания случайной величины $\bar{X}_n$ в заданный интервал длиной $2\varepsilon_\beta$ при известном количестве испытаний n. Второй тип задач состоит в определении величины доверительного интервала $2\varepsilon_\beta$ при заданной доверительной вероятности β и известном количестве испытаний n. И наконец, третий тип связан с определением необходимого количества измерений n случайной величины X, обеспечивающих попадание случайной величины $\bar{X}_n$ в заданный интервал длиной $2\varepsilon_\beta$ с заданной вероятностью β.

Доверительную вероятность β выбирают в зависимости от необходимой степени уверенности в суждениях о величине математического ожидания. В текстильной промышленности, например, принята доверительная вероятность $\beta = 0{,}95$. В вопросах обеспечения жизнедеятельности корабля требуется чрезвычайно высокая степень надежности, соответствующая доверительной вероятности $\beta = 0{,}999$.

§ 4. Закон распределения Стьюдента

Оказывается, что плотность вероятностей случайной величины

$$t \equiv \frac{\bar{X}_n - m}{\sqrt{\dfrac{D_n^*}{n}}}\,[1], \qquad (1)$$

где случайные величины $\bar{X}_n$ и D_n^* определены равенствами (I.4.1.2) и (I.4.2.6) соответственно, хорошо описывается плотностью распреде-

[1] Здесь мы отступаем от ранее сформулированного правила использования прописных символов латинского алфавита для обозначения случайных величин.

ления Стьюдента, или, как говорят, **законом Стьюдента** с n степенями свободы:

$$s_n(t) = \frac{\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi n}\ \left(\frac{n}{2}\right)}\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \tag{2}$$

где $t \in (-\infty, \infty)$. Это утверждение мы принимаем без доказательства.

§ 5. Гамма-функция

Гамма-функция впервые введена Эйлером; она определяется соотношением

$$\Gamma(x) = \int\limits_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt \tag{1}$$

и является обобщением функции факториал, заданной при натуральном значении аргумента. Легко убедиться, что

$$\Gamma(1) = 1, \quad (n+1) = n!, \tag{2}$$

где n — целое неотрицательное число. Оказываются справедливыми следующие равенства:

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{1 * 3 * 5 * \ldots * (2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}, \tag{3}$$

$$\Gamma(x) * \Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x},$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} + x\right) * \Gamma\left(\frac{1}{2} - x\right) = \frac{\pi}{\cos \pi x},$$

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi}\ ;\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

§ 6. Условие нормировки распределения Стьюдента

Проверим выполнение условий нормировки распределения Стьюдента, то есть выполнение соотношения

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} s_n(t)dt = 2\int\limits_0^{\infty} s_n(t)dt = 1. \tag{1}$$

Действительно,

$$2\int_0^\infty s_n(t)dt = 2\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\sqrt{\pi n}}\int_0^\infty (1+\frac{t^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}}dt = \left|z=\frac{t}{\sqrt{n}}\right| =$$

$$= 2\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \frac{dz}{(1+z^2)^{\frac{n+1}{2}}}.$$

Известно, что

$$\int_0^\infty \frac{dz}{\left(1+z^2\right)^m} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(m-\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma(m)}.$$

Учитывая $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$ и положив $m=\frac{n+1}{2}$, получим

$$2\int_0^\infty s_n(t)dt = 2\frac{(\frac{n+1}{2})}{(\frac{n}{2})\sqrt{\pi}}\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\frac{\Gamma(\frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n+1}{2})} = 1.$$

§ 7. Предельный переход в функции плотности вероятностей случайной величины, распределенной по закону Стьюдента

По центральной предельной теореме Ляпунова при $n \to \infty$ распределение Стьюдента должно сходиться к нормальному. В этом можно убедиться, проведя тождественные преобразования в выражении

$$\lim_{n\to\infty} s_n(t) = \lim_{n\to\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi n}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi n}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}. \qquad (1)$$

Рассмотрим сначала первый предел. В нем фигурируют гамма-функции с большим значением аргумента. Поэтому для их вычисления воспользуемся формулой Стирлинга

$$\Gamma(x+1) \approx \left(\frac{x}{e}\right)^x \sqrt{2\pi x} \,. \tag{2}$$

Представим аргументы гамма-функции в форме, удобной для применения формулы Стирлинга:

$$\frac{n+1}{2} = \frac{n-1}{2} + 1\,;\; \frac{n}{2} = \frac{n-2}{2} + 1\,.$$

Применяя формулу Стирлинга к выражению для первого предела, получим

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{n-1}{2e}\right)^{\frac{n-1}{2}} * \sqrt{2\pi\left(\frac{n-1}{2}\right)}}{\sqrt{\pi n}\left(\frac{n-2}{e}\right)^{\frac{n-2}{2}} \sqrt{2\pi\frac{n-2}{2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2e)^{\frac{n-2}{2}}}{(2e)^{\frac{n-1}{2}}} \sqrt{\frac{(n-1)^{n-1}}{(n-2)^{n-2}}} \,*$$

$$* \frac{1}{\sqrt{\pi n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2e)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi n}} \sqrt{n\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-1}}{\left(1-\frac{2}{n}\right)^{n-2}}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} * \frac{1}{\sqrt{e}} \sqrt{\frac{e^{-1}}{e^{-2}}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,.$$

Вычислим теперь второй предел в формуле (1). Он представится в виде

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-1}} = e^{-\frac{t^2}{2}}\,.$$

Окончательно предел (1) представится выражением

$$\lim_{n\to\infty} s_n(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} = n(t,0,1)\,. \tag{3}$$

Формула (3) выражает нормированный нормальный закон распределения. Отметим, что в статистических таблицах [9] часто приводится функция распределения вероятностей Стьюдента, определяемая соотношением

$$S_n(t) = \int_{-\infty}^{t} s_n(\tau)d\tau\,. \tag{4}$$

В математической статистике аргумент t функции распределения вероятностей Стьюдента $S_n(t)$ называют **квантилем**.

§ 8. Погрешность оценки математического ожидания. Доверительные вероятность и интервал

Задачу вычисления вероятности (2.1) заменяют задачей вычисления вероятности β попадания случайной величины t в интервал

$$\left[-t_{\beta.n};t_{\beta.n}\right]:$$

$$P\left(|t|<t_{\beta.n}\right)=\int_{-t_{\beta.n}}^{t_{\beta.n}}S_n(t)\,dt=2\int_{0}^{t_{\beta.n}}S_n(t)\,dt=\beta\,. \qquad (1)$$

Соотношение (1) связывает друг с другом три величины: $t_{\beta.n}$, β, n. Каждую из этих величин можно рассматривать как неявно заданную функцию двух других. На основе соотношения (1) созданы таблицы распределения Стьюдента. Эти таблицы представлены практически во всех справочниках математической статистики. С применением таблицы распределения Стьюдента становится возможным решение любой из трех типов задач, о которых было упомянуто в § 3. Например, по известному количеству n измерений случайной величины X и заданной доверительной вероятности β по таблице распределения Стьюдента (см. прил. 3) определяем $t_{\beta.n}$. Число

$$t^*\equiv\frac{\overline{x}_n-m}{\sqrt{\dfrac{d_n^*}{n}}}\,, \qquad (2)$$

где числа $\overline{x}_n$ и $\overline{d}_n$ вычисляется по формулам (I.4.1.1) и (I.4.2.7) соответственно, можно рассматривать как результат испытания случайной величины t (см. формулу (4.1)). Заменяя в (1) t на t^*, получим

$$P\left(\left|t^*\right|<t_{\beta.n}\right)=\beta\,. \qquad (3)$$

Отметим, что случайная величина t^* распределена [16] по закону Стьюдента с n – 1 степенью свободы. В выражении (3), умножив обе части неравенства на знаменатель формулы (2), получим

$$P\left(\left|\overline{x}_n-m\right|<t_{\beta.n}\sqrt{\frac{\overline{d}_n}{n}}\right)=P\left(\left|\overline{x}_n-m\right|<\varepsilon_\beta\right)=\beta, \qquad (4)$$

где

$$\varepsilon_\beta \equiv t_{\beta.n}\sqrt{\frac{\bar{d}_n}{n}}\,. \qquad (5)$$

Формула (5) решает задачу нахождения доверительного интервала по числу $t_{\beta.n}$, найденному из таблицы распределения Стьюдента, и оценке $\bar{d}_n$ дисперсии D случайной величины X, вычисленной по формуле (I.4.2.7) и числу повторных испытаний n. Таким образом, суждение о близости оценки $\bar{x}_n$ к математическому ожиданию m случайной величины X представляется следующим образом: с доверительной вероятностью β математическое ожидание m находится в интервале

$$\bar{x}_n - \varepsilon_\beta < m < \bar{x}_n + \varepsilon_\beta\,, \qquad (6)$$

где $\bar{x}_n$ вычисляется по формуле (I.4.1.1).

Замечание. В некоторых таблицах распределения Стьюдента вместо числа опытов n используется число степеней свободы k. Они связаны соотношением $k = n - 1$, так как истинное значение дисперсии D в расчетах заменяется ее оценкой $\bar{d}_n$, полученной по формуле (2.1.3). В прил. 3 число степеней свободы $k = n - 1$ учтено при расчете значений $t_{\beta.n}$, поэтому при использовании этого приложения следует выбирать строку, заголовок которой равен числу n измерений случайной величины.

Пример 1. Рассмотрим результаты 5 измерений водоизмещения корабля, приведенных в гл. I § 2.

Оценка математического ожидания водоизмещения будет иметь вид

$$\bar{V}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} V_i = 5310 \text{ м}^3.$$

Оценка дисперсии водоизмещения судна

$$\bar{d}_n = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(V_i - \bar{V}_n)^2 = 8530 \text{ м}^6.$$

По таблицам распределения Стьюдента находим, что при пяти измерениях $n = 5$ и доверительной вероятности $\beta = 0{,}95$ величина доверительного интервала $t_{0{,}95.5} = 2{,}78$, а для доверительной вероятности $\beta = 0{,}99$ – $t_{0{,}95.5} = 4{,}60$. Рассчитаем теперь величину доверительного интервала $\varepsilon_{\beta.n}$, используя формулу (2),

$$\varepsilon_{0,95;5} = \sqrt{\frac{8530}{5}} * 2,78 \approx 110 \text{ (м}^3\text{) и}$$

$$\varepsilon_{0,99;5} = \sqrt{\frac{8530}{5}} * 4,60 \approx 190 \text{ (м}^3\text{)}.$$

Таким образом, можно сказать, что с вероятностью 0,95 истинное водоизмещение судна лежит в диапазоне

$$(\bar{V}_n - \varepsilon_{0,95;5}; \bar{V}_n + \varepsilon_{0,95;5}) = (5200 \text{ м}^3;\ 5420 \text{ м}^3),$$

а с вероятностью 0,99 — в диапазоне

$$(\bar{V}_n - \varepsilon_{0,99;5}; \bar{V}_n + \varepsilon_{0,99;5}) = (5130 \text{ м}^3;\ 5490 \text{ м}^3).$$

Контрольные вопросы

1. Напишите формулу для вычисления случайной величины, распределенной по закону Стьюдента.
2. Какое количество степеней свободы имеет эта величина?
3. Дайте определение понятиям «доверительный интервал» и «доверительная вероятность».

§ 9. Погрешность оценки дисперсии. Доверительные вероятность и интервал

Значение $\bar{x}_n$, найденное по формуле (I.4.1.1), дает лишь оценку математического ожидания m. Для определения интервала, в котором лежит математическое ожидание m случайной величины X, с заданной вероятностью может использоваться формула (8.6). Аналогичным образом значение $\bar{d}_n$, найденное по формуле (I.4.2.7), дает лишь оценку дисперсии D. Для указания диапазона, в котором лежит точное значение дисперсии D случайной величины X с заданной доверительной вероятностью, используют следующие рассуждения. Известно, что случайная величина

$$\chi^2 = \frac{(n-1)\bar{D}_n}{D}, \tag{1}$$

где $\bar{D}_n$ определяется формулой (I.4.2.6), а D — дисперсия случайной величины X, распределена по закону χ^2 (хи-квадрат) с $(n-1)$ степенями свободы. Отметим, что это утверждение верно в предположении о нормальном законе распределения случайной величины X. Искомый доверительный интервал можно построить бесконечным количеством способов. Обычно выбирают тот из них, который обладает свойством симметрии относительно доверительной вероятности β. При этом определяют два значения случайной величины χ^2. Первое из них обозначается как $\chi^2_{\frac{1-\beta}{2}}(n-1)$, где в скобках указывается число степеней свободы функции χ^2 в качестве ее аргумента, и должно удовлетворять условию

$$P\left(\chi^2 < \chi^2_{\frac{1-\beta}{2}}(n-1)\right) = \frac{1-\beta}{2} \quad . \tag{2}$$

Второе из них обозначается как $\chi^2_{\frac{1-\beta}{2}}$ и должно удовлетворять условию

$$P\left(\chi^2_{\frac{1+\beta}{2}}(n-1) \le \chi^2\right) = \frac{1+\beta}{2}. \tag{3}$$

Условия (2) и (3) обеспечивают заданную доверительную вероятность β попадания случайной величины (1) в интервал

$$\chi^2_{\frac{1-\beta}{2}}(n-1) \le \chi^2 < \chi^2_{\frac{1+\beta}{2}}(n-1) \quad . \tag{4}$$

Используя интервал (4), получим искомый доверительный интервал для дисперсии D. Для этого, комбинируя формулы (4) и (1), получим

$$\chi^2_{\frac{1-\beta}{2}}(n-1) \le \frac{(n-1)\bar{D}_n}{D} < \chi^2_{\frac{1+\beta}{2}}(n-1).$$

После выполнения тождественных преобразований последнего соотношения получим искомый доверительный интервал для дисперсии

$$\frac{(n-1)\bar{D}_n}{\chi^2_{\frac{1+\beta}{2}}(n-1)} < D \le \frac{(n-1)\bar{D}_n}{\chi^2_{\frac{1-\beta}{2}}(n-1)}. \tag{5}$$

Извлекая квадратный корень из соотношения (5), получим доверительный интервал для среднего квадратического отклонения

$$\sqrt{\frac{(n-1)}{\chi^2_{\frac{1+\beta}{2}}(n-1)}}\bar{\sigma}_n < \sigma \le \sqrt{\frac{(n-1)}{\chi^2_{\frac{1-\beta}{2}}(n-1)}}\bar{\sigma}_n. \tag{6}$$

Последнее утверждение равносильно формуле

$$P\left(\sqrt{\frac{(n-1)}{\chi^2_{\frac{1+\beta}{2}}(n-1)}}\bar{\sigma}_n < \sigma \leq \sqrt{\frac{(n-1)}{\chi^2_{\frac{1-\beta}{2}}(n-1)}}\bar{\sigma}_n\right) = \beta. \qquad (7)$$

Она утверждает, что вероятность попадания среднего квадратического отклонения в интервал (6) дается величиной (7).

Пример. Определим доверительный интервал для дисперсии и среднего квадратического отклонения высоты штамповок внутренних колец подшипников по 20 измерениям с доверительной вероятностью, равной 0,96. Предполагается при этом, что закон распределения штамповок по высоте является нормальным. Средняя арифметическая высота 20 колец равна $m \approx \bar{x}_{20} = 32,2975$ мм, $D \approx \bar{d}_{20} = 0,1331$ мм², $\beta = 0,96$. Рассчитываем вероятность, стоящую в правой части формулы (2):

$$\frac{1-\beta}{2} = 0,02.$$

По таблице распределения хи-квадрат, приведенной в прил. 4, определяем значения

$$\chi^2_{0,02}(19) \approx 8,6 \text{ и } \chi^2_{0,98}(19) \approx 33,7.$$

Таким образом, неравенство (5) принимает вид

$$\frac{19 * 0,1331}{33,7} < D \leq \frac{19 * 0,1331}{8,6},$$

или

$$0,0750 \text{ мм}^2 < D \leq 0,294 \text{ мм}^2.$$

После извлечения корня из всех частей последнего неравенства получим для среднего квадратического отклонения следующий доверительный интервал:

$$0,27 \text{ мм} < \sigma \leq 0,53 \text{ мм}.$$

Контрольные вопросы

1. Как называется случайная величина, использующаяся для определения доверительных интервала и вероятности для математического ожидания?
2. Как определяется случайная величина, использующаяся для определения доверительных интервала и вероятности для дисперсии?

3. Какое количество степеней свободы имеет случайная величина хи-квадрат при числе повторных опытов, равном n?

Задачи

2.1. Произведено 20 измерений начальной скорости ракеты x_i, м/с. Результаты измерений представлены в виде ряда:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1582,9	1586,2	1585,6	1587,3	1584,6	1585,2	1583,3	1584,2	1586,4	1585,8

11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1587,5	1584,8	1585,4	1586,1	1587,5	1584,3	1585,4	1583,6	1587,5	1584,9

Определить оценки математического ожидания, дисперсии и среднего квадратического отклонения начальной скорости ракеты, а также доверительный интервал для математического ожидания начальной скорости ракеты с надежностью 0,98 [15].

2.2. В результате 8 измерений расстояния между двумя пунктами получены следующие значения в километрах: 216,54; 216,53; 216,51; 216,56; 216,57; 216,55; 216,52; 216,54. Найдите оценки математического ожидания и дисперсии измеряемого расстояния. Определите доверительный интервал для математического ожидания с надежностью 0,95 [15].

2.3. Каково должно быть число опытов, чтобы с надежностью 0,86 точность оценки математического ожидания равнялась 0,5, если среднее квадратическое отклонение равно 4 [15]?

2.4. Емкость конденсатора измеряют 12 раз и получают следующие результаты (в микрофарадах):

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3,236	3,234	3,235	3,233	3,236	3,235	3,234	3,235	3,239	3,231	3,237	3,235

Определите доверительный интервал для математического ожидания значения емкости конденсатора с надежностью 0,99 [15].

Глава III
Критерии согласия

§ 1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу определения функции распределения случайной величины. Исходными сведениями для решения этой задачи являются результаты ее испытаний в n независимых опытах. По этим результатам можно построить график функции распределения или гистограмму. По форме гистограммы можно выдвинуть предложение о виде функции плотности вероятностей

$$y = f(x, a_1, ..., a_s) \tag{1}$$

или распределения случайной величины

$$y = F(x, a_1, ..., a_s), \tag{2}$$

где $a_1, ..., a_s$ — неизвестные параметры.

Можно предложить два способа выбора вида функции (1). Первый состоит в сглаживании гистограммы, второй — в теоретическом анализе сущности случайного явления и на его основе выдвижении гипотезы о виде функции плотности вероятностей. Например, если на величину оказывают влияние большое количество примерно равноценных случайных факторов, то по теореме Ляпунова такая величина будет распределена по нормальному закону.

Выбор вида функции (1) называется **статистической гипотезой** о распределении случайной величины.

Такие гипотезы называют нулевыми. Гипотеза может соответствовать экспериментальным данным или нет. Для проверки статистической гипотезы о виде функции распределения случайной величины выбирают какое-либо правило, называемое **критерием проверки гипотезы** о генеральном законе распределения, или, как говорят, **критерием согласия**. При этом конструируется функция результатов измерений, отражающая связь теоретического закона и экспериментальных данных, по значению которой судят о справедливости гипотезы. Эта функция называется **статистикой критерия согласия**. В общем случае правила проверки любых статистических гипотез называют **критерием значимости**.

Наряду с рассмотренной задачей встречаются и иные. Предположим, что в результате проведения дополнительных мероприятий ожидается изменение некоторых числовых характеристик случайной величины. Например, учебный отдел ввел некоторые дополнительные требования к организации учебного процесса. При этом ожидается повышение успеваемости курсантов. Для решения вопроса об эффективности принятых мер придется сравнить показатели успеваемости до и после принятия организационных мер. Если различия в успеваемости окажутся незначительными и находятся в пределах случайных отклонений, то «нулевую» гипотезу о неизменности закона распределения экзаменационной оценки следует считать оправданной. Наоборот, если отклонения окажутся значительными, то они не могут быть объяснены случайностью. Следует сделать вывод об эффективности принятых мер и отвергнуть «нулевую» гипотезу. В этом случае вопрос о случайности или закономерности отклонений тоже решается с помощью критерия согласия, но на основе двух выборок.

Определение. **Статистической гипотезой** называется предположение о виде закона распределения случайной величины или о его параметрах, которое можно проверить статистическими методами на основе имеющейся выборки.

Сами критерии согласия являются случайными величинами со своими законами распределения. Благодаря ним появляется возможность разбить область значений случайной величины на две части. Ее попадание в одну часть считается возможным при выполнении нулевой гипотезы, а попадание в другую часть считается маловероятным или невозможным событием. Вероятность этого события называется **уровнем значимости** и составляет величину риска отвергнуть верную «нулевую» гипотезу. Эту область критерия согласия, определяющую вероятность невозможного события, называют **критической областью** данного критерия. **Областью допустимых значений критерия** называют ту, попадание критерия согласия в которую считают возможным событием.

Таким образом, при проверке гипотез можно допустить ошибки двух видов. К **ошибкам первого рода** относят отвержение правильной «нулевой» гипотезы. К **ошибкам второго рода** — принятие неверной «нулевой» гипотезы.

Критерии стараются выбирать такими, чтобы при ошибочности «нулевой» гипотезы была велика вероятность попадания критерия в критическую область, то есть была мала вероятность ошибки второго рода. Эта вероятность называется **мощностью критерия согласия**.

§ 2. Критерий согласия Пирсона

Оформим статистический ряд в виде статистической совокупности, представленной в табл. 1.

Таблица 1. Группированный статистический ряд результатов испытаний

Группы	$[x_1; x_2)$			$[x_k; x_{k+1})$
Число попаданий n_i^* в интервал	n_1^*			n_k^*
Теоретическое число попаданий n_i в интервал	n_1			n_k

Оценка теоретических частот n_i осуществляется на основе принятой гипотезы о функции плотности вероятностей. Ее константы вычислены с использованием результатов экспериментов. По данным табл. 1 составляется величина χ^2, называемая критерием **Пирсона,** —

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{\left(n_i^* - n_i\right)^2}{n_i}, \tag{1}$$

и вычисляется **число ее степеней свободы** по формуле

$$l = k - s - 1, \tag{2}$$

где s — число определенных параметров в функции плотности вероятностей; k — число интервалов разбиения.

По числу степеней свободы l и заданной вероятности того, что χ^2 может превзойти некоторое значение, по таблице определяют это значение. По таблице распределения χ^2 (см. прил. 4) находится вероятность ($p_{\text{кр}} = 1 - p$) того, что $\chi^2 > \chi^2_{\text{кр}}$, где p — вероятность того, что в результате испытания случайная величина χ^2 окажется меньше значения $\chi^2_{\text{кр}}$. Если принять пороговое значение этой вероятности в качестве вероятности невозможного события, например $p_{кр} = 0{,}05$ ($p = 0{,}95$), то при $\chi^2 > \chi^2_{\text{кр}}$ следует отвергнуть гипотезу о виде функции плотности вероятностей, а при $\chi^2 < \chi^2_{кр}$ оснований отвержения нулевой гипотезы нет. Это означает, что она фактически принимается.

Контрольные вопросы

1. Что такое статистическая гипотеза?
2. Что такое критерий согласия?
3. Что такое критерий значимости?
4. В чем состоит различие понятий «критерий значимости» и «критерий согласия»?
5. Что такое уровень значимости?
6. Что такое критическая область критерия?
7. Что такое ошибки первого и второго родов?

Задачи

2.1. В ОТК с точностью до 1 мкм было измерено 100 деталей, изготовленных на автоматическом станке. Результаты измерений, сгруппированные по интервалам, представлены в таблице. Во второй строке таблицы приводится число измерений n_i, попавших в интервал Δ_i в мкм, указанный в верхней строке:

Δ_i	(–20, –15)	(–15, –10)	(–10, –5)	(–5, 0)
n_i	3	6	8	12

Δ_i	(0, 5)	(5, 10)	(10, 15)	(15, 20)	(20, 25)	(25, 30)
n_i	25	20	13	8	4	1

Оценить с помощью критерия χ^2 гипотезу о согласии выборочного распределения с нормальным законом распределения при уровне значимости $q = 0{,}05$.

2.2. Проверить[1] гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности по выборке, содержащей 100 измерений предела текучести одного сорта стали, представленных в таблице [16]. Уровень значимости $q = 0{,}05$.

Результаты измерений предела текучести σ, кг/мм², одного сорта стали:

[1] Рекомендуется область изменения случайной величины разбить на следующие интервалы: (–∞; 26,6), (26,6; 28,5), (28,5; 30,4), (30,4; 32,3), (32,3; 34,2), (34,2; 36,1), (36,1; ∞).

26,7	37,0	30,5	28,1	27,4	25,4	36,1	33,4	29,7	26,4
34,0	26,6	27,9	35,4	35,3	29,6	29,4	26,4	37,0	28,7
33.7	31,2	34,5	31,8	25,5	30,2	32,7	28,3	39,9	33,5
34,1	30,0	35,8	30,7	25,9	31,6	34,4	31,5	31,8	27,4
24,7	33,4	33,1	33,2	30,3	31,6	35,8	32,2	35,2	30,8
37,0	26,3	30,2	31,8	32,5	29,7	28,0	32,4	32,3	31,9
26,7	34,7	33,6	30,7	31,9	30,8	32,3	30,4	33,8	29,5
29,7	31,8	30,1	32,4	30,6	28,1	32,2	30,5	30,8	33,1
28,7	32,6	32,7	32,3	29,8	30,6	37,2	38,4	35,0	33,1
30,6	35,4	25,6	33,5	32,0	31,6	26,1	29,4	36,4	28,0

§ 3. Критерий Колмогорова

Критерий Колмогорова называют также Λ-*критерием*. Так же как в критерии Пирсона, сначала определяют неизвестные параметры функции (1.1) плотности вероятностей случайной величины. Затем строят статистическую функцию распределения $F^*(\tilde{x}_i)$ и сравнивают ее с теоретической $F(\tilde{x}_i)$, например, в тех же точках $\tilde{x}_i$ с целью нахождения максимального различия:

$$d = \max_{i \in [1,k]} \left| F^*(\tilde{x}_i) - F(\tilde{x}_i) \right|. \qquad (1)$$

Чем больше величина d, тем больше расхождение теоретической и статистической (экспериментальной) функции распределения. Для достаточно больших значений d это расхождение можно считать существенным и не связанным со случайностью. В таком случае «нулевая» гипотеза отвергается.

Для вычисления величины d целесообразно составить таблицу, структура которой представлена в табл. 1.

Очевидно, что для новой выборки величина d будет иной. Таким образом, она является некоторой случайной величиной. А. Колмогоров ввел в рассмотрение другую случайную величину Λ, получившую его имя:

$$\Lambda = d\sqrt{n}, \qquad (2)$$

где n — объем выборки; d — случайная величина, значение которой определяется формулой (1).

Им было доказано, что для любого закона распределения случайной величины при достаточно большом количестве независимых испыта-

Таблица 1. Вычисление критерия Колмогорова

1	2	3	4	5	6	7
Группа	**Середина группы** $\tilde{x}_i$	**Число измерений** m_i **в группе**	**Частота,** $p_i^* = \frac{m_i}{n}$	**Статистическая функция распределения** $F^*(\tilde{x}_i) = \sum_{j=1}^{i} p_j^*$	**Теоретическая функция распределения** $F(\tilde{x}_i)$	$\left\| F^*(\tilde{x}_i) - F(\tilde{x}_i) \right\|$

ний n вероятность $\mathrm{P}(\lambda)$ неравенства $\Lambda > \lambda$ приближенно выражается следующим образом:

$$P(\lambda) = P(\Lambda > \lambda) \approx 1 - \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2\lambda^2} . \tag{3}$$

Функция (3) является **функцией обеспеченности** случайной величины Λ. Чем больше λ, тем меньше вероятность того, что в случае верной нулевой гипотезы случайная величина $\Lambda > \lambda$. Для достаточно малой вероятности можно считать это отличие существенным и необъясняемым явлением случайности. Таким образом, случайная величина Λ может служить критерием согласия между эмпирическим и теоретическим законами распределения. Если уровень значимости принять равным 5%, то $\lambda_{\text{кр}} \approx 1{,}4$ ($\mathrm{P}(\lambda_{\text{кр}}) = 0{,}05$), если 0,3%, то $\lambda_{\text{кр}} \approx 1{,}8$.

На основании вышеизложенного можно вывести следующее правило: если найденное значение λ окажется меньше 1,4, то нет оснований отвергать выбранный теоретический закон. Если найденное значение λ окажется больше 1,4, то с риском 5% отвергнуть верную нулевую гипотезу можно утверждать, что теоретический закон не соответствует экспериментальным данным.

§ 4. Критерий Смирнова (критерий Λ_c) соответствия двух эмпирических законов распределения общему теоретическому закону

Предположим, имеются две выборки (например, проведены испытания некоторого признака X продукции в начальный момент производства и через какой-то промежуток времени, после того как специально была изменена технология производства). Н. Смирнов ввел критерий Λ_c, позволяющий судить о принадлежности этих двух эмпирических распределений к одной и той же генеральной совокупности. При этом закон распределения случайной величины может быть неизвестным.

Н. Смирнов показал, что случайная величина

$$\Lambda_c = D_c \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}} , \tag{1}$$

где n_1, n_2 — объем двух выборок, а

$$d_c = \max_{i \in [1,k]} \left| F_1^*(\tilde{x}_i) - F_2^*(\tilde{x}_i) \right| , \tag{2}$$

$F_1^*(\tilde{x}_i)$, $F_2^*(\tilde{x}_i)$ — статистические функции распределения, построенные на выборках, имеют одинаковую с критерием Колмогорова функцию обеспеченности.

Методика применения критерия Λс для оценки случайности или существенности расхождения между двумя эмпирическими законами аналогична методике применения критерия Колмогорова (Λ).

§ 5. Критерий *T* влияния изменения какого-либо фактора на изменение среднего и дисперсии

Пусть на некоторый процесс (например, производственный) оказано целенаправленное воздействие. Для оценки эффективности проведенного мероприятия проводят выборочные испытания до или после него. По результатам испытаний вычисляют нужную характеристику. Основной вопрос, на который требуется дать ответ: является полученное отклонение случайным или его следует отнести к результату целенаправленного воздействия?

Критерии основываются на теореме Ляпунова о нормальном законе распределения случайной величины, на которую оказывают влияние большое количество примерно равнозначных факторов.

Пусть y_1, y_2 — оценки характеристики (математическое ожидание или дисперсия), полученные из n_1 испытаний до проведения мероприятия и из n_2 испытаний после мероприятия. Полученные оценки являются случайными величинами, приближенно распределенными по нормальному закону. Они имеют свои математические ожидания

$$M[y_1] = m_1 \text{ и } M[y_2] = m_2 \qquad (1)$$

и дисперсии

$$D[y_1] = d_1 \text{ и } D[y_2] = d_2. \qquad (2)$$

Составим случайную величину

$$z = y_1 - y_2. \qquad (3)$$

Ее математическое ожидание выразится соотношением

$$M[z] = M[y_1] - M[y_2] \approx y_1 - y_2, \qquad (4)$$

а дисперсия

$$D[z] = D[y_1] + D[y_2] \approx \bar{d}_1 + \bar{d}_2 . \qquad (5)$$

где $\bar{d}_1$ и $\bar{d}_2$ — оценки дисперсий, полученные из результатов измерений по формуле (I.4.2.7).

Таким образом, случайную величину z можно приближенно считать распределенной по нормальному закону с математическим ожиданием $M[z]$ и дисперсией $D[z]$. Применим, например, правило 2σ:

$$P(-2\sigma[z] < (y_1 - y_2) - M[z] < 2\sigma[z] = 0{,}955). \qquad (6)$$

Если в качестве нулевой гипотезы выбрать предположение, что проведенное мероприятие не повлияло на изменение характеристики y, то $M[z] = 0$. Тогда последнее выражение приобретает вид

$$P(-2\sigma[z] < (y_1 - y_2) < 2\sigma[z] = 0{,}955).$$

Перепишем последнее соотношение в виде

$$P\left[\frac{|y_1 - y_2|}{\sqrt{D[y_1] + D[y_2]}} < 2\right] = 0{,}955. \qquad (7)$$

Последнее соотношение позволяет ввести случайную величину T по формуле

$$T = \frac{|y_1 - y_2|}{\sqrt{D[y_1] + D[y_2]}}. \qquad (8)$$

Величину T можно принять за критерий согласия с нулевой гипотезой об отсутствии влияния проведенных мероприятий на числовую характеристику y. Если расчетное значение T окажется меньше 2, то нет основания отвергать нулевую гипотезу и следует считать проведенное мероприятие не оказавшим влияние на рассматриваемую характеристику. Если T оказалось большим 2, то следует признать проведенное мероприятие существенным. При этом вероятность отвергнуть правильную нулевую гипотезу составит 4,5%.

Пример.

Для анализа успеваемости в группе курсантов по предмету математика во втором и третьем семестрах была составлена табл. 1. В первой строке таблицы размещены заголовки ее столбцов, во второй строке представлен пример записи сведений о курсанте. Последующие строки для краткости опущены, а в последних размещены результаты обработки экзаменационных оценок.

Таблица 1. Применение T-критерия для сравнения успеваемости курсантов в разных семестрах

Ф. И. О.	**Оценка за экзамен**	
	2-й семестр	**3-й семестр**
Беленков М. И.	5	4
Сумма оценок	111	90
Среднее	3,580645	3,103448
Число измерений	31	29
Дисперсия	0,759625	0,50654
Дисперсия среднего	0,024504	0,017467
T-критерий	2,329288	

В соответствии с рекомендациями T-критерия следует признать, что существует некоторая причина снижения успеваемости.

Контрольные вопросы

1. В каких реальных задачах возникает гипотеза о равенстве математических ожиданий двух генеральных совокупностей?
2. Приведите названия известных вам критериев согласия.

Глава IV
Регрессионный и корреляционный анализ

§ 1. Функциональная зависимость и регрессия

Зависимость между двумя случайными величинами не поддается общепринятому функциональному описанию. Даже если одна случайная величина оказывает влияние на другую, то на последнюю могут оказывать влияние также множество неучитываемых факторов. Поэтому на смену функциональной зависимости приходит **регрессионная**. Регрессия (от лат. *regression* — обратное движение) — зависимость среднего значения какой-либо величины от некоторой другой величины или от нескольких величин. Эта зависимость понимается в смысле условного математического ожидания:

$$y = M\left[Y / (X = x)\right] \equiv \varphi(x); \tag{1}$$

$$x = M\left[X / (Y = y)\right] \equiv \psi(y), \tag{2}$$

где запись $/(X = x)$ или $/(Y = y)$ следует понимать как сокращение текста: «при условии, что случайная величина X приняла значение x» или «при условии, что случайная величина Y приняла значение y».

Раздел математической статистики, изучающий зависимость между случайными величинами с помощью уравнений регрессии, называется **регрессионным анализом**.

Уравнение (1) называется уравнением регрессии Y на X, а $\varphi(x)$ — функцией регрессии Y на X. Уравнение (2) называется уравнением регрессии X на Y, а $\psi(y)$ — функцией регрессии X на Y.

Функции регрессии $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ вычисляются с применением функций условных плотностей вероятностей двумерной случайной величины по формулам

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} yf(y / x)\,dy, \tag{3}$$

где

$$f(y/x)=\frac{f(x,y)}{f_1(x)}\ - \tag{4}$$

условная плотность вероятности случайной величины Y при условии, что случайная величина X приняла заданное значение x;

$$\psi(y)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x/y)\,dx, \tag{5}$$

где

$$f(x/y)=\frac{f(x,y)}{f_2(y)}\ - \tag{6}$$

условная плотность вероятности случайной величины X при условии, что случайная величина Y приняла заданное значение y.

Таким образом, если известна двумерная плотность вероятностей $f(x, y)$, то регрессионные зависимости (1–2) могут быть получены с использованием формул (3–5). Определение вида уравнений регрессии является важной задачей регрессионного анализа.

Отметим, что точность предсказания значения случайной величины Y при фиксированном значении величины X, выполненная по уравнению регрессии (1), определяется условной дисперсией величины Y, вычисленной для каждого значения $X = x$:

$$D[Y/(X=x)]=\sigma^2(x). \tag{7}$$

Если $\sigma^2(x) = 0$ при всех значениях x, то случайные величины Y и X связаны строгой функциональной зависимостью.

Регрессионные уравнения (1) и (2) используются для предсказания значения одной из случайных величин по известному значению другой случайной величины.

§ 2. Корреляционный анализ

Степень влияния одной случайной величины на другую оценивают коэффициентом корреляции. В п. 4.3 гл. III **коэффициент корреляции** $r_{X,Y}$ определялся как

$$r_{X,Y}=\frac{M\left[(X-m_x)(Y-m_y)\right]}{\sigma[X]\sigma[Y]}=\frac{M[X,Y]-M[X]M[Y]}{\sigma[X]\sigma[Y]}. \tag{1}$$

В п. 4.4 гл. III ч. 1 было установлено, что независимые случайные величины имеют коэффициент корреляции, равный нулю, а линейно зависимые — равный ±1. Основываясь на этом факте, можно считать, что в отличие от регрессионных уравнений коэффициент корреляции дает обобщенную характеристику взаимовлияния двух случайных величин, а регрессионные уравнения отображают функциональную зависимость между ними.

Корреляционным анализом называется раздел математической статистики, исследующий зависимость между случайными величинами с помощью выборочных оценок генеральных коэффициентов корреляции.

В каких случаях можно считать, что случайные величины X и Y будут взаимно связанными (коррелированными или зависимыми)? Для этой цели проверяется статистическая гипотеза (нулевая) о том, что коэффициент корреляции равен нулю $r_{X,Y} = 0$. Альтернативной, очевидно, является гипотеза $r_{X,Y} \neq 0$.

Известно [16], что при условии $r_{X,Y} = 0$, случайная величина

$$t = \frac{\sqrt{n-2}\,r_{XY}}{\sqrt{1-r_{XY}^2}} \tag{2}$$

распределена по закону Стьюдента с $n - 2$ степенями свободы, где n — количество независимых испытаний случайной величины (X, Y) (объем выборки). Поэтому используется следующий алгоритм проверки нулевой гипотезы.

1. Установив уровень значимости $\alpha = 1 - \beta$ (см. формулу (2.8.1)) и число степеней свободы $n - 2$, по таблице распределения Стьюдента определяют критическую величину $t_{\beta,\,n-2}$.
2. По выборке вычисляется коэффициент корреляции $r^*_{X,Y}$, и по формуле (2) рассчитывается случайная величина

$$t^* = \frac{\sqrt{n-2}\,r^*_{XY}}{\sqrt{1-(r^*_{XY})^2}}. \tag{3}$$

3. Если выполняется неравенство

$$\left|t^*\right| > t_{\beta,n-2}, \tag{4}$$

то нулевая гипотеза о $r_{XY} = 0$ отвергается и при уровне значимости α принимается альтернативная гипотеза $r_{XY} \neq 0$ о наличии связи между случайными величинами X и Y. В противном случае их считаем несвязанными.

Отметим также, что коэффициент корреляции $r_{XY} \equiv r$ является пятой константой в функции плотности вероятностей системы двух нормально распределенных случайных величин [1]:

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r^2}} *$$

$$*e - \frac{1}{1-r^2}\left[\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2} - r\frac{(x-m_x)(y-m_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-m_y)^2}{2\sigma_y^2}\right].$$

§ 3. Коэффициенты линейной регрессии

Предположим, что уравнения регрессии (1.1) и (1.2) представляют собой прямые. Рассмотрим сначала прямую регрессии Y на X. Тогда, согласно предположению,

$$y = \varphi(x) = Ax + B, \tag{1}$$

где A и B — постоянные коэффициенты.

Найдем выражения постоянных коэффициентов A и B через числовые характеристики двумерной случайной величины. С учетом формулы (1.3) уравнение (1) примет вид

$$Ax + B = \int_{-\infty}^{\infty} yf(y/x)\,dy.$$

Учитывая равенство (1.4), получим

$$Ax + B = \int_{-\infty}^{\infty} y\frac{f(x,y)}{f_1(x)}\,dy. \tag{2}$$

Умножим равенство (2) на $f_1(x)$, проинтегрировав полученное соотношение по всей области изменения переменной x, получим

$$AM[X] + B = M[Y]. \tag{3}$$

Умножим теперь соотношение (2) на x и, выполнив такие же преобразования, получим

$$AM[X^2] + BM[X] = M[X^*Y]. \tag{4}$$

Рассмотрим уравнения (3) и (4) совместно:

$$\begin{cases} Am_x + B = m_y \\ AM\left[X^2\right] + Bm_x = M\left[X * Y\right], \end{cases} \tag{5}$$

где $m_x = M[X]$ и $m_y = M[Y]$.

Легко убедиться, что решением системы (5) являются соотношения

$$\begin{cases} A = \dfrac{M[XY] - m_x m_y}{D_x} \\ B = m_y - A m_x \end{cases}. \tag{6}$$

Коэффициент A называется коэффициентом регрессии Y на X и обозначается

$$A \equiv r(y \mid x) = \frac{M[XY] - m_x m_y}{D_x}. \tag{7}$$

Окончательно с учетом формул (1) и (7) получаем искомое регрессионное уравнение Y на X в виде

$$y = r(y \mid x)(x - m_x) + m_y. \tag{8}$$

Аналогично можно показать, что регрессия X на Y представится в виде

$$x = r(x \mid y)(y - m_y) + m_x, \tag{9}$$

где $r(x \mid y) = \dfrac{M[XY] - m_x m_y}{D_y}$. (10)

Уравнения регрессии (8) и (9) можно представить в форме с использованием коэффициента корреляции (III.4.3.5). Очевидно, что выполняются следующие соотношения:

$$r(y|x) = r_{XY}\frac{\sigma[Y]}{\sigma[X]} \text{ и } r(x|y) = r_{XY}\frac{\sigma[X]}{\sigma[Y]}. \tag{11}$$

С учетом равенств (11) регрессионные уравнения приобретают вид

$$y = r_{XY}\frac{\sigma[Y]}{\sigma[X]}(x - m_x) + m_y \text{ и} \tag{12}$$

$$x = r_{XY}\frac{\sigma[X]}{\sigma[Y]}(y - m_y) + m_x. \tag{13}$$

Таким образом, если регрессионные уравнения являются линейными, то их коэффициенты вычисляются с использованием пяти числовых характеристик случайных величин: математических ожиданий и дисперсий каждой величины и коэффициента корреляции.

§ 4. Свойства регрессионных уравнений

В уравнении (3.13) выразим y через x:

$$y = \frac{1}{r_{XY}} \frac{\sigma[Y]}{\sigma[X]}\left(x - m_x\right) + m_y. \tag{1}$$

Во-первых, отметим, что тангенс угла наклона α регрессии Y на X, определяемый соотношением (3.11)

$$\operatorname{tg} \alpha = r_{XY} \frac{\sigma[Y]}{\sigma[X]}, \tag{2}$$

имеет такой же знак, как и тангенс угла наклона β регрессии X на Y (если строить обе прямые в одной и той же системе координат)

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{r_{X,Y}} \frac{\sigma[Y]}{\sigma[X]}. \tag{3}$$

Во-вторых, в силу неравенства $\left|r_{X,Y}\right| \le 1$

$$|\alpha| \le |\beta|. \tag{4}$$

В-третьих, прямые регрессии (3.13) и (3.12) пересекаются друг с другом в точке

$$\begin{cases} x = m_x \\ y = m_y \end{cases}, \tag{5}$$

если

$$r_{X,Y} \frac{\sigma[Y]}{\sigma[X]} \ne \frac{1}{r_{X,Y}} \frac{\sigma[Y]}{\sigma[X]}. \tag{6}$$

Прямые регрессии совпадают друг с другом только в случае невыполнения условия (6), то есть при

$$r_{XY} = \pm 1. \tag{7}$$

Известно, что коэффициент корреляции равен ±1 при линейной функциональной зависимости (ч. 1 III.4.4.1) между случайными величинами. Легко убедиться, что в этом частном случае уравнения регрессии (3.12) и (3.13) совпадают друг с другом и с указанной линейной функцией (ч. 1 III.4.4.1).

В-четвертых, при отсутствии регрессионной зависимости между случайными величинами, то есть в случае их независимости, соответствующей соотношению

$$r_{XY} = 0, \tag{8}$$

регрессия Y на X превращается в горизонтальную прямую

$$y = m_y, \tag{9}$$

а регрессия X на Y — в вертикальную прямую

$$x = m_x. \tag{10}$$

В этом случае прямые регрессии пересекаются друг с другом под углом 90°. Обе прямые выражают факт отсутствия зависимости случайных величин друг от друга.

§ 5. Свойство оптимальности линейной корреляционной модели. Метод наименьших квадратов

Прямые регрессии могут использоваться не только в случаях, когда корреляция между случайными величинами является линейной. Это связано также с тем, что они дают наилучшее приближение к случайной величине, которую они моделируют, из всевозможных прямых. Рассмотрим справедливость этого положения для регрессии Y на X

$$\varphi(A,\ B) \equiv M[(Y-(AX+B))^2] = M[((Y-m_y)-A(X-m_x)+C)^2], \tag{1}$$

где $C \equiv -B + m_y - Am_x$, $\varphi(A,\ B)$ – функция, имеющая смысл среднего квадратического отклонения случайной величины $AX + B$ от случайной величины Y.

Возведем в квадрат выражение, стоящее под знаком математического ожидания. С учетом того что математическое ожидание центрированной случайной величины равно нулю, получим

$$\varphi(A,\ B) \equiv \sigma_y^2 + A^2\sigma_x^2 + C^2 - 2Ar_{XY}\sigma_x\sigma_y. \tag{2}$$

Полученное выражение можно рассматривать как функцию 2 переменных A и B. Ее можно исследовать на экстремум стандартным методом. Однако применим здесь иной способ нахождения минимума функции $\varphi(A, B)$. Для минимизации математического ожидания следует положить $C = 0$. В этом случае

$$B = B_y - Am_x. \tag{3}$$

Полученное соотношение совпадает с первым из равенств (3.5). Выделим теперь полный квадрат в соотношении (2):

$$\varphi(A, B) \equiv \sigma_y^2 + \sigma_x^2\left(A^2 - 2Ar_{XY}\frac{\sigma_y}{\sigma_x} + r_{XY}^2\frac{\sigma_y^2}{\sigma_x^2}\right) - r_{XY}^2\sigma_y^2 =$$

$$= \sigma_y^2 + \sigma_x^2\left(A - r_{XY}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}\right)^2 - r_{XY}^2\sigma_y^2 =^{*)} . \tag{4}$$

Для минимизации полученного выражения следует выбрать коэффициент A в виде

$$A = r_{XY}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}. \tag{5}$$

Окончательно, завершая цепочку преобразований выражения (1), используя найденные значения коэффициентов A и B, получим

$$\varphi(A, B) = \sigma_y^2(1 - r_{XY}^2).$$

Если учесть обозначение (3.7), то видно, что формула (5) совпадает с первой из формул (3.11). Итак, полученный результат можно интерпретировать как свойство оптимальности регрессионных прямых на множестве всевозможных прямых.

Аналогичным свойством оптимальности обладает уравнение регрессии X на Y. В этом случае, как легко убедиться, минимум математического ожидания выражается соотношением

$$M\left[\left(X - (CY + D)\right)^2\right] = \sigma_x^2\left(1 - r_{XY}^2\right), \tag{6}$$

где $C = r_{XY}\dfrac{\sigma_x}{\sigma_y}$ и $D = m_x - Cm_y$.

§ 6. Построение линейной регрессионной модели по опытным данным

Предположим, что при изучении двумерной случайной величины получены n пар случайных величин

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n). \tag{1}$$

Основные пять числовых характеристик случайных величин можно вычислить по формулам

$$\bar{m}_x = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \ \bar{m}_y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i, \ \bar{D}_x = \bar{\sigma}_x{}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{m}_x)^2,$$

$$\bar{D}_y = \bar{\sigma}_y{}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{m}_y)^2,$$

$$\bar{r}_{XY} = \frac{1}{(n-1)\bar{\sigma}_x\bar{\sigma}_y}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{m}_x\right)\left(y_i - \bar{m}_y\right). \tag{2}$$

Затем, используя уравнения регрессионных прямых (3.12–3.13), получаем

$$y = \bar{r}_{XY} \frac{\bar{\sigma}_y}{\bar{\sigma}_x} \left(x - \bar{m}_x\right) + \bar{m}_y \text{ и} \tag{3}$$

$$x = \bar{r}_{XY} \frac{\bar{\sigma}_x}{\bar{\sigma}_y} \left(y - \bar{m}_y\right) + \bar{m}_x. \tag{4}$$

Контрольные вопросы

1. Что такое регрессионный анализ?
2. Напишите формулу для определения выборочного коэффициента корреляции.
3. Запишите уравнения прямых регрессии «y на x» и «x на y».
4. Как ведут себя прямые регрессии при $r_{XY} \to 0$ и $r_{XY} \to 1$?

Задачи

6.1. Результаты измерения чувствительности видео- и звукового каналов 20 телевизоров представлены в таблице.

№ п/п	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
Видео	400	420	450	380	540	340	500	450
Звук	140	170	110	160	180	160	240	100

№ п/п	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**
Видео	280	310	480	430	420	410	500	320
Звук	150	120	160	270	190	200	180	120

№ п/п	**17**	**18**	**19**	**20**
Видео	540	450	320	460
Звук	260	280	130	200

Найти:

1) средние чувствительности видео- X и звукового канала Y;
2) средние квадратические отклонения чувствительностей видео- σ_x и звукового σ_y каналов от их средних значений, а также коэффициент корреляции r_{XY};

3) составить уравнения линейной регрессии Y на X и X на Y и построить их графики.

6.2. Измерялись длина X и диаметр Y 50 роликов. Результаты измерений приведены в корреляционной таблице.

Y \ X	**5**	**15**	**25**	**35**	**45**	**55**	**65**	***ny***
4	2		2					4
8		1	4					5
12		4	3	10				17
16		2		2	3	6		13
20					5	4		9
24						1	1	2
nx	2	7	9	12	8	11	1	$n = 50$

Найти коэффициент корреляции r_{XY} и выборочные прямые регрессии Y на X и X на Y [15].

Заключение

Автор надеется, что настоящее учебное пособие будет полезно студентам в изучении указанных тем, а также преподавателям при подготовке к занятиям, и с благодарностью примет отзывы и замечания.

Список литературы

1. *Гнеденко Б. В.* Курс теории вероятностей. — М.: Наука, 1969.
2. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. — М.: Мир, 1967. — 500 с.
3. *Колмогоров А. Н.* Основные понятия теории вероятностей. — ОНТИ, 1936.
4. *Гмурман В. Е.* Теория вероятностей и математическая статистика. — М.: ВШ, 2005. — 479 с.
5. *Богатов Д. Ф., Богатов Ф. Г.* Конспект лекций и практикум по математике для юристов. — М.: Приориздат, 2003. — 448 с.
6. *Турецкий В. Я.* Математика и информатика. — М.: ИНФРА-М, 2000. — 560 с.
7. *Козлов В. Н.* Математика и информатика. — СПб.: Питер, 2004. — 266 с.
8. *Виноградов Ю. С.* Математическая статистика и ее применение в текстильной и швейной промышленности. — М.: Легкая индустрия, 1970. — 312 с.
9. *Большев Л. Н., Смирнов Н. В.* Таблицы математической статистики. — М.: Наука, 1983. — 416 с.
10. Математика: Большой энциклопедический словарь. — М., 2000. — 848 с.
11. *Зараев А. И.* Прикладные методы теории вероятностей, теории случайных процессов и математической статистики. — Л.: ВВМИОЛУ им. Ф. Э. Дзержинского, 1988. — 222 с.
12. *Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я.* Высшая математика в упражнениях и задачах. — М.: ВШ, 1999.Ч. 2. — 416 с.
13. *Мартьянова И. Г., Третьякова А. Н.* Случайные величины и законы их распределения. — Калининград: ВВМУ, 1983. — 46 с.
14. *Пугачев В. С.* Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. — М., 1960. — 884 с.
15. *Гурский Е. Н.* Руководство к решению задач по высшей математике. — Минск: Вышэйшая школа, 1990. Ч. 2.
16. *Максимов Ю. Д.* Математика. Вып. 8. Математическая статистика: Опорный конспект. — СПб.: СПбГПУ, 2004. — 96 с.

17. *Пугачев В. С.* Введение в теорию вероятностей. — М.: Наука, 1968.
18. *Прохоров Ю. В., Розанов Ю. А.* Теория вероятностей (Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы). — М.: Наука, 1973.
19. *Смирнов Н. В., Дунин-Барковский И. В.* Краткий курс математической статистики для технических приложений. — М.: Физматгиз, 1959.
20. *Шнейдер В. Е., Слуцкий Ф. И., Шумов Ф. С.* Краткий курс высшей математики. — М.: Высшая школа, 1978. Т. 2.
21. *Пискунов Н. С.* Дифференциальное и интегральное исчисления. — СПб.: МИФРИЛ, 1996. Т. 2.

Приложения

Приложение 1. Таблица значений функции $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ (значение x получается присоединением заголовка столбца к заголовку строки)

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	0,3989	0,3989	0,3988	0,3986	0,3984	0,3982	0,3980	0,3977	0,3973
0,1	0,3970	0,3965	0,3961	0,3956	0,3951	0,3945	0,3939	0,3932	0,3925	0,3918
0,2	0,3910	0,3902	0,3894	0,3885	0,3876	0,3867	0,3857	0,3847	0,3836	0,3825
0,3	0,3814	0,3802	0,3790	0,3778	0,3765	0,3752	0,3739	0,3725	0,3712	0,3697
0,4	0,3683	0,3668	0,3653	0,3637	0,3621	0,3605	0,3589	0,3572	0,3555	0,3538
0,5	0,3521	0,3503	0,3485	0,3467	0,3448	0,3429	0,3410	0,3391	0,3372	0,3352
0,6	0,3332	0,3312	0,3292	0,3271	0,3251	0,3230	0,3209	0,3187	0,3166	0,3144
0,7	0,3123	0,3101	0,3079	0,3056	0,3034	0,3011	0,2989	0,2966	0,2943	0,2920
0,8	0,2897	0,2874	0,2850	0,2827	0,2803	0,2780	0,2756	0,2732	0,2709	0,2685
0,9	0,2661	0,2637	0,2613	0,2589	0,2565	0,2541	0,2516	0,2492	0,2468	0,2444
1	0,2420	0,2396	0,2371	0,2347	0,2323	0,2299	0,2275	0,2251	0,2227	0,2203
1,1	0,2179	0,2155	0,2131	0,2107	0,2083	0,2059	0,2036	0,2012	0,1989	0,1965
1,2	0,1942	0,1919	0,1895	0,1872	0,1849	0,1826	0,1804	0,1781	0,1758	0,1736
1,3	0,1714	0,1691	0,1669	0,1647	0,1626	0,1604	0,1582	0,1561	0,1539	0,1518
1,4	0,1497	0,1476	0,1456	0,1435	0,1415	0,1394	0,1374	0,1354	0,1334	0,1315
1,5	0,1295	0,1276	0,1257	0,1238	0,1219	0,1200	0,1182	0,1163	0,1145	0,1127
1,6	0,1109	0,1092	0,1074	0,1057	0,1040	0,1023	0,1006	0,0989	0,0973	0,0957
1,7	0,0940	0,0925	0,0909	0,0893	0,0878	0,0863	0,0848	0,0833	0,0818	0,0804
1,8	0,0790	0,0775	0,0761	0,0748	0,0734	0,0721	0,0707	0,0694	0,0681	0,0669
1,9	0,0656	0,0644	0,0632	0,0620	0,0608	0,0596	0,0584	0,0573	0,0562	0,0551
2	0,0540	0,0529	0,0519	0,0508	0,0498	0,0488	0,0478	0,0468	0,0459	0,0449

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,1	0,0440	0,0431	0,0422	0,0413	0,0404	0,0396	0,0387	0,0379	0,0371	0,0363
2,2	0,0355	0,0347	0,0339	0,0332	0,0325	0,0317	0,0310	0,0303	0,0297	0,0290
2,3	0,0283	0,0277	0,0270	0,0264	0,0258	0,0252	0,0246	0,0241	0,0235	0,0229
2,4	0,0224	0,0219	0,0213	0,0208	0,0203	0,0198	0,0194	0,0189	0,0184	0,0180
2,5	0,0175	0,0171	0,0167	0,0163	0,0158	0,0154	0,0151	0,0147	0,0143	0,0139
2,6	0,0136	0,0132	0,0129	0,0126	0,0122	0,0119	0,0116	0,0113	0,0110	0,0107
2,7	0,0104	0,0101	0,0099	0,0096	0,0093	0,0091	0,0088	0,0086	0,0084	0,0081
2,8	0,0079	0,0077	0,0075	0,0073	0,0071	0,0069	0,0067	0,0065	0,0063	0,0061
2,9	0,0060	0,0058	0,0056	0,0055	0,0053	0,0051	0,0050	0,0048	0,0047	0,0046
3	0,0044	0,0043	0,0042	0,0040	0,0039	0,0038	0,0037	0,0036	0,0035	0,0034
3,1	0,0033	0,0032	0,0031	0,0030	0,0029	0,0028	0,0027	0,0026	0,0025	0,0025
3,2	0,0024	0,0023	0,0022	0,0022	0,0021	0,0020	0,0020	0,0019	0,0018	0,0018
3,3	0,0017	0,0017	0,0016	0,0016	0,0015	0,0015	0,0014	0,0014	0,0013	0,0013
3,4	0,0012	0,0012	0,0012	0,0011	0,0011	0,0010	0,0010	0,0010	0,0009	0,0009
3,5	0,0009	0,0008	0,0008	0,0008	0,0008	0,0007	0,0007	0,0007	0,0007	0,0006
3,6	0,0006	0,0006	0,0006	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0005	0,0004
3,7	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0004	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003
3,8	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0003	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002
3,9	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0002	0,0001	0,0001
4	1,E-04	1,E-04	1,E-04	1,E-04	1,E-04	1,E-04	1,E-04	1,E-04	1,E-04	9,E-05
4,1	9,E-05	9,E-05	8,E-05	8,E-05	8,E-05	7,E-05	7,E-05	7,E-05	6,E-05	6,E-05
4,2	6,E-05	6,E-05	5,E-05	5,E-05	5,E-05	5,E-05	5,E-05	4,E-05	4,E-05	4,E-05

Приложение 2. Таблица значений нормированной функции Лапласа

$$\overline{\Phi}(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

x	$\overline{\Phi}(x)$	x	$\overline{\Phi}(x)$	x	$\overline{\Phi}(x)$
0,00	0,0000	0,25	0,0987	0,50	0,1915
0,01	0,0040	0,26	0,1026	0,51	0,1950
0,02	0,0080	0,27	0,1064	0,52	0,1985
0,03	0,0120	0,28	0,1103	0,53	0,2019
0,04	0,0160	0,29	0,1141	0,54	0,2054
0,05	0,0199	0,30	0,1179	0,55	0,2088
0,06	0,0239	0,31	0,1217	0,56	0,2123
0,07	0,0279	0,32	0,1255	0,57	0,2157
0,08	0,0319	0,33	0,1293	0,58	0,2190
0,09	0,0359	0,34	0,1331	0,59	0,2224
0,10	0,0398	0,35	0,1368	0,60	0,2257
0,11	0,0438	0,36	0,1406	0,61	0,2291
0,12	0,0478	0,37	0,1443	0,62	0,2324
0,13	0,0517	0,38	0,1480	0,63	0,2357
0,14	0,0557	0,39	0,1517	0,64	0,2389
0,15	0,0596	0,40	0,1554	0,65	0,2422
0,16	0,0636	0,41	0,1591	0,66	0,2454
0,17	0,0675	0,42	0,1628	0,67	0,2486
0,18	0,0714	0,43	0,1664	0,68	0,2517
0,19	0,0753	0,44	0,1700	0,69	0,2549
0,20	0,0793	0,45	0,1736	0,70	0,2580
0,21	0,0832	0,46	0,1772	0,71	0,2611
0,22	0,0871	0,47	0,1808	0,72	0,2642
0,23	0,0910	0,48	0,1844	0,73	0,2673
0,24	0,0948	0,49	0,1879	0,74	0,2704
0,75	0,2734	1,03	0,3485	1,31	0,4049
0,76	0,2764	1,04	0,3508	1,32	0,4066

x	$\overline{\Phi}(x)$	x	$\overline{\Phi}(x)$	x	$\overline{\Phi}(x)$
0,77	0,2794	1,05	0,3531	1,33	0,4082
0,78	0,2823	1,06	0,3554	1,34	0,4099
0,79	0,2852	1,07	0,3577	1,35	0,4115
0,80	0,2881	1,08	0,3599	1,36	0,4131
0,81	0,2910	1,09	0,3621	1,37	0,4147
0,82	0,2939	1,10	0,3643	1,38	0,4162
0,83	0,2967	1,11	0,3665	1,39	0,4177
0,84	0,2995	1,12	0,3686	1,40	0,4192
0,85	0,3023	1,13	0,3708	1,41	0,4207
0,86	0,3051	1,14	0,3729	1,42	0,4222
0,87	0,3078	1,15	0,3749	1,43	0,4236
0,88	0,3106	1,16	0,3770	1,44	0,4251
0,89	0,3133	1,17	0,3790	1,45	0,4265
0,90	0,3159	1,18	0,3810	1,46	0,4279
0,91	0,3186	1,19	0,3830	1,47	0,4292
0,92	0,3212	1,20	0,3849	1,48	0,4306
0,93	0,3238	1,21	0,3869	1,49	0,4319
0,94	0,3264	1,22	0,3888	1,50	0,4332
0,95	0,3289	1,23	0,3907	1,51	0,4345
0,96	0,3315	1,24	0,3925	1,52	0,4357
0,97	0,3340	1,25	0,3944	1,53	0,4370
0,98	0,3365	1,26	0,3962	1,54	0,4382
0,99	0,3389	1,27	0,3980	1,55	0,4394
1,00	0,3413	1,28	0,3997	1,56	0,4406
1,01	0,3438	1,29	0,4015	1,57	0,4418
1,02	0,3461	1,30	0,4032	1,58	0,4429
1,59	0,4441	1,87	0,4693	2,15	0,4842
1,60	0,4452	1,88	0,4699	2,16	0,4846
1,61	0,4463	1,89	0,4706	2,17	0,4850
1,62	0,4474	1,90	0,4713	2,18	0,4854

x	$\overline{\Phi}(x)$	x	$\overline{\Phi}(x)$	x	$\overline{\Phi}(x)$
1,63	0,4484	1,91	0,4719	2,19	0,4857
1,64	0,4495	1,92	0,4726	2,20	0,4861
1,65	0,4505	1,93	0,4732	2,21	0,4864
1,66	0,4515	1,94	0,4738	2,22	0,4868
1,67	0,4525	1,95	0,4744	2,23	0,4871
1,68	0,4535	1,96	0,4750	2,24	0,4875
1,69	0,4545	1,97	0,4756	2,25	0,4878
1,70	0,4554	1,98	0,4761	2,26	0,4881
1,71	0,4564	1,99	0,4767	2,27	0,4884
1,72	0,4573	2,00	0,4772	2,28	0,4887
1,73	0,4582	2,01	0,4778	2,29	0,4890
1,74	0,4591	2,02	0,4783	2,30	0,4893
1,75	0,4599	2,03	0,4788	2,31	0,4896
1,76	0,4608	2,04	0,4793	2,32	0,4898
1,77	0,4616	2,05	0,4798	2,33	0,4901
1,78	0,4625	2,06	0,4803	2,34	0,4904
1,79	0,4633	2,07	0,4808	2,35	0,4906
1,80	0,4641	2,08	0,4812	2,36	0,4909
1,81	0,4649	2,09	0,4817	2,37	0,4911
1,82	0,4656	2,10	0,4821	2,38	0,4913
1,83	0,4664	2,11	0,4826	2,39	0,4916
1,84	0,4671	2,12	0,4830	2,40	0,4918
1,85	0,4678	2,13	0,4834	2,41	0,4920
1,86	0,4686	2,14	0,4838	2,42	0,4922
2,43	0,4925	2,71	0,4966	3,08	0,4990
2,44	0,4927	2,72	0,4967	3,12	0,4991
2,45	0,4929	2,73	0,4968	3,16	0,4992
2,46	0,4931	2,74	0,4969	3,20	0,4993
2,47	0,4932	2,75	0,4970	3,24	0,4994
2,48	0,4934	2,76	0,4971	3,28	0,4995

x	$\overline{\Phi}(x)$	x	$\overline{\Phi}(x)$	x	$\overline{\Phi}(x)$
2,49	0,4936	2,77	0,4972	3,35	0,4996
2,50	0,4938	2,78	0,4973	3,40	0,4997
2,51	0,4940	2,79	0,4974	3,50	0,4998
2,52	0,4941	2,80	0,4974	3,70	0,4999
2,53	0,4943	2,81	0,4975	3,90	4,99952E-01
2,54	0,4945	2,82	0,4976	4,00	4,99968E-01
2,55	0,4946	2,83	0,4977	4,50	4,99997E-01
2,56	0,4948	2,84	0,4977	5,00	4,999997E-01
2,57	0,4949	2,85	0,4978		
2,58	0,4951	2,86	0,4979		
2,59	0,4952	2,87	0,4979		
2,60	0,4953	2,88	0,4980		
2,61	0,4955	2,89	0,4981		
2,62	0,4956	2,90	0,4981		
2,63	0,4957	2,91	0,4982		
2,64	0,4959	2,92	0,4982		
2,65	0,4960	2,93	0,4983		
2,66	0,4961	2,94	0,4984		
2,67	0,4962	2,96	0,4985		
2,68	0,4963	2,98	0,4986		
2,69	0,4964	3,00	0,4987		
2,70	0,4965	3,04	0,4988		

Приложение 3. Значения критерия $t_{\beta.n}$ Стьюдента в зависимости от числа опытов n и доверительной вероятности $P(|t^*| < t_{\beta.n}) = \beta$

n \ β	0,8	0,86	0,9	0,93	0,95	0,98	0,99	0,999
2	3,078	4,474	6,314	9,058	12,706	31,821	63,657	636,619
3	1,886	2,383	2,920	3,578	4,303	6,965	9,925	31,599
4	1,638	1,995	2,353	2,763	3,182	4,541	5,841	12,924
5	1,533	1,838	2,132	2,456	2,776	3,747	4,604	8,610
6	1,476	1,753	2,015	2,297	2,571	3,365	4,032	6,869
7	1,440	1,700	1,943	2,201	2,447	3,143	3,707	5,959
8	1,415	1,664	1,895	2,136	2,365	2,998	3,499	5,408
9	1,397	1,638	1,860	2,090	2,306	2,896	3,355	5,041
10	1,383	1,619	1,833	2,055	2,262	2,821	3,250	4,781
11	1,372	1,603	1,812	2,028	2,228	2,764	3,169	4,587
12	1,363	1,591	1,796	2,007	2,201	2,718	3,106	4,437
13	1,356	1,580	1,782	1,989	2,179	2,681	3,055	4,318
14	1,350	1,572	1,771	1,974	2,160	2,650	3,012	4,221
15	1,345	1,565	1,761	1,962	2,145	2,624	2,977	4,140
16	1,341	1,558	1,753	1,951	2,131	2,602	2,947	4,073
17	1,337	1,553	1,746	1,942	2,120	2,583	2,921	4,015
18	1,333	1,548	1,740	1,934	2,110	2,567	2,898	3,965
19	1,330	1,544	1,734	1,926	2,101	2,552	2,878	3,922
20	1,328	1,540	1,729	1,920	2,093	2,539	2,861	3,883
21	1,325	1,537	1,725	1,914	2,086	2,528	2,845	3,850
22	1,323	1,534	1,721	1,909	2,080	2,518	2,831	3,819
23	1,321	1,531	1,717	1,905	2,074	2,508	2,819	3,792
24	1,319	1,529	1,714	1,900	2,069	2,500	2,807	3,768
25	1,318	1,526	1,711	1,896	2,064	2,492	2,797	3,745
26	1,316	1,524	1,708	1,893	2,060	2,485	2,787	3,725
27	1,315	1,522	1,706	1,890	2,056	2,479	2,779	3,707
28	1,314	1,521	1,703	1,887	2,052	2,473	2,771	3,690
29	1,313	1,519	1,701	1,884	2,048	2,467	2,763	3,674
30	1,311	1,517	1,699	1,881	2,045	2,462	2,756	3,659
31	1,310	1,516	1,697	1,879	2,042	2,457	2,750	3,646
32	1,309	1,515	1,696	1,877	2,040	2,453	2,744	3,633
33	1,309	1,513	1,694	1,875	2,037	2,449	2,738	3,622

β / n	0,8	0,86	0,9	0,93	0,95	0,98	0,99	0,999
34	1,308	1,512	1,692	1,873	2,035	2,445	2,733	3,611
35	1,307	1,511	1,691	1,871	2,032	2,441	2,728	3,601
36	1,306	1,510	1,690	1,869	2,030	2,438	2,724	3,591
37	1,306	1,509	1,688	1,867	2,028	2,434	2,719	3,582
38	1,305	1,508	1,687	1,866	2,026	2,431	2,715	3,574
39	1,304	1,507	1,686	1,864	2,024	2,429	2,712	3,566
40	1,304	1,506	1,685	1,863	2,023	2,426	2,708	3,558
50	1,299	1,500	1,677	1,852	2,010	2,405	2,680	3,500
60	1,296	1,496	1,671	1,845	2,001	2,391	2,662	3,463
70	1,294	1,493	1,667	1,840	1,995	2,382	2,649	3,437
80	1,292	1,491	1,664	1,837	1,990	2,374	2,640	3,418
90	1,291	1,489	1,662	1,834	1,987	2,369	2,632	3,403
100	1,290	1,488	1,660	1,832	1,984	2,365	2,626	3,392
120	1,289	1,486	1,658	1,828	1,980	2,358	2,618	3,374
130	1,288	1,485	1,657	1,827	1,979	2,356	2,614	3,368
150	1,287	1,484	1,655	1,825	1,976	2,352	2,609	3,357
180	1,286	1,482	1,653	1,823	1,973	2,347	2,604	3,346
200	1,286	1,482	1,653	1,822	1,972	2,345	2,601	3,340

Приложение 4. Значения критерия $\chi_p^2(l)$ хи-квадрат, где p — вероятность того, что $\chi^2 < \chi_p^2(l)$; l — число степеней свободы распределения

l \ p	**0,01**	**0,02**	**0,05**	**0,1**	**0,2**
1	0,00	0,00	0,00	0,02	0,06
2	0,02	0,04	0,10	0,21	0,45
3	0,11	0,18	0,35	0,58	1,01
4	0,30	0,43	0,71	1,06	1,65
5	0,55	0,75	1,15	1,61	2,34
6	0,87	1,13	1,64	2,20	3,07
7	1,24	1,56	2,17	2,83	3,82
8	1,65	2,03	2,73	3,49	4,59
9	2,09	2,53	3,33	4,17	5,38
10	2,56	3,06	3,94	4,87	6,18
11	3,05	3,61	4,57	5,58	6,99
12	3,57	4,18	5,23	6,30	7,81
13	4,11	4,77	5,89	7,04	8,63
14	4,66	5,37	6,57	7,79	9,47
15	5,23	5,98	7,26	8,55	10,31
16	5,81	6,61	7,96	9,31	11,15
17	6,41	7,26	8,67	10,09	12,00
18	7,01	7,91	9,39	10,86	12,86
19	7,63	8,57	10,12	11,65	13,72
20	8,26	9,24	10,85	12,44	14,58
21	8,90	9,91	11,59	13,24	15,44
22	9,54	10,60	12,34	14,04	16,31
23	10,20	11,29	13,09	14,85	17,19
24	10,86	11,99	13,85	15,66	18,06
25	11,52	12,70	14,61	16,47	18,94
26	12,20	13,41	15,38	17,29	19,82
27	12,88	14,13	16,15	18,11	20,70
28	13,56	14,85	16,93	18,94	21,59
29	14,26	15,57	17,71	19,77	22,48

l \ p	**0,3**	**0,5**	**0,7**	**0,80**	**0,85**
1	0,15	0,45	1,07	1,64	2,07
2	0,71	1,39	2,41	3,22	3,79
3	1,42	2,37	3,66	4,64	5,32
4	2,19	3,36	4,88	5,99	6,74
5	3,00	4,35	6,06	7,29	8,12
6	3,83	5,35	7,23	8,56	9,45
7	4,67	6,35	8,38	9,80	10,75
8	5,53	7,34	9,52	11,03	12,03
9	6,39	8,34	10,66	12,24	13,29
10	7,27	9,34	11,78	13,44	14,53
11	8,15	10,34	12,90	14,63	15,77
12	9,03	11,34	14,01	15,81	16,99
13	9,93	12,34	15,12	16,98	18,20
14	10,82	13,34	16,22	18,15	19,41
15	11,72	14,34	17,32	19,31	20,60
16	12,62	15,34	18,42	20,47	21,79
17	13,53	16,34	19,51	21,61	22,98
18	14,44	17,34	20,60	22,76	24,16
19	15,35	18,34	21,69	23,90	25,33
20	16,27	19,34	22,77	25,04	26,50
21	17,18	20,34	23,86	26,17	27,66
22	18,10	21,34	24,94	27,30	28,82
23	19,02	22,34	26,02	28,43	29,98
24	19,94	23,34	27,10	29,55	31,13
25	20,87	24,34	28,17	30,68	32,28
26	21,79	25,34	29,25	31,79	33,43
27	22,72	26,34	30,32	32,91	34,57
28	23,65	27,34	31,39	34,03	35,71
29	24,58	28,34	32,46	35,14	36,85

Приложение 4 (продолжение). Значения критерия $\chi_p^2(l)$ хи-квадрат, где p — вероятность того, что $\chi^2 < \chi_p^2(l)$; l — число степеней свободы распределения

l \ p	**0,90**	**0,95**	**0,98**	**0,99**	**0,995**
1	2,71	3,84	5,41	6,63	7,88
2	4,61	5,99	7,82	9,21	10,60
3	6,25	7,81	9,84	11,34	12,84
4	7,78	9,49	11,67	13,28	14,86
5	9,24	11,07	13,39	15,09	16,75
6	10,64	12,59	15,03	16,81	18,55
7	12,02	14,07	16,62	18,48	20,28
8	13,36	15,51	18,17	20,09	21,95
9	14,68	16,92	19,68	21,67	23,59
10	15,99	18,31	21,16	23,21	25,19
11	17,28	19,68	22,62	24,72	26,76
12	18,55	21,03	24,05	26,22	28,30
13	19,81	22,36	25,47	27,69	29,82
14	21,06	23,68	26,87	29,14	31,32
15	22,31	25,00	28,26	30,58	32,80
16	23,54	26,30	29,63	32,00	34,27
17	24,77	27,59	31,00	33,41	35,72
18	25,99	28,87	32,35	34,81	37,16
19	27,20	30,14	33,69	36,19	38,58
20	28,41	31,41	35,02	37,57	40,00
21	29,62	32,67	36,34	38,93	41,40
22	30,81	33,92	37,66	40,29	42,80
23	32,01	35,17	38,97	41,64	44,18
24	33,20	36,42	40,27	42,98	45,56
25	34,38	37,65	41,57	44,31	46,93
26	35,56	38,89	42,86	45,64	48,29
27	36,74	40,11	44,14	46,96	49,64
28	37,92	41,34	45,42	48,28	50,99
29	39,09	42,56	46,69	49,59	52,34

Ответы к задачам

Часть 1. Теория вероятностей

Глава I. Случайные события

1. $\overline{A}$ — не верно, что хотя бы одно из имеющихся изделий бракованное, то есть все изделия небракованные. $\overline{B}$ — не верно, что бракованных изделий не меньше трех, то есть бракованных изделий меньше трех.
2. $A + B = U$ — хотя бы один из 10 ткацких станков потребует текущего ремонта в течение смены или ни один из них не потребует текущего ремонта в течение смены, иначе говоря, это достоверное событие. AB — хотя бы один из 10 станков потребует текущего ремонта в течение смены и ни один из 10 ткацких станков не потребует ремонта в течение смены, иначе говоря, это невозможное событие V.
3. $C = A + B_1*B_2$, $\overline{C} = \overline{A} * \left(\overline{B}_1 + \overline{B}_2\right)$.
4. $D = B(A_1*A_2)$; $C = B*A_1*A_2$; $\overline{C} = \overline{B} + \overline{A}_1 + \overline{A}_2$;

   $U = \{B * A_1 * A_2, B * A_1 * \overline{A}_2, B * \overline{A}_1 * A_2, B * \overline{A}_1 * \overline{A}_2;$

   $\overline{B} * A_1 * A_2, B * A_1 * \overline{A}_2, \overline{B} * \overline{A}_1 * A_2, \overline{B} * \overline{A}_1 * \overline{A}_2\}$.
5. а) $A_1A_2A_3$ — все три изделия, изготовленные на трех станках, отвечают стандарту;

   б) $A_1 + A_2 + A_3$ — хотя бы одно из трех изделий отвечает стандарту;

   в) $A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1A_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2A_3$ — какое-то одно из трех изделий отвечает стандарту, а два других — нет;

   г) $A_1A_2\overline{A}_3 + A_1\overline{A}_2A_3 + \overline{A}_1A_2A_3$ — какие-то два из трех изделий отвечают стандарту, а третье — нет;

   д) $\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$ — все три изделия не отвечают стандарту

   е) $(A_1 + A_2 + A_3) - A_1 * A_2 * A_3)$ — хотя бы одно из изделий отвечает стандарту, но не все три вместе.
6. $C = (A_1 + A_2) * (B_1 * B_2 + B_1 * B_3 + B_2 * B_3)$.

Глава II. Вычисление вероятностей

§ 1. Классическое определение вероятности событий.

1.1. $p = 1$.

1.2. $p = 0$.

1.3. $p = \dfrac{1}{8}$.

1.4. $p(N > 10) = \dfrac{11}{16}$ и $p(N < 5) = \dfrac{1}{8}$.

1.5. $p = \dfrac{13}{16}$.

1.6. $p = \dfrac{5}{36}$.

1.7. а) $p = \dfrac{5}{36}$; б) $p = \dfrac{2}{9}$; в) $p = 0$; г) $p = \dfrac{1}{18}$; д) $p = \dfrac{1}{18}$; е) $p = \dfrac{1}{18}$.

1.8. а) $p = \dfrac{6}{27}$; б) $p = \dfrac{12}{27}$; в) $p = \dfrac{8}{27}$; г) $p = 0$; д) $p = \dfrac{1}{27}$.

1.9. $p = \dfrac{3}{4}$.

§ 2. Элементы комбинаторики

2.1. Перестановки.

2.1.1. $p = \dfrac{1}{10!} \approx 2,75 * 10^{-7}$.

2.1.2. $N = 5! = 120$.

2.1.3. а) $p = \dfrac{1}{n!} = \dfrac{1}{7!} \approx 1,984 * 10^{-4}$; б) $p = \dfrac{6 * 5 * 4 * 3 * 3!}{7!} = \dfrac{3}{7!}$;

в) $p = 1 - \dfrac{3}{7} = \dfrac{4}{7}$.

2.2. Сочетания.

2.2.1. а) $p = \dfrac{C_{29}^4}{C_{30}^5} = \dfrac{1}{6}$; б) $p = \dfrac{C_{28}^3}{C_{30}^5} = \dfrac{2}{87}$.

2.2.2. $p = \dfrac{C_{79}^4}{C_{80}^5} = \dfrac{1}{16}$.

2.2.3. а) $p=\frac{C_5^3}{C_{30}^3}=\frac{1}{406}\approx 0,00246$; б) $p=\frac{5C_{14}^2}{C_{30}^3}=\frac{13}{116}\approx 0,112$;

в) $p=\frac{5*10*14}{C_{30}^3}=\frac{5}{29}\approx 0,17$; средняя оценка $\frac{109}{30}\approx 3,69$.

2.2.4. $p=\frac{C_M^m * C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$.

2.2.5. а) $p=\frac{1}{200}=0,005$; б) $p=\frac{C_{50}^2}{C_{10000}^3}=\frac{49}{1999800}\approx 0,0000245$;

в) $p=\frac{C_{50}^3}{C_{10000}^3}=\frac{49}{4999*3333*25}\approx 1,17*10^{-7}$;

г) $p=\frac{C_{50}^1 * C_{9950}^2 + C_{50}^2 * C_{9950}^1 + C_{50}^3}{C_{10000}^3}\approx 0,0149$.

2.3. Размещения.

2.3.1. $p=\frac{1}{A_{10}^3}=\frac{1}{7*8*9}=\frac{1}{720}$.

2.3.2. $p=\frac{1}{A_{10}^2}=\frac{1}{9*10}=\frac{1}{90}$.

§ 3. Геометрическое определение вероятности событий

3.1. $p=\frac{1}{4}$.

3.2. $p=\frac{1}{3}$.

3.3. $p=\frac{1}{3}$.

3.4. $p=\left(\frac{r}{R}\right)^2$.

3.5. $p=\frac{3*\sqrt{3}}{2*\pi}$.

3.6. $p=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.

§ 5. Статическое определение вероятности событий

5.1. $p=\dfrac{3}{4}$.

§ 6. Условная вероятность.

6.1. а) $p=\dfrac{3}{13}$; б) $p=\dfrac{4}{13}$.

6.2. $p=\dfrac{A_4^2}{A_{10}^2}=\dfrac{2}{15}$.

§ 7. Независимые события. Теорема умножения вероятностей

7.1. а) $p=\dfrac{6}{25}$; б) $p=\dfrac{6}{25}$; в) $p=\dfrac{13}{25}$.

7.2 а) $p=p_1$; б) $p=(1-p_1)*p_2$; в) $p=(1-p_1)*(1-p_2)*p_3$.

7.3. $p=0{,}994$.

7.4. а) $p=p_1+p_2+p_3-2p_1p_2-2p_1p_3-2p_2p_3+3p_1p_2p_3$;
б) $p=p_1p_2+p_1p_3+p_2p_3-3p_1p_2p_3$; в) $p=p_1p_2p_3$;
г) $p=(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)$; д) $p=1-(1-p_1)(1-p_2)(1-p_3)$.

§ 8. Формула полной вероятности. Формула Байеса

8.1. Формула полной вероятности

8.1.1. $p=\dfrac{3}{40}$.

8.1.2. $p=\dfrac{13}{15}\approx 0{,}87$.

8.1.3. $p=0{,}8$.

8.1.4. $p\approx 0{,}109$.

8.2. Формула Байеса

8.2.1. а) $p=\dfrac{9}{25}$; б) $p=\dfrac{16}{25}$.

8.2.2. а) $p_1=\dfrac{3}{11}$; б) $p_2=\dfrac{4}{11}$; в) $p_3=\dfrac{2}{11}$; г) $p_4=\dfrac{2}{11}$.

§ 9. Независимые испытания. Формула Бернулли

9.1. $p=\dfrac{1}{2}$.

9.2. Вероятность двукратного выпадения орла в первой серии больше, чем во второй ($p_4(2)>p_6(3)$).

9.3. $p=\dfrac{1}{2^4}$.

9.4. а) $p \approx 0{,}39$; б) $p \approx 0{,}36$.

9.5. $p = \dfrac{9 * 2^4}{5^4} \approx 0{,}2304$.

9.6. $p = \dfrac{181}{5^4} \approx 0{,}0579$.

9.7. $n = 10$.

9.8. $m = 4$.

9.9. $p_n \approx 0{,}342$.

§ 10. Локальная и интегральная теоремы Муавра—Лапласа

10.1. Локальная теорема Муавра—Лапласа.

10.1.1. $p \approx 0{,}042$.

10.1.2. $p \approx 0{,}025$.

10.2. Интегральная теорема Муавра—Лапласа.

10.2.1. $p \approx 0{,}145$.

10.2.2. $p \approx 0{,}842$.

Глава III. Случайные величины

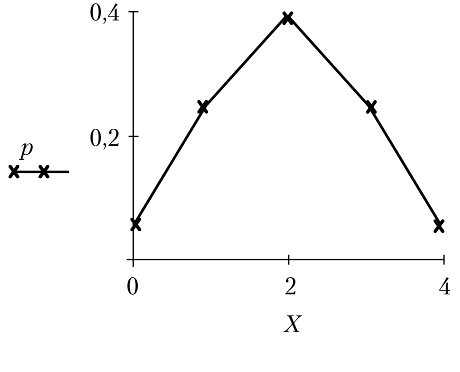
§ 1. Дискретные случайные величины

1.1. Закон распределения дискретной случайной величины.

1.1.1. Биномиальный закон распределения:

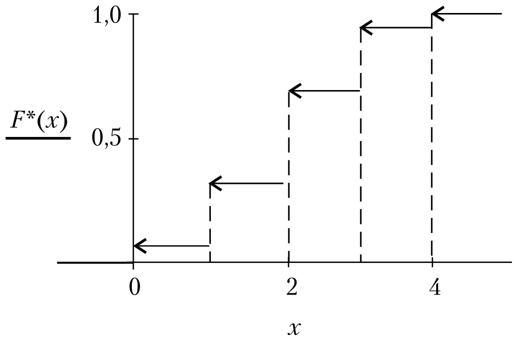
x_i	0	1	2	3	4
p_i	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$

Многоугольник вероятностей:



1.1.2. Функция $F(x)$ распределения вероятностей.

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 0\\ \dfrac{1}{16} & \text{при } 0<x\le 1\\ \dfrac{5}{16} & \text{при } 1<x\le 2\\ \dfrac{11}{16} & \text{при } 2<x\le 3\\ \dfrac{15}{16} & \text{при } 3<x\le 4\\ 1 & \text{при } 4<x\end{cases}$$



1.3. Числовые характеристики дискретных случайных величин.

1.3.1. $M[X] = 3{,}2$, $D[X] = 1{,}56$.

1.4. Биномиальное распределение.

1.4.1. $M[X] = 2$; $D[X] = 1$; $\sigma[X] = 1$; $C[X]=\dfrac{1}{2}$.

1.4.2. $M[X] = 7$; $D[X] = 2{,}1$; $\sigma[X]=\sqrt{2{,}1}\approx 1{,}45$; $C[X]=\dfrac{\sqrt{2{,}1}}{7}\approx 0{,}21$.

1.4.3. а)

M	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
$p_n(m)$	$64 * 10^{-6}$	$1{,}5 * 10^{-3}$	$1{,}5 * 10^{-2}$	0,082	0,25	0,39	0,26

б) $m_M \approx 4{,}8$; $\sigma_M \approx 0{,}98$.

1.5. Геометрическое распределение.

1.5.1. Закон распределения числа израсходованных снарядов.

x_i	1	2	…	n	…
p_i	0,4	$0{,}6^2 * 0{,}4$	...	$0{,}6^n * 0{,}4$	...

1.5.2. $M[X] = 2{,}5$, $D[X] = 3{,}75$, $\sigma[X] \approx 1{,}94$.

1.6. Многомерные дискретные случайные величины.

1.6.1. Закон распределения двумерной случайной величины (X, Y)

X \ Y	1	2	3
1	$\frac{1}{5} * \frac{2}{5} = \frac{2}{25}$	$\frac{1}{5} * \frac{3}{10} = \frac{3}{50}$	$\frac{1}{5} * \frac{3}{10} = \frac{3}{50}$
2	$\frac{1}{5} * \frac{2}{5} = \frac{2}{25}$	$\frac{1}{5} * \frac{3}{10} = \frac{3}{50}$	$\frac{1}{5} * \frac{3}{10} = \frac{3}{50}$
3	$\frac{3}{5} * \frac{2}{5} = \frac{6}{25}$	$\frac{3}{5} * \frac{3}{10} = \frac{9}{50}$	$\frac{3}{5} * \frac{3}{10} = \frac{9}{50}$

1.6.2.

$f(x_i)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$		$g(y_i)$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$
x_i	1	2	3		y_i	1	2	3

Условная вероятность $P\left(X = x_i \mid Y = y_j\right) = \dfrac{p\left(x_i, y_j\right)}{g\left(y_j\right)}$

X \ Y	1	2	3
1	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$
2	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

3	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$

Условная вероятность $P\left(Y = y_j \mid X = x_i\right) = \dfrac{p\left(x_i, y_j\right)}{f\left(x_j\right)}$

X \ Y	**1**	**2**	**3**
1	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$
2	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$
3	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$

§ 2. Непрерывные случайные величины

2.3. Плотность вероятностей непрерывной случайной величины.

2.3.1. $p\left(5 \le X < 9\right) = \int\limits_5^9 0,1dx = 0,4$; $F\left(x\right) = \int\limits_5^x 0,1dx = 0,1x$;

$$p\left(5 \le X < 9\right) = F\left(9\right) - F\left(5\right) = 0,9 - 0,5 = 0,4.$$

§ 3. Примеры законов распределения

3.1. Нормальное распределение.

3.1.1. $P\left(0 \le X \le 20\right) = \overline{\Phi}\left(5\right) - \overline{\Phi}\left(3\right) \approx 0,0013$,

$$P\left(40 \le X \le 60\right) = 2\overline{\Phi}\left(1\right) \approx 0,68 .$$

3.1.2. С вероятностью 0,9 длина произвольно взятого изделия попадет в диапазон $x \in \left[50 - 0,1645; 50 + 0,1645\right]$.

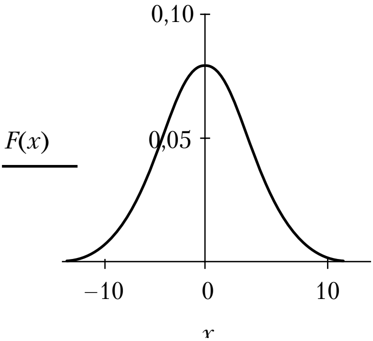
3.1.3. а) $P\left(-\infty < X < m - 10\right) \approx 0,45$;

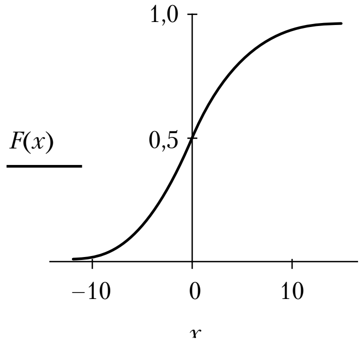
б) $P\left(20 + m \le X < m + \infty\right) \approx 0,4013$;

в) $P(m - 10 < X < m + 20) \approx 0,14845$, где $m \equiv M\left[X\right]$.

3.1.4. а) $p \approx 0,683$; б) $\sigma \approx 3,34$;

в) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}5} e^{-\frac{x^2}{2*5^2}}$; $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$;





3.2. Закон равномерного распределения вероятностей.

3.2.1. $M[X] = \dfrac{10+0}{2} = 5$; $D[X] = \dfrac{10^2}{12} = \dfrac{25}{3}$.

3.2.2. а) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < -4 \\ \dfrac{1}{6} & \text{при } x \in [-4; 2); \\ 0 & \text{при } x > 2 \end{cases}$

б) $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < -4 \\ \dfrac{x+4}{6} & \text{при } x \in [-4; 2); \\ 0 & \text{при } x \geq 2 \end{cases}$

в) $m_X = -1$; $D_X = 3$; г) $p(-2 \leq X \leq 2) = \dfrac{2}{3}$.

3.2.3. $f(x) = \dfrac{1}{2}$, $F(x) = \dfrac{x+2}{2}$, где $x \in [-2, 0]$.

3.2.4. $p = \dfrac{1}{3}$; $m_X = 0$; $D_X = 300$; $\sigma_X \approx 17{,}3$.

3.3. Распределение Пуассона.

3.3.1. $p_\infty(10) = \dfrac{10^{10} e^{-10}}{10!} \approx 0{,}126$.

3.3.2. $p_\infty(5)=\dfrac{5^5e^{-5}}{5!}\approx 0{,}175$.

3.3.3. а) $p_\infty(0)=e^{-3}\approx 0{,}05$; б) $p_\infty(3)+p_\infty(4)\approx 0{,}39$.

3.3.4. $p_\infty(3)\approx 0{,}0613$; $P(M\geq 1)=1-p_\infty(0)=1-\dfrac{1}{e}\approx 0{,}632$.

3.3.5. $p_\infty(5)\approx 0{,}0361$.

3.4. Показательное (экспоненциальное) распределение.

3.4.2. а) $\lambda = 0{,}2$; б) $F(t) = 1 - e^{-0{,}2t}$, $t\in[0,\infty)$; в) $M[t] = 5$, $D[t] = 254$; г) $p\approx 0{,}121$.

3.4.3. $M[t]=\dfrac{1}{\lambda}$; $F\approx 0{,}63$.

3.4.4. $F\approx 0{,}951$.

3.4.5. $F(10)\approx 0{,}38$.

3.4.6. $p_1\approx 0{,}606$, $p_2\approx 0{,}368$.

3.4.7. $p\approx 0{,}0952$.

3.4.8. $p\approx 0{,}22$.

§ 4. Многомерные случайные величины. Случайные процессы

4.2. Многомерные непрерывные случайные величины (НСВ)

4.2.1. $P((X,Y)\subset D)=\dfrac{1}{12}\approx 0{,}083$.

4.2.2. $C=\dfrac{1}{\pi R^2}$.

4.2.3. $\alpha=\dfrac{1}{\pi R^4}$.

4.2.4. $\alpha=\dfrac{1}{27}$, $P((X,Y)\subset Q)=\dfrac{1}{9}$.

4.3. Числовые характеристики (моменты) многомерных СВ

4.3.1.

Y \ X	**1**	**2**	**3**
1	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{36}$
2	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{18}$
3	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$

$$m_x = \frac{7}{3};\ m_y = \frac{11}{6};\ D[X] = \frac{5}{9};\ D[Y] = \frac{17}{36};\ r_{XY} = 0.$$

4.3.2. $m_x = 0; m_y = 0; C_{XY} = 0.$

4.3.3. $m_x = \frac{7}{4};\ m_y = \frac{7}{4};\ \sigma_x = \sigma_y = \sqrt{\frac{11}{4}};\ C_{XY} = -\frac{1}{16}\ \ r_{XY} = -\frac{1}{11}.$

4.4. Функции СВ. Зависимые и независимые СВ.

4.4.1. $f(x \mid y) = f_1(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2},$

$$f(y \mid x) = f_2(y) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+y^2}.$$

Случайные величины X и Y независимы.

4.4.2. $f_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi r^2}\sqrt{r^2 - y^2}, & |x| \le r, \\ 0, & |x| > r \end{cases};$

$$f_2(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi r^2}\sqrt{r^2 - y^2}, & |y| \le r, \\ 0, & |y| > r \end{cases};$$

$$f(x \mid y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{r^2 - y^2}}, & |x| \le \sqrt{r^2 - y^2}, \\ 0, & |x| > \sqrt{r^2 - y^2} \end{cases};$$

$$f\left(y \mid x\right)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{r^2-y^2}}, & |y|\le\sqrt{r^2-y^2},\\ 0, & |y|>\sqrt{r^2-y^2}\end{cases}.$$

Случайные величины X и Y зависимы.

4.7. Понятие о случайных процессах

4.7.1. 1) $m_X(t) = m_\xi t + b,\ D_X\left(t\right)=t^2\sigma_\xi^2$;

2) $f_1\left(x,t\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,|t|\,\sigma_\xi}e^{-\frac{\left(x-m_\xi t-b\right)2}{2t^2\sigma_\xi^2}}$;

3) $C\left(t_1,t_2\right)=t_1t_2\sigma_\xi^2$.

4.7.2. $m_Y = 3t^3 + t^2$, $C_Y(t_1, t_2) = t_1 * t_2\sin t_1 * \sin t_2$.

4.7.3. $m_Y = 2t$, $D_Y(t) = 4 + 12t^2 + 18t^4$, $C_Y\left(t_1,t_2\right)=4+12t_1*t_2+18t_1^2t_2^2$.

§ 5. Закон больших чисел

5.4. Закон больших чисел в форме Чебышева (теорема Чебышева и Бернулли).

5.4.1. $P\left(\left|\dfrac{m}{1000}-\dfrac{1}{2}\right|<0,1\right)>1-\dfrac{1}{4*1000*0,01}=\dfrac{39}{40}$.

По интегральной теореме Муавра—Лапласа

$$p_{1000}(401;599)=2\bar{\Phi}\left(\frac{198}{10\sqrt{10}}\right)\approx 2\bar{\Phi}\left(6,261\right)\approx 1,0000.$$

5.4.2. $P\left(\left|\dfrac{m}{n}-p\right|<0,1\right)>\dfrac{31}{36}$.

5.4.3. $P\left(|m-25|<10\right)>\dfrac{7}{8}$.

5.4.4. $P\left(\left|\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i-20\right|<\dfrac{1}{2}\right)>\dfrac{24}{25}$.

5.4.5. $P\left(\left|\dfrac{1}{200}\sum_{i=1}^{200}x_i-2\right|<\dfrac{1}{5}\right)>\dfrac{3}{4}$.

5.4.6. $P=\left(|y-1100|<300\right)>1-\dfrac{1650}{300^{2}}=\dfrac{589}{600}\approx 0,982$.

Часть 2. Элементы математической статистики

Глава I. Выборочный метод

1.1. Объем выборки равен $n=25$.

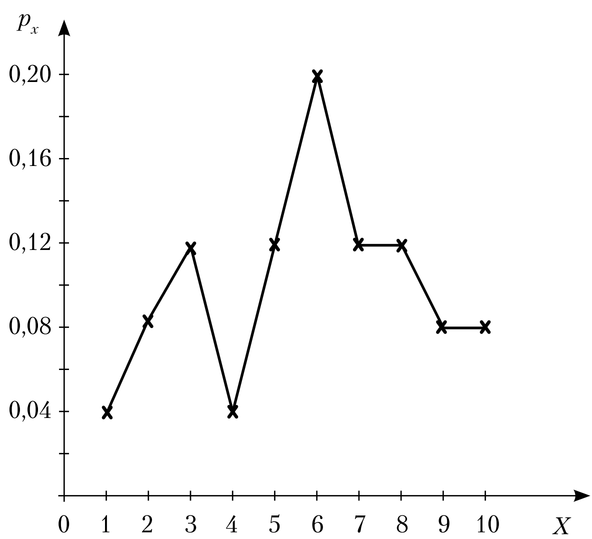
Таблица 1. Случайная величина X и число ее появлений в выборке

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n_x	1	2	3	1	3	5	3	3	2	2

Таблица 2. Статистическое распределение

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$p_x=\dfrac{n_x}{n}$	$\dfrac{1}{25}$	$\dfrac{2}{25}$	$\dfrac{3}{25}$	$\dfrac{1}{25}$	$\dfrac{3}{25}$	$\dfrac{5}{25}$	$\dfrac{3}{25}$	$\dfrac{3}{25}$	$\dfrac{2}{25}$	$\dfrac{2}{25}$

Полигон распределения случайной величины X.

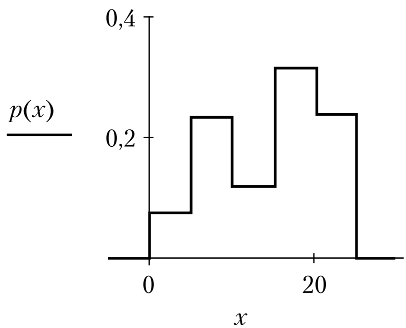


$$M[X] = 5{,}84\,,\ \ D[X] = 6{,}2144\,.$$

1.2. Статистическая совокупность

Интервал	**[0,5;5,5)**	**[5,5;10,5)**	**[10,5;15,5)**	**[15,5;20,5)**	**[20,5;25,5]**
Относительная частота p_x^*	$\frac{2}{25}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{8}{25}$	$\frac{6}{25}$

Гистограмма относительных частот случайной величины X.

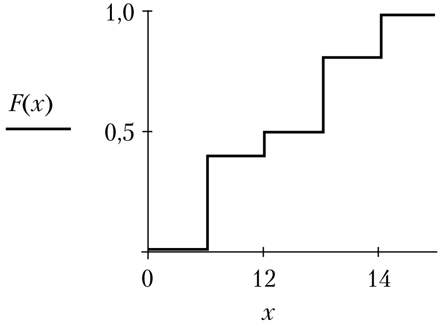


$$M[X] = 15\,,\ \ D[X] = 42\,.$$

1.3. Статистическая функция распределения $F^{*}(x)$ случайной величины X:

$$F^{*}(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad\quad\ \ x \le 11 \\ 0{,}4 & \text{при } 11 < x \le 12 \\ 0{,}5 & \text{при } 12 < x \le 13 \\ 0{,}8 & \text{при } 13 < x \le 14 \\ 1 & \text{при} \quad\quad\ \ x > 14 \end{cases}$$

График функции $F^{*}(x)$.



Глава II. Оценка параметров распределения

2.1. $m^{*} \approx 1585{,}425$ (*м/с*), $\sigma^{*} \approx 1{,}395$ (*м/с*), $n = 20$,

$$P\left(\left|m - 1585,425\right| < 0,792\right) \approx 0,98 .$$

2.2. $m^{*} \approx 216{,}54$ (*км*) $\sigma^{*} \approx 0{,}02$ (*км*) $n = 8$,

$$P\left(\left|m - 216,54\right| < 0,0167\right) \approx 0,95 .$$

2.3. $n = 141$.

2.4. $m^{*} \approx 3{,}235$ (*мкФ*) $\sigma^{*} \approx 0{,}002$ (*мкФ*) $n = 12$,

$$P\left(\left|m - 3,235\right| < 0,0018\right) \approx 0,99 .$$

Глава III. Критерии согласия

§ 2. Критерий согласия Пирсона

2.1. $m^{*} \approx 4{,}15$ *мкм*; $\sigma^{*} \approx 9{,}4$ *мкм*; $\chi^2 \approx 6$; число степеней свободы $l = 5$; критическое значение критерия χ^2, определенное по таблице распределения, $\chi^2_{0,95}(5) = 11,07$. Поскольку расчетное значение критерия меньше табличного, то для вероятности отклонить правильную гипотезу, равной 0,05, делаем заключение об отсутствии оснований отвержения гипотезы о нормальном законе распределения.

2.2. $m^{*} \approx 31{,}33$ *кг/мм*^{2}; $\sigma^{*} \approx 3{,}19$ *кг/мм*^{2}; $\chi^2 \approx 2{,}2$; число степеней свободы $l = 5$ (область изменения случайной величины была разбита на 7 интервалов), критическое значение критерия χ^2, определенное по таблице распределения, $\chi^2_{0,95}(4) = 9,49$.

Поскольку расчетное значение критерия меньше табличного, то для вероятности отклонить правильную гипотезу, равной 0,05, делаем заключение об отсутствии оснований отвержения гипотезы о нормальном законе распределения.

Глава IV. Регрессионный и корреляционный анализы

§ 6. Построение линейной регрессионной модели по опытным данным

6.1. $m_x^* \approx 420$; $\sigma_x^* \approx 76{,}02$; $m_y^* \approx 176$; $\sigma_y^* \approx 53{,}05$; $r_{XY} \approx 0{,}472$;

$y = 0{,}329(x - 420) + 176$; $x = 0{,}676(x - 176) + 420$.

6.2. $m_x^* \approx 35{,}8$; $\sigma_x^* \approx 15{,}36$; $m_y^* \approx 13{,}92$; $\sigma_y^* \approx 4{,}99$;

$r_{XY} \approx 0{,}66$; $y = 0{,}257(x - 35{,}8) + 13{,}92$;

$x = 2{,}03(y - 13{,}92) + 35{,}8$.