Д. Грин, Д. Кнут

Математические методы анализа алгоритмов

$$\sum_{2k>n} \frac{-p(1)}{2k^2} + \sum_{2k>n} O\left(\frac{\log k}{k^3}\right)$$

Издательство «Мир»

Progress in Computer Science
Vol. 1

Edited by
E. Coffman,
R. Graham,
D. Kuck

Daniel H. Greene, Donald E. Knuth

Mathematics for the Analysis of Algorithms

Second Edition

1982
Birkhäuser
Boston · Basel · Stuttgart

Д. Грин, Д. Кнут

Математические методы анализа алгоритмов

Перевод со второго английского издания
Б. Б. ПОХОДЗЕЯ

под редакцией
Ю. В. МАТИЯСЕВИЧА

Москва «Мир» 1987

ББК 22.18
Г 85
УДК 519.6 + 681.142.2

Грин Д., Кнут Д.

Г 85 Математические методы анализа алгоритмов. — М.: Мир, 1987. — 120 с., ил.

Оригинальное и нестандартное изложение известных методов анализа алгоритмов, написанное крупным американским специалистом Д. Кнутом в соавторстве с Д. Грином. В книге представлены: комбинаторные тождества, рекуррентные соотношения, асимптотические представления. От читателя требуется знакомство с основами теории вероятностей, комбинаторного анализа и теории функций комплексного переменного.

Для системных программистов, математиков-прикладников, аспирантов и студентов университетов.

Г $\frac{1702070000-051}{041(01)-87}$ 34—87, ч. 1 **ББК 22.18**

Редакция литературы по математическим наукам

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

Дэниел Х. Грин, Дональд Э. Кнут

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА АЛГОРИТМОВ

Ст. научн. ред. И. А. Маховая. Мл. научн. ред. Н. С. Полякова. Художник А. Д. Смеляков. Художественный редактор В. И. Шаповалов. Технический редактор В. П. Сизова, Н. И. Манохина. Корректор М. А. Смирнов

ИБ № 5591

Сдано в набор 16.04.86. Подписано к печати 05.01.87. Формат бумаги 60×90 1/16. Бумага типографская № 2. Печать высокая. Гарнитура литературная. Объем 3,75 бум. л. Усл печ. л. 7,50. Усл. кр.-отт. 7,90. Уч.-изд. л. 6,85. Изд. №1/4326. Тираж 10 000 экз. Зак. № 259. Цена 55 к.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР» 129820, ГСП, Москва, И-110, 1-й Рижский пер., 2

Ленинградская типография № 2 головное предприятие ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 198052, г. Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29.

От редактора и переводчика

Издательство «Мир» сочло целесообразным в дополнение к ранее изданным у нас трем томам *Искусства программирования для ЭВМ* Д. Кнута перевести на русский язык учебник *Математические методы анализа алгоритмов*, написанный Дональдом Э. Кнутом в соавторстве с его молодым коллегой Дэниелом X. Грином. Данный компендиум интересен прежде всего тем, что он составлен из конспектов лекций и экзаменационных задач по курсу математического анализа алгоритмов, который был введен профессором Д. Э. Кнутом на факультете информатики Станфордского университета в 1974 г. По-видимому, именно о таком учебнике по анализу алгоритмов размышлял Д. Кнут в предисловии к третьему тому своего *Искусства...* .

Книга написана чрезвычайно сжато и содержит массу языковых эллипсов: зачастую авторы ограничиваются лишь набросками математических выводов и сопровождают их весьма лаконичными комментариями. Другой особенностью книги является нестандартность изложения в общем-то традиционного материала[1]) и обилие вольностей речи, которые мы в меру наших литературных способностей старались сохранить в переводе.

Одно из правил, которым руководствуется Д. Кнут при написании своих книг, состоит в том, что «автору, который заинтересован в доходчивости излагаемого им материала, следует всячески избегать сносок, поскольку последние отвлекают внимание читателя» (D. Knuth, The $T_EX$book. — Reading: Addison-Wesley, 1984, p. 117). Вследствие этого в переводе (и, разумеется, в оригинале) *Математических методов анализа алгоритмов* сносок нет: бо́льшая часть примечаний редактора и переводчика (отмеченных в тексте цифрами) вынесена в отдельный раздел, а меньшая размещена в тексте самого перевода. Список литературы дополнен ссылками на имеющиеся у нас переводы и некоторыми комментариями к оригинальным изданиям. В конце книги помещено также написанное переводчиком дополнение «Д. Э. Кнут и его «фабрика книг»».

Автор принял живое участие в подготовке русского издания его книги, и мы приносим ему за это свою глубокую признательность.

Ю. В. М. и *Б. Б. П.*

К русскому изданию

Мне очень приятно, что эта небольшая книжка издается на русском языке, поскольку я надеюсь, что математики, где бы они ни находились, разделят мой энтузиазм относительно анализа алгоритмов. Цель книги состоит в рассмотрении возможностей, которые дает соединение дискретной и непрерывной математики, ибо, как показал опыт, это очень плодотворно при исследовании машинных программ. Может ли это быть чисто случайным совпадением, что подобное соединение оказывается весьма плодотворным само по себе? Мы находимся в таком благоприятном положении, когда можем создавать математику, являющуюся одновременно и красивой, и полезной.

Дональд Э. Кнут

Станфорд, Калифорния
20 мая 1986 г.

Предисловие

Настоящая монография возникла из лекций по анализу алгоритмов для студентов старших курсов факультета информатики Станфордского университета. В этом курсе представлены примеры основных приемов, используемых при детальном анализе алгоритмов, с выделением некоторых наиболее трудных из них. Значительная часть материала взята из отмеченных звездочкой разделов третьего тома *Искусства программирования для ЭВМ* Д. Кнута.

Анализ алгоритмов как дисциплина по сути своей опирается и на информатику, и на математику. Данный курс — это взгляд на их синтез с математической точки зрения, но с мотивировками и примерами из информатики. Он охватывает биномиальные тождества, рекуррентные соотношения, операторные методы и асимптотические представления. Мы надеемся, что материал изложен достаточно сжато, чтобы книгой можно было пользоваться как справочником, и вместе с тем достаточно подробно, чтобы книгу смогли читать те, кто не посещал лекций. Тем не менее предполагается, что читатель знаком с основами теории функций комплексного переменного и комбинаторного анализа.

Зимой 1980 г. курс анализа алгоритмов читался в четвертый раз[2]), в связи с чем следует отдать должное предыдущим лекторам и ассистентам — Лео Гюибе, Скотту Драйсдейлу, Сэму Бенту, Энди Яо и Филлис Уинклер — за их существенный вклад в конспектирование курса; часть их записей вошла в настоящую монографию. Полезные замечания и поправки сделали также Гарри Мэйрсон, Эндрью Бродер, Кен Кларксон и Джефф Виттер. При подготовке рукописи книги использовалось оборудование корпорации Xerox и финансовая помощь Фонда стипендий Херца. Национальный научный фонд и Отделение военно-морских исследований щедро субсидировали исследования, сделавшие возможным данный курс. Сама книга была подготовлена к печати с помощью наборной системы T_EX с использованием семейства шрифтов COMPUTER MODERN, разработанного недавно посредством системы METAFONT[3]).

Во втором издании частично улучшено изложение материала и исправлен ряд незначительных ошибок. Кроме того, добавлены экзаменационные задачи зимнего семестра 1982 г.

Д. Х. Г. и *Д. Э. К.*

Глава 1
Биномиальные тождества

1.1. Сводка полезных тождеств

Чтобы тождества не затерялись на ничем не примечательных страницах, соберем их вместе.

$$(x+y)^n=\sum_k \binom{n}{k} x^k y^{n-k}, \quad n \text{ целое или}$$
$$n \text{ вещественное и } |x/y|<1, \quad (1.1)$$

$$\binom{r}{k}=\binom{r-1}{k}+\binom{r-1}{k-1}, \quad r \text{ вещественное, } k \text{ целое,} \quad (1.2)$$

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}, \quad n \text{ целое } \geqslant 0,\ k \text{ целое,} \quad (1.3)$$

$$\binom{r}{k}=\frac{r}{k}\binom{r-1}{k-1}, \quad r \text{ вещственное, } k \text{ целое } \neq 0, \quad (1.4)$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{r+k}{k}=\binom{r+n+1}{n}, \quad r \text{ вещественное, } n \text{ целое } \geqslant 0, \quad (1.5)$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{m}=\binom{n+1}{m+1}, \quad m,\ n \text{ целые } \geqslant 0, \quad (1.6)$$

$$\binom{-r}{k}=(-1)^k\binom{r+k-1}{k}, \quad r \text{ вещественное, } k \text{ целое,} \quad (1.7)$$

$$\binom{r}{m}\binom{m}{k}=\binom{r}{k}\binom{r-k}{m-k}, \quad r \text{ вещественное, } m,\ k \text{ целые,} \quad (1.8)$$

$$\sum_k\binom{r}{k}\binom{s}{n-k}=\binom{r+s}{n}, \quad n \text{ целое,} \quad (1.9)$$

$$\sum_k\binom{r}{k}\binom{s+k}{n}=\binom{r+s}{r+n}, \quad n \text{ целое, } r \text{ целое } \geqslant 0, \quad (1.10)$$

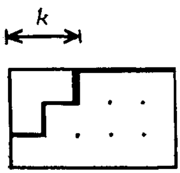
$$\sum_k\binom{r}{k}\binom{s+k}{n}(-1)^k=(-1)^r\binom{s}{n-r}, \quad n \text{ целое,}$$
$$r \text{ целое} \geqslant 0, \quad (1.11)$$

$$\sum_{k=0}^{r}\binom{r-k}{m}\binom{s+k}{n}=\binom{r+s+1}{m+n+1}, \quad n, m, r, s \text{ целые} \geqslant 0, \quad n \geqslant s. \tag{1.12}$$

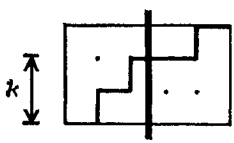
Та легкость, с которой знакомое биномиальное тождество может измениться до неузнаваемости после нескольких преобразований, несколько сбивает с толку. Из-за подобной изменчивости внешней формы соотношений с биномиальными коэффициентами ничто не может заменить практических навыков обращения с ними. Объяснение приведенных выше формул и полезные упражнения читатель найдет в книге Кнута [I, разд. 1.2.6].

1.2. Вывод тождеств

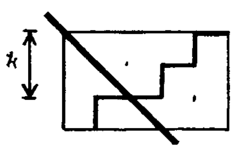
Существует простой способ запомнить многие из тождеств, в которых нет перемены знака. Число путей, проходящих через прямоугольную решетку со сторонами m и n, равно $\binom{m+n}{m}$. Разрезая решетку в различных направлениях и подсчитывая число путей[4]) в соответствии с тем, где они пересекают линию разреза, мы будем получать то или иное тождество. На приведенных ниже рисунках показаны различные способы группировки путей и указан индекс суммирования k.



Группируя пути по месту попадания на верхнюю сторону, получаем тождество (1.5).



Подсчитывая пути в соответствии с тем, где они пересекают вертикальную линию, получаем тождество (1.12).



Аналогично, группируя пути по месту пересечения с наклонной линией, получаем тождество (1.9).

Последовательно применяя тождества (1.1)—(1.12), можно получить более сложные соотношения. Один из таких примеров содержится в статье Йонассена и Кнута [78], где сумма

$$S=\sum_{k}\binom{m}{k}\left(-\tfrac{1}{2}\right)^{k}\binom{2k}{k} \tag{1.13}$$

вычисляется с помощью длинной серии элементарных преобразований. Вместо того чтобы приводить здесь этот вывод, воспользуемся подходом, который предложил А. Гессель, приписывая соответствующую элегантную технику — «метод коэффициентов» — Г. П. Егорычеву[5]).

Заменим вначале k на $m-k$, получая

$$S=\sum_k \binom{m}{k}\left(-\tfrac{1}{2}\right)^{m-k}\binom{2m-2k}{m-k}. \tag{1.14}$$

Используя обозначение $\langle x^n\rangle f(x)$ для коэффициента при x^n в разложении $f(x)$, можно выразить части суммы через производящие функции:

$$\binom{m}{k}\left(-\tfrac{1}{2}\right)^{-k}=\langle x^k\rangle(1-2x)^m, \tag{1.15}$$

$$\binom{2m-2^k}{m-k}=\langle y^{m-k}\rangle(1+y)^{2m-2k}. \tag{1.16}$$

В целом сумма принимает вид

$$S=\left(-\tfrac{1}{2}\right)^m\sum_k\langle x^k\rangle(1-2x)^m\langle y^{m-k}\rangle(1+y)^{2m-2k}. \tag{1.17}$$

Замечая, что $\langle y^{m-k}\rangle=\langle y^m\rangle y^k$, мы можем вынести $\langle y^m\rangle$ за знак суммы:

$$S=\left(-\tfrac{1}{2}\right)^m\langle y^m\rangle(1+y)^{2m}\sum_k\langle x^k\rangle(1-2x)^m\left(\frac{y}{(1+y)^2}\right)^k. \tag{1.18}$$

Наконец, эти на первый взгляд бесцельные преобразования приводят к блестящему финалу. Сумма в последней формуле есть простая подстановка вместо x, поскольку

$$\sum_k\langle x^k\rangle f(x)\,g(y)^k=f(g(y)), \tag{1.19}$$

когда f — аналитическая функция. Решение следует немедленно:

$$\begin{aligned}S&=(-2)^{-m}\langle y^m\rangle(1+y)^{2m}\left(1-\frac{2y}{(1+y)^2}\right)^m=\\&=(-2)^{-m}\langle y^m\rangle(1+y^2)^m,\end{aligned} \tag{1.20}$$

так что

$$S=\begin{cases}2^{-m}\dbinom{m}{m/2}, & \text{если}\quad m \text{ четно},\\ 0, & \text{если}\quad m \text{ нечетно}.\end{cases} \tag{1.21}$$

Более простой подход к этой задаче был указан С. К. Руссо: замечая, что $\binom{2k}{k}$ является коэффициентом при x^0 в разложении $(x+x^{-1})^{2k}$, получаем, что S есть коэффициент при x^0 в разложении $(1-(x+x^{-1})^2/2)^m$.

С теоретической точки зрения было бы заманчиво объединить подобные тождества в одну согласованную схему, подобно тому как физики пытаются создать единую теорию поля. К сожалению, единственной схемы, охватывающей все тождества, нет, но имеется несколько «мета»-понятий, которые объясняют существование обширных классов биномиальных тождеств. Изложим вкратце три из них: обратимые соотношения, операторное исчисление и гипергеометрический ряд.

1.3. Обратимые соотношения

Вот одна пара из простейшего множества обратимых соотношений:

$$a_n=\sum_k (-1)^k \binom{n}{k} b_k, \quad b_n=\sum_k (-1)^k \binom{n}{k} a_k, \tag{1.22}$$

которая следует из ортогонального соотношения

$$\delta_{nk}=\sum_{j=k}^{n} (-1)^{j+k} \binom{n}{j}\binom{j}{k}. \tag{1.23}$$

А это соотношение является всего лишь конкретизацией равенства (1.11) с s, равным 0. В общем случае обратимое соотношение будет объединять два ряда так, что отдельные члены одного из них могут быть вычислены по членам другого и всегда будет существовать связывающее их ортогональное соотношение.

В своей книге *Комбинаторные тождества* Джон Риордан [68] посвящает несколько глав обратимым соотношениям. Поскольку обратимые соотношения имеют еще большую склонность к изменению внешней формы по сравнению с биномиальными тождествами (что мы уже видели), надо уметь распознавать соотношения, в сущности одинаковые. С этой целью Риордан описывает несколько преобразований и затем распределяет эквивалентные обратимые пары по обширным классам. Ниже приводятся его преобразования и классификация.

Поскольку каждый раз мы имеем дело с парой равенств, с помощью подстановки типа $b'_k=(-1)^k b_k$ можно переместить члены одного из равенств в другое и получить новую пару:

$$a_n=\sum_k \binom{n}{k} b'_k, \quad b'_k=\sum_k (-1)^{k+n} \binom{n}{k} a_k. \tag{1.24}$$

Обратимое соотношение соответствует паре нижних треугольников матриц, произведением которых является единичная матрица. Отражая элементы матриц относительно диагонали, можно вывести еще одну пару:

$$a_n = \sum_{k \geqslant n} \binom{k}{n} b_k, \quad b_n = \sum_{k \geqslant n} (-1)^{k+n} \binom{k}{n} a_k. \tag{1.25}$$

Заметим, наконец, что обе части ортогонального соотношения (1.23) можно умножить на почти любую функцию, которая равна единице при $n = k$, не изменяя ортогонального характера равенства.

Последнее равенство (1.25) имеет исключительно полезный комбинаторный смысл. Предположим, что имеется большая совокупность случайных событий. Пусть b_n — вероятность того, что произошло *ровно* n событий, и пусть a_n — сумма вероятностей n одновременных событий, взятая по всевозможным комбинациям из n событий. Грубо говоря, a_n может рассматриваться как небрежный способ вычисления вероятности того, что произошло ровно n событий, поскольку при этом не учитывается возможность осуществления более чем n событий [6]). Левая часть (1.25) показывает, как растут значения a_n. Однако зачастую a_n вычислить легче, и правая часть равенства (1.25) — «принцип включения и исключения» — представляет собой практичный способ вычисления b_n.

Равенства (1.22), (1.24) и (1.25) принадлежат простейшему классу обратимых соотношений. Риордан [68] перечисляет несколько других классов обратимых соотношений, в частности соотношений чебышёвского типа:

$$a_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{k} b_{n-2k}, \quad b_n = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k} a_{n-2k}. \tag{1.26}$$

Неудивительно, что обратимые соотношения часто связаны с одноименными ортогональными многочленами, которые используются при интерполяции.

Класс обратимых соотношений Гульда

$$f_n = \sum_k (-1)^k \binom{n}{k} \binom{a+bk}{n} g_k, \tag{1.27}$$

$$g_n \binom{a+bn}{n} = \sum_k (-1)^k \frac{a+bk-k}{a+bn-k} \binom{a+bn-k}{n-k} f_k \tag{1.28}$$

обладает любопытным свойством. Недавно китайский математик Л. Сю обнаружил, что для справедливости обращения здесь не обязательны биномиальные коэффициенты с a и b. Действительно, если в качестве $\{a_i\}$ и $\{b_i\}$ выбрать любые две последовательности чисел, такие, что

$$\psi(x, n) = \prod_{i=1}^{n} (a_i + b_i x) \neq 0 \quad \text{при целых} \quad x, n \geqslant 0, \tag{1.29}$$

то получится общее правило обращения:

$$f_n = \sum_k (-1)^k \binom{n}{k} \psi(k, n) g_k, \tag{1.30}$$

$$g_n = \sum_k (-1)^k \binom{n}{k} (a_{k+1} + k b_{k+1}) \psi(n, k+1)^{-1} f_k. \tag{1.31}$$

В другой хорошо известной паре обратимых соотношений используются числа Стирлинга:

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \left[{n \atop k} \right] b_k, \tag{1.32}$$

где $\left[{n \atop k} \right]$ — числа Стирлинга первого рода;

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} a_k, \tag{1.33}$$

где $\left\{ {n \atop k} \right\}$ — числа Стирлинга второго рода. Обычно в качестве a_n используется $x^{\underline{n}}$ (обозначение $x^{\underline{n}}$ разъясняется в начале следующего раздела. — *Ред.*), а в качестве b_n используется x_n, так что эти формулы обращают факториалы в степени x и наоборот.

Мы не в состоянии исследовать здесь все обратимые соотношения, отметим лишь, что многие производящие функции могут быть преобразованы в обратимые соотношения. Пара степенных рядов $z(x)$ и $z^*(x)$, таких, что $z(x) z^*(x) = 1$, дает пару соотношений

$$a(x) = z(x) b(x) \quad \text{и} \quad b(x) = z^*(x) a(x). \tag{1.34}$$

Например, можно положить $z(x) = (1 - x)^{-p}$ и $z^*(x) = (1 - x)^p$; ясно, что $z(x) z^*(x) = 1$, поэтому можно выписать формулы для коэффициентов в $a(x)$ и $b(x)$:

$$a_n = \sum_k (-1)^k \binom{-p}{k} b_{n-k}, \qquad b_n = \sum_k (-1)^k \binom{p}{k} a_{n-k}. \tag{1.35}$$

Данная пара является представителем класса обратимых соотношений Гульда.

Ответственность за разнообразие биномиальных тождеств частично ложится на обратимые соотношения. Если один член пары обратимых соотношений может быть выражен в виде биномиального тождества, то другой член этой пары, как правило, будет представлять собой уже иное тождество. Обратимые соотношения могут и непосредственно использоваться при анализе алгоритма. Например, при изучении поразрядной обменной сортировки используется простое множество соотношений (1.22), введенных в начале настоящего раздела (подробнее см. Кнут [III, упр. 5.2.2.-36 и 5.2.2-38]).

1.4. Операторное исчисление

Существует поразительное сходство между интегралом

$$\int_a^b x^n\,dx = \left.\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|_a^b \tag{1.36}$$

и суммой

$$\sum_{a\leqslant x<b} x^{\underline{n}} = \left.\frac{x^{\underline{n+1}}}{n+1}\right|_a^b, \tag{1.37}$$

где x с подчеркнутым верхним индексом означает убывающий факториал $x^{\underline{n}}=x(x-1)\ldots(x-n+1)$. Последняя сумма является попросту приведением равенства (1.6) к легкому для запоминания виду. Его, несомненно, легче запомнить, чем формулу для сумм степеней (4.17).

Сходство равенств (1.36) и (1.37) является следствием того факта, что $Dx^n=nx^{n-1}$ и $\Delta x^{\underline{n}}=nx^{\underline{n-1}}$, где D и Δ — дифференциальный и разностный операторы, которые обратны операторам $\int$ и $\sum$: $Dp(x)=p'(x)$ и $\Delta p(x)=p(x+1)-p(x)$. Подобную аналогию можно продолжить еще дальше; например, Джан-Карло Рота предлагает следующее обобщение теоремы Тейлора.

Определения. Пусть E^a — оператор сдвига, $E^a p(x)=p(x+a)$. Оператор Q является *дельта-оператором*, если он инвариантен относительно сдвига ($QE^a=E^aQ$) и если Qx — отличная от нуля константа. Такой оператор имеет последовательность базисных многочленов, определяемых следующим образом:

1) $p_0(x)=1$,
2) $p_n(0)=0$ при $n\geqslant 0$,
3) $Qp_n(x)=np_{n-1}(x)$.

Третье свойство означает, что всякий раз, когда Q действует на свои базисные многочлены, результат аналогичен действию оператора D на последовательность $1, x, x^2, \ldots$. Например, Δ является дельта-оператором с базисными многочленами $x^{\underline{n}} = x(x-1)\ldots(x-n+1)$.

Теорема Тейлора

$$T = \sum_k \frac{a_k}{k!} Q^k, \tag{1.38}$$

где T — *любой инвариантный относительно сдвига оператор,*
Q — *любой дельта-оператор с базисными многочленами* $p_k(x)$,
$a_k = [Tp_k(x)]_{x=0}$.

При $T = E^a$ и $Q = D$ эта формула сводится к хорошо известной формуле Тейлора. Заменяя Q на разностный оператор Δ, получаем ньютоново разложение

$$p(x+a) = \sum_k \frac{a^{\underline{k}}}{k!} \Delta^k p(x). \tag{1.39}$$

Разложение Ньютона весьма полезно при доказательстве биномиальных тождеств. Например, равенство (1.9) является разложением величины $p(s+r) = (s+r)^{\underline{m}}$.

Полное изложение операторного исчисления в его связи с биномиальными тождествами можно найти в книге Рота и др. [75]. Тесную связь между дискретным и непрерывным случаями читатель заметит также в гл. 2, где разностные уравнения напоминают дифференциальные, и в разд. 4.2, посвященном интегрированию по Стилтьесу, где с целью вычисления сумм «интегрируются» функции «пол» и «потолок».

1.5. Гипергеометрический ряд

Геометрический ряд $1 + z + z^2 + \ldots = 1/(1-z)$ может быть обобщен до гипергеометрического ряда

$$\begin{aligned} {}_2F_1[a, b; c; z] = 1 + \frac{ab}{c}\frac{z}{1!} + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)}\frac{z^2}{2!} + \ldots \\ \ldots + \frac{a^{\bar{n}} b^{\bar{n}}}{c^{\bar{n}}}\frac{z^n}{n!} + \ldots, \end{aligned} \tag{1.40}$$

где надчеркнутый верхний индекс обозначает возрастающий факториал $a^{\bar{n}} = a(a+1)\ldots(a+n-1)$, а нижние индексы у F указывают на то, что существуют два параметра (a, b)

в числителе и один параметр (c) в знаменателе. Гипергеометрический ряд можно обобщить на случай произвольного числа параметров в числителе и знаменателе.

Много света на теорию биномиальных тождеств пролила их стандартизация, обеспеченная гипергеометрическим рядом. Например, тождества (1.5), (1.10) и (1.11) все являются следствием теоремы Вандермонда:

$$ {}_2F_1[a, -n; c; 1] = \frac{(c-a)^{\bar{n}}}{c^{\bar{n}}} \quad \text{при целом} \quad n > 0. \tag{1.41}$$

Наличие отрицательного аргумента обрывает ряд, который в противном случае был бы бесконечным, позволяя выразить (1.10) как видоизменение этой формулы:

$$\frac{s^{\bar{n}}}{n!}\,{}_2F_1[-r, -s+n; n+1; 1] = \frac{s^{\bar{n}}}{n!}\frac{(s+1)^{\bar{r}}}{(n+1)^{\bar{r}}} = \binom{r+s}{r+n}. \tag{1.42}$$

Дальнейшую информацию по гипергеометрическому ряду можно найти в книгах Бейли [35], Слейтер [66] и Хенричи [74].

1.6. Тождества с гармоническими числами

При анализе алгоритмов часто встречаются любопытные тождества, которые включают в себя как биномиальные коэффициенты, так и гармонические числа. Ниже дается сводка таких тождеств:

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \tag{1.43}$$

$$\sum_{k=1}^{n} H_k = (n+1)H_n - n, \tag{1.44}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{k}{m} H_k = \binom{n+1}{m+1}\left(H_{n+1} - \frac{1}{m+1}\right). \tag{1.45}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^k H_k = (x+1)^n \left(H_n - \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right) + \varepsilon, \tag{1.46}$$

$$x > 0, \quad 1 < \varepsilon < 1/(x(n+1)),$$

$$\frac{1}{(1-z)^{m+1}} \ln\left(\frac{1}{1-z}\right) = \sum_{n \geqslant 0} (H_{n+m} - H_m)\binom{n+m}{n} z^n, \tag{1.47}$$

$$\frac{1}{(1-z)^{m+1}}\ln\left(\frac{1}{1-z}\right)^2=\sum_{n\geqslant 0}\left((H_{n+m}-H_m)^2-\right.$$
$$\left.-\left(H^{(2)}_{n+m}-H^{(2)}_m\right)\right)\binom{n+m}{n}z^n. \quad (1.48)$$

Два последних тождества вместе с их обобщением на случай более высоких степеней приведены в статье Зэйва [76]. Их можно рассматривать как тождества, справедливые при комплексных значениях m с $H_{n+m}-H_m=1/(m+1)+$ $+1/(m+2)+\ \ldots\ +1/(m+n)$; см. решение задачи 9g.

Глава 2
Рекуррентные соотношения

2.1. Линейные рекуррентные соотношения

При классификации линейных рекуррентных соотношений будет использоваться следующая терминология. Рекуррентная последовательность с «частичной предысторией» зависит от некоторого фиксированного числа предыдущих членов:

$$x_n = f(x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots, x_{n-i}), \quad n \geqslant i. \tag{2.1}$$

Если x_n зависит от всех предшествующих членов, то последовательность имеет «полную предысторию».

Простейшим рекуррентным соотношением будет соотношение с частичной предысторией, имеющее «постоянные» коэффициенты. Здесь проводится терминологическая параллель с теорией дифференциальных уравнений; мы будем различать «однородный» и «неоднородный» случаи в зависимости от отсутствия или наличия дополнительного члена $g(n)$ в соотношении

$$c_0 x_n + c_1 x_{n-1} + \ldots + c_i x_{n-i} = g(n). \tag{2.2}$$

Имеются две классические работы по исчислению конечных разностей: одна — книга Йордана [60], другая — Милн-Томсона [33][7]). Хотя главными темами этих старых работ были приближение и решение дифференциальных уравнений — темы, лежащие скорее в русле численного анализа, а не анализа алгоритмов, — из этой теории можно почерпнуть много полезного. Мы также рекомендуем недавний обзор Шпигеля [71] и *Введение в вычислительную комбинаторику*, которое написали Пейдж и Уилсон [79].

В настоящем разделе даны ссылки на дополнительные примеры решения рекуррентных соотношений из книг Кнута [I, III]. Излагаемый в последней части раздела «репертуарный» подход к соотношениям с полной предысторией был введен в статье Кнута и Шёнхаге [78].

2.1.1. Частичная предыстория

2.1.1.1. Постоянные коэффициенты

Соотношения с постоянными коэффициентами представляют собой прекрасный пример использования производящих функций для решения рекуррентных уравнений. Вместо того чтобы пытаться найти x_n непосредственно, образуем функцию $G(z)$ с коэффициентами x_n в ее разложении в степенной ряд:

$$G(z) = \sum_i x_i z^i. \tag{2.3}$$

Рекуррентное соотношение преобразуется в уравнение относительно $G(z)$, которое разрешается любым приемлемым способом. Лучше всего объяснить это на примере соотношения

$$x_{n+2} - 3x_{n+1} + 2x_n = n, \qquad x_0 = x_1 = 1. \tag{2.4}$$

Умножим вначале (2.4) на z^{n+2} и просуммируем по всем n, получая

$$\sum_{n\geqslant 0} x_{n+2}z^{n+2} - 3z\sum_{n\geqslant 0} x_{n+1}z^{n+1} + 2z^2\sum_{n\geqslant 0} x_n z^n = \sum_{n\geqslant 0} nz^{n+2}. \tag{2.5}$$

Первая сумма есть $G(z)$ без двух начальных членов. Подобно первой, две другие суммы также близки к $G(z)$, а правая часть данного равенства может быть выражена в замкнутой форме как $z^3/(1-z)^2$. (Это следует из «биномиальной теоремы» — уравнения (1.1), когда $(x+y)^n = (1-z)^{-2}$. Список стандартных выражений для производящих функций в замкнутом виде приведен в книге Кнута [I, разд. 1.2.9].)

Собирая предыдущие результаты вместе в одну формулу для $G(z)$, получаем, что

$$G(z) - z - 1 - 3z(G(z) - 1) + 2z^2 G(z) = \frac{z^3}{(1-z)^2}. \tag{2.6}$$

А это уравнение легко разрешается относительно $G(z)$:

$$G(z) = \frac{z^3}{(1-z)^2(1-3z+2z^2)} + \frac{-2z+1}{1-3z+2z^2}. \tag{2.7}$$

Нам хотелось бы выяснить, чему равен коэффициент при z^n в разложении $G(z)$. Если бы знаменатели дробей в выражении для $G(z)$ были линейными функциями, то задача решалась бы просто: каждый член был бы геометрическим рядом. В данном случае это не так, но представляя найденное решение для $G(z)$ в виде элементарных дробей, можно получить удобную для работы форму:

$$G(z) = \frac{1}{1-2z} + \frac{1}{(1-z)^2} - \frac{1}{(1-z)^3}. \tag{2.8}$$

Заметьте, что нелинейные знаменатели — это всего лишь степени линейного двучлена. Такие члены могут быть разложены в биномиальный ряд, и x_n легко вычисляется:

$$x_n = 2^n - \frac{n^2+n}{2}. \tag{2.9}$$

Элементарные дроби представляют собой достаточно мощный инструмент для решения широкого круга уравнений с постоянными коэффициентами. Для простоты мы включили в последующее изложение другой подход, который можно найти в обзоре Шпигеля [71] и большом числе более старых источников. Этот подход основан на пробных решениях и аналогичен решению дифференциальных уравнений. В некоторых случаях он обеспечивает быстрое получение ответов, однако способы их получения зачастую подобны «черной магии», и озадаченный читатель будет вынужден обратиться к лежащей в их основе теории элементарных дробей для того, чтобы понять, почему подобные «правила буравчика» работают.

A) *Однородные уравнения*:

$$c_0x_n + c_1x_{n-1} + \ldots + c_ix_{n-i} = 0, \quad n \geqslant i. \tag{2.10}$$

Попробовав положить $x_n = r^n$, получим многочлен i-й степени от переменной r. Пусть $r_1, r_2, \ldots, r_i$ — корни этого многочлена. Тогда «общим решением» уравнения (2.10) будет

$$x_n = k_1r_1^n + k_2r_2^n + \ldots + k_ir_i^n, \tag{2.11}$$

где k_i — постоянные, определяемые начальными условиями.

Случай кратных корней учитывается введением в члены общего решения степеней n. Предположим, что $r_1 = r_2 = r_3$; тогда подправленное решение будет таким:

$$x_n = k_1r_1^n + k_2nr_1^n + k_3n^2r_1^n. \tag{2.12}$$

B) *Неоднородные уравнения*:

$$c_0x_n + c_1x_{n-1} + \ldots + c_ix_{n-i} = g(n). \tag{2.13}$$

Вначале удалим $g(n)$ и найдем общее решение однородного уравнения. Затем к полученному решению прибавим любое «частное» решение неоднородного уравнения.

Частное решение может быть найдено методом «неопределенных коэффициентов». Суть этого метода состоит в использовании пробного решения с неизвестными коэффициентами с последующим их определением. Характер пробного решения зависит от вида $g(n)$:

Вид $g(n)$	Пробное решение
α^n	$k\alpha^n$ (умноженное на n, если α — корень)
$p(n)$	многочлен той же степени

2.1.1.2. Переменные коэффициенты

Гарантированного способа решения задачи с переменными коэффициентами не существует, однако имеется несколько методов, которые следует попытаться применить.

A) *Суммирующие множители.* Если уравнение является уравнением «первого порядка»:

$$a(n)\,x_n = b(n)\,x_{n-1} + c(n), \quad n \geqslant 1, \tag{2.14}$$

то оно может быть решено суммированием [8]). Умножим вначале обе части уравнения на суммирующий множитель

$$F(n) = \prod_{i=1}^{n-1} a(i) \Big/ \prod_{j=1}^{n} b(j). \tag{2.15}$$

Тогда рекуррентное соотношение примет вид

$$y_n = y_{n-1} + F(n)\,c(n), \tag{2.16}$$

где $y_n = b(n+1)\,F(n+1)\,x_n$. Последнее рекуррентное соотношение позволяет выразить x_n в виде суммы:

$$x_n = \frac{x_0 + \sum_{i=1}^{n} F(i)\,c(i)}{b(n+1)\,F(n+1)}. \tag{2.17}$$

Другие иллюстрации этой техники см. в книге Кнута [III, разд. 5.2.2] и в обзоре Люкера [80].

B) *Производящие функции.* Задачи с переменными коэффициентами иногда поддаются решению с помощью производящих функций. Если коэффициентами являются многочлены, то с целью получения желаемой изменчивости производящая функция дифференцируется. Чтобы получить представление об этом подходе, рассмотрим сравнительно простую задачу

$$(i+1)\,x_{i+1} - (i+r)\,x_i = 0. \tag{2.18}$$

Умножение на z^i и суммирование по всем i приближает нас к формуле, содержащей $G(z)$:

$$\sum_i (i+1)\,x_{i+1} z^i - \sum_i (i+r)\,x_i z^i = 0. \tag{2.19}$$

Используя производную функции $G(z)$ и умножение на z с целью сдвига, получаем дифференциальное уравнение

$$(1-z)\,G'(z) - rG(z) = 0. \tag{2.20}$$

Вообще любое рекуррентное соотношение с коэффициентами, которые являются многочленами от i, может быть сведено к дифференциальному уравнению типа (2.20). В нашем случае коэффициенты решения $G(z)=(1-z)^{-r}$ могут быть найдены с помощью биномиальной теоремы:

$$x_n=\binom{r-1+n}{n}. \tag{2.21}$$

Более трудные задачи будут давать исследователю большое разнообразие уравнений, содержащих $G(z)$. Хотя последние не всегда являются дифференциальными, читатель отсылается к монографии Бойса и Ди Прима [69] по поводу тех дифференциальных уравнений, которые могут при этом встретиться.

C) *Понижение порядка* Если нам немного повезет с разложением разностного уравнения на множители, можно попытаться найти решения для каждого сомножителя в отдельности. Например, разностное уравнение

$$y_{k+2}-(k+2)\,y_{k+1}+ky_k=k \tag{2.22}$$

может быть записано в операторной форме как

$$(E^2+(k+2)\,E+k)\,y_k=k. \tag{2.23}$$

А этот оператор допускает разложение на множители:

$$(E-1)(E-k)\,y_k=k. \tag{2.24}$$

Если вначале решить уравнение

$$(E-1)\,z_k=k, \tag{2.25}$$

которое имеет простое решение $z_k=\binom{k}{2}$, то искомое уравнение сведется к уравнению первого порядка:

$$(E-k)\,y_k=\binom{k}{2}. \tag{2.26}$$

Полученное уравнение можно решить, используя суммирующий множитель $F(n)=1/n!$:

$$y_n=\frac{(n-1)!}{2}\sum_{i=1}^{n-3}\frac{1}{i!}. \tag{2.27}$$

Для простоты мы опустили начальные условия. Этот же пример с начальными условиями $y_1=0$ и $y_2=1$ решен Шпигелем [71, с. 176].

Все три подхода к задаче с переменными коэффициентами имеют серьезные недостатки. Метод суммирующих множителей может привести к непостижимой для нашего ума сумме, а метод производящих функций может доставить столь же трудно поддающееся решению дифференциальное уравнение.

И, увы, не существует надежного способа разложения на множители операторного уравнения при применении техники понижения порядка. Уравнения с переменными коэффициентами —это серьезная проблема; мы будем вынуждены вернуться к ним позже при исследовании асимптотических приближений.

2.1.2. Полная предыстория

2.1.2.1. Вычитание

Этот подход сокращает предысторию путем вычитания подходящих комбинаций близких формул. Например, в книге Кнута [III, разд. 5.2.2] уравнение

$$x_n = f_n + \frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1} x_k \tag{2.28}$$

решается путем вычитания

$$nx_n = nf_n + 2\sum_{k=0}^{n-1} x_k \tag{2.29}$$

из

$$(n+1)\,x_{n+1} = (n+1)\,f_{n+1} + 2\sum_{k=0}^{n} x_k, \tag{2.30}$$

в результате чего получается уравнение первого порядка с переменными коэффициентами. Обратите внимание, как аккуратно должны быть перегруппированы члены обеих формул, чтобы освободиться от суммы. В более сложных ситуациях для устранения предыстории может потребоваться несколько вычитаний (в качестве примера см. Кнут [III, упр. 6.2.2-7]).

2.1.2.2. Из репертуара

В этом подходе мы пользуемся линейностью рекуррентной зависимости и составляем требуемое решение из «репертуара» простых решений. Типичная рекуррентная зависимость, встречающаяся при анализе алгоритмов, имеет вид

$$x_n = a_n + \sum_{0\leqslant k\leqslant n} p_{nk}\,(x_k + x_{n-k}), \qquad \sum_k p_{nk} = 1. \tag{2.31}$$

Если, кроме того, известно, что

$$y_n = b_n + \sum_{0\leqslant k\leqslant n} p_{nk}\,(y_k + y_{n-k}), \tag{2.32}$$

то в силу линейности уравнение с аддитивным членом $\alpha a_n + \beta b_n$ будет иметь решение $\alpha x_n + \beta y_n$.

Вот решающая идея: вначале x_n выбирается так, чтобы сделать сумму удобной для работы, а *затем* мы смотрим, какой аддитивный член a_n соответствует выбранному x_n. Это в точности обратно исходной задаче, когда a_n задано, а x_n ищется. Однако, как только нами составлен достаточный репертуар аддитивных членов, искомая величина a_n может быть построена в виде их линейной комбинации.

В качестве примера рассмотрим рекуррентную зависимость

$$x_n = n + 1 + \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \frac{\binom{k-1}{1}\binom{n-k}{1}}{\binom{n}{3}} (x_{k-1} + x_{n-k}), \qquad (2.33)$$

связанную с вариантом «медиана-из-трех быстрой сортировки». Это вариант известного алгоритма «быстрой сортировки», который модифицирован так, что на стадии разделения выбирается медиана из трех элементов. В обычном варианте «быстрой сортировки» выбор каждого разделяющего элемента равновероятен. Рассматриваемая модификация делает несколько более вероятным то, что разделяющий элемент будет разбивать массив примерно на равные части, как это следует из распределения вероятностей p_{nk}, фигурирующего в приведенном выше рекуррентном соотношении. (Подробнее см. Кнут [III, разд. 5.2.2]. — *Перев.*)

Вначале заметим, что сумма в (2.33) симметрична, и заменим аддитивный член $n+1$ на a_n, подготовляя репертуарный подход:

$$x_n = a_n + \frac{2}{\binom{n}{3}} \sum_{1<k<n} (k-1)(n-k)\, x_{k-1}. \qquad (2.34)$$

Выбор x_n равным убывающему факториалу $(n-1)^{\underline{s}}$ делает сумму в уравнении (2.34) легкой для вычисления:

$$\begin{aligned}(n-1)^{\underline{s}} &= a_n + \frac{12}{n^{\underline{3}}} \sum_{1<k<n} (n-k)(k-1)^{\underline{s+1}} = \\ &= a_n + \frac{12\,(s+1)!}{n^{\underline{3}}} \sum_{1<k<n} \binom{n-k}{1}\binom{k-1}{s+1} = \\ &= a_n + \frac{12\,(s+1)!}{n^{\underline{3}}} \binom{n}{s+3}; \end{aligned} \qquad (2.35)$$

$$a_n = (n-1)^{\underline{s}} - \frac{12}{(s+2)(s+3)} (n-3)^{\underline{s}}. \qquad (2.36)$$

Итак, мы имеем семейство решений, параметризованное индексом s:

	x_n	a_n
$s=0$	1	-1
$s=1$	$n-1$	2
$s=2$	$(n-1)(n-2)$	$(2n^2+6n-26)/5$

Однако данное семейство не достаточно полно — в нем отсутствует решение с линейным a_n. Значения a_n скачут от константы до $\Theta(n^2)$, но, к сожалению, нам нужна величина a_n порядка $\Theta(n)$ (по поводу обозначения Θ см. разд. 4.1.1. — *Ред.*). Впрочем, это и не удивительно. Ожидается, что результат подобного итерирования типа «разделяй и властвуй» будет иметь порядок $O(n \log n)$, и тем не менее мы ограничились возможными значениями x_n, которые являются многочленами от n. Чтобы расширить наше семейство решений, введем гармонические числа H_n, которые также легко суммируются и внесут в решения множители порядка $O(\log n)$. Подставляя $x_n = (n-1)^{\underline{t}} H_n$ в уравнение (2.34) и разрешая его относительно a_n, находим новое семейство решений:

$$(n-1)^{\underline{t}} H_n = a_n + \frac{12}{n^{\underline{3}}} \sum_{1<k<n} (n-k)(k-1)^{\underline{t+1}} H_{k-1} =$$

$$= a_n + \frac{12}{n^{\underline{3}}} \left(\sum_{1<k<n} n(k-1)^{\underline{t+1}} H_{k-1} - \right.$$

$$\left. - \sum_{1<k<n} k^{\underline{t+2}} H_k + \sum_{1<k<n} (k-1)^{\underline{t+1}} \right) =$$

$$= a_n + \frac{12}{n^{\underline{3}}} \left(\frac{n^{\underline{t+3}}}{t+2} \left(H_{n-1} - \frac{1}{t+2} \right) - \right.$$

$$\left. - \frac{n^{\underline{t+3}}}{t+3} \left(H_n - \frac{1}{t+3} \right) + \frac{(n-1)^{\underline{t+2}}}{t+2} \right). \qquad (2.37)$$

(Здесь для вычисления сумм, содержащих H_n, нами было использовано тождество (1.45).) Полученный результат может быть упрощен:

$$a_n = H_n \left((n-1)^{\underline{t}} - \frac{12}{(t+2)(t+3)} (n-3)^{\underline{t}} \right) +$$

$$+ \frac{12(2t+5)^2}{(t+2)^2(t+3)^2} (n-3)^{\underline{t}}. \qquad (2.38)$$

На этот раз, проверив начальные члены семейства решений, мы обнаруживаем удачное выравнивание:

	x_n	a_n
$t=0$	H_n	$-H_n+\frac{5}{3}$
$t=1$	$(n-1)H_n$	$2H_n+\frac{7}{12}(n-3)$

Оба начальных решения для a_n имеют своим главным членом H_n. С помощью подходящей линейной комбинации можно исключить H_n и получить величину a_n, порядок роста которой равен n:

$$x_n=(n+1)H_n \longleftrightarrow a_n=\frac{7n+19}{12}. \tag{2.39}$$

Чтобы подогнать постоянный член и получить a_n, требуемое в исходной задаче, используем решение из первого семейства при $s=0$:

$$x_n=\frac{12}{7}((n+1)H_n+1) \longleftrightarrow a_n=n+1. \tag{2.40}$$

Полученное решение для x_n может не согласовываться с начальными значениями x_1 и x_2. Для того чтобы сделать возможными произвольные начальные значения, надо подыскать две дополнительные «степени свободы» в этом решении. Одна степень свободы может быть выявлена из первого семейства решений. Объединяя решения при $s=0$ и при $s=1$, получаем

$$x_n=n+1 \longleftrightarrow a_n=0. \tag{2.41}$$

Таким образом, в решение (2.40) может быть добавлена любая величина, кратная $n+1$.

Вторая степень свободы не столь очевидна. Поскольку $a_n=0$, мы имеем упрощенную рекуррентную зависимость для x_n:

$$n^{\underline{3}}x_n=12\sum_{1<k<n}(n-k)(k-1)x_{k-1}. \tag{2.42}$$

Используя производящую функцию $G(z)$ для последовательности x_n, свертку в правой части (2.42) можно представить в виде произведения величины $1/(1-z)^2$, соответствующей $n-k$, и производной $G'(z)$, соответствующей $(k-1)x_{k-1}$. Таким образом, получаем дифференциальное уравнение

$$G'''(z)=\frac{12}{(1-z)^2}G'(z). \tag{2.43}$$

Характер полученного уравнения подсказывает решение вида $G(z)=(1-z)^{\alpha}$, и проверка этого решения дает $\alpha=-2$ или $\alpha=5$. Возможность $\alpha=-2$ уже отмечалась раньше: мы знаем, что любое кратное $n+1$ не влияет на решение. При $\alpha=5$ получаем необычное решение, которое есть 0, за исключением первых пяти членов:

$$x_1=-5, \quad x_2=10, \quad x_3=-10, \quad x_4=5, \quad x_5=-1. \tag{2.44}$$

Это доставляет вторую степень свободы и дает окончательное решение:

$$x_n=\frac{12}{7}((n+1)H_n+1)+c_1(n+1)+c_2(-1)^n\binom{5}{n}, \tag{2.45}$$

где c_1 и c_2 определяются начальными условиями.

2.2. Нелинейные рекуррентные соотношения

Нелинейные рекуррентные соотношения более трудны для понимания, чем их линейные аналоги, а используемая техника, как правило, менее систематична, что требует проявления интуиции и находчивости вместо простого применения шаблонных приемов. В данном разделе изучаются два типа нелинейных рекуррентных соотношений: соотношения с функциями максимума и минимума и соотношения со скрыто или приближенно линейными рекуррентными зависимостями.

2.2.1. Соотношения с функциями максимума или минимума

При решении рекуррентного соотношения с max- или min-функциями прежде всего важно знать, где достигается максимум или минимум. Это не всегда очевидно, поскольку max- или min-функции могут зависеть от предыдущих членов последовательности, вид которых первоначально неизвестен. Типичный подход состоит в вычислении с помощью рекуррентного соотношения первых членов последовательности до тех пор, пока мы не сможем сделать предположение о местоположении максимума (или минимума) на каждой итерации. Сделанное предположение используется для решения рекуррентного соотношения, а полученное решение — для индуктивности доказательства правильности предположения.

Проиллюстрируем этот подход следующим примером анализа алгоритма перестановки *на том же месте* (Кнут [72]; см. также Кнут [I, разд. 1.3.3]. — *Перев.*). Кратко говоря, данная задача возникает при анализе одного варианта алгоритма, который с целью выявления лидеров цикла осуществляет поиск одновременно в двух направлениях. Для некоторого j алгоритм вначале рассматривает $p(j)$ и $p^{-1}(j)$, затем

$p^2(j)$ и $p^{-2}(j)$ и т. д. до тех пор, пока не встретится либо элемент, меньший чем j (в этом случае j не является лидером цикла (и отклоняется. — *Ред.*)), либо само j (в этом случае j является лидером цикла, поскольку весь цикл уже просмотрен).

Вычислим стоимость $f(n)$ алгоритма в наихудшем случае, т. е. стоимость отклонения всех элементов, не являющихся лидерами цикла длины n. Составление рекуррентного соотношения основывается на том обстоятельстве, что второй наименьший элемент цикла разбивает исходную задачу на отдельные подзадачи. Для удобства поместим лидера (наименьший элемент) в начало цикла и предположим, что второй наименьший элемент находится на k-м месте:

$$(\text{лидер})\ c_1c_2c_3 \ldots$$
$$\ldots c_{k-1}\ (\text{второй наименьший элемент})\ c_{k+1}c_{k+2} \ldots c_{n-1}. \quad (2.46)$$

Граница поиска при проверке на лидерство элементов $c_1, \ldots$ $\ldots, c_{k-1}$ являются лидер и второй наименьший элемент цикла, так что наихудший случай для этого сегмента идентичен наихудшему случаю для цикла длины k. Аналогично, стоимость наихудшего случая для сегмента $c_{k+1}, \ldots, c_{n-1}$ равна $f(n-k)$, а стоимость отклонения второго наименьшего элемента равна $\min(k, n-k)$. Это дает рекуррентное соотношение

$$f(n) = \max_k (f(k) - f(n-k) + \min(0, n-k)). \quad (2.47)$$

Согласно намеченному выше подходу, первый шаг сводится к составлению таблицы, в которой представлены значения $f(n)$ при малых n вместе со списком значений k, при которых достигается максимум:

n	$f(n)$	Значения k
1	0	—
2	1	1
3	2	1, 2
4	4	2
5	5	1, 2, 3, 4
6	7	2, 3, 4
7	9	3, 4
8	12	4

На некоторых итерациях максимум достигается при многих значениях k, но похоже, что при $k = \lfloor n/2 \rfloor$ он достигается всегда. Исходя из этого предположения, рекуррентное соотношение (2.47) можно свести к следующим соотношениям:

$$
\begin{aligned}
f(2m) &= 2f(m) + m \\
f(2m+1) &= f(m) + f(m+1) + m.
\end{aligned} \tag{2.48}
$$

Формулы для четных и нечетных членов близки друг к другу, что наводит на мысль произвести вычитание:

$$
\begin{aligned}
\Delta f(2n) &= f(2n+1) - f(2n) = f(n+1) - f(n) = \Delta f(n), \\
\Delta f(2n+1) &= f(2n+2) - f(2n+1) = \\
&= f(n+1) - f(n) + 1 = \Delta f(n) + 1.
\end{aligned} \tag{2.49}
$$

В разностной форме становится ясным смысл $\Delta f(n)$ и $f(n)$: $\Delta f(n)$ просто подсчитывает число единиц в двоичном представлении n, а

$$
f(n) = \sum_{0 \leqslant k < n} \nu(k) = \frac{1}{2} n \log n + O(n), \tag{2.50}
$$

где $\nu(k)$ — число единиц в двоичном разложении k. (Суммы цифр, подобные данной, играют важную роль в теории рекуррентных соотношений, когда соответствующие последовательности разбиваются примерно на равные части. Асимптотическое поведение $f(n)$ имеет запутанную историю его независимого нахождения несколькими авторами (Столарски [77]). (См. Деланж [75] по поводу детального анализа этой асимптотики, а также Кнут [III, упр. 5.2.2-15] по поводу сходной задачи, решение которой связано с двоичным представлением соответствующего аргумента.)

Для завершения решения уравнения (2.47) надо доказать справедливость сделанного выше предположения о местоположении максимума или, что эквивалентно, показать, что функция от двух переменных

$$
g(m, n) = f(m+n) - m - f(m) - f(n), \qquad n \geqslant m, \tag{2.51}
$$

всегда неотрицательна. Записывая эту функцию отдельно для четных и нечетных переменных и используя равенства (2.48) для $f(i)$, получаем:

$$
\begin{aligned}
g(2m, 2n) &= 2g(m, n), \\
g(2m+1, 2n) &= g(m, n) + g(m+1, n), \\
g(2m, 2n+1) &= g(m, n) + g(m, n+1), \\
g(2m+1, 2n+1) &= 1 + g(m+1, n) + g(m, n+1).
\end{aligned} \tag{2.52}
$$

Тогда можно, используя граничные условия

$$
\begin{aligned}
g(n, n) &= 0, \\
g(n-1, n) &= 0,
\end{aligned} \tag{2.53}
$$

которые вытекают из определения соотношения для f, доказать по индукции, что $g(m, n) \geqslant 0$.

Сделанное в рассмотренном примере предположение о местоположении максимума очевидно: интуитивно ясно, что наихудшая ситуация имеет место, когда второй наименьший элемент отстоит от лидера цикла настолько далеко, что он делит цикл приблизительно пополам. Приведем пример более сложного предположения. Рассмотрим рекуррентное соотношение

$$f(n) = 1 + \min_i \left\{ \frac{i-1}{n} f(i-1) + \frac{n-i}{n} f(n-i) \right\}, \qquad (2.54)$$

которое возникает при анализе игры «отгадай задуманное число», когда один из играющих пытается отгадать задуманное другим игроком целое число между 1 и n. После того как один игрок называет предполагаемое число, другой сообщает ему — больше, меньше или равно задуманному названное число. Величина $f(n)$ представляет собой среднее число отгадываний в случае применения наилучшей из возможных стратегий.

Интуиция вновь подсказывает нам, что лучше всего выбирать i посередине интервала, но это, как ни странно, не всегда верно. Правильным решением с целью локализации минимума является деление интервала $1, \ldots, n$ на части нечетной длины. Например, в случае $n = 5$ следовало бы начать отгадывание с 4, а не с 3.

Имеется несколько общих результатов, которые могут помочь в локализации минимума. Ниже приводится ряд утверждений из статьи Фредмэна и Кнута [74], которые применимы к рекуррентным соотношениям типа

$$f(n+1) = g(n+1) + \min_k (\alpha f(k) + \beta f(n-k)) \qquad (2.55)$$

с положительными α и β. Уравнение (2.54), умноженное на n, также является членом этого обширного класса соотношений.

Определение. Вещественнозначная функция $g(n)$ является *выпуклой*, если $\Delta^2 g(n) \geqslant 0$ при всех n. Это означает, что

$$g(n+2) - g(n+1) \geqslant g(n+1) - g(n), \quad \forall n \geqslant 0. \qquad (2.56)$$

Лемма. *Пусть $a(n)$ и $b(n)$ — выпуклые функции. Тогда «минпозиция» $c(n)$, определяемая как*

$$c(n) = \min_{0 \leqslant k \leqslant n} (a(k) + b(n-k)), \qquad (2.57)$$

также выпукла. Кроме того, если $c(n) = a(k) + b(n-k)$, то $c(n+1) = \min(a(k) + b(n+1-k),\ a(k+1) + b(n-k))$.

(Другими словами, по мере увеличения n местоположение минимума существенно не меняется. Термин «минпозиция», придуманный М. Ф. Плассом, подчеркивает сходство формулы (2.57) с формулой композиции двух последовательностей.)

Доказывается эта сильная лемма очень просто. На процедуру построения последовательности $c(n)$ можно смотреть как на слияние двух последовательностей

$$\Delta a(0),\ \Delta a(1),\ \Delta a(2),\ \ldots \tag{2.58}$$

и

$$\Delta b(0)\ \Delta b(1),\ \Delta b(2),\ \ldots\ . \tag{2.59}$$

По предположению члены этих двух последовательностей не убывают. Тогда члены результирующей последовательности

$$\Delta c(0),\ \Delta c(1),\ \Delta c(2),\ \ldots \tag{2.60}$$

также не убывают, откуда следует выпуклость $c(n)$.

При каждом n элемент $c(n)$ является суммой n-х наименьших членов двух последовательностей (2.58) и (2.59). Для определения следующего значения $c(n+1)$ требуется еще один член либо последовательности Δa, либо последовательности Δb, при этом вопрос о том, сдвигается ли местоположение минимума из k в $k+1$, определяется тем, в какой из них находится наименьший элемент.

Теорема. *Функция f, определяемая соотношением* (2.55), *является выпуклой при условии, что выпуклы $g(n)$ и результат первой итерации* (2.55), *т. е.*

$$f(2)-f(1)\geqslant f(1)-f(0). \tag{2.61}$$

Теорема доказывается по индукции: предполагается, что последовательность $f(1), \ldots, f(n)$ выпукла, и с помощью предыдущей леммы показывается, что добавление $f(n+1)$ будет сохранять выпуклость.

2.2.2. Непрерывные дроби и другие скрытые линейные рекуррентные соотношения

Если рекуррентное соотношение похоже на непрерывную дробь, то простым преобразованием нелинейную задачу можно свести к линейному рекуррентному соотношению.

Рассмотрим, например, задачу подсчета числа A_{nh} деревьев с n узлами и высотой, не превосходящей n. При заданной высоте h для установления рекуррентного соотношения можно воспользоваться производящей функцией

$$A_h(z)=\sum A_{nh}z^n. \tag{2.62}$$

Дерево высоты, не превосходящей $h+1$, имеет корень и некоторое число поддеревьев высоты, меньшей или равной h, так что

$$A_{h+1}(z)=z\left(1+A_h(z)+A_h(z)^2+A_h(z)^3+\ldots\right)=z/(1-A_h(z)). \tag{2.63}$$

«Непрерывно дробный» оттенок данного рекуррентного соотношения

$$A_{h+1}=\cfrac{z}{1-\cfrac{z}{1-A_{h-1}(z)}} \tag{2.64}$$

наводит на мысль воспользоваться преобразованием

$$A_h(z)=\frac{zP_h(z)}{P_{h+1}(z)}, \tag{2.65}$$

что приводит к линейному рекуррентному соотношению

$$P_{h+1}(z)=P_h(z)-zP_{h-1}(z),\quad P_0(z)=0,\quad P_1(z)=1. \tag{2.66}$$

С помощью стандартной техники решения линейных соотношений 2-го порядка получаем

$$P_h(z)=(1-4z)^{-1/2}\left(\left(\frac{1+(1-4z)^{1/2}}{2}\right)^h-\left(\frac{1-(1-4z)^{1/2}}{2}\right)^h\right). \tag{2.67}$$

Дальнейший анализ упорядоченных деревьев, связанный с исследованием коэффициентов в выражении для $P_h(z)$, не имеет непосредственного отношения к нелинейным рекуррентным соотношениям, поэтому за исчерпывающими подробностями этого анализа читатель отсылается к работе де Брёйна, Кнута и Райса [72].

Стоит заметить, что поиск преобразования, соответствующего «непрерывно дробной» природе рекуррентного соотношения, привел нас к преобразованию (2.65), являющемуся отношением многочленов. В рассмотренном выше примере закономерность, присущая рекуррентному соотношению (2.64), позволила ограничиться только одним семейством многочленов — многочленами $P_h(z)$. В общей теории непрерывных дробей, которая обеспечивает решение и в случае менее закономерных непрерывных дробей, используются два семейства многочленов. Вообще «n-я подходящая дробь»

$$f_n=a_0+\cfrac{b_1}{a_1+\cfrac{b_2}{a_2+\ldots+\cfrac{b_n}{a_n}}} \tag{2.68}$$

представляется в виде отношения

$$f_n = p_n/q_n, \tag{2.69}$$

где p_n и q_n удовлетворяют линейным рекуррентным соотношениям

$$\begin{aligned} p_n &= a_n p_{n-1} + b_n p_{n-2}, & p_0 &= a_0, & p_1 &= a_1 a_0 + b_1, \\ q_n &= a_n q_{n-1} + b_n q_{n-2}, & q_0 &= 1, & q_1 &= a_1. \end{aligned} \tag{2.70}$$

Соответствующая теория, которую можно найти, например, в книге Харди и Райта [79, гл. 10], гарантирует, что к задаче с двумя линейными рекуррентными соотношениями можно свести более сложное рекуррентное соотношение типа

$$f_h(z) = \frac{z}{1 - \dfrac{z^2}{1 - f_{h-1}(z)}}. \tag{2.71}$$

Кроме непрерывных дробей имеется много других типов нелинейных рекуррентных соотношений, которые являются всего лишь слегка замаскированными линейными соотношениями. Вот примеры некоторых из них:

Исходное рекуррентное соотношение	Линейный вариант
$f_n = f_{n-1} - f_n f_{n-1}$	$\dfrac{1}{f_{n-1}} = \dfrac{1}{f_n} - 1$
$f_n = f_{n-1}^3 / f_{n-2}$	$\ln f_n = 3 \ln f_{n-1} - \ln f_{n-2}$
$f_n - f_{n-1} f_n - z f_n = z - z f_{n-1}$	$f_n = \dfrac{z}{1 - \dfrac{z}{1 - f_{n-1}}}$
$f_n = 7 f_{n/2} + n^2$	$g_k = g_{k-1} + \left(\dfrac{4}{7}\right)^k, \quad g_k = \dfrac{f_{2^k}}{7^k}$

Последняя разновидность рекуррентного соотношения особенно часто встречается при анализе алгоритмов типа «разделяй и властвуй».

2.2.3. Дважды экспоненциальные последовательности

В предыдущем разделе были исследованы нелинейные рекуррентные соотношения, которые содержали в себе скрытые линейные зависимости. Обратимся теперь к несколько иной ситуации, когда нелинейное рекуррентное соотношение содержит очень хорошее приближение к линейной рекуррентной зависимости.

Удивительно большое число нелинейных рекуррентных соотношений может быть подогнано под соотношение типа

$$x_{n+1} = x_n^2 + g_n, \tag{2.72}$$

где g_n — медленно возрастающая функция n, возможно зависящая от предыдущих элементов последовательности. Более точные требования к функции g_n станут ясны по мере нахождения решения уравнения (2.72); при этом мы будем следовать статье Ахо и Слоана [73].

Начнем с того, что прологарифмируем уравнение (2.72), получая почти линейное соотношение

$$y_{n+1} = 2y_n + \alpha_n, \tag{2.73}$$

где x_n и g_n заменены на

$$y_n = \ln x_n \tag{2.74}$$

и

$$\alpha_n = \ln(1 + g_n/x_n^2). \tag{2.75}$$

Используя логарифмы, мы тем самым делаем наше первое допущение, состоящее в том, что x_n больше нуля.

Если «развернуть» рекуррентное соотношение для y_n, то получим

$$y_n = 2^n \left(y_0 + \frac{\alpha_0}{2} + \frac{\alpha_1}{2^2} + \ldots + \frac{\alpha_{n-1}}{2^n} \right). \tag{2.76}$$

Далее удобно расширить ряд с α_i до бесконечного:

$$Y_n = 2^n y_0 + \sum_{i=0}^{\infty} 2^{n-1-i} \alpha_i, \tag{2.77}$$

так что

$$r_n = Y_n - y_n = \sum_{i=n}^{\infty} 2^{n-1-i} \alpha_i. \tag{2.78}$$

Подобное расширение полезно только тогда, когда ряд быстро сходится. Поэтому мы принимаем второе допущение: функция g_n такова, что

$$|\alpha_n| \geqslant |\alpha_{n+1}| \quad \text{при} \quad n \geqslant n_0. \tag{2.79}$$

Благодаря второму допущению ряд для Y_n сходится, а остаток $|r_n|$ не превосходит $|\alpha_n|$; поэтому, потенцируя, можно получить решение исходного уравнения:

$$x_n = e^{Y_n - r_n} = k^{2^n} \cdot e^{-r_n}, \tag{2.80}$$

где

$$k = x_0 \cdot \exp\left(\sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i-1}\alpha_i\right). \tag{2.81}$$

Поскольку α_i, как правило, зависят от x_i, равенство (2.80) не является решением в полностью замкнутой форме. Тем не менее данное решение показывает, что существует константа k, возможно трудная для вычисления, которая характеризует последовательность x_n. В некоторых случаях можно установить значение k точно.

Любопытной стороной равенства (2.80) является близость сомножителя k^{2n} к точному решению (как мы вскоре увидим, множитель e^{-r_n} дает пренебрежимо малый вклад). Для того чтобы показать это, необходимо принять третье допущение:

$$|g_n| < \frac{1}{4} x_n \quad \text{и} \quad x_n \geqslant 1 \quad \text{при} \quad n \geqslant n_0. \tag{2.82}$$

Поскольку $|r_n| \leqslant |\alpha_n|$, то имеем следующую оценку близости $X_n = k^{2^n}$ к точному решению:

$$x_n e^{-|\alpha_n|} \leqslant X_n \leqslant x_n e^{|\alpha_n|}. \tag{2.83}$$

Раскрывая правую часть этого неравенства (используя неравенство $(1-u)^{-1} \leqslant 1 + 2u$ при $0 \leqslant u \leqslant 1/2$ в случае, когда $\alpha_n < 0$, и последнее допущение), получаем новую оценку:

$$X_n \leqslant x_n + \frac{2|g_n|}{x_n}. \tag{2.84}$$

Аналогично

$$X_n \geqslant x_n e^{-|\alpha_n|} \geqslant x_n\left(1 - \frac{|g_n|}{x_n^2}\right) = x_n - \frac{|g_n|}{x_n}. \tag{2.85}$$

Окончательно допущение о том, что $|g_n| < \frac{1}{4} x_n$, позволяет утверждать, что

$$|x_n - X_n| < \frac{1}{2}. \tag{2.86}$$

Значит, если известно, что x_n — целые числа, то искомое решение таково:

$$x_n = \text{ближайшее целое к } k^{2^n} \quad \text{при } n \geqslant n_0. \tag{2.87}$$

Вот некоторые рекуррентные соотношения, которые вписываются в общую схему — уравнение (2.72).

1) *Нелинейные рекуррентные соотношения Голомба*

$$y_{n+1} = y_0 y_1 \cdots y_{n+r}, \quad y_0 = 1, \tag{2.88}$$

или, в эквивалентной форме,

$$y_{n+1} = (y_n - r)\,y_n + r, \quad y_0 = 1, \quad y_1 = r + 1. \tag{2.89}$$

Если с помощью подстановки

$$x_n = y_n - \frac{r}{2} \tag{2.90}$$

выделить квадрат,

$$x_{n+1} = x_n^2 + \frac{r}{2} - \frac{r^2}{4}, \tag{2.91}$$

то становится очевидным, что данное рекуррентное соотношение является членом только что рассмотренного семейства соотношений. Поскольку член, соответствующий g_n, есть константа, легко проверить, что принятые выше допущения проходят и в этом случае.

Известно, что в частных случаях $r = 2$ и $r = 4$ константа k равна $\sqrt{2}$ и величине «золотого сечения» соответственно. В других случаях эту константу можно оценить, итерируя рекуррентное соотношение и разрешая его относительно k. Дважды экспоненциальный порядок роста элементов последовательности обеспечивает быструю сходимость таких оценок, но вместе с тем делает неточными оценки далеких членов последовательности.

2) *Сбалансированные деревья.* Следующее рекуррентное соотношение, приведенное в книге Кнута [III, разд. 6.2.3], связано с подсчетом числа сбалансированных бинарных деревьев высоты n:

$$y_{n+1} = y_n^2 + 2y_n y_{n-1}. \tag{2.92}$$

Если сделать преобразование $x_n = y_n + y_{n-1}$, то рекуррентное соотношение станет менее простым, но зато более удобным для решения:

$$x_{n+1} = x_n^2 + 2y_{n-1}y_{n-2}. \tag{2.93}$$

В данном случае член, соответствующий g_n, не является константой, но возрастает достаточно медленно ($2y_{n-1}y_{n-2} \ll \ll y_n < x_n$), что удовлетворяет требованиям, наложенным выше на g_n. Теперь можно утверждать, что существует такое k, что

$$x_n = \lfloor k^{2^n} \rfloor \tag{2.94}$$

и

$$y_n = \lfloor k^{2^n} \rfloor - \lfloor k^{2^{n-1}} \rfloor + \ldots \pm \lfloor k \rfloor \mp 1. \tag{2.95}$$

(Использование функции «пол» вместо ближайшего целого оправдано тем, что g_n, будучи положительным, всегда делает k^{2^n} несколько большим, чем истинное значение.)

Завершим раздел двумя рекуррентными соотношениями, фигурирующими в статье Ахо и Слоана [73]:

$$y_{n+1} = y_n^3 - 3y_n, \tag{2.96}$$

$$y_{n+1} = y_n y_{n-1} + 1. \tag{2.97}$$

Строго говоря, эти соотношения не вписываются в схему рекуррентного соотношения, решенного в начале данного раздела. Однако изложенная при этом техника решения в равной степени применима и к этим соотношениям, поскольку после логарифмирования оба рекуррентных соотношения становятся близкими к линейному. В частности, уравнение (2.97) имеет решение фибоначчиевого типа:

$$y_n = \lfloor k_0^{F_{n-1}} k_1^{F_n} \rfloor, \tag{2.98}$$

где $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.

Глава 3
Операторные методы

Последующий анализ хеширования, принадлежащий Майклу Патерсону, но пока не опубликованный, опирается на два понятия: собственные операторы и то, что он называет «индукцией с другого конца». Приводимый ниже пример с монстром — пожирателем печенья иллюстрирует пользу нахождения собственного оператора. «Индукция с другого конца» появится позже, когда эти методы будут применяться к различным схемам хеширования (по поводу последних см. также Кнут [III, разд. 6.4]. — *Перев.*).

3.1. Монстр — пожиратель печенья

Рассмотрим монстра, способность которого поглощать печенье пропорциональна его текущему объему. Когда мы швыряем ему печенье, а монстр уже имеет k печений в своем брюхе, с вероятностью pk объем монстра увеличивается до $k+1$. (Мы предполагаем, что $pk \leqslant 1$.)

Пусть g_{nk} является вероятностью того, что объем монстра равен k после того, как на съеденье было отдано n печений. Образуем производящую функцию

$$g_n(x) = \sum_k g_{nk}, \tag{3.1}$$

которая соответствует распределению объема монстра после n-го швыряния печенья. Первоначально монстром было каким-то образом съедено одно печенье, так что $g_0(x) = x$.

Некий «оператор» будет обеспечивать возможность получения $g_{n+1}(x)$ по заданной функции $g_n(x)$. Сначала посмотрим, как воздействует печенье на отдельное слагаемое:

До	После
x^k	$pkx^{k+1} + (1-pk)\,x^k$ или $x^k + p(x-1)\,kx^k$

Это изменение описывается оператором $\Phi = 1 + p(x-1)xD$, где D — производная. Многократное применение Φ дает $g_n(x) = \Phi^n g_0(x)$.

Прежде чем двигаться дальше, полезно дать обзор некоторых фактов об операторах. При этом будем использовать следующие обозначения:

D — производная,
U — вычисление в точке $x = 1$,
Z — вычисление в точке $x = 0$,
UD — получение среднего значения $f'(1)$,
U_n — сокращенное обозначение для UD^n,
x^n — умножение на x^n.

Важно представлять, как операторы коммутируют друг с другом. Например,

$$Dx^n f(x) = nx^{n-1} f(x) + x^n Df(x); \tag{3.2}$$

поэтому можно переместить оператор D за x^n по правилу

$$Dx^n = x^n D + nx^{n-1}. \tag{3.3}$$

Это правило обобщается на произвольный многочлен $r(x)$:

$$Dr(x) = r(x) D + r'(x). \tag{3.4}$$

Другим полезным фактом, касающимся операторов, является соотношение

$$U_n x = U_n + nU_{n-1} \tag{3.5}$$

или

$$U_n (x - 1) = nU_{n-1}. \tag{3.6}$$

Это может быть показано перестановкой x с каждым из операторов D в $U_n x$.

Возвращаясь к монстру — пожирателю печенья, хотелось бы установить средний объем монстра после n швыряний печенья:

$$U_1 g_n(x) = U_1 \Phi^n g_0(x). \tag{3.7}$$

Вот где важна перестановочность, поскольку было бы заманчиво иметь возможность поместить U_1 после Φ. Применение U_1 к Φ дает

$$\begin{aligned} UD\Phi &= UD(1 + p(x-1)xD) = \\ &= U(D + p(x-1)xD^2 + p(2x-1)D) = \\ &= (1+p)UD. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Значит, UD является собственным оператором оператора Φ, и в силу подобной самовоспроизводимости можно вычислить среднее значение:

$$U_1 \Phi^n g_0(x) = (1+p)^n U_1 g_0(x) = (1+p)^n. \tag{3.9}$$

Дисперсия устанавливается с помощью U_2, поскольку $\operatorname{var}(g) = g''(1) + g'(1) - (g'(1))^2$ и $U_2 g_n(x) = g''_n(1)$. К сожалению, U_2 не имеет такого привлекательного достояния, как собственный оператор, которым обладает U_1, поскольку

$$\begin{aligned} U_2\Phi &= U(D^2 + p(x-1)xD^3 + 2p(2x-1)D^2 + 2pD) = \\ &= UD^2 + 2pUD^2 + 2pUD = \\ &= (1+2p)U_2 + 2pU_1. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Тем не менее, используя подходящую линейную комбинацию U_2 с U_1, мы все же получаем собственный оператор:

$$(U_2 + 2U_1)\Phi = (1+2p)(U_2 + 2U_1). \tag{3.11}$$

На самом деле существует целое семейство собственных операторов, задаваемых следующей схемой:

$$\begin{array}{ll} V_1\Phi = (1+p)V_1, & V_1 = U_1, \\ V_2\Phi = (1+2p)V_2, & V_2 = U_2 + 2U_1, \\ V_3\Phi = (1+3p)V_3, & V_3 = U_3 + 6U_2 + 6U_1, \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ V_n\Phi = (1+np)V_n, & V_n = U_n x^{n-1}. \end{array}$$

Это можно показать с помощью соотношений (3.6) и (3.3):

$$\begin{aligned} V_n\Phi &= V_n x^{n-1}(1 + p(x-1)xD) = \\ &= V_n + U_n p(x-1)x^n D = \\ &= V_n + pnU_{n-1}(Dx^n - nx^{n-1}) = \\ &= V_n + pn(U_n x - nU_{n-1})x^{n-1} = \\ &= V_n + pnV_n. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Используя V_i, в принципе можно вывести все моменты распределения и более высоких порядков. В частности, дисперсия вычисляется с помощью V_2:

$$\begin{aligned} V_2\Phi^n g_0(x) &= (1+2p)^n V_2 x = 2(1+2p)^n, \\ U_2\Phi^n g_0(x) &= (V_2 - 2V_1)\Phi^n g_0(x) = \\ &= 2(1+2p)^n - 2(1+p)^n, \end{aligned} \tag{3.13}$$

так что

$$\begin{aligned} \operatorname{var}(g_n) &= g''_n(1) + g'_n(1) - (g'_n(1))^2 = \\ &= 2(1+2p)^n - (1+p)^n - (1+p)^{2n}. \end{aligned}$$

3.2. Срастающееся хеширование

Минутное размышление подсказывает, что поведение монстра—пожирателя печенья очень тесно связано с определен ным видом хеширования. Когда возникает коллизия ключей, образуется длинная цепочка, и возможность попадания в нее возрастает. Предположим, что мы разрешаем коллизию, находя первое свободное место на левом конце таблицы и связывая это место с концом цепочки. По мере выполнения алгоритма мы будем иметь распределение монстров различного объема. Пусть

$$g_n(x) = \sum_k (\text{среднее число цепочек длины } k) \cdot x^k. \tag{3.14}$$

Хотелось бы снова найти оператор, который описывает прибавление одного печенья, но на этот раз мы думаем о ключах, а не о печенье.

Поскольку мы имеем дело со средними значениями, общий член (3.14) будет вести себя подобно одному монстру, хотя вклад в него вносят несколько монстров. В данном случае $p = 1/m$, где m — число «щелей» (slots. — *Перев.*) в хеш-таблице. Поэтому вероятность увеличения цепочки длины k до $k+1$ равна pk-вероятности попадания в цепочку. Однако вычисление свободного члена в производящей функции преподносит новые трудности. Среднее число пустых цепочек попросту равно $m - n$, поэтому оператор должен быть таким:

$$\mathbf{\Psi} = \mathbf{\Phi} + (\text{некий свободный член к } m - n). \tag{3.15}$$

Вместо того чтобы строить догадки, заметим, что оператор $\mathbf{\Phi}$, примененный к свободному члену функции $g_n(x)$, есть $\mathbf{\Phi}(m-n) = m - n$. Следовательно, правильное изменение должно быть таким:

До	После
$m-n$	$(m-n-1)+$ $+(1-np)x$

Можно подправить $\mathbf{\Phi}$, используя оператор вычисления в нуле Z:

$$\mathbf{\Psi} = \mathbf{\Phi} + p(x-1)Z - pU_1. \tag{3.16}$$

Заметим, что Z, примененный к $g_n(x)$, дает $m - n$, а U_1 дает n, поэтому $\mathbf{\Psi}$ действует на свободный член надлежащим образом:

$$\begin{aligned}\mathbf{\Psi}(m-n) &= m - n + p(x-1)(m-n) - pn = \\ &= n - m - mp + (1-np)x.\end{aligned} \tag{3.17}$$

(Напомним, что $mp = 1$.) Использование Z и U_1 в этой стряпне вначале может показаться подобным «стрельбе из пушек по воробьям», но здесь важно то, что данное изменение сделано исключительно с помощью линейных операторов.

Итак, $g_n(x)$ задается формулами

$$g_n(x) = \Psi^n g_0(x), \quad g_0(x) = m. \tag{3.18}$$

Как и прежде, попытаемся найти собственный оператор оператора Ψ; применение U_1 к Ψ дает

$$U_1\Psi = (1 + p)U_1 + pZ. \tag{3.19}$$

Систематического способа нахождения собственных операторов не существует, но присутствие Z подсказывает попытаться так:

$$Z\Psi = (1 - p)Z - pU_1. \tag{3.20}$$

Теперь видно, что следующая линейная комбинация является собственным оператором:

$$(U_1 + Z)\Psi = (U_1 + Z). \tag{3.21}$$

«Среднее» в этой задаче не особенно интересно, поскольку применение оператора U_1 к $g_n(x)$ дает просто n, и собственный оператор только подтверждает этот факт:

$$(U_1 + Z) g_n(x) = 1^n m; \tag{3.22}$$

$$Z g_n(x) = m - n. \tag{3.23}$$

Напротив, сила собственного оператора проявляется в случае вычисления среднего числа коллизий при $(n+1)$-й вставке. Пусть

$$h_n(x) = \sum_k \text{(вероятность } k \text{ коллизий при } (n+1)\text{-й вставке)}\, x^k. \tag{3.24}$$

Член x^k в $g_n(x)$ будет давать $(x^k + x^{k-1} + \ldots + x)p$ в $h_n(x)$, поскольку попадание в каждый элемент k-цепочки равновероятно, несмотря на то что они находятся на разном расстоянии от конца цепочки.

Мы хотим вычислить $U_1 h_n(x)$, исходя из $g_n(x)$. Применяя U_{r+1} к многочлену и не церемонясь со свободным членом, получаем

$$\begin{aligned} U_{r+1}(x^{k+1}) &= U_{r+1}(x^{k+1} - 1) = \\ &= U_{r+1}(x - 1)(1 + x + \ldots + x^k) = \\ &= (r + 1) U_r (1 + x + \ldots + x^k) = \\ &= (r + 1) U_r (x + x^2 + \ldots + x^k). \end{aligned} \tag{3.25}$$

(Подобные вольности оправданны, поскольку мы применяем U к полиномиальному аргументу x^{k+1}, а не переставляем U

с оператором x^{k+1} как в уравнении (3.3).) Полагая $r=1$, получаем зависимость между g и h:

$$U_1 h_n(x) = \frac{p}{2} U_2 x g_n(x). \qquad (3.26)$$

Поскольку $U_2 x = U_2 + 2U_1$, а U_1 легко вычисляется, попытаемся теперь найти собственный оператор оператора Ψ, который содержал бы U_2. Вот подходящее семейство собственных операторов:

$$C_2\Psi = (1+2p)C_2, \quad C_2 = V_2 - \frac{1}{2}(U_1 - Z),$$

$$C_3\Psi = (1+3p)C_3, \quad C_3 = V_3 - \frac{2}{3}(U_1 - 2Z),$$

$$\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$C_n\Psi = (1+np)C_n, \quad C_n = V_n - \frac{(n-1)!}{n}(U_1 - (n-1)Z).$$

Это семейство позволяет найти все моменты распределения коллизий, неизбежных при вставке $(n+1)$-го элемента. Например, среднее число коллизий выводится с помощью оператора C_2:

$$\begin{aligned} U_1 h_n(x) &= \frac{p}{2}(U_2 + 2U_1) g_n(x) = \\ &= \frac{p}{2}\left(C_2 + \frac{U_1}{2} - \frac{Z}{2}\right) g_n(x) = \\ &= \frac{1}{2m}\left(\left(1+\frac{2}{m}\right)^n \frac{m}{2} - \frac{m}{2} + n\right). \end{aligned} \qquad (3.27)$$

Читатель, должно быть, заметил, что в предыдущем анализе не учитывалось время, необходимое для нахождения первой свободной ячейки на левом конце массива. Предположим, что алгоритм хеширования использует указатель, который позволяет следить за последней, бывшей до этого свободной ячейкой. При каждой коллизии указатель передвигается вправо до обнаружения новой свободной ячейки.

Этот алгоритм моделируется следующей игрой, которая начинается с пустого массива и указателя на нуль. Игра требует n «R-шагов», после выполнения которых вычисляется расстояние от указателя до ближайшей свободной ячейки. Когда имеется i незанятых ячеек, «R-шаг» с вероятностью pi занимает пустую ячейку и с вероятностью $1 - pi$ — самую левую свободную ячейку. Второй случай соответствует коллизии, при этом указатель устанавливается на только что занятую ячейку. Окончательный счет игры — расстояние между указателем и ближайшей свободной ячейкой — дает стоимость нахождения пустой ячейки при будущей коллизии.

Воспользуемся еще раз производящей функцией. Пусть $G_{mn}(z)$ есть

$$\sum_k (\text{вероятность того, что счет равен } k \text{ для массива размера } m \text{ после } n\ R\text{-шагов})\, z^k. \qquad (3.28)$$

Будем искать оператор для построения G_{mn}, рассматривая задачи меньшего размера и используя «индукцию» другого типа. Предположим, что имеется последовательность R-шагов;

3 1 4 C 7

Числа означают занятые ячейки, а C символизирует коллизию, когда занимается самая левая свободная ячейка и на нее устанавливается указатель. Каждая такая последовательность шагов встречается с некоторой вероятностью и приводит к некоторому счету, как определено выше.

Вместо того чтобы добавлять новый элемент в конец последовательности, будем помещать его в начало — отсюда выражение «индукция с другого конца». Точнее, будем добавлять новый ключ и новую ячейку к массиву. Ключ может быть вставлен в старый массив где угодно, поэтому можно рассматривать это как добавление элемента $k \in \left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \ldots \right.$ $\left. \ldots, \frac{2m+1}{2}, C\right\}$ в начало последовательности с ее перенумерацией для того, чтобы снова сделать последовательность целой.

Например, рассмотрим указанные выше R-шаги и предположим, что размер массива $m = 7$. Когда происходит коллизия C, ячейка 1 занята, так что занимается ячейка 2. В конце игры ближайшей свободной ячейкой оказывается 5, поэтому счет равен 3. Ниже перечислены возможные изменения в зависимости от того, какой новый R-шаг мы помещаем в начало последовательности.

Вероятность	Новый начальный элемент	Получающаяся последовательность	Счет
p	1	425C8	3
p	2	415C8	3
p	3	415C8	4
p	4	315C8	4
p	5	314C8	4
p	6	314C8	3
p	7	314C8	3
p	8	314C7	3
$1-8p$	C	425C8	3

Как это будет влиять на окончательный счет? Счет равен длине области между указателем и ближайшей свободной ячейкой. Если новый ключ вставляется в эту область, счет увеличивается на единицу; в противном случае счет остается неизменным. Поскольку вероятность попадания в эту область пропорциональна ее размеру, монстр — пожиратель печенья поднимает свою безобразную голову и с помощью знакомого оператора Φ поглощает остаток этого анализа:

$$G_{mn}(x) = \Phi G_{m-1,\, n-1}(x). \tag{3.29}$$

3.3. Открытая адресация: равномерное хеширование

Внесем небольшое изменение в предыдущую игру. Вместо R-шага будем использовать T-шаг, который наугад заполняет пустую ячейку и устанавливает указатель на левый конец массива. Окончательный счет равен расстоянию от левого конца массива до первой свободной ячейки.

Поводом для этой новой игры является несколько нереалистическое предположение, что каждый ключ обладает случайной перестановкой последовательности проб. Ключ следует своей последовательности проб, пока не находит пустую ячейку. Это допущение, обычно называемое «равномерным хешированием», будет уточнено позже при обсуждении «вторичного скучивания».

Хотелось бы установить среднее число записей, с которыми должен быть сверен $(n+1)$-й элемент в своей последовательности проб. Без потери общности можно считать, что в качестве последовательности проб этот элемент имеет последовательность $1, 2, 3, \ldots$, переупорядочивая, если необходимо, массив так, чтобы это стало справедливым. Тогда для вставки $(n+1)$-го элемента требуется найти самую левую свободную ячейку, и это равно счету описанной выше T-шаговой игры.

Используя «индукцию с другого конца», мы снова наталкиваемся на монстра. На этот раз он занял ячейки в начале массива. Тем не менее следует быть внимательными по отношению к вероятности p: вероятность попадания в данную ячейку равна $1/m$, поэтому оператор Φ есть

$$\Phi_m = 1 + \frac{1}{m}(x-1)\,xD. \tag{3.30}$$

Вспомним, что «индукция с другого конца» добавляет как новый ключ, так и новую щель в массив, так что эта вероятность меняется и мы должны параметризовать оператор Φ индексом m.

В случае параметризованного оператора производящая функция для объема монстра задается формулой

$$G_{mn}(x) = \Phi_m \Phi_{m-1} \ldots \Phi_{m-n+1} x. \tag{3.31}$$

Операторы V_1 и V_2 по-прежнему являются собственными операторами; они дают произведения, которые замечательно сворачиваются. Например, среднее число проб, используемых для вставки $(n+1)$-го элемента, есть

$$V_1 G_{mn}(x) = \left(1 + \frac{1}{m}\right)\left(1 + \frac{1}{m-1}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{m-n+1}\right) = \\ = \frac{m+1}{m-n+1}. \tag{3.32}$$

А поскольку все V_i сворачиваются, вот вам систематический способ вычисления среднего и дисперсии числа проб, необходимых для вставки $(n+1)$-го элемента.

3.4. Открытая адресация: вторичное скучивание

В модели вторичного скучивания каждый ключ отображен в единственное хеш-значение, и это хеш-значение доставляет случайную перестановку последовательности проб. Вместо того чтобы каждый ключ имел свою собственную случайную последовательность проб, ключи разделяют последовательности проб с теми ключами, которые отображаются в то же самое хеш-значение. Хеш-значения и последовательности проб по-прежнему являются случайными, но общность последовательности проб делает коллизии более вероятными.

На этот раз игра, в которую мы играем, содержит S-правило: если самая левая ячейка не занята — используется правило $S0$, в противном случае — правило $S1$. По правилу $S0$ пустая ячейка занимается наугад. Правило $S1$ включает выбор: с вероятностью p занимается самая левая пустая ячейка и с вероятностью $q = 1 - p$ наугад занимается любая пустая ячейка.

S-правило охватывает явление вторичного скучивания. Без потери общности можно предполагать, что каждый ключ, попадающий в крайнюю левую ячейку, имеет последовательность проб 1, 2, 3, ... Тогда по правилу $S1$ с вероятностью p мы хешируем до крайней левой ячейки, повторно используем ту же самую хеш-последовательность 1, 2, 3, ... и занимаем самую левую пустую ячейку.

Счетом игры является расстояние до первой свободной ячейки и имеются две «производящие счет» функции для этих двух правил: $H_{mn}(x)$ для правила $S0$ и $G_{mn}(x)$ для правила $S1$. Рассмотрим вначале функцию $G_{mn}(x)$:

$$G_{mn}(x) = (px + q\Phi)\, G_{m-1,\, n-1}(x). \tag{3.33}$$

Оператор для G устанавливается с использованием «индукции с другого конца». С вероятностью p ключ вставляется в позицию 1 и увеличивает объем монстра на единицу; с вероятностью q мы играем в прежнюю игру «монстр — пожиратель печенья», присоединяя ключ наугад.

Существует тонкое различие между вероятностями в этом операторе: вероятность p зафиксирована в $1/m$ до индукционного шага и остается фиксированной при уменьшении m. Однако оператор Φ_m параметризован индексом m, так что вероятность в этом операторе увеличивается с уменьшением m. Данное различие является именно тем, что нам надо, поскольку вероятность разделения новым ключом одной и той же последовательности проб с определенным старым ключом зафиксирована в $1/m$ на протяжении всего процесса.

Величина $\Omega_m = px + q\Phi_m$ в (3.33) не имеет собственного оператора, но имеет «скользящий» оператор

$$(U_1 - (m+1)U_0)\,\Omega_m = \left(1 + \frac{q}{m}\right)(U_1 - mU_0). \qquad (3.34)$$

Скользящий оператор $A_m = U_1 - mU_0$ изменяет свой параметр на единицу, когда он переставляется с Ω_m, а если требуется вычислить U_1, подобное обстоятельство так же ценно, как и наличие собственного оператора:

$$A_{m+1}G_{mn}(x) = \left(1 + \frac{q}{m}\right)\left(1 + \frac{q}{m-1}\right)\cdots$$
$$\cdots\left(1 + \frac{q}{m-n+1}\right)A_{m-n+1}x, \qquad (3.35)$$

$$G_{mn}(x) = \left(1 + \frac{q}{m}\right)\left(1 + \frac{q}{m-1}\right)\cdots$$
$$\cdots\left(1 + \frac{q}{m-n+1}\right)(n-m) + (m-1). \qquad (3.36)$$

Теперь можно обратить свое внимание на функцию $H_{mn}(x)$ и правило $S0$. Пока первая ячейка не занята, ситуация схожа с поведением монстра. Как только достигнута первая ячейка, мы переключаемся на $G_{mn}(x)$. Используя «индукцию с другого конца», получаем рекуррентное соотношение

$$H_{mn}(x) = \Phi_m H_{m-1,\,n-1}(x) - \frac{x}{m}H_{m-1,\,n-1}(x) +$$
$$+ \frac{x}{m}G_{m-1,\,n-1}(x). \qquad (3.37)$$

Средний член соответствует ошибочному использованию H оператором Φ_m в случае занятой первой ячейки.

Поскольку игра начинается с правила $S0$, функция H_{mn} является требуемой производящей функцией для всей игры, и хотелось бы найти среднее значение $U_1 H_{mn}(x)$:

$$U_1 H_{mn}(x) = \left(1 + \frac{1}{m}\right) U_1 H_{m-1,\,n-1} - \frac{U_1 x}{m} H_{m-1,\,n-1} + \frac{U_1 x}{m} G_{m-1,\,n-1} = U_1 H_{m-1,\,n-1} + \frac{U_1}{m} G_{m-1,\,n-1}. \quad (3.38)$$

Аналогичное рекуррентное соотношение для G_{mn} может быть выведено из уравнения (3.34):

$$U_1 G_{mn}(x) = \left(1 + \frac{q}{m}\right) U_1 G_{m-1,\,n-1} + p. \quad (3.39)$$

Сложившаяся ситуация требует нового операторного трюка. Заметим, что линейная комбинация H и G воспроизводит себя:

$$U_1 \left(H_{mn} - \frac{1}{q} G_{mn}\right) = U_1 \left(H_{m-1,\,n-1} - \frac{1}{q} G_{m-1,\,n-1}\right) - \frac{p}{q}. \quad (3.40)$$

К тому же член p/q не зависит от m. Поэтому

$$U_1 \left(H_{mn} - \frac{1}{q} G_{mn}\right) = U_1 \left(H_{m-n,\,0} - \frac{1}{q} G_{m-n,\,0}\right) - \frac{np}{q}. \quad (3.41)$$

При заданных граничных условиях $H_{m,0} = G_{m,0} = x$ и ранее вычисленном $U_1 G_{mn}$ можно определить $U_1 H_{mn}$:

$$U_1 H_{mn} = U_1 \left(H_{m-n,\,0} - \frac{1}{q} G_{m-n,\,0} + \frac{1}{q} G_{mn}\right) - \frac{np}{q} = 1 + \frac{1}{q}\left(m - np + (n-m) \prod_{k=m-n+1}^{m} \left(1 + \frac{q}{k}\right)\right). \quad (3.42)$$

(Интересно сравнить полученное решение с традиционным подходом к хешированию из книги Кнута [III, упр. 6.4-44].)

Последний операторный трюк имеет сильное сходство с собственными и скользящими операторами, которые использовались ранее. Во всех этих случаях мы двигались по рекуррентной последовательности с помощью самовоспроизводящегося процесса. Сила операторных методов заключается в их способности скрадывать несущественные детали, так что соответствующая самовоспроизводимость становится явной; поэтому величины типа средних и дисперсий становятся сравнительно легкими для вычисления.

Глава 4
Асимптотический анализ

4.1. Основные понятия

Нельзя ручаться, что возникающие при исследовании алгоритмов суммы и рекуррентные соотношения будут иметь простые решения в замкнутой форме. На самом деле азарт анализа алгоритмов во многом вызывается разнообразием математических методов, к которым (порой рыдая и стеная) прибегают исследователи в своих попытках разобраться в алгоритмах. Зачастую исследователи вынуждены обращаться к асимптотическому анализу.

Цель асимптотического анализа состоит в нахождении хорошего приближения к точному решению. Часто при больших значениях входящих в него параметров относительная ошибка такого приближения становится малой. Мы будем пытаться искать как можно более точное асимптотическое приближение; например, гораздо существеннее знать, что время выполнения некоторого алгоритма есть $3n^2+7n+O(1)$, а не просто $O(n^2)$.

Внимательное отношение к асимптотическим членам полезно по нескольким причинам. Зачастую приближения сходятся настолько быстро, что для подтверждения правильности своего решения исследователю достаточно проверить лишь несколько первых приближений. В практических задачах важно знать не только поведение главного члена решения; к примеру, $1.8 \ln n + 20$ будет меньше, чем $2.0 \ln n + 10$, лишь при $n > e^{50}$. Кроме того, погоня за дополнительными асимптотическими членами обычно приводит к более общим и мощным математическим методам.

Цель настоящей главы — ознакомить читателя с основным аппаратом асимптотического анализа, в частности с O-оцениванием и методами раскрутки и расчленения. Эта техника будет бегло изложена в ближайших разделах. В последнем разделе выводится один асимптотический результат; каждый этап этого в целом трудного вывода демонстрирует основные приемы асимптотического анализа.

4.1.1. Обозначения

Определение символа O (или $\leqslant$): говорят, что $f(n) = O(g(n))$ (или $f \leqslant g(n)$), если существуют целые N и K, такие, что $|f(n)| \leqslant Kg(n)$ при всех $n \geqslant N$, Символ Ω (или $\geqslant$) определяется в том же духе: $f(n)=\Omega(g(n))$ (или $f(n)\geqslant g(n)$), если существуют целые N и K, такие, что $f(n)\geqslant Kg(n)$ при всех $n\geqslant N$[9]).

В случае, когда выполнены оба условия, соответствующее отношение обозначается как $f(n)=\Theta(g(n))$ или $f(n)\asymp g(n)$ (см. Кнут [76а]).

Для символа «o малое» имеются аналогичные определения. Так, например, говорят, что $f(n)=o(g(n))$ (или $f(n)\prec g(n)$), если $\lim_{n\to\infty}f(n)/g(n)=0$. Имеется также обозначение для отношения эквивалентности: $f(n)\sim g(n)$, если $\lim_{n\to\infty}f(n)/g(n)=1$. Тем не менее мы будем стараться избегать этих обозначений, поскольку в них не содержится информации о скорости сходимости к соответствующим пределам. К примеру, мы будем отдавать предпочтение оценке типа $O(n^{-1/2})$ вместо более слабой оценки $o(1)$.

4.1.2. *Раскрутка*[10])

Метод раскрутки полезен в тех случаях, когда анализируемая функция удовлетворяет некоторому неявному уравнению. Последовательно подставляя в это уравнение асимптотическое приближение к функции, полученное на предыдущем шаге, мы тем самым все время будем улучшать искомое приближение. Вот пример из книги Де Брёйна [70]:

$$f(t)e^{f(t)}=t. \tag{4.1}$$

Это уравнение может быть переписано в виде

$$f(t)=\ln t-\ln f(t). \tag{4.2}$$

Для «затравки» (prime the pump — *Перев.*) заметим, что $f(t)>1$ при $t>e$. Учитывая это в уравнении (4.2), получаем, что

$$f(t)=O(\ln t). \tag{4.3}$$

Подстановка этого приближения обратно в (4.2) дает более точный результат:

$$f(t)=\ln t+O(\ln\ln t). \tag{4.4}$$

Для дальнейшего улучшения полученного результата снова подставим его в уравнение (4.2):

$$\begin{aligned} f(t)&=\ln t-\ln\ln t-\ln\left(1+O\left(\frac{\ln\ln t}{\ln t}\right)\right)=\\ &=\ln t-\ln\ln t+O\left(\frac{\ln\ln t}{\ln t}\right). \end{aligned} \tag{4.5}$$

Продолжая подобное «раскручивание», можно получить искомое приближение с любой степенью точности.

4.1.3. Расчленение

Метод расчленения применяется главным образом к суммам и интегралам. В типичной ситуации область суммирования является большой, а выражение под знаком суммы состоит из нескольких компонент. Никакая из компонент слагаемого не является малой на всей области суммирования, но если область «расчленить» на части, то каждая часть суммы станет (по разным причинам) малой и таким образом показывается, что в целом сумма также мала.

Продемонстрируем технику расчленения на примере суммы

$$f(n) = \sum_{3 \leqslant d \leqslant n/2} \frac{1}{d\,(n/d)^d}. \tag{4.6}$$

Разобьем область суммирования на три интервала. Сумма по первому интервалу, $3 \leqslant d \leqslant 8$, меньше, чем

$$\sum_{3 \leqslant d \leqslant 8} \frac{1}{3\,(n/8)^3} = O\,(n^{-3}). \tag{4.7}$$

Обратите внимание, что буквы d в исходной формуле заменяются на 3 и 8 в зависимости от того, какое из этих значений приводит к большей величине слагаемого. Так как число слагаемых фиксировано, то сумма ограничена величиной порядка $O(n^{-3})$.

На втором интервале, $8 \leqslant d \leqslant \sqrt{n}$, переменная d также заменяется ее экстремальными значениями, так что в этом случае сумма меньше, чем

$$\sum_{8 \leqslant d \leqslant \sqrt{n}} \frac{1}{8\,(n/\sqrt{n})^8} = O\,(n^{-4}\sqrt{n}). \tag{4.8}$$

Здесь $O\,(n^{-4}\sqrt{n})$ есть результат суммирования $O(\sqrt{n})$ членов, порядок каждого из которых не превышает $O(n^{-4})$.

Сумма, вычисленная по последнему интервалу, $\sqrt{n} \leqslant d \leqslant n/2$, совсем мала, поскольку она меньше, чем

$$\sum_{\sqrt{n} \leqslant d \leqslant n/2} \frac{1}{\sqrt{n}\,2^{\sqrt{n}}} = O\left(\frac{\sqrt{n}}{2^{\sqrt{n}}}\right). \tag{4.9}$$

Объединяя результаты для каждого из трех интервалов, получаем, что в целом $f(n)$ есть $O(n^{-3})$.

Из рассмотренного примера видно, что самое трудное в методе расчленения — это выбор интервалов. В частности, выбранные нами границы второго интервала 8 и $\sqrt{n}$ не являются «неприкосновенными» — выбор 10 и $\sqrt[3]{n}$ столь же хорош. Тем не менее выбор 8 и $\sqrt{n}$ — это своего рода искусство, требующее проникновения в характер поведения слагаемых на всей области суммирования.

4.1.4. *Пределы пределов*

Случается, что асимптотический анализ приводит к двум и более предельным переходам. При этом часто важен порядок пределов, и полезно знать, когда возможна их перестановка. В простом случае, типа

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_{mn}, \tag{4.10}$$

абсолютная сходимость последовательности a_{mn} позволяет как угодно переставлять ее члены; например, можно вначале суммировать по n, а затем по m.

Позже в данной главе нам придется менять порядок пределов в более деликатных ситуациях. В частности, нам потребуется обращение следующей теоремы.

Абелева теорема. *Если*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k = A,$$

то

$$\lim_{z\to 1} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k z^k = A.$$

(Здесь в дальнейшем предполагается, что z стремится к единице снизу.)

Однако обратное утверждение справедливо не всегда.

Не-теорема. *Если*

$$\lim_{z\to 1} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k z^k = A,$$

то

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k = A.$$

Де Брёйн [70] в своей книге *Асимптотические методы в анализе* приводит следующий контрпример. Пусть

$$f(z) = \frac{1-z}{1+z} = 1 - 2z + 2z^2 - 2z^3 + \ldots, \tag{4.11}$$

и обозначим через a_k коэффициенты разложения функции $f(z)$ в степенной ряд. Этот ряд сходится абсолютно внутри круга единичного радиуса с центром в начале координат, и

$$\lim_{z\to 1} f(z) = 0. \tag{4.12}$$

Тем не менее частичные суммы

$$a_0 + a_1 + \ldots + a_n = (-1)^n \tag{4.13}$$

к нулю не сходятся.

Таубер предложил дополнительное требование, гарантирующее обращение теоремы Абеля. Его условие состояло в том, что коэффициенты a_k должны быть порядка $o(k^{-1})$. Позже Харди и Литлвуд ослабили это условие до $a_k > -Ck^{-1}$ при некотором $C > 0$, но теорема по-прежнему именуется тауберовой в силу ее общего характера: тауберовы теоремы дают условия обращения абелевых теорем.

Тауберова теорема. *Если*

$$\lim_{z\to 1} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k z^k = A$$

и если $a_k > -Ck^{-1}$ *при некотором* $C > 0$, *то*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k = A.$$

Собрание более глубоких тауберовых теорем содержится в книге Харди [49].

4.1.5. Сводка полезных асимптотических разложений

В приведенных ниже асимптотических формулах n стремится к бесконечности, а ε — к нулю.

$$H_n = \ln n + \gamma - \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + O(n^{-4}). \tag{4.14}$$

$\left(\text{Напомним, что } H_n = \sum\limits_{1\leqslant k\leqslant n} \frac{1}{k}. - \textit{Ред.}\right)$

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} + O(n^{-3})\right), \tag{4.15}$$

$$\ln(1+\varepsilon) = \varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^3}{3} + \ldots + (-1)^{i-1}\frac{\varepsilon^i}{i} + O(\varepsilon^{i+1}), \tag{4.16}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^i = \begin{cases} \dfrac{B_{i+1}(n) - B_{i+1}}{i+1} & \text{при целых} \quad i,\ n > 0, \\[2ex] \dfrac{n^{i+1}}{i+1} + \dfrac{n^i}{2} + \dfrac{in^{i-1}}{12} + O(n^{i-2}) & \text{при} \quad i > 1. \end{cases} \tag{4.17}$$

(Здесь $B_i(x)$ и B_i — соответственно многочлены и числа Бернулли; см. разд. 4.2.2.)

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k \ln k \ln \ln k \ldots (\ln^{(i)} k)^{1+\varepsilon}} = O(1), \quad \varepsilon > 0. \tag{4.18}$$

(Последнее соотношение устанавливает «точку поворота» для сумм: если $\varepsilon = 0$, то соответствующих сумм не существует. Например, ряды

$$\sum \frac{1}{k}, \quad \sum \frac{1}{k \ln k} \quad \text{и} \quad \sum \frac{1}{k \ln k \ln \ln k}$$

расходятся.)

Имеется несколько способов получения грубых оценок. Один из них состоит в замене сумм их интегральными аналогами. В разд. 4.2.2, посвященном формуле суммирования Эйлера, мы выясним, когда возможна подобная замена и как можно уточнить получаемый при этом приближенный результат. Другой способ получения грубых оценок применим к случайной величине X со средним значением μ и дисперсией σ^2: неравенство Чебышёва утверждает, что

$$\text{Вер}(|X - \mu| \geqslant t) \leqslant \sigma^2/t^2. \tag{4.19}$$

В разд. 4.3.3 будет подробно рассмотрен случай, когда X является суммой независимых случайных величин.

4.1.6. Пример

Обратимся теперь к задаче вычисления вероятности того, что многочлен степени n разложим на неприводимые множители попарно различных степеней, рассматриваемых по модулю большого простого числа p, — задаче, которая встречается при анализе некоторых алгоритмов разложения на множители (Кнут [II, разд. 4.6.2]). Вероятность того, что многочлен n-й степени сам неприводим по модулю p, равна

$$\frac{1}{n} + O(p^{-n/2}). \tag{4.20}$$

(Этот результат фигурирует в качестве упр. 4.6.2-4 во втором томе *Искусства программирования для ЭВМ* Д. Кнута.) Величина модуля p не представляет интереса, поэтому устремим p к бесконечности и примем $1/n$ из предыдущей формулы в качестве основы для рассмотрения более трудной задачи разложения многочленов на множители различных степеней.

Решение этой задачи основано на использовании одной производящей функции для разбиений. Искомым решением (т. е. вероятностью разложения на сомножители) является коэффициент при z^n в производящей функции

$$h(z)=\prod_{k\geqslant 1}\left(1+\frac{z^k}{k}\right). \tag{4.21}$$

Для того чтобы показать это, заметим, что если h_n — коэффициент при z^n, то $h_n z^n$ будет суммой членов вида

$$\frac{z^{i_1}}{i_1}\frac{z^{i_2}}{i_2}\cdots\frac{z^{i_m}}{i_m}, \tag{4.22}$$

где все $i_1, i_2, \ldots, i_m$ различны между собой. Каждый член вида (4.22) соответствует разбиению числа n на различные слагаемые $i_1, i_2, \ldots, i_m$. Предположим, что мы собираемся представить многочлен степени n в виде произведения многочленов, имеющих степени $i_1, i_2, \ldots, i_m$. (Считается, что как эти «малые» многочлены, так и «большой» многочлен нормированы; впрочем, значения старших коэффициентов не влияют на последующие результаты.) Всего имеется p^{i_1} многочленов степени i_1, из которых p^{i_1}/i_1 неприводимы. Подсчитывая аналогичным способом число неприводимых многочленов других степеней, получаем общее число

$$\frac{p^{i_1}}{i_1}\frac{p^{i_2}}{i_2}\cdots\frac{p^{i_m}}{i_m}=\frac{p^n}{i_1 i_2\ldots i_m} \tag{4.23}$$

многочленов с неприводимыми множителями соответствующих степеней. Поскольку всего имеется p^n многочленов степени n, это означает, что величина

$$\frac{1}{i_1 i_2\ldots i_m} \tag{4.24}$$

из выражения (4.22) является вероятностью разложения многочлена на неприводимые составляющие соответственно степеней $i_1, i_2, \ldots, i_m$.

В целом h_n состоит из всех возможных разбиений, каждое из которых вносит вклад вида (4.22), и поскольку эти события между собой не пересекаются, то их вероятности суммируются. Таким образом, коэффициент h_n в производящей функции $h(z)$ действительно является вероятностью того, что многочлен степени n разложим на неприводимые множители различных степеней.

Однако производящая функция (4.21) не позволяет выразить h_n в замкнутом виде, и, скорее всего, это и невозможно. Поэтому попробуем найти асимптотическое выражение для h_n при $n\to\infty$. Логарифмируя $h(z)$ и разлагая каждый логарифм в ряд, получаем

$$h(z) = \exp\left(\sum_{k \geqslant 1}\left(\frac{z^k}{k} - \frac{z^{2k}}{2k^2} + \frac{z^{3k}}{3k^3} - \ldots\right)\right). \tag{4.25}$$

При $z < 1$ этот ряд сходится абсолютно, что позволяет производить необходимую перестановку его членов. Наша стратегия будет состоять в выделении бо́льших членов из начала ряда с последующим раздельным суммированием полученных рядов. Начнем с выделения членов z^k/k:

$$h(z) = \exp\left(\sum_{k \geqslant 1}\frac{z^k}{k} + \sum_{k \geqslant 1}\left(-\frac{z^{2k}}{2k^2} + \frac{z^{3k}}{3k^3} - \ldots\right)\right) = \frac{1}{1-z}\, g(z), \tag{4.26}$$

где

$$g(z) = \exp\left(\sum_{k \geqslant 1}\left(-\frac{z^{2k}}{2k^2} + \frac{z^{3k}}{3k^3} - \ldots\right)\right). \tag{4.27}$$

В этих обозначениях h_n является частичной суммой коэффициентов g_i в разложении $g(z)$:

$$h_n = \sum_{0 \leqslant j \leqslant n} g_j. \tag{4.28}$$

Как мы увидим позже, к h_n применима тауберова теорема; следовательно,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} h_n &= \lim_{z\to 1} g(z) = \exp\left(\sum_{k \geqslant 1}\left(-\frac{1}{2k^2} + \frac{1}{3k^3} - \ldots\right)\right) = \\ &= \exp\left(\sum_{k \geqslant 1}\left(\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) - \frac{1}{k}\right)\right) = \\ &= \exp\left(\lim_{n\to\infty}\left(\ln(n+1) - H_n\right)\right) = e^{-\gamma}.\end{aligned} \tag{4.29}$$

Таинственно появившаяся здесь константа γ — это постоянная Эйлера из асимптотики для гармонических чисел

$$H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + O(n^{-2}). \tag{4.30}$$

Впрочем, действительная тайна кроется в том, насколько быстро h_n сходятся к «странной» постоянной $e^{-\gamma}$. Для установления скорости сходимости тауберова предельная теорема не особенно полезна. Следовательно, необходимо выделить еще один член ряда из равенства (4.25) и продолжить более детальный анализ:

$$g(z) = p(z^2)\, q(z), \tag{4.31}$$

где

$$p(z)=\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{k\geqslant 1}\frac{z^k}{k^2}\right),$$
$$q(z)=\exp\left(\sum_{k\geqslant 1}\left(\frac{z^{3k}}{3k^3}-\frac{z^{4k}}{4k^4}+\ldots\right)\right). \tag{4.32}$$

Вначале возьмемся за функцию $p(z)$,

$$p'(z)=p(z)\left(-\frac{1}{2}\sum_{k\geqslant 1}\frac{z^{k-1}}{k}\right), \tag{4.33}$$

и выведем рекуррентное соотношение для ее коэффициентов:

$$-2np_n=\sum_{0\leqslant k<n}\frac{p_k}{n-k}. \tag{4.34}$$

Имея это неявное уравнение, можно воспользоваться методом раскрутки и получить хорошую оценку для p_n. В качестве «затравки» выберем $p_n=O(1)$ (справедливость этой оценки легко проверить по индукции). Подставляя это грубое приближение в уравнение (4.34), имеем

$$-2np_n=\sum_{0\leqslant k<n}\frac{O(1)}{n-k}, \tag{4.35}$$

и, заменяя правую часть равенства (4.35) на $O(\log n)$ — асимптотику гармонических чисел, — получаем улучшенную оценку для p_n:

$$p_n=O\left(\frac{\log n}{n}\right). \tag{4.36}$$

Еще одно повторение «раскрутки» дает оценку

$$p_n=O\left(\frac{\log n}{n}\right)^2. \tag{4.37}$$

На сей раз полученная оценка p_n достаточно хороша для того, чтобы приступить к расчленению суммы в уравнении (4.34). Хотелось бы иметь в асимптотическом выражении для p_n не только O-член; поэтому выделим доминирующую часть ряда в виде, удобном для суммирования:

$$\begin{aligned}-2np_n&=\sum_{0\leqslant k<n}\frac{p_k}{n}+\sum_{0\leqslant k<n}p_k\left(\frac{1}{n-k}-\frac{1}{n}\right)=\\&=\frac{1}{n}\sum_{k\geqslant 0}p_k-\frac{1}{n}\sum_{k\geqslant n}p_k+\frac{1}{n}\sum_{0\leqslant k<n}p_k\left(\frac{k}{n-k}\right)=\\&=\frac{1}{n}p(1)-\frac{1}{n}\sum_{k\geqslant n}O\left(\frac{\log k}{k}\right)^2+\frac{1}{n}\sum_{0\leqslant k<n}O\left(\frac{(\log k)^2}{k(n-k)}\right)=\\&=\frac{1}{n}e^{-\pi^2/12}+O\left(\frac{(\log n)^3}{n^2}\right).\end{aligned} \tag{4.38}$$

На последнем шаге мы вычислили $\rho(1)$, суммируя ряд

$$\sum_{k\geqslant 1}\frac{1}{k^2}=\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}; \tag{4.39}$$

второй член, $\sum\limits_{k\geqslant n} O(\log k/k)^2$, оценили посредством его интегрального аналога

$$\int\limits_n^{\infty}\left(\frac{\log x}{x}\right)^2 dx=O\left(\frac{(\log n)^2}{n}\right), \tag{4.40}$$

и, наконец, последнюю сумму мы вычислили с помощью элементарных дробей:

$$\begin{aligned}\sum_{0\leqslant k<n} O\left(\frac{(\log k)^2}{k(n-k)}\right)&=O\left((\log n)^2\sum\frac{1}{k(n-k)}\right)=\\&=O\left(\frac{(\log n)^2}{n}\sum\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{n-k}\right)\right)=\\&=O\left(\frac{(\log n)^3}{n}\right).\end{aligned} \tag{4.41}$$

Возвращаясь к равенству (4.38), имеем уточненную оценку p_n:

$$p_n=\frac{-e^{-\pi^2/12}}{2n^2}+O\left(\frac{\log n}{n}\right)^3. \tag{4.42}$$

Опуская детали, отметим, что еще одно повторение «раскрутки» приводит полученное выражение для p_n к виду

$$p_n=\frac{-e^{-\pi^2/12}}{2n^2}+O\left(\frac{\log n}{n^3}\right). \tag{4.43}$$

Поскольку с функцией $\rho(z)$ мы благополучно покончили, обратим теперь внимание на оставшуюся часть равенства (4.31) — функцию $q(z)$. На этот раз мы выделим в разложении для $q(z)$ члены при $k=1$, получая

$$q(z)=s(z)\,r(z), \tag{4.44}$$

где

$$\begin{aligned}s(z)&=\exp\left(\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}+\frac{z^5}{5}-\dots\right),\\ r(z)&=\exp\left(\sum_{k\geqslant 2}\left(\frac{z^{3k}}{3k^3}-\frac{z^{4k}}{4k^4}+\dots\right)\right).\end{aligned} \tag{4.45}$$

Выражение для $s(z)$ может быть переписано в виде

$$s(z)=\exp(\ln(1+z)-z+z^2/2)=(1+z)\,e^{-z+(z^2/2)}, \tag{4.46}$$

откуда мы заключаем, что коэффициенты s_n этой производящей функции экспоненциально малы.

В выражении для $r(z)$ соберем вместе члены с одинаковыми показателями степеней:

$$r(z) = \exp\left(\sum_{k \geqslant 3} z^k \sum_{3 \leqslant d \leqslant k/2\,:\,d \mid k} \frac{\pm 1}{d\,(k/d)^d}\right). \tag{4.47}$$

Здесь внутренняя сумма есть $O(k^{-3})$ (это следует из примера, которым в разд. 4.1.3 был проиллюстрирован метод расчленения сумм). Дифференцируя выражение (4.47),

$$r'(z) = r(z) \sum_{k \geqslant 3} kz^{k-1} O\left(k^{-3}\right), \tag{4.48}$$

и приравнивая коэффициенты при z^k, получаем рекуррентное соотношение для r_n:

$$nr_n = \sum_{0 \leqslant k < n} r_k O\left(\frac{1}{n-k}\right)^2. \tag{4.49}$$

А это рекуррентное соотношение можно «раскрутить», получая для r_n последовательно оценки $O(1)$, $O(n^{-1})$, $O(n^{-2})$ и $O(n^{-3})$.

После того как исходная задача была раздроблена на многочисленные подзадачи, мы наконец успешно расправились с каждой из них, и теперь можем приступить к сборке окончательного результата.

Вначале из функций $r(z)$ и $s(z)$ составим функцию $q(z)$ с коэффициентами

$$q_n = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} r_k s_{n-k}. \tag{4.50}$$

Это свертка двух рядов, члены которых имеют порядок $O(n^{-3})$, так что результат также равен $O(n^{-3})$. (Для того чтобы увидеть это, надо разбить область суммирования на две части: $0 \leqslant k \leqslant n/2$ и $0 \leqslant n-k \leqslant n/2$. Читатель может попытаться выяснить условия, которые необходимо наложить на $f(n)$, для того чтобы свертка двух рядов, члены которых имеют порядок $O(f(n))$, имела такой же порядок.)

Затем из функций $q(z)$ и $p(z)$ составим функцию $g(z)$:

$$g(z) = p(z^2)\,q(z) \tag{4.51}$$

с коэффициентами

$$g_n = \sum_{2k+l=n} p_k q_l \tag{4.52}$$

и просуммируем g_n, получая

$$h_h = \sum_{j \leqslant n} g_j = \sum_{2k+l \leqslant n} p_k q_l. \tag{4.53}$$

Мы уже знаем, что сумма ряда в правой части равенства (4.53), если ряд расширить до бесконечного, равна $e^{-\gamma}$. Поэтому сосредоточим наше внимание на «хвосте» суммы ряда

$$h_n = e^{-\gamma} - \sum_{2k+l>n} p_k q_l =$$
$$= e^{-\gamma} - \Big(\sum_{l\geqslant 0} q_l \Big(\sum_{2k>n} p_k + \sum_{n-l<2k\leqslant n} p_k\Big)\Big). \quad (4.54)$$

Внутренние суммы можно оценить, используя результаты предыдущих вычислений $\Sigma_k p_k$. Первая сумма:

$$\sum_{2k>n} p_k = \sum_{2k>n} \frac{-p(1)}{2k^2} + \sum_{2k>n} O\left(\frac{\log n}{k^3}\right) =$$
$$= \frac{-p(1)}{n} + O\left(\frac{\log n}{n^2}\right). \quad (4.55)$$

Здесь мы не заменяем функцию $p(1)$ ее значением $e^{-\pi^2/12}$: это окажется полезным для объединения $p(1)$ и $q(1)$ с целью получения $e^{-\gamma}$. На последнем шаге к обеим суммам была применена формула суммирования Эйлера.

Другую сумму в равенстве (4.54) можно оценить, разбивая область суммирования на две части:

$$\sum_{l\geqslant 0} q_l \sum_{n-l<2k\leqslant n} p_k = \sum_{0\leqslant l<n/2} q_l \sum_{n-l<2k\leqslant n} p_k + \sum_{l\geqslant n/2} \sum_{n-l\leqslant 2k\leqslant n} p_k =$$
$$= O\Big(\sum_{0\leqslant l<n/2} q_l \cdot l\,|p_{n/4}| + \sum_{l\geqslant n/2} q_l \cdot |p(1)|\Big) =$$
$$= O(n^{-2}). \quad (4.56)$$

Теперь, оценив все части равенства (4.54), можно наконец вычислить h_n:

$$h_n = e^{-\gamma} + \frac{p(1)\,q(1)}{n} + O\left(\frac{\log n}{n^2}\right) =$$
$$= e^{-\gamma} + \frac{e^{-\gamma}}{n} + O\left(\frac{\log n}{n^2}\right). \quad (4.57)$$

С помощью похожих, но более простых методов можно показать, что $g_n = O(n^{-1})$, так что использование выше тауберовой теоремы было действительно оправданно.

4.2. Интегрирование по Стилтьесу и асимптотики

Интегралы служат полезным инструментом асимптотического анализа, поскольку их можно использовать для приближенного вычисления сумм; при этом полезно иметь представление о том, как интеграл взаимодействует с символом O. По этой причине мы и будем изучать интеграл Стилтьеса. В книге Апостола [57] приведены следующее определение и его немедленные следствия.

Определение. Пусть f и g — вещественнозначные функции, определенные на интервале $[a, b]$, и пусть P — некоторое разбиение интервала $[a, b]$ точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Определим сумму

$$S(P) = \sum_{0 \leqslant k < n} f(t_k)(g(x_{k+1}) - g(x_k)), \quad t \in [x_k, x_{k+1}]. \tag{4.58}$$

Величина A называется *интегралом Стилтьеса* $\int_a^b f(t)\,dg(t)$ тогда и только тогда, когда при любом $\varepsilon > 0$ существует разбиение P_ε, такое, что каждое измельчение (refinement. — *Перев.*) P разбиения P_ε дает сумму, близкую к A, а именно $|S(P) - A| < \varepsilon$.

Следствия.

1) *Интеграл Стилтьеса имеет не более одного значения.*

2) *Интеграл Стилтьеса линеен по f и g.*

3) (*Аддитивность.*) $\int_a^b + \int_b^c = \int_a^c$.

4) (*Интегрирование по частям.*) *Если* $\int_a^b f(t)\,dg(t)$ *существует, то* $\int_a^b g(t)\,df(t)$ *также существует и сумма этих интегралов равна* $f(t)\,g(t)\,|_a^b$.

5) (*Замена переменной.*) *Если h — непрерывная неубывающая функция, то*

$$\int_a^b f(h(t)\,dg(h(t)) = \int_{h(a)}^{h(b)} f(t)\,dg(t). \tag{4.59}$$

6) *Если* $\int_a^b f(t)\,dg(t)$ *существует, а производная* $g'(t)$ *непрерывна на* $[a, b]$, *то*

$$\int_a^b f(t)\,dg(t) = \int_a^b f(t)\,g'(t)\,dt. \tag{4.60}$$

7) *Если a и b — целые числа, а функция f непрерывна справа от целых точек интервала* $[a, b]$, *то*

$$\int_a^b f(t)\,dg(\lceil t\rceil)=\sum_{a\leqslant k\leqslant b} f(k)\,\Delta g(k), \tag{4.61}$$

где $\Delta g(k)\coloneqq g(k+1)-g(k)$.

7′) *Если a и b — целые числа, а функция f непрерывна слева от целых точек интервала* $[a, b]$, *то*

$$\int_a^b f(t)\,dg(\lfloor t\rfloor)=\sum_{a< k\leqslant b} f(k)\,\nabla g(k), \tag{4.62}$$

где $\nabla g(k)\coloneqq g(k)-g(k-1)$.

8) *Если a и b — целые числа, а функция g непрерывна слева от целых точек интервала* $[a, b]$, *то*

$$\int_a^b f(\lfloor t\rfloor)\,dg(t)=\sum_{a\leqslant k< b} f(k)\,\Delta g(k). \tag{4.63}$$

9) (*Производная от интеграла.*)

$$\int_a^b f(t)\,d\int_a^t g(u)\,dh(u)=\int_a^b f(t)\,g(t)\,dh(t). \tag{4.64}$$

10) *Если* $\int f(t)\,dg(t)$ *существует на интервале* $[a, b]$, *то* $\int f(t)\,dg(t)$ *существует на любом подынтервале интервала* $[a, b]$.

11) *Интеграл* $\int_a^b f(t)\,dg(t)$ *существует, если f — непрерывная функция, а g — функция ограниченной вариации на* $[a, b]$.

Под ограниченностью вариации функции g понимается существование интеграла $\int_a^b |dg(t)|$. Интуитивно это означает, что вариация $|g(x_{k+1})-g(x_k)|$ уменьшается по мере измельчения разбиения P. Одной непрерывности здесь недостаточно; например, для функций $f(t)=g(t)=\sqrt{t}\cos(1/t)$ интеграла Стилтьеса не существует.

12) (*Суммирование по частям.*) *Сопоставление следствий 4, 7 и 7′ при целых a и b дает очень полезную формулу*:

$$\sum_{a\leqslant k< b} f(k)\,\Delta g(k)=f(k)\,g(k)\,\Big|_a^b-\sum_{a< k\leqslant b} g(k)\,\nabla f(k).$$

4.2.1. *Символ O и интегралы*

Приведенные выше основные свойства интеграла Стилтьеса позволяют доказать две теоремы, которые обусловливают возможность вынесения символа O за знак интеграла.

Теорема 1. *Если g — монотонно возрастающая функция, а функция f положительна, то*

$$\int_a^b O(f(t))\,dg(t) = O\left(\int_a^b f(t)\,dg(t)\right) \tag{4.65}$$

при условии, что оба интеграла существуют.

Доказательство. Напомним, что запись $a(t) = O(f(t))$[11]) означает существование постоянной M, такой, что $|a(t)| < Mf(t)$. Поскольку по предположению $f(t)$ и $dg(t)$ неотрицательны, то $\int_a^b |a(t)|\,dg(t) < \int_a^b Mf(t)\,dg(t)$, и, вынося M за знак интеграла, получаем утверждение теоремы.

Теорема 2. *Если f и g — монотонно возрастающие положительные функции, то*

$$\int_a^b f(t)\,dO(g(t)) = O(f(a)\,g(a)) + O(f(b)\,g(b)) + O\left(\int_a^b f(t)\,dg(t)\right) \tag{4.66}$$

при условии, что все интегралы существуют.

Доказательство. Обозначим через $b(t)$ функцию, которая есть $O(g(t))$. Интегрируя по частям, получаем, что

$$\int_a^b f(t)\,db(t) = f(t)\,b(t)\,\Big|_a^b - \int_a^b b(t)\,df(t). \tag{4.67}$$

Применяя к последнему интегралу теорему 1, имеем

$$\int_a^b f(t)\,dO(g(t)) = O(f(a)\,g(a)) + O(f(b)\,g(b)) + O\left(\int_a^b g(t)\,df(t)\right). \tag{4.68}$$

Повторное использование формулы интегрирования по частям с целью перестановки f и g завершает доказательство теоремы.

4.2.2. *Формула суммирования Эйлера*

Интегрирование по Стилтьесу обеспечивает теоретическую основу для аппроксимации сумм интегралами. Допустим, что требуется приближенно просуммировать значения $f(k)$. Начнем со свойства 7 интеграла Стилтьеса:

$$\sum_{a \leqslant k < b} f(k) = \int_a^b f(t)\, d\lceil t \rceil. \tag{4.69}$$

Используя свойство линейности интеграла Стилтьеса, правую часть равенства (4.69) можно расписать в виде

$$\int_a^b f(t)\, dt - \int_a^b f(t)\, d\left(t - \lceil t \rceil + \frac{1}{2}\right) + \int_a^b f(t)\, d\left(+\frac{1}{2}\right). \tag{4.70}$$

Первый интеграл представляет собой грубое приближение к искомой сумме, которое мы уточним, вычислив второй интеграл, а третий интеграл равен нулю.

Вывод других членов формулы суммирования Эйлера начнем с интегрирования по частям второго члена в выражении (4.70):

$$\begin{aligned}\sum_a^b f(k) &= \int_a^b f(t)\, dt - f(t)\left(t - \lceil t \rceil + \frac{1}{2}\right)\Big|_a^b + \\ &+ \int_a^b \left(t - \lceil t \rceil + \frac{1}{2}\right) df(t) = \int_a^b f(t)\, dt - \\ &- \frac{1}{2} f(t)\Big|_a^b + \int_a^b \left(t - \lceil t \rceil + \frac{1}{2}\right) df(t).\end{aligned} \tag{4.71}$$

На интервале $[n, n+1]$ последний интеграл может быть приведен к виду

$$\int_n^{n+1} \left(t - n - \frac{1}{2}\right) df(t) = \int_n^{n+1} f'(t)\, d\left(\frac{(t-n)^2 - (t-n) + 1/6}{2}\right). \tag{4.72}$$

А эту процедуру можно повторить, снова интегрируя по частям и меняя ролями f и g во вновь полученном интеграле $\int g\, df$.

Однако для законности применения подобной итеративной процедуры необходимо выполнение нескольких требований, и если мы выясним, что это за требования, то заодно раскроем секрет появления в (4.72) констант 1/2 и 1/6. Прежде всего предполагается, что существует производная $f'(t)$ (в действительности на каждой итерации требуется существование производных $f(t)$ все более высоких порядков). Второе требование возникает, когда мы «интегрируем» $(t-n-1/2)$, получая $((t-n^2)-(t-n)+1/6)/2$ (подобная замена делается на каждом интервале $[n, n+1]$, из которых «монтируется» весь интервал $[a, b]$). К счастью, $((t-n)^2-(t-n)+1/6)/2$ принимает одинаковые значения при $t=n$ и $t=n+1$; следовательно, на месте $g(t)$ в интеграле $\int_a^b f'(t)\,dg(t)$ стоит непрерывная функция. Любые разрывы функции g давали бы существенные и нежелательные вклады в интеграл Стилтьеса. Таким образом, константа «1/2» в левой части равенства (4.72) несет ответственность за непрерывность подынтегральной функции так же, как и константа «1/6» в правой части (4.72), которая обеспечивает аналогичную непрерывность, когда мы вновь интегрируем многочлен на последующей итерации.

Итак, имеется семейство многочленов $B(t-\lfloor t\rfloor)$, сохраняющих непрерывность при целочисленных значениях t, поскольку $B_i(0)=B_i(1)$ при $i>1$, и связанных дифференциальным соотношением $B_i'(x)=iB_{i-1}(x)$. Этим двум требованиям удовлетворяют многочлены Бернулли:

$$\begin{aligned}
&B_1(x)=x-1/2,\\
&B_2(x)=x^2-x+1/6,\\
&B_3(x)=x^3-(3/2)x^2+(1/2)x,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&B_n(x)=\sum_k \binom{n}{k} B_k x^{n-k}.
\end{aligned}\tag{4.73}$$

Постоянные B_k в последней сумме называются числами Бернулли,

$$B_0=1,\ B_1=-\frac{1}{2},\quad B_2=\frac{1}{6},\quad B_3=0,\quad B_4=-\frac{1}{30},\ \ldots \tag{4.74}$$

(в других обозначениях $B_0=1,\ B_1=\frac{1}{6},\quad B_2=-\frac{1}{30},\ \ldots$ —*Ред.*), и именно они являются коэффициентами окончательной формулы суммирования:

$$\sum_{a\leqslant k<b} f(k)=\int_a^b f(t)\,dt+B_1 f(t)\Big|_a^b+\frac{B_2}{2!}f'(t)\Big|_a^b+\frac{B_3}{3!}f''(t)\Big|_a^b+\ldots. \tag{4.75}$$

4.2.3. Теоретико-числовой пример

Предположим, что целое n выбрано «случайно» из интервала $[1, x]$. Тогда среднее число различных простых сомножителей n задается формулой

$$\frac{1}{x}\sum_{n\leqslant x}\sum_{p\mid n} 1 = \frac{1}{x}\sum_{p\leqslant x}\left\lfloor \frac{x}{p} \right\rfloor. \tag{4.76}$$

(Здесь и далее p обозначает простое число.) В приведенной формуле интересующая нас величина является (если игнорировать некоторое отклонение, вызванное функцией «пол») суммой чисел, обратных простым. На примере решения этой упрощенной задачи мы продемонстрируем несколько применений интеграла Стилтьеса.

Сначала выразим сумму в виде интеграла:

$$\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p} = \int_{1.5}^{x}\frac{1}{t}\,d\pi(t), \tag{4.77}$$

где $\pi(t) = \sum_{p\leqslant t} 1$ — ступенчатая функция, изменяющая свое значение только на простых t. Хорошим приближением к $\pi(x)$ служит функция $L(x)$, определяемая формулой

$$L(x) = \int_{1.5}^{x}\frac{dt}{\ln t}, \tag{4.78}$$

поскольку

$$\pi(x) = L(x) + O\left(xe^{-c\sqrt{\log x}}\right). \tag{4.79}$$

(Это усиленный вариант «теоремы о простых числах» [12]), полученный Валле-Пуссеном в XIX в.; ср. Кнут, Траб Пардо [76].) Подставляя в (4.77) вместо $\pi(t)$ функцию $L(t) + O\left(te^{-c\sqrt{\log t}}\right)$ и вынося по теореме 2 символ O за знак интеграла, получаем асимптотическую оценку:

$$\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p} = \int_{1.5}^{x}\frac{dt}{t\ln t} + \int_{1.5}^{x}\frac{1}{t}\,dO\left(te^{-c\sqrt{\log t}}\right) =$$
$$= \ln\ln x + O(1). \tag{4.80}$$

Хотя аналог формулы суммирования Эйлера для сумм по простым числам неизвестен, существует окольный путь усовершенствования этой оценки. Рассуждая по аналогии с предыдущим, можно вычислить сумму общего типа:

$$C_m(x) = \sum_{p \leqslant x} \frac{(\ln p)^m}{p} = \frac{(\ln x)^m}{m} + O(1), \qquad m \geqslant 1. \quad (4.81)$$

Тогда, используя 9-е свойство интеграла Стилтьеса, сумму $C_0(x)$ можно представить в виде

$$C_0(x) = \int_{1.5}^{x} \frac{d\pi(t)}{t} = \int_{1.5}^{x} \frac{1}{(\ln t)^m}\, d \int_{1.5}^{t} \frac{(\ln u)^m\, d\pi(u)}{u} = \int_{1.5}^{x} \frac{dC_m(t)}{(\ln t)^m}. \quad (4.82)$$

А последний интеграл вычисляется интегрированием по частям:

$$C_0(x) = \frac{C_m(t)}{(\ln t)^m}\Bigg|_{1.5}^{x} + m \int_{1.5}^{x} \frac{C_m(t)\, dt}{t\,(\ln t)^{m+1}} =$$

$$= \frac{1}{m}\, O\left((\ln x)^{-m}\right) + \int_{1.5}^{x} \frac{dt}{t \ln t} + m \int_{1.5}^{x} \frac{O(1)\, dt}{t\,(\ln t)^{m+1}} =$$

$$= \ln \ln t + M + O\left((\log x)^{-m}\right). \quad (4.83)$$

Поскольку этот вывод справедлив при всех $m > 0$, нами доказан довольно сильный результат об асимптотическом поведении суммы чисел, обратных простым. Однако сила полученного результата делает задачу выяснения точного значения константы M сродни танталовым мукам.

Для вычисления M придется воспользоваться дзета-функцией Римана и формулой обращения Мёбиуса. Дзета-функция связана с простыми числами тождеством

$$\zeta(s) = \sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^s} = \prod_p \left(\frac{1}{1 - p^{-s}}\right) = \prod_p \left(1 + p^{-s} + p^{-2s} + \ldots\right),$$

$$s > 1. \quad (4.84)$$

Вслед за Эйлером нам будет удобнее иметь дело с логарифмом дзета-функции:

$$\ln \zeta(s) = \sum_p \left(\frac{1}{p^s} + \frac{1}{2p^{2s}} + \ldots\right) =$$

$$= \Sigma(s) + \frac{1}{2}\Sigma(2s) + \frac{1}{3}\Sigma(3s) + \ldots, \quad (4.85)$$

где $\Sigma(s) = \sum_p p^{-s}$. В этих обозначениях нас интересуют частичные суммы расходящегося ряда $\Sigma(1)$, информацию о которых можно получить, рассматривая сходящийся ряд $\Sigma(s)$ при $s > 1$.

Для обращения рядов типа (4.85) может использоваться функция Мёбиуса, определяемая как

$$\mu(n)=\begin{cases}1, & \text{если } n=1,\\ 0, & \text{если } n \text{ делится на квадрат целого числа,}\\ & \text{отличного от единицы,}\\ (-1)^k, & \text{если } n \text{ есть произведение } k \text{ различных}\\ & \text{простых чисел.}\end{cases} \tag{4.86}$$

Наиболее употребительна следующая формула обращения Мёбиуса:

$$g(n)=\sum_{d\mid n} f(d) \longleftrightarrow f(n)=\sum_{d\mid n}\mu(d)\, g\left(\frac{n}{d}\right). \tag{4.87}$$

Однако для наших целей потребуется «бесконечный» вариант этой формулы

$$g(x)=\sum_{m=1}^{\infty} f(mx) \longleftrightarrow f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(n)\, g(nx), \tag{4.88}$$

которая позволяет выразить $\Sigma(s)$ через функцию $\zeta(s)$:

$$\Sigma(s)=\sum_{n}\mu(n)\frac{\ln\zeta(ns)}{n}. \tag{4.89}$$

Поскольку $\zeta(s)=1+O(2^{-s})$, то последний ряд сходится к $\Sigma(s)$ довольно быстро. Таким образом, мы располагаем эффективным способом вычисления $\Sigma(s)$, который окажется полезным, когда мы выразим константу M через сумму рядов $\Sigma(s)$ при $s>1$. (Отмеченные выше свойства дзета-функции и функции Мёбиуса можно найти, например, в книге Харди и Райта [79].)

Давайте теперь остановимся на минутку, чтобы наметить план дальнейших действий. Как уже отмечалось, нас интересует $\Sigma(1)$, однако формула (4.89) справедлива только при $s>1$. Вместо $\Sigma(1)$ мы могли бы взять $\Sigma(1+\varepsilon)$ и устремить ε к нулю в равенстве

$$\Sigma(1+\varepsilon)=\ln\zeta(1+\varepsilon)-\frac{1}{2}\Sigma(2+2\varepsilon)-\frac{1}{3}\Sigma(3+3\varepsilon)+\ldots. \tag{4.90}$$

Стандартные руководства типа *Введения в теорию чисел* Харди и Райта [79] дают для $\zeta(1+\varepsilon)$ вблизи единицы асимптотическую оценку $\varepsilon^{-1}+O(1)$, что упрощает предыдущую формулу:

$$\Sigma(1+\varepsilon)=-\ln\varepsilon-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\Sigma(n+n\varepsilon)}{n}+O(\varepsilon). \tag{4.91}$$

К сожалению, этот ряд «разбухает» с ростом другого параметра, отличного от параметра нашего исходного выражения,

$$C_0(x) = \sum_{p \leqslant x} \frac{1}{p} = \ln \ln x + M + O\left((\log x)^{-m}\right). \qquad (4.92)$$

Значит, для получения информации о константе M мы не можем просто сократить главные члены в предыдущих формулах — вместо этого надо сделать выражение для C_0 зависящим от ε.

С этой целью введем в выражение для C_0 величину ε так, чтобы x можно было устремить к бесконечности:

$$\sum_p \frac{1}{p^{1+\varepsilon}} = \int_{1.5}^{\infty} \frac{d\pi(t)}{t^{1+\varepsilon}} = \lim_{x\to\infty} \int_{1.5}^{\infty} \frac{dC_0(t)}{t^{\varepsilon}} \qquad (4.93)$$

(при замене $d\pi(t)$ на $t dC_0(t)$ здесь снова использовано 9-е свойство интеграла Стилтьеса). Интегрируя по частям, получаем

$$\sum(1+\varepsilon) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{C_0(x)}{x^{\varepsilon}} - \int_{1.5}^{x} C_0(t)\, d\left(t^{-\varepsilon}\right)\right). \qquad (4.94)$$

Теперь заменим величину $C_0(t)$ в интеграле ее асимптотическим выражением (4.92). В соответствии с этой асимптотикой $C_0(x)/x^{\varepsilon}$ стремится к нулю; поэтому остается выражение

$$\Sigma(1+\varepsilon) = \varepsilon\left(\int_{1.5}^{\infty} \left(\ln\ln t + M + O(\log t)^{-1}\right) \frac{dt}{t^{1+\varepsilon}}\right). \qquad (4.95)$$

Затем, подставляя $e^{u/\varepsilon}$ вместо t, получим

$$\sum(1+\varepsilon) = \int_{\varepsilon \ln 1.5}^{\infty} e^{-u\,(\ln u - \ln \varepsilon + M + O\,(\varepsilon/u))}\, du. \qquad (4.96)$$

Интегрирование большинства полученных членов не вызывает затруднений, за исключением члена $e^{-u}\ln u$, интеграл от которого можно выразить через интегральную показательную функцию:

$$\int_a^b e^{-u} \ln u\, du = e^{-a} \ln a + \int_a^{\infty} \frac{e^{-u}}{u}\, du. \qquad (4.97)$$

При малых значениях a асимптотическое поведение интегральной показательной функции хорошо изучено:

$$E_1(a) = \int_a^{\infty} \frac{e^{-u}}{u}\, du = -\ln a - \gamma + O(a). \qquad (4.98)$$

Использование этой информации в равенстве (4.96) дает

$$\begin{aligned}E(1+\varepsilon) &= (1.5)^{-\varepsilon}(\ln\varepsilon+\ln\ln 1.5)+E_1(\varepsilon\ln 1.5)-\\ &\quad-(1.5)^{-\varepsilon}\ln\varepsilon+(1.5)^{-\varepsilon}M+O(\varepsilon E_1(\varepsilon\ln 1.5))=\\ &=-\ln\varepsilon-\gamma+M+O\left(\varepsilon\ln\frac{1}{\varepsilon}\right). \qquad (4.99)\end{aligned}$$

Теперь остается сравнить переработанную формулу с первоначальным выражением (4.91) для $\Sigma(1+\varepsilon)$ и получить формулу для M:

$$M=\gamma-\frac{1}{2}\Sigma(2)-\frac{1}{3}\Sigma(3)-\ \ldots\ . \qquad (4.100)$$

Поскольку $\Sigma(s)=O(2^{-s})$, этот ряд сходится весьма быстро; точное значение константы M равно $0.26149\,72128\,47643\ldots$ (Кнут, Траб Пардо [76]).

Возвращаясь к поставленному в начале настоящего раздела вопросу, мы приходим к заключению, что среднее число различных простых сомножителей n равно

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}\sum_{p\leqslant x}\left\lfloor\frac{x}{p}\right\rfloor &= \frac{1}{x}\sum_{p\leqslant x}\left(\frac{x}{p}+O(1)\right)=\\ &=\sum_{p\leqslant x}\frac{1}{p}+O\left(\frac{1}{\log x}\right)=\\ &=\ln\ln x+M+O(1/\log x). \qquad (4.101)\end{aligned}$$

4.3. Асимптотики из производящих функций

Довольно часто результатом комбинаторных рассуждений является производящая функция $G(z)$, интересующие нас коэффициенты которой не выражаются в простой замкнутой форме. Настоящий раздел посвящен двум широко используемым способам установления асимптотик для подобных коэффициентов g_n при большом n по заданной функции $G(z)=\Sigma g_n z^n$. Выбор того или другого способа зависит от характера $G(z)$. Если $G(z)$ имеет особенности, то используется метод Дарбу для установления, исходя из этих особенностей, асимптотического поведения g_n. С другой стороны, если ряд для $G(z)$ всюду сходится[13], то применяется метод перевала для нахождения контура и вычисления соответствующего контурного интеграла.

4.3.1. Метод Дарбу

Когда ряд для $G(z)$ сходится в круге радиуса R, ряд $\sum|g_n r^n|$ сходится абсолютно при $r<R$, а это возможно, если только $g_n=O(r^{-n})$. Этот фундаментальный факт (см.

разд. 4.1.4 — *Перев.*) из теории рядов наводит на мысль о следующем (несколько идеализированном) подходе к асимптотическому оцениванию g_n. Если $G(z)$ имеет особенность на границе круга радиуса R, то отыскивается функция $H(z)$ с известными коэффициентами, которая имеет ту же особенность. Тогда ряд для $G(z)-H(z)$ будет иметь больший радиус сходимости S, а g_n будут достаточно близки к коэффициентам h_n:

$$g_n = h_n + O(s^{-n}), \qquad s < S. \tag{4.102}$$

Этот процесс повторяется до тех пор, пока S не увеличится настолько, что ошибка приближения станет малой.

Данный метод существенно зависит от выбора функции сравнения $H(z)$, имеющей известные коэффициенты. Для устранения обыкновенного полюса функции $G(z)$ в точке $z=a$ функцию $H(z)$ легко построить, поскольку $G(z)$ будет иметь разложение Лорана вида

$$G(z) = \frac{C_{-m}}{(z-a)^m} + \ldots + \frac{C_{-1}}{(z-a)} + C_0 + C_1(z-a) + \ldots . \tag{4.103}$$

В качестве функции $H(z)$ из этого разложения используются члены с отрицательными степенями $(z-a)$:

$$H(z) = \frac{C_{-m}}{(z-a)^m} + \frac{C_{-m+1}}{(z-a)^{m-1}} + \ldots + \frac{C_{-1}}{(z-a)}. \tag{4.104}$$

Коэффициенты $H(z)$ можно получить с помощью биномиального разложения:

$$(z-a)^{-i} = (-a)^{-i} \sum_k \binom{-i}{k} \left(\frac{-z}{a}\right)^k. \tag{4.105}$$

(В качестве иллюстрации применения метода Дарбу к функции, особыми точками которой являются полюсы, см. Кнут [III, разд. 5.1.3].)

Значительно труднее устранить алгебраические особенности; в действительности такую особенность можно только «улучшить» в некотором смысле, который вскоре станет ясен. Алгебраичность особенности означает, что $G(z)$ можно представить конечной суммой членов вида

$$(z-a)^{-w} g(z), \tag{4.106}$$

где w — комплексное число, а функция $g(z)$ аналитична в точке $z=a$. Например, функция

$$\sqrt{1-z} = \sum_n \binom{1/2}{n} (-z)^n \tag{4.107}$$

имеет алгебраическую особенность при $z = 1$, однако в данном случае она разлагается в биномиальный ряд, так что в применении метода Дарбу нет необходимости.

Проиллюстрируем метод Дарбу на примере функции

$$G(z) = \sqrt{(1-z)(1-\alpha z)}, \quad \alpha < 1. \tag{4.108}$$

Нам нужна функция сравнения, которая будет «бороться» с особенностью в точке $z = 1$, поэтому сначала разложим в ряд функцию

$$\sqrt{1-\alpha z} = \sqrt{1-\alpha} + C_1(1-z) + C_2(1-z)^2 + \ldots. \tag{4.109}$$

Первый член разложения подсказывает нам выбор

$$H(z) = \sqrt{1-z}\sqrt{1-\alpha} \tag{4.110}$$

в качестве функции сравнения, а дальнейшие члены разложения (4.109) можно будет использовать для улучшения получаемой оценки. Посмотрим, насколько хороша функция $G(z)$ сама по себе без дополнительных членов:

$$\begin{aligned} G(z) - H(z) &= \sqrt{1-z}\left(\sqrt{1-\alpha z} - \sqrt{1-\alpha}\right) = \\ &= \alpha(1-z)^{3/2}\frac{1}{\sqrt{1-\alpha z} + \sqrt{1-\alpha}} = \\ &= A(z)B(z), \end{aligned} \tag{4.111}$$

где

$$\begin{aligned} A(z) &= \alpha(1-z)^{3/2}, \\ B(z) &= 1/\left(\sqrt{1-\alpha z} + \sqrt{1-\alpha}\right). \end{aligned} \tag{4.112}$$

Заметьте, что мы не устранили особенность при $z = 1$, а только «улучшили» ее, получив $(1-z)^{3/2}$ вместо $(1-z)^{1/2}$. Подобное улучшение достаточно убедительно показывает, что $H(z)$ может служить хорошим приближением к функции $G(z)$.

Ошибкой этого приближения является коэффициент при z^n в разложении $A(z)B(z)$. Радиус сходимости степенного ряда для функции $B(z)$ больше 1, и, следовательно, $b_n = O(r^{-n})$ при некотором $r > 1$. Далее, функцию $A(z)$ можно разложить в ряд

$$A(z) = \alpha\sum_{n\geqslant 0}\binom{3/2}{n}(-z)^n = \alpha\sum_{n\geqslant 0}\binom{n-5/2}{n}z^n, \tag{4.113}$$

что дает $a_n = \alpha\binom{n-5/2}{n} = O(n^{-5/2})$. Чтобы оценить ошибку приближения, разобьем, как в разд. 4.1.3, свертку рядов для $A(z)$ и $B(z)$ на две части:

$$\sum_{0\leqslant k\leqslant n/2} a_k b_{n-k} = O(r^{-n/2}), \tag{4.114}$$

$$\sum_{n/2<k\leqslant n} a_k b_{n-k} = O(n^{-5/2}).$$

Следовательно, можно утверждать, что

$$g_n = \sqrt{1-\alpha}\,(-1)^n \binom{1/2}{n} + O(n^{-5/2}). \tag{4.115}$$

Оглядываясь назад, мы обнаруживаем, что вывод оценки для g_n свелся просто к разложению $G(z)$ в окрестности точки $z=1$. Оценка же остаточного члена — это просто ловкий трюк, использующий возрастание показателя степени $(1-z)$ с $1/2$ до $3/2$. И действительно, подобная зависимость от показателя степени присутствует в условии приводимой ниже теоремы Дарбу, в которой вводится понятие «веса» особенности, уменьшая который, мы «улучшаем» особенность.

Теорема. *Предположим, что функция* $G(z)=\sum_{n\geqslant 0} g_n z^n$ *аналитична в окрестности нуля и имеет только алгебраические особенности на границе круга сходимости этого ряда. Весами особенностей*

$$(1-z/\alpha)^{-w}\,h(z) \tag{4.116}$$

будем называть вещественные части чисел w. *Пусть* W — *максимальный вес таких особенностей. Обозначим через* α_k, w_k *и* $h_k(z)$ *значения* α, w *и* $h(z)$ *тех членов вида* (4.116), *особенности которых имеют вес* W. *Тогда*

$$g_n = \frac{1}{n}\sum_k \frac{h_k(\alpha_k)\,n^{w_k}}{\Gamma(w_k)\,\alpha_n^k} + o(s^{-n}n^{W-1}), \tag{4.117}$$

где $s=|\alpha_k|$ — *радиус сходимости ряда для* $G(z)$, *а* $\Gamma(z)$ — *гамма-функция.*

Этот вариант теоремы Дарбу, приведенный в работе Бендера [74], позволяет получить первый асимптотический член, ослабляя все особенности-тяжеловесы.

Данную процедуру можно повторить, получая в результате чуть более громоздкое утверждение теоремы, которое приведено в книге Конте [74]. Поскольку обыкновенному полюсу соответствует целочисленный вес w в формулировке теоремы, повторное применение процедуры сведет в конце концов w к нулю, устраняя особенность полностью, ибо веса $w=0, -1, -2, \ldots$ не соответствуют особенностям.

4.3.2. Метод вычетов

Теорема о вычетах утверждает, что интеграл по замкнутому контуру в комплексной плоскости может быть вычислен по вычетам в охваченных контуром полюсах:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)\,dz = \sum (\text{вычеты в охваченных полюсах}). \tag{4.118}$$

При этом вычет функции $f(z)$ в точке $z=a$ равен коэффициенту C_{-1} в разложении Лорана

$$f(z) = \frac{C_{-m}}{(z-a)^m} + \frac{C_{-m+1}}{(z-a)^{m-1}} + \ldots + \frac{C_{-1}}{(z-a)} + \\ + C_0 + C_1(z-a) + \ldots . \tag{4.119}$$

Вычислять вычеты сравнительно легко. Если $m=1$, то точка $z=a$ есть полюс первого порядка и вычет относительно этой точки дается равенством

$$C_{-1} = \lim_{z\to a}(z-a)f(z). \tag{4.120}$$

Обычно предел поддается вычислению с помощью многократного применения правила Лопиталя:

$$\lim_{z\to a}\frac{g(z)}{h(z)} = \lim_{z\to a}\frac{g'(z)}{h'(z)}. \tag{4.121}$$

Считается, что полюс имеет порядок m, если $\lim_{z\to a}(z-a)^m f(z)$ есть константа, но это определение не годится для вычисления вычета при $m>1$. Поэтому для выделения требуемого коэффициента надо использовать производную:

$$C_{-1} = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}((z-a)^m f(z)). \tag{4.122}$$

На практике, однако, зачастую быстрее разложить составляющие $f(z)$ выражения в ряды в окрестности точки $z=a$ и затем собрать коэффициенты при $(z-a)^{-1}$.

Теорема о вычетах традиционно рассматривается как простой способ вычисления интеграла по замкнутому контуру. При нахождении асимптотических оценок мы часто будем применять эту теорему «задом наперед», помещая интересующую нас комбинаторную величину на место вычета и вычисляя затем интеграл.

Предположим, например, что имеется двойная производящая функция

$$F(w, z) = \sum_{m,n} a_{mn} w^m z^n \tag{4.123}$$

и мы хотим вычислить производящую функцию для диагональных элементов

$$G(z) = \sum_n a_{nn} z^n. \tag{4.124}$$

Соберем члены с $n = m$ в коэффициенте при t^{-1}, где они станут вычетами:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\oint F(t,\ z/t)\frac{dt}{t} &= \frac{1}{2\pi i}\oint\Big(\sum_{m,n} a_{mn}t^m\left(\frac{z}{t}\right)^n\Big)\frac{dt}{t} = \\ &= \frac{1}{2\pi i}\sum_{m,n}\oint a_{mn}t^{m-n}z^n\frac{dt}{t} = \\ &= \sum a_{nn}z^n = G(z).\end{aligned} \tag{4.125}$$

Если ряд сходится равномерно, то сумму и интеграл можно поменять местами, поэтому путь интегрирования выбирается так, чтобы сделать как $|t|$, так и $|z/t|$ достаточно малыми.

Классический пример диагонализации степенных рядов начинается с разложения

$$F(w,\ z) = \sum_{m,\,n\geqslant 0}\binom{m+n}{n} w^m z^n = \frac{1}{1-w-z}; \tag{4.126}$$

требуется найти выражение для производящей функции

$$G(z) = \sum_n \binom{2n}{n} z^n. \tag{4.127}$$

Используя выведенную выше формулу, имеем

$$G(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{dt}{1-t-z/t}. \tag{4.128}$$

В качестве C выберем контур, охватывающий начало координат и полюс первого порядка в точке

$$t = \frac{1-\sqrt{1-4z}}{2} \tag{4.129}$$

с вычетом $(1-4z)^{-1/2}$; поэтому интеграл равен

$$G(z) = \frac{1}{\sqrt{1-4z}}. \tag{4.130}$$

В качестве второй иллюстрации процедуры диагонализации рассмотрим задачу почленного перемножения двух степенных рядов

$$A(z) = \sum a_n z^n \quad \text{и} \quad B(z) = \sum b_n z^n. \tag{4.131}$$

Используя установленную выше формулу (4.125), получаем произведение Адамара:

$$G(z)=\sum a_n b_n z^n=\frac{1}{2\pi i}\oint A(t)\,B\left(\frac{z}{t}\right)\frac{dt}{t}. \tag{4.132}$$

4.3.3. Метод перевала

В нашем следующем примере используется несколько стандартных приемов, которым следует уделить внимание, прежде чем приступить к решению конкретной задачи. Сначала мы будем применять теорему о вычетах «задом наперед»:

$$g_n=\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{G(z)\,dz}{z^{n+1}}. \tag{4.133}$$

Предполагается, что производящая функция известна и не имеет особенностей (в противном случае асимптотическое поведение g_n можно было бы установить с помощью метода Дарбу). Поэтому единственное ограничение, накладываемое на контур интегрирования, состоит в том, что он охватывает начало координат. Удачный выбор этого контура облегчает оценивание интеграла, а хорошей эвр стикой для его выбора служит метод перевала. Идея метода леревала состоит в проведении пути интегрирования через седловую точку, в которой производная подынтегральной функции обращается в нуль, в то время как в соседних точках функция круто падает. Подобно ленивому путешественнику, мы выбираем путь, проходящий через низкую точку перевала, но в отличие от этого путешественника мы выбираем наиболее крутой путь на перевал — для наших целей крутизна гораздо важнее, чем пересечение перевала в самой низкой точке.

После того как контур интегрирования выбран, зачастую оказывается полезным другой прием — метод Лапласа для оценки интегралов. Допустим, что подынтегральная функция почти целиком сосредоточена на сравнительно малом интервале, имея незначительные хвосты, растянутые по всей области интегрирования. Метод Лапласа заменяет эти хвосты другими малыми функциями, интеграл от которых легко вычисляется. При этом должно быть показано, что как старые, так и новые хвосты незначительно влияют на окончательный результат.

В выбранной нами для иллюстрации этих приемов задаче будет выведен усиленный вариант центральной предельной теоремы, которая утверждает, что сумма большого числа реализаций случайной величины с произвольным распределением распределена асимптотически нормально:

$$\text{Вер}\left(\mu-\frac{\alpha\sigma}{\sqrt{n}}<\frac{X_1+X_2+\ldots+X_n}{n}<\mu+\frac{\beta\sigma}{\sqrt{n}}\right)=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\alpha}^{\beta}e^{-z^2/2}dz\,(1+O(n^{-1})). \qquad (4.134)$$

Здесь X_i — произвольные, но одинаково распределенные случайные величины со средним μ и стандартным отклонением σ. Вводя несколько незначительных ограничений, можно получить еще более сильный результат, который полностью проясняет вопрос о том, насколько быстро сходится к нормальному распределению сумма целочисленных случайных величин с произвольным распределением.

Предположение 1. X_i являются целочисленными случайными величинами, распределение вероятностей которых $p_k = \text{Вер}(X_i = k)$ имеет производящую функцию

$$g(z)=\sum_{k\geqslant 0}p_k z^k. \qquad (4.135)$$

Будем считать, что функция $g(z)$ аналитична в круге $|z| < 1+\delta$, и, поскольку $g(1)=1$ для любого распределения вероятностей, функция $\ln g(e^t)$ аналитична при $t=0$. Это позволяет выразить $g(t)$ через разложение Тиле:

$$g(e^t)=\exp\left(\mu+\frac{\sigma^2t^2}{2!}+\frac{\varkappa_3t^3}{3!}+\frac{\varkappa_4t^4}{4!}+\ldots\right), \qquad (4.136)$$

где $\varkappa_i$ является i-м семиинвариантом распределения вероятностей p_k.

Предположение 2. $g(0)$ должно быть отлично от нуля, т. е. $p_0 \neq 0$. Это предположение не является обременительным, поскольку вместо $g(z)$ можно взять $z^{-m}g(z)$, где m — номер первого ненулевого коэффициента p_m.

Предположение 3. Наибольший общий делитель всех k, таких, что $p_k \neq 0$, должен быть равен 1. Это допущение также необременительно, поскольку вместо $g(z)$ можно взять $g(z^{1/m})$, где m — наибольший общий делитель таких k, что $p_k \neq 0$.

Сумме n реализаций случайной величины, имеющей распределение с производящей функцией $g(z)$, соответствует производящая функция $g(z)^n$. Мы намерены изучить поведение этой суммы вблизи ее среднего μn, для чего определим

$$A_{n,r} = \text{коэффициент при } z^{\mu n+r} \text{ в разложении } g(z)^n, \qquad (4.137)$$

где r выбрано так, чтобы $\mu n + r$ было целым. По теореме о вычетах

$$A_{n,r} = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{g(z)^n \, dz}{z^{\mu n + r + 1}}. \tag{4.138}$$

Поскольку точка перевала лежит в окрестности точки $z = 1$, выберем в качестве контура интегрирования окружность единичного радиуса с центром в начале координат и подставим $z = e^{it}$ в (4.138):

$$A_{n,r} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{g(e^{it})^n \, dt}{e^{it(\mu n + r)}}. \tag{4.139}$$

В силу предположения 3 все члены функции $g(e^{it})$ будут находиться «в фазе» лишь при $t = 0$; следовательно, $|g(e^{it})| < 1$, за исключением случая $t = 0$, когда $g(1) = 1$. Возведение $g(e^{it})$ в n-ю степень делает хвосты интеграла экспоненциально малыми, так что основной вклад в интеграл вносит окрестность точки $t = 0$. В частности, при любом выборе $\delta > 0$ найдется такое $\alpha \in [0, 1]$, что $|g(e^{it})| < \alpha$ при $\delta \leqslant |t| \leqslant \pi$, а это означает, что

$$A_{n,r} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{g(e^{it})^n \, dt}{e^{it(\mu n + r)}} + O(\alpha^n). \tag{4.140}$$

Метод Лапласа предполагает замену хвостов более приемлемыми функциями. Прежде чем присоединять новые хвосты, проделаем несколько манипуляций с исходными хвостами, сужая (refining. — *Перев.*) каждый раз промежуток интегрирования. Вначале выберем δ_1 настолько малым, чтобы сделать законным разложение Тиле для функции $g(e^t)$, и разложим в ряд подынтегральную функцию

$$\frac{g(e^{it})^n}{e^{it(\mu n + r)}} = \exp\left(-irt - \frac{\sigma^2 t^2 n}{2!} - \frac{i\varkappa_3 t^3 n}{3!} + \frac{\varkappa_4 t^4 n}{4!} + \ldots\right). \tag{4.141}$$

Затем выберем δ_2, меньшее чем δ_1, так, чтобы первые два члена этого разложения преобладали над остальными:

$$\left| -\frac{i\varkappa_3 t^3 n}{3!} + \frac{\varkappa_4 t^4 n}{4!} + \ldots \right| < \frac{\sigma^2 |t^2| n}{6} \quad \text{при} \quad |t| < \delta_2. \tag{4.142}$$

Эти два сужения промежутка интегрирования делают возможным третье, состоящее в замене интервала $[-\delta_2, \delta_2]$ на $[-n^{-1/2+\varepsilon}, n^{-1/2+\varepsilon}]$. (Роль таинственного ε вскоре станет очевидна.) Ошибка, вносимая последним сужением промежутка, есть сумма двух выражений вида

$$\int_{n^{-1/2+\varepsilon}}^{\delta_2} \left|\exp\left(-irt - \frac{\sigma^2 t^2 n}{2!}\right)\right| \cdot \left|\exp\left(-\frac{i\varkappa_3 t^3 n}{3!} + \frac{\varkappa_4 t^4 n}{4!} + \ldots\right)\right| dt. \tag{4.143}$$

Величина $-irt$ в первом сомножителе представляет собой несущественную для нас фазу, а второй сомножитель в силу неравенства (4.142) ограничен; следовательно, эта ошибка экспоненциально мала:

$$\int_{n^{-1/2+\varepsilon}}^{\delta_2} \exp\left(-\frac{\sigma^2 t^2 n}{2} + \frac{\sigma^2 t^2 n}{6}\right) dt \leqslant \delta_2 e^{-\sigma^2 n^{2\varepsilon/3}}. \tag{4.144}$$

Теперь должна быть ясна причина выбора $\pm n^{-1/2+\varepsilon}$ в качестве пределов интегрирования. На последнем шаге мы оценили интеграл его наибольшим значением, подставив в подынтегральное выражение $n^{-1/2+\varepsilon}$ вместо t. В результате уничтожается n, стоящее в подынтегральном выражении рядом с t^2, так что ε оказывается «последней соломинкой, сломавшей спину верблюда» и устремившей этот интеграл к нулю.

Подводя итог проделанному, можно утверждать, что существует такое $\alpha > 0$, что при любом $\varepsilon > 0$

$$A_{n,r} = \frac{1}{2\pi} \int_{-n^{-1/2+\varepsilon}}^{n^{-1/2+\varepsilon}} \frac{g(e^{it})^n \, dt}{e^{it(\mu+r)}} + O\left(\alpha^{n^{2\varepsilon}}\right). \tag{4.145}$$

В пределах такого малого интервала существенны только два первых члена в разложении Тиле:

$$A_{n,r} = \frac{1}{2\pi} \int_{-n^{-1/2+\varepsilon}}^{n^{-1/2+\varepsilon}} \exp\left(-irt - \frac{\sigma^2 t^2 n}{2} + O\left(n^{3\varepsilon-1/2}\right)\right) dt + O\left(\alpha^{n^{2\varepsilon}}\right). \tag{4.146}$$

Теперь мы готовы присоединить к интегралу новые хвосты, используя в качестве последних два первых члена разложения Тиле. Новые хвосты экспоненциально малы:

$$\left|\int_{n^{-1/2+\varepsilon}}^{\infty} \exp\left(-irt - \frac{\sigma^2 t^2 n}{2}\right) dt\right| \leqslant \int_{n^{-1/2+\varepsilon}}^{\infty} \exp\left(\frac{-\sigma^2 t^2 n}{2}\right) dt =$$

$$= O\left(\exp\left(\frac{-\sigma^2 n^{2\varepsilon}}{2}\right)\right).$$

Дополнив показатель экспоненты до полного квадрата, легко вычислить интеграл на $[-\infty, \infty]$:

$$A_{n,r} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-irt - \frac{\sigma^2 t^2 n}{2}\right)(1 + O(n^{3\varepsilon-1/2}))\,dt + O(\alpha^{n^{2\varepsilon}}) =$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi n}}\exp\left(\frac{-r^2}{2\sigma^2 n}\right) + O(n^{3\varepsilon-1}). \tag{4.147}$$

Заметьте, что константа, связанная с полученной O-оценкой, зависит от $g(t)$ и ε, но не от n или r.

Полученный результат можно улучшить, используя большее, чем в равенстве (4.146), число членов разложения Тиле. Это потребует интегрирования членов типа

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{iat-bt^2}t^k\,dt. \tag{4.148}$$

Дополнив показатель экспоненты до полного квадрата и разложив t^k в биномиальный ряд, получим несколько членов вида

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2}u^j\,du. \tag{4.149}$$

При нечетном j этот интеграл обращается в нуль, а при четном j его можно свести к гамма-функции с помощью подстановки $v = u^2$. Используя подобную процедуру, нашу предыдущую оценку можно усовершенствовать и получить, к примеру,

$$A_{n,r} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi n}}\exp\left(\frac{-r^2}{2\sigma^2 n}\right)\left(1 - \frac{\varkappa_3}{2\sigma^4}\left(\frac{r}{n}\right) + \frac{\varkappa_3}{6\sigma^6}\left(\frac{r^3}{n^2}\right)\right) + O(n^{-3/2}). \tag{4.150}$$

Коэффициент при общем члене r^R/n^N этого разложения задается выражением

$$\sum_{S\geqslant 0}\frac{(-1)^S (R+2S)^{\underline{2S}}}{\sigma^{2(R+S)}2^S S!}\times$$

$$\times \sum_{\substack{p_3+p_4+p_5+\ldots = R-N+S\\ 3p_3+4p_4+5p_5+\ldots = R+2S}} \frac{1}{p_3!}\left(\frac{\varkappa_3}{3!}\right)^{p_3}\frac{1}{p_4!}\left(\frac{\varkappa_4}{4!}\right)^{p_4}\cdots; \tag{4.151}$$

подобные члены отличны от нуля при $0 \leqslant R \leqslant \frac{3}{2}N$.

Это весьма сильный результат, из которого суммированием (4.150) по r можно немедленно получить центральную предельную теорему; более того, если потребуется, то у нас есть исчерпывающее описание асимптотического поведения отдельных членов последовательности распределений. К сожалению, полученная выше формула страдает недостатком, который характерен для центральных предельных теорем, а именно ограниченностью интервала значений r. Обратите внимание, что поскольку остаточный член в (4.150) является многочленом от n, то оценка $A_{n,r}$ полезна только при $r = O(\sqrt{n})$. Это и не удивительно, поскольку мы довольно небрежно выбрали контур интегрирования. Наш путь проходит вблизи самой низкой точки перевала только при $r = 0$, все более и более удаляясь от нее по мере увеличения r. Очевидным средством от подобного недуга мог бы служить выбор иного контура интегрирования в случае, когда r превышает $\sqrt{n}$. Однако можно сдвинуть и само распределение, что зачастую сделать проще, нежели повторять предыдущий вывод для другого контура интегрирования, хотя оба способа в сущности одинаковы.

Коэффициент при z^m в производящей функции $g(z)^n$ получается по формуле

$$\langle z^m\rangle (g(z)^n) = \frac{g(\alpha)^n}{\alpha^m} \langle z^m\rangle \left(\frac{g(\alpha z)}{g(\alpha)}\right)^n. \tag{4.152}$$

Правая часть этого равенства может показаться ненужным усложнением его левой части, поскольку в обеих частях требуется выделить коэффициент при z^m; тем не менее правая часть обладает дополнительной «степенью свободы», представленной величиной α, что позволяет сдвинуть среднее распределения, соответствующего $g(\alpha z)$, поближе к m/n. Это можно сделать, выбирая α так, чтобы

$$\frac{g'(\alpha)\,\alpha}{g(\alpha)} = \frac{m}{n}. \tag{4.153}$$

Установим в качестве простого примера коэффициент при $z^{n/3}$,

$$\langle z^{n/3}\rangle \left(\frac{1+z}{2}\right)^n, \tag{4.154}$$

в производящей функции для биномиального распределения. Интересующий нас коэффициент находится на расстоянии много большем, чем $\sqrt{n}$ от среднего значения $n/2$; поэтому равенство (4.150) бесполезно для нашей цели, если мы не сдвинем среднее к $n/3$ посредством надлежащего выбора α:

$$\frac{g'(\alpha)\,\alpha}{g(\alpha)} = \frac{\alpha}{1+\alpha} = \frac{1}{3}, \tag{4.155}$$

откуда

$$\alpha = 1/2. \tag{4.156}$$

Распределение, соответствующее новой производящей функции

$$\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}z\right), \tag{4.157}$$

имеет среднее $\mu=1/2$, стандартное отклонение $\sigma=\sqrt{2}/3$ и последующие семиинварианты $\varkappa_3=2/27$ и $\varkappa_4=-2/27$. Теперь можно воспользоваться равенствами (4.150) и (4.151) при $r=0$, получая

$$\langle z^{n/3}\rangle\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}z\right)^n=A_{n,0}=\frac{3}{2\sqrt{\pi n}}\left(1-\frac{7}{24n}\right)+O(n^{-5/2}). \tag{4.158}$$

Умножая этот результат на присутствующий в равенстве (4.152) множитель $g(\alpha)^n/\alpha^m$, в качестве решения исходной задачи получаем оценку вероятности выпадения «орла» ровно $n/3$ раз при n бросаниях монеты:

$$2^{n/3}\left(\frac{3}{4}\right)^n\frac{3}{2\sqrt{\pi n}}\left(1-\frac{7}{24n}+O(n^{-2})\right). \tag{4.159}$$

Чтобы у читателя не создалось впечатления, что сдвиг распределения по среднему является панацеей от всех интервальных бед[14]), отметим некоторые трудности, связанные с его применением. В уравнении (4.155) нам повезло в том, что α оказалась константой. В общем же случае α будет некоторым образом зависеть от n, что в свою очередь поставит в зависимость от n среднее, стандартное отклонение и прочие семиинварианты распределения. Установленный выше усиленный вариант центральной предельной теоремы не допускает подобной зависимости и должен быть видоизменен для приведения его в соответствие с конкретными условиями. В частности, весьма вероятно, что применение метода Лапласа (отсекающего старые и присоединяющего новые хвосты к интегралу) будет создавать иные трудности. Тем не менее сдвиг среднего все же полезен как ориентир при выводе асимптотик, и читателю, возможно, будет интересно вывести на этом пути асимптотическую формулу для чисел Стирлинга.

Задачи[15])

1. [Задание на дом.] Покажите, что «перестановка, получаемая с помощью стека» (а именно перестановка $a_1a_2 \ldots a_n$ множества $\{1, 2, \ldots, n\}$, такая, что нет таких индексов $i < j < k$, для которых $a_j < a_k < a_i$; см. Кнут [I, упр. 2.2.1-5]), может быть охарактеризована в терминах таблиц инверсий. Найдите и докажите простое свойство таблиц инверсий $C_1C_2 \ldots \ldots C_n$, которое имеет место ттогда[16]), когда перестановка получается с помощью стека.

2. (a) [10 очков] Сколько перестановок множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ можно отсортировать «методом пузырька», используя при этом не более двух просмотров перестановки? Например:

исходная перестановка	3	1	2	9	6	4	5	8	7
первый просмотр	1	2	3	6	4	5	8	7	9
второй просмотр	1	2	3	4	5	6	7	8	9

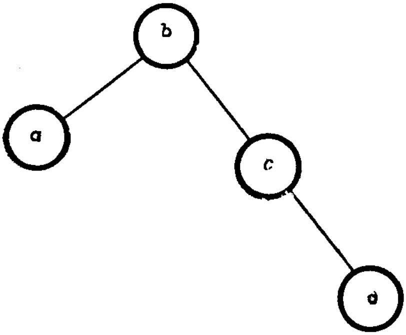
(При пузырьковой сортировке на каждом просмотре K_i переставляется с K_{i+1} ттогда, когда $K_i > K_{i+1}$ при $i \neq 1, 2, \ldots, n-1$.)

(b) [40 очков] Сколько перестановок множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ можно отсортировать с помощью «шейкер-сортировки» за один двойной проход? Например:

исходная перестановка	2	7	3	1	4	6	9	8	5
проход слева направо	2	3	1	4	6	7	8	5	9
проход справа налево	1	2	3	4	5	6	7	8	9

(При шейкер-сортировке перестановка сортируется методом пузырька попеременно в обоих направлениях.)

3. Схема Дэйва Фергюсона для представления бинарных деревьев (Кнут [I, упр. 2.3.1-37][17])) потребовала бы хранения изображенного ниже бинарного дерева поиска в пяти ячейках памяти, например, следующим образом:



LOC	INFO	LINK
1	a	2
2	b	Λ
3	c	4
4		
5	d	Λ

Стандартную процедуру поиска со вставкой по дереву (Кнут [III, алгоритм 6.2.2T]) можно очевидным образом приспособить для использования и этого представления.

Пусть p_{nk} — вероятность того, что дерево бинарного поиска, построенное путем вставки в первоначально пустое дерево n ключей в случайном порядке, будет занимать $2n + 1 - 2k$ ячеек при представлении его по схеме Фергюсона. Обозначим через $P_n(z) = \sum_{k \geqslant 0} p_{nk} z^k$ соответствующую производящую функцию; в частности, $P_1(z) = P_2(z) = z$ и $P_3(z) = \frac{2}{3}z + \frac{1}{3}z^2$.

(a) [10 очков] Найдите дифференциальный оператор Φ_n, такой, что $P_{n+1}(z) = \Phi_n P_n(z)$ при всех $n \geqslant 1$.

(b) [15 очков] Пусть D — оператор d/dz, а U — оператор, который полагает z равным 1, так что $UDP_n(z) = P_n'(1)$ есть среднее значение величины k. Покажите, что это среднее значение можно выразить в виде простой функции от n.

(c) [25 очков] В продолжение части (b) задачи найдите дисперсию величины k как функцию от n.

4. [100 очков] Рассмотрим электрическую пишущую машинку, которая имеет ровно 40 клавиш $abc \ldots$ $012 \ldots 9$ точка ⟨пробел⟩ ⟨обратный ход⟩ ⟨возврат каретки⟩ и бесконечно длинную каретку. Обезьяна печатает наобум с начала строки до тех пор, пока вдруг не ударяет по клавише ⟨возврат каретки⟩; напуганная, она удирает доедать свой банан.

(a) Найдите производящую функцию $G(z) = \sum_{n \geqslant 0} g_n z^n$, где g_n — число последовательностей из n ударов по клавишам, отпечатывающих слово «ape» (обезьяна. — *Перев.*) в начале строки (и никаких других символов, кроме пробела и обратного хода). Вот, к примеру, одна из таких последовательностей, состоящая из 12 ударов (⟨ох⟩ означает ⟨обратный ход⟩):

⟨пробел⟩ p ⟨ох⟩ ⟨ох⟩ ⟨ох⟩ a ⟨пробел⟩ e⟨ох⟩⟨ох⟩p⟨возврат каретки⟩.

(Заметим, что нажатие на клавишу ⟨обратный ход⟩ в начале строки не приводит ни к какому результату и что знаки могут многократно печататься на одном и том же месте.) Не обязательно устанавливать $G(z)$ в явном виде — достаточно указать уравнения, которые однозначно определяют эту функцию.

(b) Какова вероятность того, что обезьяна напечает подобным образом слово «ape»? (Если удастся, дайте ваш ответ в виде явного вещественного числа и объясните, как вы его получили.) [Если вас не устраивает подобная формулировка задачи, можете рассмотреть вероятность того, что обезьяна напечатает некое четырехбуквенное слово.]

5. [50 очков] Найдите асимптотическое значение произведения $\prod_{0 \leqslant k \leqslant n} \binom{n}{k}$ с относительной ошибкой порядка $O(1/n)$ при $n \to \infty$. [Другими словами, ваш ответ должен иметь вид $f(n)(1 + O(1/n))$ с «явно» заданной функцией f.]

6. [100 очков] Будем называть положительное целое число n *необычным* (unusual. — *Перев.*), если его наибольший простой делитель не меньше $\sqrt{n}$. Таким образом, все простые числа необычны, так же как и произведения двух простых. (Число 1 в высшей степени необычно, поскольку это — положительное целое число, для которого данное определение лишено всякого смысла.)

Установите асимптотику количества необычных целых чисел n в интервале $1 < n \leqslant N$ при $N \to \infty$ с абсолютной ошибкой порядка $O(N/(\log N)^2)$.

Указание. Посчитайте раздельно количество необычных целых чисел в указанном интервале, наибольший простой делитель которых не превосходит $\sqrt{N}$ [за решение этой части задачи присуждается 35 очков] и превосходит $\sqrt{N}$ [за решение этой части задачи присуждается 65 очков].

За правильное решение задачи с ошибкой порядка $O(N/(\log N)^3)$ присуждаются дополнительные очки; однако, прежде чем пытаться их заработать, советуем вначале решить задачу 7.

7. [150 очков] Следующий алгоритм прохождения бинарного дерева в прямом порядке (в оригинале «preorder». — *Перев.*) идентичен алгоритму 2.3.1T (Кнут [I]) для прохождения дерева во внутреннем порядке (inorder. — *Перев.*) с тем лишь отличием, что в данном случае в стек помещается меньшее число элементов.

P1. [Начальная установка.] Очистить стек A и установить переменную связи $P \leftarrow T$.

P2. [$P = \Lambda$?] Если $P = \Lambda$, то перейти к шагу **P5**.

P3. [Попадание в P.] (Сейчас P указывает на непустое бинарное дерево, которое нужно пройти.) «Попасть» в NODE(P).

P4. [Стек$\Leftarrow$ RLINK(P).] Если $\mathrm{RLINK}(P) \neq \Lambda$, то положить $A \Leftarrow$ $\Leftarrow \mathrm{RLINK}(P)$, т. е. поместить величину RLINK(P) в стек A. Затем установить $P \Leftarrow \mathrm{LLINK}(P)$ и вернуться к шагу **P2**.

P5. [P$\Leftarrow$стек.] Если стек A пуст, то выполнение алгоритма заканчивается; в противном случае установить $P \Leftarrow A$ и вернуться к шагу **P3**. ■

Задача аналогична упр. 2.3.1-11 из книги Кнута [I]: каково среднее значение наибольшего размера стека, который может встретиться при выполнении приведенного выше алгритма P, считая, что все бинарные деревья с n узлами равновероятны? Дайте ответ в виде функции от n с точностью до $O(n^{-1/2} \log n)$.

8. [50 очков] Продолжая анализ вторичного скучивания из разд. 3.4, найдите «скользящий оператор» для Ω_m, который позволит вычислить $U_2 G_{mn}(x)$. Кроме того, найдите аналог формулы (3.40), которая позволит вычислить $U_2 H_{mn}(x)$. Выразите $G''_{mn}(1)$ и $H''_{mn}(1)$ в виде «простых» функций от m, n, P_1 и P_2, где

$$P_k = \left(1 + \frac{kq}{m}\right)\left(1 + \frac{kq}{m-1}\right) \dots \left(1 + \frac{kq}{m-n+1}\right).$$

9. [Всего 150 очков, распределенных неодинаково по отдельным подзадачам [18].] Однажды утром студент по имени Смышленый проснулся с мыслью о новой разновидности бинарного дерева поиска. Из занятий по информатике он знал о преимуществах «связывания в конце» (late binding. — *Перев.*), в связи с чем подумал: «Почему, собственно, я должен использовать первый ключ для решения вопроса о том, как следует разбивать остальные ключи? Не лучше ли отложить на время решение этого вопроса и посмотреть вначале, каковы будут другие ключи?» Подбежав к своему терминалу, студент быстренько подготовил файл с описанием новой структуры данных, которую он решил назвать *связанными в конце деревьями* (СК-деревьями), и отправился завтракать.

К сожалению, здесь не место описывать дальнейшие похождения Смышленого, в том числе историю (которая, вероятно, уже никогда не будет рассказана) о его роковой встрече в закусочной с любопытными сестрами, которые поклялись не останавливаться ни перед чем до тех пор, пока не узнают его секрет. Давайте вместо этого сосредоточим наше внимание на особенностях СК-деревьев, опуская подробности того, как нами была получена эта информация.

В СК-дереве имеется два типа узлов: узлы разветвления и листья. *Узел разветвления* содержит два ключа a и b, причем $a < b$, а также два указателя l и r на поддеревья. Все ключи в дереве l меньше или равны a, а все ключи в дереве r больше или равны b. Такой узел можно обозначить через $(a:b)$ и подрисовать к нему поддеревья. *Лист* состоит из полной записи, содержащей ключ a; такой узел можно обозначить через $[a]$.

СК-деревья никогда не бывают пустыми — они «вырастают» из одиночного узла (ростка). Левое поддерево узла разветвления $(a:b)$ содержит лист $[a]$, а правое поддерево — лист $[b]$. Если необходимо вставить в имеющееся СК-дерево новую запись с ключом x (предполагая, что ключ

x отличен от ключей, уже вставленных в дерево), то надо действовать по следующему правилу.

(1) Если СК-дерево состоит из листа $[a]$ и если $a < x$, то заменить $[a]$ на узел $(a:x)$ с левым поддеревом $[a]$ и правым поддеревом $[x]$. В случае $x < a$ осуществить аналогичное перестроение, меняя местами a и x.

(2) Если СК-дерево имеет корневой узел $(a:b)$ и если $x < a$, то вставить новую запись в левое поддерево, используя рекурсивно данное правило.

(3) Если СК-дерево имеет корневой узел $(a:b)$ и если $x > b$, то вставить новую запись в правое поддерево, используя рекурсивно данное правило.

(4) Если СК-дерево имеет корневой узел $(a:b)$ и если $a < x < b$, то надо подбросить «правильную» монетку. Если выпадет «орел», то заменить корень на узел $(x:b)$ и вставить новую запись в левое поддерево; в противном случае заменить корень на узел $(a:x)$ и вставить новую запись в правое подерево.

Таким образом, основная идея СК-дерева состоит в слежении за диапазоном ключей, по которым возможно разделение в корне, вместо того, чтобы принимать поспешные решения по каждому отдельному ключу.

Цель настоящей задачи — научить кое-чему из анализа алгоритмов на примере анализа средней суммарной длины внешних путей СК-деревьев; при этом предполагается, что СК-деревья «вырастают» путем вставки в них записей в случайном порядке. Суммарная длина внешних путей — это взятая по всем листьям сумма расстояний от корня дерева до листа. Пусть число листьев равно n; тогда при $n = 1$ суммарная длина внешних путей равна всегда 0, при $n = 2$ — всегда 2, при $n = 3$ — всегда 5, а при $n = 4$ она равна либо 8, либо 9.

(a) [15 очков] Предположим, что после вставки n ключей $x_1 \ldots x_n$, которые образуют случайную перестановку множества $\{1, \ldots, n\}$, корнем СК-дерева является узел $(k:k+1)$. (Другими словами, вначале СК-дерево состоит из узла $[x_1]$, потом вставляется ключ x_2 и т. д., пока после вставки ключа x_n дерево не «обрастет» n листьями.) Левое поддерево корня представляет собой СК-дерево, которое образовано перестановкой $y_1 \ldots y_k$ множества $\{1, \ldots, k\}$, состоящей из ключей $x_i \leqslant k$, а правое поддерево образовано перестановкой $z_1 \ldots z_{n-k}$ множества $\{k+1, \ldots, n\}$, состоящей из остальных ключей x_i.

Докажите, что $y_1 \ldots y_k$ не являются равномерно распределенными случайными перестановками множества $\{1, \ldots, k\}$: если перастановка $y_1 \ldots y_k$ содержит t левосторонних максимумов, то ее вероятность равна вероятности тождественной перестановки $1 \ldots k$, умноженной на 2^{k-t}. Аналогично перестановки $z_1 \ldots z_{n-k}$ также не являются равномерно распределенными: их распределение зависит от левосторонних минимумов.

(b) [15 очков] Пусть p_{nk} — вероятность того, что после вставки n ключей в порядке, соответствующем равномерному распределению, корнем СК-дерева будет узел $(k:k+1)$. Найдите формулу для p_{nk}.

(c) [20 очков] Будем говорить, что перестановки множества $\{1, \ldots, n\}$ являются U-распределенными, если все перестановки равновероятны; что эти перестановки являются L-распределенными, если их вероятности пропорциональны 2^{-t}, где t — число левосторонних максимумов; что эти перестановки являются R-распределенными, если их вероятности пропорциональны 2^{-s}, где s — число левосторонних минимумов; наконец, что они являются B-распределенными, если их вероятности пропорциональны 2^{-s-t}.

Подзадача (a) показывает, что левые и правые поддеревья СК-деревьев, построенные по U-распределенным перестановкам ключей, являются соответственно L- и R-распределенными. Докажите, что если мы начинаем с L-, R- или B-распределенных перестановок ключей, то поддеревья будут соответствовать (L, B)-, (B, R)- или (B, B)-распределенным перестановкам ключей.

(d) [5 очков] Пусть U_n, L_n, R_n и B_n — средние суммарные длины внешних путей СК-деревьев, построенных по U-, L-, R- и B-распределенным перестановкам ключей. Докажите, что при $n \geqslant 2$

$$U_n = n + \sum_{1 \leqslant k < n} p_{nk}(L_k + R_{n-k}),$$

$$L_n = n + \sum_{1 \leqslant k < n} q_{nk}(L_k + B_{n-k}),$$

$$R_n = n + \sum_{1 \leqslant k < n} q_{nk}(B_k + R_{n-k}),$$

$$B_n = n + \sum_{1 \leqslant k < n} r_{nk}(B_k + B_{n-k}),$$

где q_{nk} и r_{nk} — соответственно вероятности того, что L- и B-распределенные СК-деревья имеют своим корнем узел $(k : k+1)$.

(e) [20 очков] Докажите, что $q_{nk} = \binom{k-1/2}{k-1} \Big/ \binom{n-1/2}{n-2}$ и $r_{nk} = 1/(n-1)$ при $1 \leqslant k < n$.

(f) [5 очков] Докажите, что $B_n = 2nH_n - 2n$.

(g) [20 очков] Докажите, что

$$\sum_{1 \leqslant k < n} q_{nk} B_{n-k} = \frac{4}{5}\left(n + \frac{1}{2}\right)(H_{n+1/2} - H_{5/2}).$$

[*Указание*. Покажите, что равенство (1.47) справедливо и при нецелых m.]

(h) [25 очков] Найдите решение рекуррентного соотношения для L_n, которое фигурирует в подзадаче (d), используя «репертуарный» метод решения рекуррентных уравнений вида $x_n = a_n + \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} q_{nk} x_k$.

(i) [25 очков] Докажите, что $U_n = \left(2n + \frac{1}{2}\right) H_n + \frac{13}{6} n - \frac{5}{12}$.

10. [75 очков] Найдите асимптотическое значение суммы $S_n = \sum_{0<k<n} H_n/(2n-k)$ с точностью до членов порядка $O(n^{-3/2})$.

11. [Всего 100 очков] Пусть a_n — число путей из точки $(0, 0)$ в точку (n, n) решетки, причем на каждом шаге допускается переход из точки (i, j) в одну из точек $(i, j+1)$, $(i+1, j)$ или $(i+1, j+1)$. Таким образом, $(a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots) = (1, 3, 13, 63, \ldots)$.

(a) [50 очков] Пусть $A(z) = \sum_n a_n z^n$. Используя формулу (4.125), докажите, что $A(z) = 1/\sqrt{1 - 6z + z^2}$.

(b) [50 очков] Найдите асимптотическое выражение для коэффициентов a_n при $n \to \infty$ с явным указанием констант c, ρ и θ, таких, что $a_n = c_n \rho \theta^n + O(n\rho^{-1}\theta^n)$.

12. [Всего 125 очков] Некий профессор принимает экзамен, состоящий из бесконечного числа задач. Прежде чем приступить к решению очередной задачи, студент должен полностью решить все предшествующие задачи, ибо профессор прекращает экзаменовать, как только обнаруживает ошибку. Каждый студент независимо от других студентов и номера задачи может с вероятностью p правильно решить любую отдельную задачу. Например, при $p = 1/2$ вероятность правильного решения ровно $n \geqslant 0$ задач равна 2^{-n-1}.

Решившему наибольшее число задач профессор ставит A^+ в том случае, если только один студент набирает максимальное число очков; в противном случае никто из сдающих экзамен не получает A^+.

(a) [25 очков] Выпишите выражение для вероятности получения A^+ кем-то из n студентов, сдающих экзамен. (Ваше решение может быть представлено в виде суммы, так как, по-видимому, требуемая вероятность не выражается в «замкнутой форме».)

(b) [100 очков] Установите при фиксированном $0 < p < 1$ и $n \to \infty$ асимптотическое поведение вероятности получения A^+ кем-то из n студентов, сдающих экзамен.

Важное замечание. Для того чтобы вам было зачтено какое-нибудь решение части (b) задачи, необходимо правильно решить часть (a). Прежде чем вы возьметесь за асимптотическое решение, удостоверьтесь, что при $n = 2$ ваша формула дает значение $2p(1+p)^{-1}$, а при $n = 3$ — значение $3p(1+p^2)(1+p)^{-1}(1+p+p^2)^{-1}$.

13. Как показал результат решения одной из задач недавнего среднесеместрового экзамена, средняя длина пути СК-деревьев примерно такая же, как и у обычных бинарных деревьев поиска.

Однако вскоре после экзамена из наших источников стало известно, что студента Смышленого не разочаровали результаты анализа СК-деревьев. Согласно заслуживающим доверия сообщениям, он решил попытаться спасти свое детище путем включения в каждый узел дополнительной информации.

Узлы новой структуры данных Смышленого, которую он назвал *УСК-деревьями* (усовершенствованные связанные в конце деревья), содержат поле «размера», информирующее о числе листьев поддерева с корнем в данном узле. В случае раздвоения дерева в корне ключ вставляется в меньшее на данный момент поддерево. (Если размеры поддеревьев одинаковы, то, как и на шаге 4 построения СК-деревьев, принимается случайное решение).

Цель настоящей задачи — провести анализ нового алгоритма Смышленого «на самом высоком уровне». Пусть p_{qk} есть вероятность того, что после вставки ключей, являющихся перестановкой множества $\{1, \ldots, n\}$, корнем дерева будет узел $(k : k+1)$. (Предполагается, что все перестановки значений x равновероятны: вначале УСК-дерево состоит из одного ключа x_1, в которое затем один за другим вставляются ключи $x_2, \ldots, x_n$). Пусть $P_{nk} = n! p_{nk}$; тогда нетрудно убедиться, что при $1 \leqslant k < n$ и $1 \leqslant n \leqslant 6$ числа P_{nk} принимают следующие значения:

$n = 2$:	2				
$n = 3$:	3				
$n = 4$:	6	12	6		
$n = 5$:	18	42	42	18	
$n = 6$:	72	162	52	162	72

(a) Установите рекуррентное соотношение, которому удовлетворяют числа P_{nk}.

(b) Пусть $Q_{nk} = 2P_{nk} \max(k, n-k)/(k!(n-k)!)$, так что имеем следующую треугольную таблицу значений Q_{nk}:

$n = 2$:	4				
$n = 3$:	6	6			
$n = 4$:	6	12	6		
$n = 5$:	6	21	21	6	
$n = 6$:	6	27	42	27	6

Покажите, что для большинства значений n и k числа Q_{nk} удовлетворяют тому же рекуррентному соотношению, что и числа, составляющие треугольник Паскаля, т. е. $Q_{nk} = Q_{(n-1)k} + Q_{(n-1)(k-1)}$. Найдите все исключения из этого правила и установите рекуррентное соотношение, справедливое при исключенных значениях.

(c) Пусть $a_k = Q_{(2k)k}$. Покажите, что при $k > 1$

$$a_k = \sum_{1 \leqslant j < k} \frac{2j+1}{j} a_j c_{k-j},$$

где c_k — число бинарных деревьев с n внешними узлами.

d) Пусть $B(z) = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{1-4z})$ и $C(z) = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{1-4z})$, так что $B(z) + C(z) = 1$, $B(z) - C(z) = \sqrt{1-4z}$, $B(z)C(z) = z$ и $C(z)^2 = C(z) - z$; напомним, что $C(z) = c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \ldots$ является производящей функцией для числа бинарных деревьев. Пусть $f_k = a_k/k$, и введем в рассмотрение производящую функцию $F(z) = f_1 z + f_2 z^2 + \ldots$. Преобразуйте рекуррентное соотношение из части (c) задачи в дифференциальное уравнение для F и решите последнее с получением a_k в «замкнутой форме». [*Подсказка*: покажите, что производная $B(z)F(z)$ имеет простой вид.]

(e) Примените рекуррентное соотношение из части (b) задачи к производящей функции $Q(w, z) = \sum_{k,n} Q_{nk} w^k z^{n-k}$ и воспользуйтесь значениями a_k, найденными в части (d) задачи, чтобы вывести формулы для $Q(w, z)$ в виде явной функции от w и z.

(f) Найдите «простое» выражение для коэффициента при $w^n z^{n+r}$ в степенном разложении функции $\sqrt{1-4wz}/(1-w-z)$ при $r \geqslant 0$. [*Указание*. Рассмотрите эту задачу при фиксированном r и переменном n. Можно по желанию воспользоваться тождеством $C(z)^s/\sqrt{1-4z} = \sum_n \binom{2n+s}{n} z^{n+s}$ и фактами о функциях $B(z)$ и $C(z)$, установленными в части (d) задачи.]

(g) Исходя из решения предыдущих частей задачи, покажите, что

$$p_{nk} = \frac{1}{2}\left(\frac{k+1}{n-k} - \frac{k}{n-k+1}\right) - \frac{1}{2n} + \frac{2k}{n(n-1)} \quad \text{при } 1 \leqslant k < \frac{1}{2}n.$$

Замечание. НЕдостаточно доказать эту или эквивалентную ей формулу просто по индукции. НАДО пояснить, как вы могли бы самостоятельно найти это решение некоторым систематическим путем без счастливых озарений.

Решения задач

1. Данную задачу предполагалось поместить в книгу Кнута [III] в качестве упр. 5.1.1-21; на самом же деле в этой книге вместо упражнения содержится ее решение!

2. (a) В соответствии с анализом «метода пузырька», приведенным в разд. 5.2.2 книги Кнута [III], надо подсчитать, сколько имеется таблиц инверсий $b_1 \ldots b_n$, таких, что все $b < 2$. Ясно, что при каждом $n \geqslant 2$ существует $3^{n-2} \cdot 2$ таких таблиц.

(b) Назовем таблицу инверсий $b_1 \ldots b_n$ *удобной* (easy. — *Перев.*), если соответствующую перестановку можно отсортировать за один двойной шейкер-проход. Оказывается, что имеется весьма привлекательный способ описания подобных таблиц. Таблица инверсий $b_1 \ldots b_n$ является удобной ттогда, когда выполняется одно из следующих условий:

$$
\begin{array}{lll}
b_1 = 0 & \text{и} & b_2 \ldots b_n \text{ удобна,} \\
b_1 = 1 & \text{и} & b_2 \ldots b_n \text{ удобна,} \\
b_1 = 2 & \text{и} & b_2 \leqslant 1 \text{ и } b_3 \ldots b_n \text{ удобна,} \\
b_1 = 3 & \text{и} & b_2 \leqslant 1 \text{ и } b_3 \leqslant 1 \; b_4 \ldots b_n \text{ удобна,} \\
\multicolumn{3}{c}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} \\
b_1 = n-1 & \text{и} & b_2 \leqslant 1 \text{ и } \ldots \text{ и } b_{n-1} \leqslant 1 \text{ и } b_n \text{ удобна,}
\end{array}
$$

[*Набросок доказательства.* Допустим, что $b_1 = k > 0$. После первого прохода перестановки слева направо имеется $k-1$ инверсий элемента 1, и на этом этапе перестановка должна начинаться с $2 \ldots k1$, чтобы ее можно было отсортировать за один обратный проход.]

Итак, мы получаем, что при $n \geqslant 2$ число удобных перестановок удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-1} + 2x_{n-2} + 4x_{n-3} + \ldots,$$

где $x_1 = 1$ и $x_j = 0$ при $j \leqslant 0$. Отсюда следует, что $\frac{1}{2} x_{n+1} - x_n = x_n - x_{n-1}$, т. е. $x_{n+1} = 4x_n - 2x_{n-1}$. Решением этого линейного рекуррентного соотношения является $x_n = \frac{1}{2}\left((2+\sqrt{2})^{n-1} + (2-\sqrt{2})^{n-1}\right)$.

Другое решение данной задачи содержится в упражнениях 5.4.8-8, 9 из книги Кнута [III].

3. Если дерево содержит k «узлов-почек», т. е. узлов, каждый из которых имеет по два внешних узла-листа, то для представления дерева по схеме Фергюсона требуется $2n + 1 - 2k$ ячеек: одна — для хранения корня и $2(n-k)$ — для узлов-листьев. При переходе от P_n к P_{n+1} значение k не изменяется, если новый узел заменяет один из $2k$ листьев k узлов-почек; в противном случае k увеличивается на единицу. Следовательно,

$$P_{n+1}(z) = \sum_k p_{nk} \left(\frac{2k}{n+1} z^k + \left(\left(1 - \frac{2k}{n+1}\right) z^{k+1} \right) \right).$$

Соответствующим дифференциальным оператором является оператор

$\Phi_n = z + \frac{2}{n+1} z(1-z) D$, так что

$$P_n(z) = \Phi_{n-1} \ldots \Phi_0 P_0(z), \quad \text{где} \quad P_0(z) = 1.$$

Для установления среднего значения x_n достаточно заметить, что

$$D\Phi_n = 1 + zD + \frac{2}{n+1}\left((1-2z)D + z(1-z)D^2\right),$$

$$U\,D\Phi_n = U + UD + \frac{2}{n+1}(-\,UD) = U + \frac{n-1}{n+1}\,UD.$$

Отсюда $x_{n+1} = U\,DP_{n+1}(z) = \left(U + \frac{n-1}{n+1}\,UD\right)P_n(z) = 1 + \frac{n-1}{n+1}\,x_n$, а это рекуррентное соотношение имеет решение $x_n = (n+1)/3$ при $n \geqslant 2$.

Аналогично для установления дисперсии мы находим, что

$$UD^2\Phi_n = 2\,\frac{n-1}{n+1}\,UD + \frac{n-3}{n+1}\,UD^2.$$

Положим $y_n = P_n''(1)$, так что

$$y_{n+1} = 2\,\frac{n-1}{n+1}\,x_n + \frac{n-3}{n+1}\,y_n = \frac{2}{3}(n-1) + \frac{n-3}{n+1}\,y_n.$$

Применяя, как на с. 21, суммирующий множитель, получаем $z_{n+1} = (n+1)^{\underline{4}} y_{n+1} = \frac{2}{3}(n+1)^{\underline{4}}(n-1) + n^{\underline{4}} y_n = \frac{2}{3}(n+1)^{\underline{5}} + \frac{4}{3}(n+1)^{\underline{4}} + z_n$ и $z_3 = 0$. Поэтому $z_n = \frac{2}{18}(n+1)^{\underline{6}} + \frac{4}{15}(n+1)^{\underline{5}}$ и $y_n = \frac{2}{18}(n+1)(n-4) + \frac{4}{15}(n+1)$ при $n > 4$. Итак, дисперсия равна $y_n + x_n - x_n^2 = (n+1)\times \left(\frac{2}{18}(n-44) + \frac{4}{15} + \frac{1}{3} - \frac{1}{9}(n+1)\right) = \frac{2}{45}(n+1)$ при $n \geqslant 4$.

[*Замечание.* Среднее и дисперсию можно было бы также установить с помощью совершенно иного подхода, используя то, что может быть названо «индукцией с другого конца». Рассматривая различные варианты выбора корневых узлов, получаем рекуррентное соотношение

$$P_n(z) = \frac{1}{n}\left(P_0(z)\,P_{n-1}(z) + P_1(z)\,P_{n-2}(z) + \ldots + P_{n-1}(z)\,P_0(z)\right)$$

при $n \geqslant 2$. Пусть $P(w) = \sum_{n\geqslant 0} w^n P_n(z)$; тогда данное рекуррентное соотношение сводится к дифференциальному уравнению $P' = P^2 + P_1(z) - P_0(z)^2 = P^2 + z - 1$, которое имеет решение

$$P(w) = \sqrt{z-1}\,\operatorname{tg}\left(w\sqrt{z-1} + \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{z-1}}\right) = \frac{1-(z-1)\,T(w)}{1-T(w)},$$

где $T(w) = \left(\operatorname{tg} w\sqrt{z-1}\right)/\sqrt{z-1}$. Переписывая это решение так, чтобы избавиться от радикалов, получаем

$$P(w) = \frac{1 + \sum\limits_{k\geqslant 0} t_{2k+1}(z-1)^{k+1} w^{2k+1}}{1 - \sum\limits_{k\geqslant 0} t_{2k+1}(z-1)^{k} w^{2k+1}},$$

где $\sum_{k\geqslant 0} t_{2k+1} x^{2k+1} = \operatorname{tg} x$. Полученное решение можно разложить в ряд по степеням $z-1$; зная значения $t_1 = 1$, $t_3 = \frac{1}{3}$, $t_5 = \frac{2}{15}$, получаем

$$P(w) = \frac{1}{1-w} + \left(\frac{1}{3(1-w)} + \frac{w-1}{3}\right)(z-1) +$$
$$+ \left(\frac{1}{9(1-w)^3} - \frac{1}{5(1-w)^2} + \frac{1}{9} - \frac{(1-w)^3}{45}\right)(z-1)^2 + \ldots .$$

Итак, $\sum P_n(1)\,w^n = 1/(1-w)$, $\sum P'_n(1)\,w^n = \frac{1}{3}(1-w)^{-2} + \frac{1}{3}(w-1)$, а $\sum \frac{1}{2} P''_n(1)\,w^n$ является коэффициентом при $(z-1)^2$, и, сделав еще несколько шагов, мы найдем дисперсию. Однако этот подход не использует операторов, как того требовала постановка задачи.]

4. Удобнее иметь дело с родственной функцией $G(x_1, x_2, x_3)$, которая допускает печать в позиции i ровно x_i знаков помимо знаков обратного хода и возврата каретки. Тогда, согласно принципу включения и исключения, производящая функция

$$G = G(2,2,2) - G(2,2,1) - G(2,1,2) - G(1,2,2) + G(2,1,1) + G(1,2,1) + \\ + G(1,1,2) - G(1,1,1)$$

перечисляет последовательности знаков, которые включают в себя все три буквы — «а», «р», «е».

Чтобы избежать бесконечного числа уравнений, рассмотрим вначале множество всех последовательностей знаков пробела и обратного хода, которые начинаются в некоторой позиции $i > 3$ и заканчиваются в позиции $i - 1$ с переходом левее i-й позиции только на самом последнем ударе. Подобные последовательности однозначно описываются бесконтекстной грамматикой

$$L \leftarrow \langle\text{обратный ход}\rangle \mid \langle\text{пробел}\rangle\, LL.$$

Следовательно, функция

$$L(z) = z + zL(z)^2$$

является производящей функцией $\{z^{|\sigma|} \mid \sigma \in L\}$ и

$$L(z) = \left(1 - \sqrt{1-4z^2}\right)/(2z) = z + z^3 + 2z^5 + 5z^7 + \ldots .$$

Аналогично пусть производящая функция $Q(z)$ перечисляет последовательности знаков пробела и обратного хода, которые начинаются в некоторой позиции $i > 3$, но никогда не переходят левее i-й позиции. Рассмотрение однозначной грамматики

$$Q \leftarrow \langle\text{пусто}\rangle \mid \langle\text{пробел}\rangle\, Q \mid \langle\text{пробел}\rangle\, LQ$$

показывает, что

$$Q(z) = 1 + zQ(z) + zL(z)\,Q(z),$$
$$Q(z) = 1/(1 - z - zL(z)) = 1 + z + 2z^2 + 3z^3 + 6z^4 + \ldots .$$

[Между прочим, с помощью простых алгебраических преобразований можно установить формулу

$$Q(z) = (1 - L(z))/(1-2z),$$

которая эквивалентна равенству $Q(z) + L(z) = 1 + 2zQ(z)$. Последнее равенство непосредственно следует из того факта, что каждая последовательность из Q или L либо пуста, либо имеет вид σ ⟨пробел⟩ или σ ⟨обратный ход⟩, где $\sigma \in Q$.]

Пусть теперь $G_i(z)$ — производящая функция, соответствующая случаю, когда на пишущей машинке начинают печатать с i-й позиции от левого края, так что искомая функция $G(z) = G_0(z)$. Рассматривая последовательности знаков, которые начинаются со знака ⟨возврат каретки⟩,

⟨обратный ход⟩ или с какого-нибудь другого, имеем

$$G_0(z) = z + zG_0(z) + x_1 zG_1(z),$$
$$G_1(z) = z + zG_1(z) + x_2 zG_2(z),$$
$$G_2(z) = z + zG_1(z) + x_3 zG_3(z).$$

Кроме того,

$$G_3(z) = L(z)G_2(z) + Q(z)z,$$

поскольку каждая последовательность знаков, начинающаяся в 4-й позиции, либо возвращается в 3-ю позицию, либо нет. Решением этой трехдиагональной системы линейных уравнений и является требуемая производящая функция $G(x_1, x_2, x_3)$.

Вероятность любой заданной последовательности, состоящей из n ударов по клавишам и заканчивающейся первым ударом по клавише ⟨возврат каретки⟩, равна $1/40^n$, и такие последовательности являются взаимно исключающими. Поэтому вероятность отпечатывания слова «ape» равна $G(1/40)$.

Теперь мы получили все, что необходимо для ответов на поставленные вопросы, однако представляется полезным продвинуться дальше и упростить полученные формулы, обратившись к системе MACSYMA (см. прилагаемый листинг).

[Система MACSYMA разработана группой Mathlab в МТИ по контракту с агентствами U. S. Energy Research and Development (контракт E (11-1)-3070) и National Aeronautic and Space Administration (субсидия NSG 1323) [19]).]

Оказывается, что

$$G(z) = \frac{x_1x_2x_3z^4Q(z) - (x_1z + 1)\,x_3z^2L(z) + (x_1 - 1)\,x_2z^3 + x_1z^2 + z}{(x_1z^3 + z^2 - z)\,x_3L(z) + x_2z^3 - (x_1 + x_2)\,z^2 - z + 1},$$

и после устранения x_i методом включеия и исключения производящая функция для «ape»-последовательностей начинается так:

$$z^4 + 3z^5 + 15z^6 + 44z^7 + 163z^8 + 472z^9 + 1550z^{10} + \ldots .$$

Точное значение искомой вероятности

$$\frac{299960985906139337267285127509990464649904022 1\sqrt{399} - 5987758871353029041162994023756955628 7667865416}{93355082549464520980187663115368403895040545354710}$$

что приблизительно равно 0000004238793706620676.

Как указал Жорж Столфи, можно было бы предусмотреть возможность печати во второй позиции буквы «o», поскольку на многих машинках она входит в начертание буквы «p». В этом случае ответ был бы таким:

$$\begin{aligned} G &= G(2, 3, 2) - G(2, 3, 1) - G(2, 2, 2) - G(1, 3, 2) + \\ &\quad + G(2, 2, 1) + G(1, 3, 1) + G(1, 2, 2) - G(1, 2, 1) = \\ &= z^4 + 3z^5 + 17z^6 + 52z^7 + 215z^8 + 664z^9 + 2406z^{10} + \ldots \end{aligned}$$

и вероятность отпечатывания слова «ape» увеличилась бы, став приблизительно равной .0000004244.

5. Итак, $\ln \prod_{0 \leqslant k \leqslant n} \binom{n}{k} = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} (\ln n! - \ln k! - \ln (n-k)!) = 2\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} k \ln k - (n+1)\sum_{1 \leqslant k \leqslant n} \ln k$. По формуле суммирования

```
:macsyma

This is MACSYMA 292

FIX292 14 DSK MACSYM being loaded
Loading done

(C1) solve(L=z+z*L**2,L);

SOLVE FASL DSK MACSYM being loaded
Loading done
Solution:

                                                 2
                                       SQRT(1 - 4 Z ) - 1
(E1)                               L = - ------------------
                                              2 Z

                                                 2
                                       SQRT(1 - 4 Z ) + 1
(E2)                               L = ------------------
                                              2 Z
(D2)                                     [E1, E2]

(C3) solve(Q=1+z*Q+z*L*Q,Q);
Solution:

                                                  1
(E3)                                Q = - -------------
                                           (L + 1) Z - 1
(D3)                                       [E3]

(C4) algebraic:true;
(D4)                                        TRUE

(C5) g0=z+z*g0+x1*z*g1;
(D5)                        G0 = G1 X1 Z + G0 Z + Z

(C6) g1=z+z*g0+x2*z*g2;
(D6)                        G1 = G2 X2 Z + G0 Z + Z

(C7) g2=z+z*g1+x3*z*g3;
(D7)                        G2 = G3 X3 Z + G1 Z + Z

(C8) g3=L*g2+z*Q;
(D8)                           G3 = Q Z + G2 L

(C9) solve([d5,d6,d7,d8],[g0,g1,g2,g3])
```

Solution

(E9) $$G3 = \frac{Q\,X2\,Z^4 + ((-Q - L)\,X1 \quad Q\,X2)\,Z^3 - Q\,Z^2 + (Q + L)\,Z}{(L\,X1\,X3 + X2)\,Z^3 + (L\,X3 - X2 - X1)\,Z^2 + (-L\,X3 - 1)\,Z + 1}$$

(E10) $$G1 = -\frac{Q\,X2\,X3\,Z^4 + X2\,(1 - Q\,X3)\,Z^3 + (L\,X3 - X2)\,Z^2 - Z}{(L\,X1\,X3 + X2)\,Z^3 + (L\,X3 - X2 - X1)\,Z^2 + (-L\,X3 - 1)\,Z + 1}$$

(E11) $$G2 = -\frac{Q\,X1\,X3\,Z^4 + (Q\,X3 + X1)\,Z^3 - Q\,X3\,Z^2 - Z}{(L\,X1\,X3 + X2)\,Z^3 + (L\,X3 - X2 - X1)\,Z^2 + (-L\,X3 - 1)\,Z + 1}$$

(E12) $$G0 = \frac{Q\,X1\,X2\,X3\,Z^4 + (X1\,(X2 - L\,X3) - X2)\,Z^3 + (X1 - L\,X3)\,Z^2 + Z}{(L\,X1\,X3 + X2)\,Z^3 + (L\,X3 - X2 - X1)\,Z^2 + (-L\,X3 - 1)\,Z + 1}$$

(D12) [[E9, E10, E11, E12]]

```
(C13) g(x1,x2,x3):=([t],t:ratsimp(ev(g0,e12,e3,eval)),ratsimp(ev(t,e1)));

(D13) G(X1, X2, X3) := ([T], T : RATSIMP(EV(G0, E12, E3, EVAL)),

                                                    RATSIMP(EV(T, E1)))

(C14) g(1,1,1);
```

(D14) $$-\frac{Z}{2\,Z - 1}$$

```
(C15) answer:g(2,2,2)-g(2,2,1)-g(2,1,2)-g(1,2,2)
+g(2,1,1)+g(1,2,1)+g(1,1,2)-g(1,1,1);
```

(D15)

$$-\frac{8\,Z^7 + \mathrm{SQRT}(1 - 4\,Z^2)\,(8\,Z^6 - 4\,Z^4) - 12\,Z^6 - 4\,Z^5 - 4\,Z^4 + 6\,Z^3 + Z^2 - Z}{40\,Z^7 - 4\,Z^6 - 32\,Z^5 - 12\,Z^4 + 26\,Z^3 - 3\,Z^2 - 4\,Z + 1}$$

```
         7                   2       6       5       4       6       5       4      3
+ (18 Z   + SQRT(1 - 4 Z ) (2 Z   + 2 Z   - 2 Z ) + 5 Z   - 19 Z  - 6 Z   + 8 Z

   2         7        6        5        4         3       2
+ Z   - Z)/(34 Z  + 11 Z   - 44 Z   - 9 Z   + 26 Z   - 3 Z   - 4 Z + 1)

                            2       6       4        6       5       4       3      2
  8            (1 - 4 Z ) (4 Z   - 2 Z )    8 Z   + 4 Z   - 9 Z   + 4 Z   + 2 Z   - Z
+ ---        . ------------------------------------------------------------------------
                        7       6       5        4        3      2
                    16 Z   - 8 Z   - 2 Z   - 19 Z   + 20 Z   - Z   - 4 Z + 1

       7                   2      6      5     4        6       5        4       3     2
- (6 Z   + SQRT(1 - 4 Z ) (Z   + Z   - Z ) + 5 Z   - 4 Z   - 10 Z   + 5 Z   + 2 Z

          7           5       4        3     2
- Z)/(10 Z   + 7   - 14 Z  - 16 Z  + 20 Z  - Z   - 4 Z + 1)

      5                  2      4     3         4      3      2
  4 Z   + SQRT(1 - 4 Z ) (Z  - Z ) - 8 Z  + 3 Z  + 2 Z  - Z
- ------------------------------------------------------------
                  5       4       3    2
              10 Z  - 21 Z  + 14 Z  + Z  - 4 Z + 1

      3              2      4      3     2        2                   2      3
   2 Z  SQRT(1 - 4 Z ) + 4 Z  - 4 Z  - Z  + Z    Z  SQRT(1 - 4 Z ) - 4 Z  + Z
- ------------------------------------------- + ----------------------------------
          5       4        3    2                          3      2
      16 Z  - 24 Z  + 14 Z  + Z  - 4 Z + 1              10 Z  - 5 Z  - 2 Z + 1

     Z
+ -------
  2 Z - 1

(C16) taylor(answer,z,0,10);

HAYAT FASL DSK MACSYM being loaded
Loading done
              4     5      6      7       8       9        10
(D16)/T/ Z  + 3 Z  + 15 Z  + 44 Z  + 163 Z  + 472 Z  + 1550 Z   + . . .

(C17) ratsimp(ev(answer,z=1/40));

(D17) (2999609859061393872672851275099904646499040221 SQRT(399)

 - 59877588713530290411629940237569556287667865416)

/93355082549464520980187663115368403895040545354710

(C18) factor(denom(%));
```

```
(D18) 2 3 5 11 17 19 23 29 53 59 79 167 211 457 6673 7019 9199 20773 28559

                                                                129435714;

(C19) bfloat(d17);

FLOAT FASL DSK MACSYM being loaded
Loading done
(D19)                          4.2387937066206768B-7

(C20) time(d14,d15,d17);

TIME or [TOTALTIME, GCTIME] in msecs.:
(D20)               [[1813, 914], [13204, 5191], [1595, 537]]
```

Эйлера (ср. Кнут [I], упр. 1.2.11.2-7 и равенство 1.2.11.2-18) это равно

$$2\left(\frac{1}{2}n^2\ln n+\frac{1}{2}n\ln n+\frac{1}{12}\ln n-\frac{1}{4}n^2+\ln A+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)-$$
$$-(n+1)\left(n\ln n+\frac{1}{2}\ln n-n+\ln\sqrt{2\pi}+\frac{1}{12n}+O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)=$$
$$=\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n\ln n+\left(1-\ln\sqrt{2\pi}\right)a-\frac{1}{3}\ln n-\frac{1}{12}+2\ln A-$$
$$-\ln\sqrt{2\pi}+O(n^{-1}),$$

где A — постоянная Глейшера. Поскольку $\ln A=\frac{1}{12}(\gamma-\zeta'(2)(\zeta(2)+$ $+\ln 2\pi))$ — выражение, которое может быть установлено с помощью «формулы Абеля — Плана», приведенной в книге Олвера [74, § 8.3.3] — , то ответ таков:

$$\exp\left(\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n\ln n+\left(1-\frac{1}{2}\ln 2\pi\right)n-\frac{1}{3}\ln n-\frac{1}{12}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{6}\gamma-\zeta'(2)/\pi^2-\frac{1}{3}\ln 2\pi\right)(1+O(1/n)).$$

6. (а) Необычные числа $n\leqslant N$ с наибольшим простым делителем $p\leqslant\sqrt{N}$ суть p чисел $p, 2p, \ldots, p^2$. Следовательно, имеется $\sum_{p\leqslant\sqrt{N}}p$ необычных чисел типа (а). Это равно

$$\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{N}} t\,d\pi(t)=\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{N}} t\,dL(t)+\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{N}} t\,dO\left(t/(\log t)^{1000}\right),$$

где $L(t)=\int_2^t du/\ln u$. Второй интеграл есть

$$O\left(\sqrt{N}\sqrt{N}/(\log\sqrt{N})^{1000}\right)+O\left[\int_{\sqrt{2}}^{N^{1/3}}\left(t/(\log t)^{1000}\right)dt\right]+$$
$$+O\left[\int_{N^{1/3}}^{N^{1/2}}\left(t/(\log t)^{1000}\right)dt\right],$$

что составляет $O\left(N/(\log N)^{1000}\right)$. Первый интеграл равен

$$\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{N}} t\,dt/\ln t = \int_{2}^{N} du/\ln u = L(N)$$

$\left(\text{так что имеет место любопытное соотношение } \sum_{p\leqslant\sqrt{N}} p \approx \sum_{p\leqslant N} 1\right)$. Вычислением по частям этот интеграл сводится к хорошо известной асимптотической формуле

$$N/\ln N + N/(\ln N)^2 + 2!\,N/(\ln N)^3 + \ldots$$
$$\ldots + 998!\,N/(\ln N)^{999} + O\left(N/(\log N)^{1000}\right).$$

(b) Необычные числа $n \leqslant N$ с наибольшим простым делителем $p > \sqrt{N}$ суть $\lfloor N/p \rfloor$ чисел $p, 2p, \ldots, \lfloor N/p \rfloor p$. Следовательно, имеется $\sum_{p>\sqrt{N}} \lfloor N/p \rfloor$ необычных чисел типа (b), что равно $\int_{\sqrt{N}}^{\infty} \lfloor N/t \rfloor\, d\pi(t) = \int_{\sqrt{N}}^{\infty} \lfloor N/t \rfloor\, dL(t) + \int_{\sqrt{N}}^{\infty} \lfloor N/t \rfloor\, dO\left(t/\log t\right)^{1000}$. Второй интеграл есть

$$O\left(N/(\log\sqrt{N})^{1000}\right) + O\left(N\int_{\sqrt{N}}^{\infty} \frac{dt}{t\,(\log t)^{1000}}\right),$$

что составляет $O\left(N/(\log N)^{999}\right)$. Первый интеграл равен

$$\int_{\sqrt{N}}^{N} \left\lfloor \frac{N}{t} \right\rfloor \frac{dt}{\ln t} = \int_{\sqrt{N}}^{N} \left(\frac{N}{t} - \left\{\frac{N}{t}\right\}\right) \frac{dt}{\ln t} =$$
$$= N \ln\ln t \,\Big|_{\sqrt{N}}^{N} - N \int_{1}^{\sqrt{N}} \frac{\{u\}\,du}{u^2 \ln (N/u)},$$

где $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ и $u = N/t$. Поскольку $\ln\ln N - \ln\ln\sqrt{N} = \ln 2$, получаем выражение

$$N \ln 2 - \frac{N}{\ln N} \int_{1}^{\sqrt{N}} \frac{\{u\}\,du}{u^2} \left(1 + \frac{\ln u}{\ln N} + O\left(\left(\frac{\ln u}{\ln N}\right)^2\right)\right).$$

Интеграл $\int_{1}^{\infty} \left(\frac{\ln u}{u}\right)^2 du$ существует, поэтому O-член можно отбросить. Вычислим

$$\int_{1}^{\sqrt{N}} \frac{\{u\}\,du}{u^2} = \sum_{1\leqslant k\leqslant\sqrt{N}} \int_{k}^{k+1} \frac{(u-k)\,du}{u^2} + O\left(\frac{1}{N}\right) =$$
$$= \sum_{1\leqslant k<\sqrt{N}} \left(\ln(k+1) - \ln k - \frac{1}{k+1}\right) + O\left(\frac{1}{N}\right) =$$
$$= \ln\sqrt{N} - H_{\sqrt{N}} + 1 + O\left(1/\sqrt{N}\right) = 1 - \gamma + O\left(N^{-1/2}\right).$$

Аналогично вычисляется (за решение этой части задачи мы обещали «дополнительную плату», которую никто не получил)

$$\int_1^{\sqrt{N}} \frac{\{u\} \ln u \, du}{u^2} =$$
$$= \frac{1}{2} \ln^2 \sqrt{N} + \ln \sqrt{N} - H_{\sqrt{N}} + 1 - \sum_{1 \leqslant k < \sqrt{N}} \frac{\ln (k+1)}{k+1} + O\left(\frac{\log N}{\sqrt{N}}\right).$$

Пусть

$$\zeta(1+\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} + \gamma_0 + \gamma_1 \varepsilon + \frac{\gamma_2 \varepsilon^2}{2!} + \ldots;$$

в соответствии с формулой из ответа к упр. 6.1-8 (Кнут [III])

$$\sum_{1 \leqslant k \leqslant m} \frac{1}{k^{1+\varepsilon}} = \zeta(1+\varepsilon) + \frac{m^{-\varepsilon}}{-\varepsilon} + O(m^{-1-\varepsilon}).$$

Разлагая обе части этого равенства в ряд по степеням ε и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, получаем

$$\sum_{1 \leqslant k \leqslant m} \frac{(\ln k)^r}{k} = \frac{(\ln m)^{r+1}}{r+1} + (-1)^r \gamma_r + O\left(\frac{(\ln m)^r}{m}\right).$$

Таким образом, $\int_1^{\sqrt{N}} \{u\} \ln u \, du/u^2 = 1 + \gamma_1 - \gamma_0 + O(N^{-1/2} \log N)$, и следовательно, имеется $N \ln 2 - (\gamma - 1) N/\ln N + (\gamma - 1 - \gamma_1) N/(\ln N)^2 + O(N/(\log N)^3)$ необычных целых чисел типа (b); теперь мы видим, что необычные числа не столь уж необычны!

7. Назовем максимальный размер стека, необходимый для прохождения бинарного дерева с помощью алгоритма P, «вышиной» (hite. — *Перев.*), а аналогичную величину для алгоритма T — «высотой» (в оригинале height. — *Перев.*). Обозначим через $\bar{a}_{nk}$ число бинарных деревьев с n узлами, вышина которых не превосходит k. Если $\bar{g}_k(z) = \sum_n \bar{a}_{nk} z^n$, то $\bar{g}_0(z) = 1/(1-z)$ и $\bar{g}_k(z) = 1 + z\bar{g}_{k-1}(z)\,\bar{g}_k(z) + z\bar{g}_k(z) - z\bar{g}_{k-1}(z)$. (Первый член в этом выражении соответствует пустому бинарному дереву, следующий член соответствует бинарному дереву, левое поддерево которого имеет вышину $<k$, а правое поддерево имеет вышину $\leqslant k$, и, наконец, два последних члена соответствуют бинарному дереву, левое поддерево которого имеет вышину $= k$, а правое поддерево пусто.) Таким образом,

$$\bar{g}_k(z) = \frac{1 - z\bar{g}_{k-1}(z)}{1 - z\bar{g}_{k-1}(z) - z} = \cfrac{1}{1 - \cfrac{z}{1 - z\bar{g}_{k-1}(z)}},$$

откуда немедленно следует, что $\bar{g}(z) = g_{2k+1}(z)$. Исходя из этого удивительного соотношения, можно сделать вывод, что число бинарных деревьев вышины k такое же, как и число бинарных деревьев высоты $2k$ или $2k+1$. [Интересно найти взаимно однозначное соответствие между этими двумя множествами деревьев; см. замечание в конце решения задачи. Нам не хотелось бы лишать вас удовольствия найти данное соответствие самостоятельно, что представляет собой весьма изящную небольшую задачку.]

Бинарное дерево высоты h соответствует бинарному дереву вышины $\frac{1}{2} h$

или $\frac{1}{2}h - \frac{1}{2}$. Поэтому следует ожидать, что средняя вышина будет составлять приблизительно половину средней высоты, минус 1/4. На самом деле так оно и есть, однако целью нашей задачи является строгое аналитическое доказательство этого факта.

Согласно упр. 2.3.1-11 из книги Кнута [I] и статье де Брёйна, Кнута и Райса [72], $\bar a_{nk} = a_{k(2k+1)}$ есть коэффициент при u^n в разложении

$$(1-u)(1+u)^{2n}\frac{1-u^{2k+2}}{1-u^{2k+3}},$$

а $\bar b_{nk} = \bar a_{nn} - \bar a_{nk}$ есть коэффициент при u^{n+1} в разложении

$$(1-u)^2(1+u)^{2n}\frac{u^{2k+3}}{1-u^{2k+3}}.$$

Таким образом, $\bar s_n = \sum_{k\geqslant 1} k(\bar a_{nk} - a_{n(k-1)}) = \sum_{k\geqslant 0}\bar b_{nk}$ есть коэффициент при u^{n+1} в

$$(1-u)^2(1+u)^{2n}\sum_{k\geqslant 0}\frac{u^{2k+3}}{1-u^{2k+3}}.$$

Для удобства добавим коэффициент $\bar b_{n(-1)} = a_{nn}$, так что $\bar s_n + a_{nn}$ есть коэффициент при u^{n+1} в разложении

$$(1-u)^2(1+u)^{2n}\sum_{k\ \text{нечетно}}\frac{u^k}{1-u^k}.$$

Последняя сумма совпадает с суммой в уравнении (23) из цитированной выше статьи, за исключением того, что $d(k)$ теперь заменено на $\bar d(k)$ — число *нечетных* делителей k. Имеем

$$\sum_{k\geqslant 1}\bar d(k)/k^z = \zeta(z)\Bigl(\sum_{k\ \text{нечетно}} 1/k^z\Bigr) = \zeta(z)\left(\zeta(z) - 2^{-z}\zeta(z)\right);$$

следовательно, $\bar s_n + a_{nn}$ можно получить методом из указанной выше статьи, за исключением того, что там в интеграле (29) присутствует дополнительный множитель $(1-2^{b-2z})$. Поэтому вычет в точке двойного полюса становится равным

$$n^{(b+1)/2}\Gamma\left(\frac{1}{2}(b+1)\right)\left(\frac{1}{8}\ln u + \frac{1}{8}\psi\left(\frac{1}{2}(b+1)\right) + \frac{1}{2}\gamma + \frac{1}{4}\ln 2\right),$$

а в точке $z = -k$ он равен значению формулы (31) статьи, умноженному на $1 - 2^{2k+b}$. Искомый ответ таков:

$$-1 + (n+1)\left((-2/n)\,\bar g_0(n) + (4/n^2)\,\bar g_2(n) + O(n^{-3/2}\log n)\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\sqrt{\pi n} - 1 + O(n^{-1/2}\log n).$$

Обещанное выше соответствие описывается следующей рекурсивной процедурой:

ref ⟨*node*⟩ **procedure** *transform*(**ref** ⟨*node*⟩ **value** *p*);
begin ref ⟨*node*⟩ *q*, *r*;
if *p* = *null* **then return**(*null*);
r ← *left*(*p*); *left*(*p*) ← *transform*(*right*(*p*)); *right*(*p*) ← *null*;
if *r* = *null* **then return**(*p*);
q ← *r*; **while true do**
  begin *left*(*q*) ← *transform*(*left*(*q*));
  if *right*(*q*) = *null* **then done**;
  q ← *right*(*q*);
  end;
right(*q*) ← *p*; **return**(*r*);
end

Можно показать, что преобразованное дерево обладает следующим сильным свойством Пусть s — высота стека в тот момент, когда алгоритм T помещает в свой стек указатель на некоторый узел дерева B, и пусть s' — высота стека после шага P4, выполняемого сразу после того, как алгоритм P попал в тот же самый узел в преобразованном дереве B'. Тогда $s' = \lceil s/2 \rceil$. Таким образом, размер стека при прохождении дерева B' в прямом порядке почти в точности равен половине размера стека при прохождении дерева B во внутреннем порядке, и нами установлено соотношение как между средними, так и между максимальными размерами стека.

8. Согласно формуле (3.9), $U_1x = U_1 + U_0$ и $U_2x = U_2 + 2U_1$; следовательно, $U_0\Omega_m = U_0$, $U_1\Omega_m = \left(1+\frac{q}{m}\right)U_1 + pU_0$, $U_2\Omega_m = \left(1+\frac{2q}{m}\right)U_2 + 2\left(p+\frac{q}{m}\right)U_1$. Обозначим через B_m оператор $U_2 - 2mU_1 + (m+1)\,mU_0$; оказывается, что $B_{m+1}\Omega_m = \left(1+\frac{2q}{m}\right)B_m$. Поэтому $B_{m+1}G_{mn}(x) = P_2B_{m-n+1}x = (m-n+1)(m-n)P_2$. Кроме того, согласно (3.36), $B_{m+1}G_{mn}(x) = U_2G_{mn}(x) - 2(m+1)(m+1-(m-n)P_1) + (m+2)(m+1)$, откуда следует, что

$$U_2G_{mn}(x) = (m-n-1)(m-n)P_2 - 2(m+1)(m-n)P_1 + m(m+1).$$

А как насчет функции H? А вот как:

$$U_2H_{mn} = \left(1+\frac{1}{m}\right)U_2H_{m-1,\,n-1} + \left(\frac{1}{m}U_2 + \frac{2}{m}U_1\right)G_{m-1,\,n-1}$$

и оказывается, что

$$\frac{1}{m+1}U_2\left(H_{mn} + \frac{1}{p-q}G_{mn}\right) - \frac{2p}{p-q}U_1H_{mn} =$$
$$= \frac{1}{m}U_2\left(H_{m-1,\,n-1} + \frac{1}{p-q}G_{m-1,\,n-1}\right) - \frac{2p}{p-q}U_1H_{m-1,\,n-1}.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{m+1}U_2\left(H_{mn} + \frac{1}{p-q}G_{mn}\right) - \frac{2p}{p-q}U_1H_{mn} =$$
$$= \frac{1}{m-n+1}U_2\left(H_{m-n,\,0} + \frac{1}{p-q}G_{m-n,\,0}\right) -$$
$$- \frac{2p}{p-q}U_1H_{m-n,\,0} = -\frac{2p}{p-q},$$

и, подключая сюда нашу формулу для U_2G_{mn}, получаем

$$U_2H_{mn} = \frac{m+1}{q}(m - np - 2(m-n)P_1) + \\ + \frac{(m+1)(m-n)}{p-q}\left(\frac{p}{q} - \frac{m-n+1}{m+1}P_2\right).$$

Заметим, что при $p = q = 1/2$ последний член принимает вид 0/0, так что в этом случае нужна отдельная формула. Дифференцируя P_2 по q, находим, что $\frac{p}{q} - \frac{m-n+1}{m+1}P_2 = (1-2q)(H_{m+1} - H_{m-n+1}+2)+O(1-2q)^2$ при $q \to 1/2$; следовательно, при $q = 1/2$ величина U_2H_{mn} выражается через гармонические числа,

9. Вместо терминов «левосторонний максимум» и «левосторонний минимум» будем использовать соответственно сокращения «л. максимум» и «л. минимум».

(a) Для того чтобы получить $y_1 \ldots y_k$ и $z_1 \ldots z_{n-k}$, надо, чтобы $x_1x_2 = y_1z_1$ или $x_1x_2 = z_1y_1$, а остальные x_i должны содержать $y_2 \ldots y_k$ и $z_1 \ldots z_{n-k}$, слитые вместе в каком-нибудь порядке. Если при вставке x_i этот ключ есть y_j, то с вероятностью 1/2 мы помещаем его в левое поддерево, при условии что y_j является л. максимумом; если же этот ключ есть z_j, то с вероятностью 1/2 мы помещаем его в правое поддерево, при условии что z_j является л. минимумом. В противном случае соответствующая вероятность равна 1; если же монета упадет неудачно, то мы не получим в качестве корня узел $(k : k+1)$. Таким образом, вероятность перестановки $y_1 \ldots y_k$ пропорциональна 2^{-t}.

(b) Для каждой пары перестановок $y_1 \ldots y_k$ и $z_1 \ldots z_{n-k}$, имеющих соответственно t л. максимумов и s л. минимумов, и для каждого из $2\binom{n-2}{R-1}$ способов слияния этих перестановок в перестановку $x_1 \ldots x_n$ вероятность пересылки $y_1 \ldots y_k$ влево, а $z_1 \ldots z_{n-k}$ вправо равна 2^{2-t-s}. Поэтому p_{nk} есть $2\binom{n-2}{k-1}$, умноженное на $\Sigma_{y,\,z}2^{2-t(y)-s(z)}$ и деленное на $n!$.

Рассматривая таблицы инверсий, мы видим, что производящей функцией л. максимумов является функция

$$\sum_y z^{t(y)} = z(1+z)\ \ldots\ (k-1+z);$$

следовательно, $\sum_y 2^{1-t(y)} = \left(k - \frac{1}{2}\right)^{\overline{k-1}}$. Отсюда заключаем, что

$$p_{nk} = 2\binom{n-2}{k-1}\left(k-\frac{1}{2}\right)^{\overline{k-1}}\left(n-k-\frac{1}{2}\right)^{\overline{n-k-1}}\Big/ n! = \\ = \binom{k-1/2}{k-1}\binom{n-k-1/2}{n-k-1}\Big/\binom{n}{2}.$$

Кен Кларксон нашел другую любопытную формулу:

$$p_{nk} = 8\binom{k-1/2}{n}\binom{n-2}{k-1}(-1)^{n-k}.$$

(c) Все л. минимумы перестановок $x_1 \ldots x_n$ встречаются в перестановке $y_1 \ldots y_k$, а все л. максимумы — в перестановке $z_1 \ldots z_{n-k}$, за исключением, возможно, самых первых из них. Таким образом, вероятность получения отдельной y-перестановки равна произведению $2\binom{n-2}{k-1}$ на $\sum_z 2^{2-t(y)-s(z)} \times$ $\times\, p(x)$, где $p(x)$ — вероятность исходной перестановки $x_1 \ldots x_n$. Если предположить (что мы можем сделать), что $x_1 < x_2$, то $p(x)$ пропорциональна вероятностям $2^{-t(z)}$, $2^{-s(y)}$, $2^{-t(z)-s(y)}$ распределений L, R, B. В результате вероятность пропорциональна $2^{-t(y)}$, $2^{-s(y)-t(y)}$, $2^{-s(y)-t(y)}$, поэтому левые поддеревья имеют распределения L, R, B. Правые поддеревья распределены аналогично.

(d) Суммарная длина путей равна n плюс суммарная длина путей левого поддерева плюс суммарная длина путей правого поддерева. Значит, с вероятностью p_{nk} мы получаем вклад в величину средней суммарной длины путей, равный $n + L_k + R_{n-k}$. В силу двойственности левого и правого $q_{k(n-k)}$ есть вероятность того, что R-распределенное СК-дерево имеет своим корнем узел $(k:k+1)$. Отсюда следует равенство $L_n = R_n$ (что было очевидно).

(e) Согласно ответу к подзадаче (c), вероятность q_{nk} пропорциональна $\sum_{y,\,z} 2^{-t(y)-s(z)-t(z)}\binom{n-2}{k-1}$, где константы нормировки при фиксированном n не зависят от k. Производящая функция $\sum_y z^{s(y)+t(y)}$ равна $(z^2)(2z)(1+2z)\ldots(k-2+2z)$, следовательно, $\sum_y 2^{-s(y)-t(y)} = \frac{1}{4}(k-1)!$. Таким образом, q_{nk} пропорциональна $\binom{k-1/2}{k-1}$, а вероятность r_{nk} не зависит от k. Осталось только найти нормирующие константы, такие, что $\sum q_{nk} = \sum r_{nk} = 1$. См. ниже равенство (1).

(f) $B_n = C_{n-1}$, где C_n определены формулами 5.2.2-18 и 5.2.2-24 (Кнут [III]) при $M = 0$.

(g) По биномиальной теореме $(1-z)^{-1-m} = \sum_{n\geqslant 0}\binom{n+m}{n} z^n$ при всех комплексных значениях m. Дифференцируя это равенство по m (предложено Джоном Хобби), получаем тождество (1.47):

$$(1-z)^{-1-m}\ln(1-z)^{-1} = \sum_{n\geqslant 0}\binom{n+m}{n}(H_{n+m}-H_m)\,z^n.$$

Соберем теперь вместе формулы, которые непосредственно вытекают из данного тождества, поскольку они пригодятся нам в дальнейшем. В этих формулах суммирование осуществляется по множеству $1 \leqslant k < n$ и используются те факты, что $\binom{k-1/2}{k-1}(k-1) = \frac{3}{2}\binom{k-1/2}{k-2}$, а $\binom{k-1/2}{k-1}$ есть коэффициент при z^{k-1} в разложении $(1-z)^{-3/2}$ и т. д.

$$\sum\binom{k-1/2}{k-1} = \binom{n-1/2}{n-2}, \tag{1}$$

$$\sum\binom{k-1/2}{k-1}(k-1) = \frac{3}{2}\binom{n-1/2}{n-3}, \tag{2}$$

$$\sum\binom{k-1/2}{k-1}(H_{k-1/2}-H_{1/2}) = \binom{n-1/2}{n-2}(H_{n-1/2}-H_{3/2}), \tag{3}$$

$$\sum\binom{k-1/2}{k-1}(n-k)(H_{n-k}-H_1) = \binom{n+1/2}{n-2}(H_{n+1/2}-H_{5/2}), \tag{4}$$

$$\sum\binom{k-1/2}{k-1}(k-1)(H_{k-1/2}-H_{3/2}) = \frac{3}{2}\binom{n-1/2}{n-3}(H_{n-1/2}-H_{5/2}), \tag{5}$$

$$\sum\binom{k-1/2}{k-1}\binom{n-k-1/2}{n-k-1}(k-1) = \frac{3}{2}\binom{n}{n-3}, \tag{6}$$

$$\sum\binom{k-1/2}{k-1}\binom{n-k-1/2}{n-k-1}(H_{k-1/2}-H_{1/2}) = \binom{n}{n-2}(H_n-H_2), \tag{7}$$

$$\sum \binom{k-1/2}{k-1}\binom{n-k-1/2}{n-k-1}(k-1)\left(H_{k-1/2}-H_{3/2}\right)=$$
$$=\frac{3}{2}\binom{n}{n-3}(H_n-H_3). \qquad (8)$$

Каждое из этих тождеств получено из рассмотрения коэффициентов в произведении двух производящих функций.

Решение подзадачи (g) сводится к умножению тождества (4) на $2/\binom{n-1/2}{n-2}$.

(h) Необходимо найти решение соотношения $L_n = n + \frac{4}{5}\left(n+\frac{1}{2}\right)\times \times\left(H_{n+1/2}-H_{5/2}\right)+\sum q_{nk}L_k$ при $n\geqslant 2$. Подстановка $x_n = n-1$ в уравнение $x_n = a_n + \sum q_{nk}x_k$ в силу тождества (2) дает $a_n = \frac{2}{5}n+\frac{1}{5}$ при $n\geqslant 2$, поскольку $n-1 = a_n + \frac{3}{2}\binom{n-1/2}{n-3}\Big/\binom{n-1/2}{n-2} = a_n + \frac{3}{5}(n-2)$. Аналогично подстановка $x_n = H_{n-1/2}-H_{1/2}$ в силу тождества (5) дает $a_n = \frac{2}{3}$, а подстановка $x_n = (n-1)\left(H_{n-1/2}-H_{3/2}\right)$ в силу тождества (5) дает $a_n = \frac{2}{5}\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(H_{n-1/2}-H_{5/2}\right)+\frac{2}{5}(n-1)$. Составляя надлежащую линейную комбинацию, получаем искомое решение $L_n = \left(2n+\frac{1}{n}\right)\left(H_{n-1/2}-H_{1/2}\right)-\frac{5}{6}(n-1)$.

(i) Имеем $U_n = n + 2\sum p_{nk}L_k$. Записывая L_k в виде $L_k = 2(k-1)\times \times\left(H_{k-1/2}-H_{3/2}\right)+\frac{9}{4}\left(H_{k-1/2}-H_{1/2}\right)+\frac{1}{2}(k-1)$ и используя тождества (8), (7) и (6), получаем

$$U_n = n + 2(n-2)\left(H_n-\frac{11}{6}\right)+\frac{9}{2}\left(H_n-\frac{3}{2}\right)+\frac{1}{2}(n-2).$$

Таким образом, можно сделать вывод, что СК-деревья не заслуживают реализации; они дают нам поучительные представления о методах дискретной математики и анализа алгоритмов, но никогда не будут названы «деревьями поиска Смышленого» [20]. Несколько неожиданно, что $U_n \leqslant L_n \leqslant \leqslant B_n$, поскольку откладывание вставки «экстремальных» ключей могло бы создать впечатление, что знаки неравенств должны быть обратными.

10. Суммируя по частям, получаем равенство

$$2S_n = \sum_{0<k<2n} H_k/(2n-k) - H_n^2,$$

правая часть которого, согласно упр. 1.2.7-21 (Кнут [I]) или тождеству (1.48), равна $H_{2n}^2 - H_{2n}^{(2)} - H_n^2$. Далее

$$H_{2n}^2 - H_n^2 = \left(\ln n + \ln 2 + \gamma + \frac{1}{4n} + O\left(n^{-2}\right)\right)^2 -$$
$$-\left(\ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + O\left(n^{-2}\right)\right)^2,$$

и, согласно упр. 6.1-8 (Кнут [III]), $H_{2n}^{(2)} = \frac{1}{6}\pi^2 - \frac{1}{2n} + O(n^{-2})$. Раскрывая скобки и приводя подобные члены, получаем ответ:

$$(\ln 2)(\ln n) + \gamma \ln 2 + \frac{1}{2}(\ln 2)^2 - \frac{1}{12}\pi^2 - \frac{1}{4}n^{-1}\ln n + \\ + \frac{1}{4}n^{-1}(\ln 2 + 1 - \gamma) + O(n^{-2}\log n).$$

[Эта задачка была слишком простой. Лучше было бы поставить вопрос об асимптотике, скажем, суммы $\sum_{1 \leqslant k \leqslant n-\sqrt{n}} H_k/(2n-k)$, которую было бы легче всего установить, используя тождество

$$\sum_{1 \leqslant k \leqslant m} H_k/(n-k) = \sum_{1 \leqslant k \leqslant m} H_{n-k}/k - H_m H_{n-m-1}.]$$

11. Положим $F(w, z) = \sum a_{mn} w^m z^n$, где a_{mn} — число путей из точки $(0, 0)$ в точку (m, n). Тогда $F = 1 + wF + zF + wzF$, так что $F(w, z) = (1 - w - z - wz)^{-1}$. Производящей функцией для диагональных коэффициентов служит функция

$$A(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint F(t, z/t)\frac{dt}{t} = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{dt}{t - t^2 - z - zt}.$$

Знаменатель дроби в подынтегральном выражении можно представить в виде $-(t - r(z))(t - s(z))$, где $r(z) = \frac{1}{2}\left(1 - z + \sqrt{1 - 6z + z^2}\right)$ и и $s(z) = \frac{1}{2}\left(1 - z - \sqrt{1 - 6z + z^2}\right)$.

Пусть z по модулю мало, так что функция $r(z)$ близка к 1, а $s(z)$ — к 0. Будем интегрировать вдоль контура с малым $|t|$, который окружает точку $s(z)$; затем выберем $|z|$ столь малым, чтобы $|z/t|$ стало мало и обеспечивало абсолютную сходимость ряда $\sum a_{mn} t^m (z/t)^n$. (Ясно, что $a_{mn} \leqslant 3^{m+n}$, так что подобный контур интегрирования существует.) Окончательно, $A(z)$ есть вычет в точке $s(z)$, равный $1/(r(z) - s(z))$.

Итак, $A(z) = 1/\sqrt{(1 - \theta z)(1 - \varphi z)}$, где $\theta = 3 + \sqrt{8}$ и $\varphi = 3 - \sqrt{8}$. Пусть $w = \theta z$ и $\alpha = \varphi/\theta$, так что $A(z) = B(w) = 1/\sqrt{(1 - w)(1 - \alpha w)} = \sum (a_n/\theta^n)\,\omega^n$. Следовательно, наша задача сводится к нахождению асимптотики коэффициентов производящей функции, обратной к функции (4.108). Имеем $1/\sqrt{1 - \alpha w} = 1/\sqrt{1 - \alpha - \alpha(w - 1)} = (1 - \alpha)^{-1/2} + (w - 1)R(w)$, где функция R аналитична при $|w| < \alpha^{-1}$, поэтому коэффициенты r_n в ее разложении имеют порядок $O(\beta^{-n})$ при некотором $\beta > 1$. Таким образом, $B(w) = (1 - \alpha)^{-1/2}(1 - w)^{-1/2} + (1 - w)^{1/2}R(w)$, где последнее слагаемое равно $\sum \binom{1/2}{k}(-w)^k \sum r_m w^m$; отсюда, как и в (4.114), следует, что n-й коэффициент этого разложения имеет порядок $O(n^{-3/2})$. В разложении же первого слагаемого n-й коэффициент равен $(1 - \alpha)^{-1/2}\binom{-1/2}{n}(-1)^n = (1 - \alpha)^{-1/2}\binom{n - 1/2}{n}$, что имеет порядок $O(n^{-1/2})$, поэтому $a_n = \theta^n (1 - \alpha)^{-1/2}\binom{n - 1/2}{n} + O(a_n/n)$.

Имеем $\binom{-1/2}{n}(-1)^n = 2^{-2n}\binom{2n}{n}$, что по формуле Стирлинга есть $1/\sqrt{\pi n} + O(n^{-3/2})$. Таким образом, требуемый ответ таков:

$$a_n = \frac{1+\sqrt{2}}{2^{5/4}\sqrt{\pi n}}(3+\sqrt{8})^n + O\left((3+\sqrt{8})^n n^{-3/2}\right).$$

Между прочим, числа a_{mn} возникают в самых различных ситуациях. Например,

$$a_{mn} = \sum \binom{m}{k}\binom{n+k}{m} = \sum \frac{(m-n+k)!}{(m-k)!\,(n-k)!\,k!} =$$

$$= \sum \binom{m}{k}\binom{n}{k}2^k = \sum \binom{k}{m}\binom{k}{n}2^{-1-k}.$$

Кроме того, a_{mn} есть число различных n-ок целых чисел $(x_1, \ldots, x_n)$, таких, что $|x_1| + \ldots + |x_n| \leqslant m$; это равно объему сферы радиуса m в n-мерной «метрике Ли».

12. Вероятность того, что некоторый студент получит A^+, решив при этом правильно m задач, равна вероятности ровно m удач (а именно $p^m(1-p)$), умноженной на вероятность того, что любой другой студент оплошает при решении одной из первых m задач (а именно $(1-p^m)^{n-1}$). Умножая эту вероятность на n, поскольку у каждого студента есть шанс заработать A^+, получаем, что $A_n^+ = n(1-p)\sum_{m\geqslant 0} p^m\left(1-p^m\right)^{n-1}$. (Подобные формулы при $p = 1/2$ возникают при анализе обменной поразрядной сортировки (Кнут [III, разд. 5.2.2]) и в более общей постановке в упр. 6.3-19.)

Пусть $Q_n = nA_{n+1}^+(n+1)^{-1}(1-p)^{-1} = \sum_{m\geqslant 0} np^m(1-p^m)^n$. Положим $x = np^m$; тогда слагаемое принимает вид $x(1-x/n)^n$, что есть $xe^{-x}\times$ $\times\left(1+O(x^2/n)\right)$ при $x \leqslant n^\varepsilon$. Пусть $T_n = \sum_{m\geqslant 0} np^m e^{np^m}$. Тогда $Q_n - T_n =$ $= X_n + Y_n$, где величина

$$X_n = \sum_{m\geqslant 0,\ np^m\geqslant n^\varepsilon} np^m\left(\left(1-p^m\right)^n - e^{np^m}\right) =$$

$$= \sum_{m\geqslant 0,\ np^m\geqslant n^\varepsilon} np^m O\left(e^{-np^m}\right) = O\left(n\log n\cdot e^{-n^\varepsilon}\right)$$

экспоненциально мала, поскольку $1-p^m \leqslant e^{-p^m}$ и сумма состоит из $O(\log m)$ членов. Другая величина

$$Y_n = \sum_{m\geqslant 0,\ np^m< n^\varepsilon} np^m\left(\left(1-p^m\right)^n - e^{-np^m}\right) =$$

$$= \sum_{m\geqslant 0,\ np^m< n^\varepsilon} np^m O\left(e^{-np^m}(np^m)^2/n\right)$$

имеет порядок $O(n^{3\varepsilon-1})$, поскольку она оценивается сверху суммой геометрической прогрессии с учетом очевидного неравенства $e^{-np^m} \leqslant 1$. Применяя «метод гамма-функции», получаем

$$T_n = \sum_{m\geqslant 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty} np^m\Gamma(z)(np^m)^{-z}\,dz = \frac{n}{2\pi i}\int_{1/2-i\infty}^{1/2+i\infty}\frac{\Gamma(z)\,n^{-z}}{1-p^{1-z}}\,dz$$

(ср. Кнут [III, равенство 5.2.2-45]). Последний интеграл может быть выражен в виде взятой со знаком минус суммы вычетов подынтегральной функции относительно ее полюсов в правой половине плоскости. Таким образом,

$$T_n = -\frac{1}{\ln p} - \frac{2}{\ln p} \sum_{k \geqslant 1} \Re\left(\Gamma(1 + 2\pi i k/\ln p)\right) \times$$
$$\times \exp(-2\pi i k \ln n/\ln p) + O\left(n^{-M}\right)$$

при произвольном M. Величина под знаком суммы ограничена, поскольку она периодична по n (заметьте, что эта величина принимает то же значение, если n заменить на np).Поэтому можно утверждать, что $A_n^+ = (1 - p)/\ln(1/p) + f(n) + O(1/n)$, где $f(n)$ — некоторая периодическая функция. Поскольку $\Gamma(1 + ti) = O\left(t^{1/2}e^{-\pi t/2}\right)$, то абсолютная величина $f(n)$ очень мала, если только p не слишком мало, и среднее значение $f(n)$ равно нулю, так как среднее значение каждого слагаемого есть 0. Однако $f(n) \neq o(1)$, и $f(n)$ не может быть отброшено. Ожидалось, что A_n^+ будет стремиться к 0 или 1, так что полученный результат несколько неожидан.

В упр. 5.2.2-54 (Кнут [III]) содержится другой подход к решению данной задачи, с помощью которого мы получаем сходящийся ряд

$$A_n^+ = \frac{1-p}{\ln(1/p)}\left(1 + 2n \sum_{k \geqslant 0} \Re\left(B\left(n, 1 + \frac{2\pi i k}{\ln p}\right)\right)\right).$$

Асимптотическое значение фигурирующей в этой сумме бета-функции равно

$$n^{-1-ibk}\Gamma(1 + ibk)\left(1 - \frac{1}{2}\left(ibk + b^2k^2\right)n^{-1} + O\left(n^{-2}\right)\right),$$

где $b = 2\pi/\ln p$; таким образом, мы получаем встречавшуюся выше периодическую функцию, а также коэффициент при n^{-1}. (В связи с этим нам представляется, что в последующем издании книги Кнута [III] упражнению 5.2.2-54 следует уделить значительно больше места.)

13. (a) Если $x_1 \ldots x_n$ — перестановка множества $\{1, \ldots, n\}$, то пусть $\bar{x}_1 \ldots \bar{x}_{n-1}$ — перестановка множества $\{1, \ldots, n-1\}$, являющаяся результатом уменьшения на единицу тех элементов $x_1 \ldots x_{n-1}$, которые превосходят x_n. Вставка ключей $x_1 \ldots x_n$ приводит к получению дерева с корнем $(k : k+1)$ ттогда, когда: 1) $x_n < k$ и вставка ключей $\bar{x}_1 \ldots \bar{x}_{n-1}$ приводит к получению корня $(k-1 : k)$; 2) $x_n = k$ и вставка ключей $\bar{x}_1 \ldots \bar{x}_{n-1}$ приводит к получению корня $(k-1 : k)$ и либо $k - 1 < n - k$, либо $k - 1 = n - k$ (и при случайном подбрасывании монеты выпадает «орел»); 3) $x_n = k + 1$ и вставка ключей $\bar{x}_1 \ldots \bar{x}_{n-1}$ приводит к получению корня $(k : k+1)$ и либо $k > n - 1 - k$, либо $k = n - 1 - k$ (и при случайном подбрасывании монеты выпадает «решетка»); 4) $x_n > k + 1$ и вставка ключей $\bar{x}_1 \ldots \bar{x}_{n-1}$ приводит к получению корня $(k : k+1)$. Поэтому при $1 \leqslant k < n$ и $n > 2$

$$P_{nk} = P_{(n-1)(k-1)}\left(k - 1 + (n + 1 > 2k) + \frac{1}{2}(n + 1 = 2k)\right) +$$
$$+ P_{(n-1)k}\left(n - k - 1 + (n - 1 < 2k) + \frac{1}{2}(n - 1 = 2k)\right)^{21)}$$

(b) Легко видеть, что $P_{nk} = P_{n(n-k)}$, значит $Q_{nk} = Q_{n(n-k)}$. Таким образом, достаточно рассмотреть случай $k \leqslant n - k$. Если $k < n - k - 1$, то предыдущее рекуррентное соотношение показывает, что

$$\frac{Q_{nk}k!\,(n-k)!}{2(n-k)} = \frac{Q_{(n-1)(k-1)}(k-1)!\,(n-k)!}{2(n-k)}(k-1+1) + \\ + \frac{Q_{(n-1)k}k!\,(n-1-k)!}{2(n-k-1)}(n-k-1),$$

т. е. $Q_{nk} = Q_{(n-1)(k-1)} + Q_{(n-1)k}$. Если же $k = n-1$, то

$$\frac{Q_{nk}k!\,k!}{2k} = \frac{Q_{(n-1)(k-1)}(k-1)!\,k!}{2k}(k-1+1) + \\ + \frac{Q_{(n-1)k}k!\,(k-1)!}{2k}(k-1+1)$$

и снова имеет место «соотношение Паскаля». Однако если $k = n-k+1$, то

$$\frac{Q_{nk}k!\,(k+1)!}{2(k+1)} = \\ = \frac{Q_{(n-1)(k-1)}(k-1)!\,(k+1)!}{2(k+1)}(k-1+1) + \frac{Q_{(n-1)k}k!\,k!}{2k}\left(k+\frac{1}{2}\right);$$

следовательно, $Q_{nk} = Q_{(n-1)(k-1)} + Q_{(n-1)k} + \frac{1}{n-1}Q_{(n-1)k}$. В силу симметрии $Q_{nk} = Q_{(n-1)(k-1)} + Q_{(n-1)k} + \frac{1}{n-1}Q_{(n-1)(k-1)}$ при $k = n - k + 1$. «Соотношение Паскаля» выполняется снова, за исключением случаев, когда $(n, k) = (2, 1)$ или $|n-2k| = 1$.

(c) Удобнее положить треугольник «на бок» и связать Q_{nk} с точкой решетки $(k, n-k)$. Величину Q_{nk} можно интерпретировать как взятую по всем путям из точки $(1, 1)$ в точку $(k, n-k)$ учетверенную сумму произведений весов всех отрезков пути; из точки (i, j) путь идет в точку $(i+1, j)$ или $(i, j+1)$, и вес каждого такого отрезка пути равен 1, за исключением случая $i = j$, когда он равен $1 + 1/(2j)$. Тогда a_k есть учетверенная сумма, взятая по всем путям из точки $(1, 1)$ до точки (k, k); поэтому слагаемые этой суммы можно сгруппировать в подсуммы в соответствии с наибольшей величиной диагональной точки (j, j) пути, такой, что $j < k$. При этом j-я подсумма равна величине a_j, умноженной на $1 + 1/(2j)$ и умноженной на число путей из точки (j, j) в точку (k, k), которые не соприкасаются с диагональю, поскольку веса отрезков всех таких путей, за исключением первого отрезка, равны 1. Всего имеется $2c_{k-j}$ таких путей.

(d) Поскольку $kf_k = \sum_j (2j+1) f_j c_{k-j} + 4(k=1)$, имеем уравнение $zF'(z) = 4z^{-1}C(z)(2zF'(z) + F(z))$, которое упрощается до уравнения

$$z\sqrt{1-4z}F'(z) = 4z + C(z)F(z).$$

Следуя нашей подсказке, в соответсвии с общим правилом отыскания интегрирующего множителя для дифференциальных уравнений первого порядка, получаем, что

$$(B(z)F(z))' = B(z)F'(z) - F(z)/\sqrt{1-4z} = \\ = \frac{B(z)}{z\sqrt{1-4z}}\left(z\sqrt{1-4z}F'(z) - C(z)F(z)\right) = \\ = 4B(z)/\sqrt{1-4z} = 2/\sqrt{1-4z} + 2$$

Таким образом, $B(z)F(z) = 2C(z) + 2z$, и еще через несколько шагов мы находим решение $a_n = 2n(c_n + c_{n+1}) = n\binom{2n}{n}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{2}{n+1}\right)$ при $n \geq 1$.

(e) Поскольку

$$(1 - w - z)\,Q(z) = \sum w^k z^{(n-k)}\left(Q_{nk} - Q_{(n-1)k} - Q_{(n-1)(k-1)}\right) =$$
$$= 4wz + \frac{1}{2}(w + z)(f_1 wz + f_2 w^2 z^2 + f_3 w^3 z^3 + \ldots),$$

имеем

$$Q(w, z) = (1 - w - z)^{-1} \times$$
$$\times \left(4wz + \frac{1}{2}\left(w^{-1} - w + z^{-1} - z - (w^{-1} + w + z^{-1} + z)\sqrt{1 - 4wz}\right)\right).$$

(f) Если $h_r(x) = \sum a_{n(m+r)} x^n$ и $h(w, z) = \sum a_{mn} w^m z^n$, то коэффициент при $w^n z^{n+r}$ в разложении $g(wz)\,h(w, z)$ совпадает с коэффициентом при x^n в разложении $g(x)\,h_r(z)$, поскольку при умножении на $g(wz)$ группируются вместе только члены, имеющие одну и ту же разность степеней z и w. Следовательно, коэффициент при $w^n z^{n+r}$ в разложении $\sqrt{1-4wz}/(1 - w - z)$ равен коэффициенту при x^n в разложении $\sqrt{1-4x}\binom{2n+r}{n}x^n = (C(x)/x)^r = C(x)^r(B(x) - C(x))\,x^{-r}/\sqrt{1-4x} = (C(x)/x)^{r-1}/\sqrt{1-4x} - x\,(C(x)/x)^{r+1}/\sqrt{1-4x} = \sum\left(\binom{2n+r-1}{n} - \binom{2n+r-1}{n-1}\right)x^n$.

(g) В случае $r > 0$ коэффициент при $w^n z^{n+r}$ в производящей функции $Q(w, z)$ может быть вычислен из рассмотрения различных членов в выражении для $Q(w, z)$ из части (e) задачи. Пусть $b_r = \binom{2n+r}{n}$. Тогда $Q_{(2n+r)n} = 4(b_{r-1} - b_{r-2}) + \frac{1}{2}\left(\binom{2n+r+1}{n+1} - b_r + b_{r-1} + b_{r+1} - b_{r-1} - \binom{2n+r}{n+1} + b_r - b_{r-1} + b_{r-2} + b_r - 2b_{r-1} + b_{r-2} - b_r + b_{r+1} - b_r - b_{r-2} - b_{r-1} - b_{r-2}\right) = b_{r+1} + 3b_{r-1} - 4b_{r-2}$. Умножая на $\frac{1}{2}(n + r - 1)!\,n!/(2n + r)!$, получаем выражение для $p_{(2n+r)n}$. Из-за наличия членов w^{-1} и z^{-1} при $r = 0$ используется другая формула.

Заключительное замечание (для студента Смышленого). «При $x = k/n < 1/2$ имеем $p_{nk} \approx \frac{1}{2}\left((1 - x)^{-2} - 1\right) + 2x$; следовательно, УСК-деревья достаточно хорошо выполняют свои функции. Распределение перестановок ключей в левых и правых поддеревьях не является равномерным, и можно было бы продолжить наш анализ с целью нахождения средней длины пути УСК-деревьев. Тем не менее, г-н Смышленый, Ваш алгоритм все же не годится для практического использования: средняя длина пути дерева будет где-то между $2n \ln n$ и $(1/\ln 2)\,n \ln n$, однако дополнительное время, которое требует Ваш метод для обработки каждого узла, настолько замедляет выполнение программы, что сводит на нет незначительный выигрыш в длине пути. С самого начала было ясно, что УСК-деревья будут уступать другим методам по всем характеристикам (объему памяти, быстродействию, простоте реализации и т. п.). Единственным положительным качеством Ваших алгоритмов является то, что их анализ приводит к поучительной математике, которую когда-нибудь можно будет применить к анализу действительно полезных методов. Вы, несомненно, также это понимаете, поэтому спасибо Вам за идеи».

Примечания редактора и переводчика

1. Ср.: Итоги науки и техники, сер. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 13.—М.: ВИНИТИ АН СССР, 1986.

2. В 1974, 1976 и 1980 гг. курс математического анализа алгоритмов читался Д. Кнутом, а в 1978 г. — Э. Яо.

3. См. новую серию книг Д. Кнута под названием *Computer and Typesetting* (Vol. A: The TeXbook, Vol. B: Tex. The Program, Vol. C: METAFONTbook, Vol. D: METAFONT. The Program, Vol. E: COMPUTER MODERN Typefaces. — Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1985).

4. Имеются в виду кратчайшие пути из левого нижнего угла в правый верхний угол (подробнее см. Ежов И. И., Скороход А. В., Ядренко М. И. Элементы комбинаторики. — М.: Наука, 1977).

5. См. Егорычев Г. П. Интегральное представление и вычисление комбинаторных сумм. — Новосибирск: Наука, 1977 (в частности, с. 42).

6. Подробнее см., например, Сачков В. Н. Вероятностные методы в комбинаторном анализе. — М.: Наука, 1978.

7. Из отечественных работ отметим книгу А. О. Гельфонда *Исчисление конечных разностей* (М.: Физматгиз, 1959).

8. Речь идет о методе решения разностных уравнений, аналогичном методу решения дифференциальных уравнений с помощью «интегрирующего множителя» — отсюда термин «суммирующий множитель».

9. Подобное определение символа Ω не эквивалентно первоначальному определению, введенному Харди и Литлвудом.

10. В оригинале bootstrapping (буквально: натягивание сапога на ногу за лямки).

11. Хотя запись $a(t) = O(f(t))$ похожа на запись $f(n) = O(g(n))$ из разд. 4.1.1, переменная t здесь не играет роли n.

12. Иначе называемая «асимптотическим законом распределения простых чисел» (см. Гельфонд А О., Линник Ю. В. Элементарные методы в аналитической теории чисел. — М.: Физматгиз, 1962).

13. То есть $G(z)$ является целой функцией (см. также Евграфов М. А. Асимптотические оценки и целые функции. — М.: Физматгиз, 1979).

14. Имеются в виду так называемые большие отклонения; см. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 2. — М.: Мир, 1984, с. 615.

15. «Число очков» в квадратных скобках отражает, по-видимому, сравнительную степень трудности каждой задачи, которые составлены из заданий среднесеместрового, заключительного и квалификационного экзаменов, принятых в университетах США.

16. Ттогда (iff)—сокращение от «тогда и только тогда» (if and only if).

17. В первом издании I тома *Искусства программирования для ЭВМ* Д. Кнута и соответственно в переводе этого упражнения нет.

18. Данная задача перепечатана в разделе Problems журнала *Journal of Algorithms* (1983, v. 4, № 4, p. 385—388). Там же (p. 388—393) помещено предложенное P. V. Poblete решение этой задачи, отличное от приведенного в настоящей книге решения Д. Кнута.

19. Имеется несколько руководств по системе MACSYMA. Краткое описание содержится в сб. Introductory MACSYMA Documentation. A Collection of Papers, изданном в МТИ в 1982 г., а полное описание — в двухтомном руководстве MACSYMA Reference Manual, изданном в МТИ годом позже. Однако, более удачной представляется книга Rand R. H. Computer Algebra in Applied Mathematics: An Introduction to MACSYMA. — Boston: Pitman, 1984. (См. также: Компьютерная алгебра. Символьные и алгебраические вычисления. Под ред. Б. Бухбергера, Д. Коллинза и Р. Лооса. — М.: Мир, 1986.)

20. В оригинале «Quicksearch», что обыгрывает название известного алгоритма Quicksort и фамилию студента Quick.

21. В этой и последующей формулах фигурируют логические выражения, значения которых суть 1, если соответствующие отношения истинны, и 0 в противном случае.

Литература

Амбле, Кнут (Amble O., Knuth D. E.)

[74] Ordered hash tables. — The Computer Journal, 1974, v. 17, N 2, p. 135—142.

Апостол (Apostol T.)

[57] Mathematical analysis: a modern approach to advanced calculus. — Reading, Mass· Addison-Wesley, 1957. [См. также: Рудин У. Основы математического анализа. — М.: Мир, 1976.]

Ахо, Слоан (Aho A. V., Sloane N. J. A.)

[73] Some doubly exponential sequences. — Fibonacci Quarterly, 1973, v. 11, N 4, p. 429—437.

Бейли (Bailey W. N.)

[35] Generalized hypergeometric series. — London: Cambridge University Press, 1935

Бендер (Bender E. A.)

[74] Asymptotic methods in enumeration. — SIAM Review, 1974, v. 16, N 4, p. 485—515

Бойс, Ди Прима (Boyce W., DiPrima R.)

[69] Elementary differential equations and boundary value problems. — New York: Wiley, 1969.

Гульд, Сю (Gould H., Hsu L.)

[73] Some new inverse relations. — Duke Mathematical Journal, 1973, v. 40, N 4, p. 885—892.

Де Брёйн (De Bruijn N. G.)

[70] Asymptotic methods in analysis. — Amsterdam: North-Holland, 1970. [Имеется перевод первого издания: Де Брёйн Н. Г. Асимптотические методы в анализе. — М.: ИЛ, 1961.]

Де Брёйн, Кнут, Райс (De Bruijn N. G., Knuth D. E., Rice S. O.)

[72] The average height of planted plane trees. — In: Graph theory and computing. ed. R. C. Read. — New York: Academic Press, 1972, p. 15—22.

Деланж (Delange H.)

[75] Sur la fonction sommatoire de la fonction «somme des chiffres». — Enseignement Mathématique, 1975, v. 21, N 1, p. 31—47.

Зэйв (Zave D. A.)

[76] A series expansion involving the harmonic numbers. — Information Processing Letters, 1976, v. 5, N 1, p. 75—77.

Йонассен, Кнут (Jonassen A., Knuth D. E.)

[78] A trivial algorithm whose analysis isn't. — Journal of Computer and System Sciences, 1978, v. 16, N 3, p. 301—322.

Йордан (Jordán K.)

[60] Calculus of finite differences. — New York: Chelsea, 1960.

Кнут (Knuth D. E.)

[I] The art of computer programming. Vol. 1. Fundamental algorithms. Second edition. — Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1973. [Имеется перевод первого издания: Кнут Д. Искусство программирования для ЭВМ. Т. 1. Основные алгоритмы. — М.: Мир, 1976.]

[II] The art of computer programming. Vol. 2. Seminumerical algorithms. Second edition. — Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1981. [Имеется перевод первого издания: Кнут Д. Искусство программирования для ЭВМ. Т. 2. Получисленные алгоритмы. — М.: Мир, 1977.]

[III] The art of computer programming. Vol. 3. Sorting and searching. — Reading, Mass.: Addisen-Wesley, 1973. [Имеется перевод: Кнут Д. Искусство программирования для ЭВМ. Т. 3. Сортировка и поиск. — М.: Мир, 1978.]

[72] Mathematical analysis of algorithms. — In: Information Processing 71. Proceedings of IFIP congress 71. Vol. 1. Foundations and systems. — Amsterdam: North-Holland, 1972, p. 19—27.

[76a] Big omicron and big omega and big theta. — SIGACT News, 1976, v. 8, N 2, p. 18—24.

[76b] Mariages stables et leurs relation avec d'autres problemes combinatoire — Montréal: Les Presses de l'Université de Montréal, 1976.

Кнут, Траб Пардо (Knuth D. E., Trabb Pardo L.)

[76] Analysis of a simple factorization algorithm. — Theoretical Computer Science, 1976, v. 3, N 3, p. 321—348.

Кнут, Шёнхаге (Knuth D. E., Schönhage A.)

[78] The expected linearity of a simple equivalence algorithm. — Theoretical Computer Science, 1978, v. 6, N 3, p. 281—315.

Конте (Comtet L.)

[74] Advanced combinatorics. — Dordrecht: Reidel, 1974.

Люкер (Luker G. S.)

[80] Some techniques for solving recurrences. — Computing Surveys, 1980, v. 12, N 4, p. 419—436.

Милн-Томсон (Milne-Thomson L. M.)

[33] The calculus of finite differences. — London: Macmillan, 1933.

Олвер (Olver F. W. J.)

[74] Asymptotics and special functions. — New York: Academic Press, 1974. [Имеется перевод сокращенного варианта: Олвер Ф. Введение в асимптотические методы и специальные функции. — М.: Наука, 1978.]

Пейдж, Уилсон (Page E., Wilson L.)

[79] An introduction to computational combinatorics — London: Cambridge University Press, 1979.

Риордан (Riordan J.)

[68] Combinatorial identities. — New York: Wiley, 1968. [Имеется перевод: Риордан Дж. Комбинаторные тождества. — М.: Наука, 1982.]

Рота и др. (Rota G.-C. et al.)

[75] Finite operator calculus. — New York: Academic Press, 1975.

Седгевик (Sedgewick R.)

[80] Quicksort. — New York: Garland, 1980.

Слейтер (Slater L. J.)

[66] Generalized hypergeometric functions. — London: Cambridge University Press, 1966. [См. также: Слейтер Л. Дж. Вырожденные гипергеометрические функции. — М.: Изд. ВЦ АН СССР, 1966.]

Столарски (Stolarsky K. B.)

[77] Power and exponential sums of digital sums related to binomial coefficient parity. — SIAM Journal on Applied Mathematics, 1977 v. 32, N 4, p. 717—730.

Уиттекер, Ватсон (Whittaker E. T., Watson G. N.)

[40] A course of modern analysis. — Cambridge: Cambridge University Press, 1940. [Имеется перевод: Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа. Ч. I, II. — М.: Физматгиз, 1963.]

Фредмэн, Кнут (Fredman M. L., Knuth D. E.)

[74] Recurrence relations based on minimization. — Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1974, v. 48, N 2, p. 534—559.

Харди (Hardy G. H.)

[49] Divergent series. — London: Oxford University Press, 1949. [Имеется перевод: Харди Г. Расходящиеся ряды. — М.: ИЛ, 1951.]

Харди, Райт (Hardy G. H., Wright E. M.)
[79] An introduction to the theory of numbers. — London: Oxford University Press, 1979.
Хенричи (Henrici P.)
[74] Applied and computational complex analysis. Vol. 1. — New York: Wiley, 1974.
Шпигель (Spiegel M.)
[71] Calculus of finite differences and difference equations. — New York: McGraw-Hill, 1971.
Эрдёш, Реньи (Erdös P., Rényi A.)
[59] On random graphs, I. — Publicationes Mathematicae, 1959, v. 6, N 2, p. 290—297.
[60] On the evolution of random graphs. — Matematikai Kutató Intézetének Közleményei, 1960, v. 5, N 1, p. 17—61. [Материал этой и предыдущей статей можно найти в книге: Эрдёш П., Спенсер Дж., Вероятностные методы в комбинаторике. — М.: Мир, 1976.]

Д. Э. Кнут и его «фабрика книг»

(Дополнение переводчика)

Известный американский математик Дональд Эрвин Кнут (род. в 1938 г.) окончил в 1960 г. отделение математики Кейсовского технологического института и в 1963 г. получил докторскую степень в Калифорнийском технологическом институте. С 1968 г. он профессор, а в настоящее время — почетный профессор (Fletcher Jones Professor of Computer Science) Станфордского университета. Основные области его научных интересов: теоретическое программирование, математический анализ алгоритмов, история и методология информатики.

Д. Кнут является главным редактором выходящего с 1980 г. журнала Journal of Algorithms и входит в состав редакций большого числа других международных журналов. Он состоит членом Национальной академии наук США, Американского математического общества, Ассоциации по вычислительной технике, Института инженеров по электротехнике и радиоэлектронике, Общества промышленной и прикладной математики и многих других научных обществ и организаций (в частности, Американской гильдии органистов).

В 1971 г. ему была присуждена премия Ассоциации по вычислительной технике (ACM Grace Murray Hopper Award), в 1974 г. — премия имени Тьюринга (ACM Alan M. Turing Award), в 1984 г. — премия Математической ассоциации США (MAA Lester R. Ford Award), а в 1982 г. — премия ИИЭР (IEEE Computer Pioneer Award). В 1979 г. Д. Кнут был награжден Национальной медалью науки (National Medal of Science).

В том же году он приезжал в нашу страну в качестве сопредседателя международного симпозиума «Алгоритмы в современной математике и ее приложениях», который проходил в г. Ургенче Узбекской ССР на родине аль-Хорезми. Перевод его доклада на этом симпозиуме опубликован в одноименном сборнике (Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1982, ч. I, с. 64—98).

Наибольшую известность Д. Кнуту принесла монументальная серия его монографий The Art of Computer Programming, выпускаемая издательством «Эддисон-Уэсли», из запланированных семи томов которой изданы первые три (Vol. 1: Fundamental Algorithms, 1st ed. 1968, 2nd ed. 1973; Vol. 2: Seminumerical Algorithms, 1st ed. 1969, 2nd ed. 1981; Vol. 3: Sorting and Searching, 1973) и готовится к изданию четвертый том. В виде отдельной брошюры MIX (Reading: Addison—Wesley, 1970) издан одноименный раздел из первого тома этой серии книг.

В связи с необходимостью проведения большой работы по переизданию выпущенных и изданию новых томов серии *Искусства программирования для ЭВМ* Д. Кнутом была создана «компьютерная типография», состоящая из систем TeX и METAFONT, причем с помощью последней Кнут разработал для своих книг новое семейство шрифтов COMPUTER MODERN. Работа над одной серией книг породила другую — Computers and Typesetting (Vol. A: The TeXbook, Vol. B: TeX. The Program, Vol. C: The METAFONTbook, Vol. D: METAFONT. The Program, Vol. E: COMPUTER MODERN Typefaces. — Reading: Addison-Wesley, 1986). В виде отдельных книг меньшего объема выпущены The TeXbook и The METAFONTbook (Reading: Addison-Wesley, 1984 и 1986). Данной серии книг предшествовало несколько брошюр, в частности TeX and METAFONT. New Directions in Typesetting (Bedford: Digital Press, 1979).

И наконец, третью серию книг. проф. Кнута составляют курсы лекций по математическому анализу алгоритмов, прочитанные им в Монреальском университете (Knuth D. E. Marriages stables et leurs relations avec d'autres problemes combinatoires. — Montréal: Les Presses de l'Université de Montréal, 1976), Станфордском университете (Greene D. H., Knuth D. E. Mathematics for the Analysis of Algorithms. — Boston: Birkhäuser, 1st ed. 1981, 2nd ed. 1982) и университете г. Осло (к сожалению, точной ссылкой на это издание мы не располагаем). К учебной серии книг примыкает его «математическая повесть» Surreal Numbers (Reading: Addison-Wesley, 1974).

В настоящее время Д. Кнут работает над новым учебником (Graham R., Knuth D., Patashnik O. Concrete Mathematics. — Reading: Addison-Wesley, in preparation) и возвращается к работе над следующими томами. The Art of Computer Pragramming (Vols 4A, 4B, 4C: Combinatorial Algorithms. — Reading: Addison — Wesley, in preparation).

О высоком международном авторитете Д. Кнута свидетельствуют переводы его трудов на многие языки мира. На русском языке имеются следующие переводы книг и статей Д. Кнута, выпущенные издательством «Мир»:

— Кнут Д. Искусство программирования для ЭВМ. Том 1: Основные алгоритмы, Том 2: Получисленные алгоритмы, Том 3: Сортировка и поиск. — М.: Мир, 1976, 1977, 1978.

— Грин Д., Кнут Д. Математические методы анализа алгоритмов. — М.: Мир, 1987.

— Кнут Д. О трансляции языков слева направо. В сб.: Языки и автоматы, с. 9—42. — М.: Мир, 1975.

— Кнут Д. Нисходящий синтаксический анализ. Киберн. сб., нов. сер., вып. 15, с. 101—142. — М.: Мир, 1978.

— Кнут Д., Яо Э. Сложность моделирования неравномерных распределений. Киберн. сб., нов. сер., вып. 19, с. 97—158. — М.: Мир, 1983.

— Кнут Д. Исчезновения. Сверхъестественные числа. В кн.: Математический цветник, с. 329, 388—408. — М.: Мир, 1983.

— Кнут Д. Алгоритм Хаффмэна: алгебраический подход. Киберн. сб., нов. сер., вып. 22, с. 159—169. — М.: Мир, 1985.

С увлекательной историей создания Д. Кнутом своих книг и планами на будущее (по образному выражению самого автора) его «фабрики книг» можно познакомиться в статье Albers D. J., Steen L., A. A conversation with Don Knuth, опубликованной в журнале Annals of the History of Computing, 1982, v. 4, № 3, p. 257—274 и перепечатанной в сборнике Mathematical People. Profiles and Interviews. — Boston: Birkhäuser, 1985.

Б. Б. П.

Указатель

Алгебраические особенности (algebraic singularities) 71—73
Амбле (Amble Ole) 111
Апостол (Apostol Tom Mike) 61, 111
Асимптотический анализ (asymptotic analysis) 48—82, 84—85, 87—88, 93—101, 104—107
Ахо (Aho Alfred Vaino) 34, 37, 111

Банан (banana) 84
Бейли (Baily Wilfred Norman) 16, 111
Бендер (Bender Edward Anton) 73, 111
Бент (Bent Samuel Watkins) 7
Бета-функция (beta function) 107
Биномиальные тождества (binomial identities) 8—17
Бойс (Boyce William Edward) 22, 111
Бродер (Broder Andrei) 7

***В**алле-Пуссен* (de la Vallée Poussin Charles Louis Xavier Joseph) 66
Ватсон (Watson George Neville) 112
Виттер (Vitter Jeffrey Scott) 7

Гамма-функция (gamma function) 80
— метод (gamma function method) 107
Гармонические числа (harmonic numbers)
— — асимптотики (asymptotics) 53, 56
— — примеры (examples) 25—26, 56, 87
— — тождества (identities) 16—17
Гессель (Gessel Ira M.) 10
Гипергеометрический ряд (hypergeometric series) 15—16
Голомб (Golomb Solomon Wolf) 35
Грамматика (grammar)
— бесконтекстная (context free) 92
— однозначная (unambiguous) 92
Грин (Greene Daniel Hill) 3
Гульд (Gould Henry Wadsworth) 12, 13
Гюиба (Guibas Leonidas Ioannis) 7

Дважды экспоненциальные последовательности (doubly exponential sequences) 33—37
Де Брейн (de Bruijn Nicolaas Govert) 32, 50, 52, 100, 111
Деланж (Delange Hubert) 29, 111
Дерево (tree)
— бинарное сбалансированное (balanced binary) 36
— бинарного поиска (binary search) 85—87, 88—89, 102—104, 107—109
— длина внешних путей (external path length) 86—87
— представление в виде бинарного дерева (representing binary) 83—84, 90
— прохождение бинарного дерева (traversing binary) 85, 99—101
— связанное в конце (late binding) 85—87, 88—89, 102—104, 107—109
— суммарная длина путей (total path length) 103
— упорядоченное ориентированное (ordered oriented) 31
Дзета-функция *Римана* (Riemann zeta function) 58, 67—68
Диагонализация ряда (diagonalization of series) 75, 105
Ди Прима (DiPrima Richard Clyde) 111

Дифференциальные уравнения (differential equations) 21, 26, 89, 91, 108
Драйсдейл (Drysdale Robert Lewis (Scot) III) 7
Дробь (fraction)
— непрерывная (continued) 31—33
— подходящая (cenvergent) 32
— элементарная (partial) 19—20, 58

Егорычев Георгий Петрович 10
— метод коэффициентов (method of coefficients) 10—11

Золотое сечение (golden ratio) 36
Зэйв (Zave Derek Alan) 17, 111

Индукция с другого конца (induction from the other end) 38, 44—47, 91
Интеграл контурный (contour integral) 70, 74—76, 78
— *Стилтьеса* (Stieltjes integral) 60—70
Интегральная показательная функция (exponential integral) 69
Информатика (Computer Science) 7

Йонассен (Jonassen Arne Tormod) 9, 111
Йордан (Jordán Károly) 18, 111

Кларксон (Clarkson Kenneth Lee) 7, 102
Кнут (Knuth Donald Ervin) 3—112
Конте (Comtet Louis) 73, 112

Лидеры цикла (cycle leaders) 27
Люкер (Lueker George Schick) 21, 112

Метод *Дарбу* (Darboux's method) 70—73, 76
— *Лапласа* (Laplace's method) 76—80, 82
Метод операторов (operator methods) 14—15
— перевала (saddle point method) 70, 76—82
Метрика *Ли* (Lee metric) 106
Милн-Томсон (Milne-Thomson Louis Melville) 18, 112
Минпозиция (minvolution) 30—31
Многочлены (polynomials)
— базисные (basic) 14—15
— *Белла* (Bell) 80
— *Бернулли* (Bernoulli) 54, 65
— неприводимые (irreducible) 54
Множители (factors)
— простые необычные (prime unusual) 84, 97—99
— — различные (distinct) 66—70
— суммирующие (summation) 21, 22, 91
Монстр — пожиратель печенья (cookie monster) 38—47
Мэйрсон (Mairson Harry George) 7

Наибольший общий делитель (greatest common divisor) 77
Неопределенные коэффициенты (undetermined coefficients) 20
Неравенство *Чебышёва* (Chebyshev's inequality) 54
Неявные уравнения (implicit equations) 50

Обезьяна (ape) 84
Обращение *Мёбиуса* (Möbius inversion) 68
Ограниченная вариация (bounded variation) 62
Олвер (Olver Frank William John) 97, 112
Операторы собственные (eigenoperators) 38—48
— скользящие (sliding operators) 46—48, 85, 101—102

Патерсон (Paterson Michael Stewart) 38—48
Пейдж (Page Ewan Stafford) 18, 112
Перестановка (permutation) 86—88, 102—104
— на том же месте (in situ permutation) 27

Перестановка, получаемая с помощью стека (obtainable with a stack) 83
— пузырьковая сортировка (bubble sort) 83, 90
— шейкер-сортировка (coctail shaker) 83, 90
Пласс (Plass Michael Frederick) 31
Постоянная *Глейшера* (Glaisher's constant) 97
— *Эйлера* (Euler's constant) 53, 56
Правило *Лопиталя* (l'Hospital's rule) 74
Принцип включения и исключения (inclusion and exclusion) 12
— разделяй и властвуй (divide and conquer) 33
Произведение *Адамара* (Hadamard product) 76
Производящая функция (generating function) 10, 13, 19, 21—22, 26, 31, 38—48, 70—82, 83—84, 89, 90—93, 99—100, 102—104

Разбиение (partition) 54
Разложение *Лорана* (Laurent expansion) 71, 74
— *Ньютона* (Newton's expansion) 15
— *Тейлора*, обобщенное (Taylor's expansion, general) 15
— *Тиле* (Thiele expansion) 77—80
Разложение на множители (factoring) 54—55
— — — различных степеней (distinct degree) 54—55
Райс (Rice Stepham Oswald) 32, 111
Райт (Wright Edward Maitland) 33, 68, 113
Раскрутка (bootstrapping) 49, 50, 57, 58, 59
Расчленение суммы (dissecting a sum) 51, 57—60
Рекуррентные соотношения (recurrence relations)
— — вычитание (differencing) 23
— — линейные (linear) 18—27
— — нелинейные (nonlinear) 27—37
— — с полной предысторией (full history) 18, 23—27
— — с частичной предысторией (finite history) 18, 18—23
Реньи (Rényi Alfréd) 113
Репертуарный подход (repertoire approach) 23—27, 87
Решеточные пути (grid paths, lattice paths) 9, 87, 105, 108
Рид (Read Rohald Cedric) 111
Риордан (Riordan John) 11, 12, 112
Рота (Rota Gian—Carlo) 14, 15, 112
Руссо (Rousseau Cecil Clyde) 10

Сдвиг среднего (shifting the mean) 81—82
Седгевик (Sedgewick Robert) 112
Семиинварианты (semi-invariants) 77, 82
Символ *O* (*O*-notation) 49
Система MACSYMA 93—97
— METAFONT 7
— $\mathrm{T_EX}$ 7
Слейтер (Slater Lucy Joan) 16, 112
Слияние последовательностей (merging sequences) 31
Слоан (Sloane Neal James Alexander) 34, 37, 111
Смышленый (Quick Jonathan Horatio) 85, 88, 104, 109
Соотношения обратимые (inverse relations) 11—14
— — чебышёвского типа (Chebyshev's inverse relation) 12
— ортогональные (orthogonal relations) 11
Сортировка быстрая, вариант медиана из трех (median-of-three quicksort) 24
— поразрядная обменная (radix exchange sort) 14, 106
Столарски (Stolarsky Kenneth Barry) 29, 112
Столфи (Stolfi Jorge) 93
Суммирование по частям (summation by parts) 62, 104
— формула *Эйлера* (Euler's summation formula) 54, 60, 64—65, 93
Суммы цифр (digital sums) 29
Сю (Hsu Li-Che) 12, 111

Таблица инверсий (inversion table) 90
Теорема абелева (Abelian theorem) 52
— *Вандермонда* (Vandermonde's theorem) 16
— о вычетах (residue theorem) 74, 78, 100, 105—107
— тауберова (Tauberian theorem) 53, 56, 60
— центральная предельная (central limit) 76—81

Траб Пардо (Trabb Pardo Luis Isidoro) 70, 112
Треугольник *Паскаля* (Pascal's triangle) 89, 108

Уилсон (Wilson Leslie Blackett) 18, 112
Уинклер (Winkler Phyllis Astrid Benson) 7
Уиттекер (Whittaker, sir Edmund Taylor 112

Факториальные степени (factorial powers) 13—16
Фергюсон (Ferguson David Elton) 83—84
Формула *Абеля—Плана* (Abel—Plana formula) 97
— *Стирлинга* (Stirling's approximation) 53, 106
— суммирования *Эйлера* (Euler's summation formula) 54, 60, 64—65, 93
Фредмэн (Fredman Michael Lawrence) 30 112

Харди (Hardy Godfrey Harold) 33, 53, 68, 112—113
Хенричи (Henrici Peter) 16, 113
Хеширование, вторичное скучивание (haghing, secondary clustering) 46—48, 85, 101—102
— равномерное (uniform) 45—46
— срастающееся (coalesced) 40—45
Хобби (Hobby John Douglas) 103

Числа (numbers)
— *Бернулли* (Bernoulli) 65
— гармонические (harmonic) *см.* Гармонические числа
— простые, асимптотика (prime, asymptotics) 66
— *Стирлинга* (Stirling) 13, 82
— *Фибоначчи* (Fibonacci) 37

Шёнхаге (Schönhage Arnold) 18, 112
Шпигель (Spiegel Murray R.) 18, 20, 22, 113

Эрдёш (Erdös Pál) 113

Яо (Yao Andrew Chi—Chin) 7

Оглавление

От редактора и переводчика 5
К русскому изданию 6
Предисловие 7

1. БИНОМИАЛЬНЫЕ ТОЖДЕСТВА
1.1. Сводка полезных тождеств 8
1.2. Вывод тождеств 9
1.3. Обратимые соотношения 11
1.4. Операторное исчисление 14
1.5. Гипергеометрический ряд 15
1.6. Тождества с гармоническими числами 16

2. РЕКУРРЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ
2.1. Линейные рекуррентные соотношения 18
2.1.1. Частичная предыстория 18
2.1.1.1. Постоянные коэффициенты 18
2.1.1.2. Переменные коэффициенты 21
2.1.2. Полная предыстория 23
2.1.2.1. Вычитание 23
2.1.2.2. Из репертуара 23
2.2. Нелинейные рекуррентные соотношения 27
2.2.1. Соотношения с функциями максимума или минимума . . 27
2.2.2. Непрерывные дроби и другие скрытые линейные рекуррентные соотношения 31
2.2.3. Дважды экспоненциальные последовательности 33

3. ОПЕРАТОРНЫЕ МЕТОДЫ
3.1. Монстр — пожиратель печенья 38
3.2. Срастающееся хеширование 40
3.3. Открытая адресация: равномерное хеширование 45
3.4. Открытая адресация: вторичное скучивание 46

4. АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
4.1. Основные понятия 49
4.1.1. Обозначения 49
4.1.2. Раскрутка 50
4.1.3. Расчленение 51
4.1.4. Пределы пределов 52
4.1.5. Сводка полезных асимптотических разложений 53
4.1.6. Пример 54
4.2. Интегрирование по Стилтьесу и асимптотике 60
4.2.1. Символ O и интегралы 63
4.2.2. Формула суммирования Эйлера 64
4.2.3. Теоретико-числовой пример 66
4.3. Асимптотики из производящих функций 70
4.3.1. Метод Дарбу 70
4.3.2. Метод вычетов 74
4.3.3. Метод перевала 76

ЗАДАЧИ 83
РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ 90
ПРИМЕЧАНИЯ РЕДАКТОРА И ПЕРЕВОДЧИКА 110
ЛИТЕРАТУРА 111
Д. Э. КНУТ и его «фабрика книг» (дополнение переводчика) 114
Указатель 116