



**Российский фонд  
фундаментальных  
исследований**



**Российская  
академия  
наук**



**Институт машиноведения  
им. А.А.Благонравова  
РАН**

**Наследственная механика  
деформирования и разрушения  
твердых тел  
- научное наследие  
Ю.Н.Работнова  
(к 100-летию со дня рождения)**

Труды конференции

ISBN 978-5-4253-0727-9



9 785425 307279 >

Москва  
24-26 февраля 2014 г.  
ИМАШ РАН

## **ПРОГРАММНЫЙ КОМИТЕТ**

Ганиев Р.Ф., академик, председатель

Аннин Б.Д., академик

Березин А.В., д.ф.-м.н.

Ванько В.И., д.ф.-м.н.

Горячева И.Г., академик

Ломакин Е.В., чл.-корр. РАН

Махутов Н.А., чл.-корр. РАН

Милейко С.Т., д.т.н.

Мовчан А.А., д.т.н.

Немировский Ю.В., д.ф.-м.н.

Полилов А.Н., д.т.н.

Сухинин С.Н., д.ф.-м.н.

## **ОРГКОМИТЕТ**

Ломакин Е.В., чл.-корр. РАН – председатель

Алексеева С.И., д.т.н.

Кокуров А.М.

Малахов А.В.

Недбайло А.Б.

Плитов И.С.

Полилов А.Н., д.т.н. – зам председателя

Плугатарь Т.П.

Румачик М.М.

Татусь Н.А., к.т.н. – рук. раб. группы

Шохин А.Е., к.т.н.

Отв. редактор

Н.А.Татусь

Издается при поддержке:

Российского фонда фундаментальных исследований,  
проект 13-01-06201.

101990, Москва, Малый Харитоньевский пер., 4  
Издательство ИМАШ РАН. Электронная версия.

*Национальный комитет по механике*  
**Российская академия наук**  
*Отделение Энергетики, машиностроения, механики и  
процессов управления*  
**Российский фонд фундаментальных исследований**  
*МГУ им. М.В.Ломоносова*  
**Институт машиноведения им.А.А.Благонравова**  
**РАН**  
*Институт гидродинамики им.М.А.Лаврентьева СО РАН*

**«Наследственная механика  
деформирования и разрушения  
твердых тел  
- научное наследие Ю.Н.Работнова»**

24-26 февраля 2014 г., ИМАШ РАН

**Труды конференции**

Москва  
2014

**УДК 531**

**«Наследственная механика деформирования и разрушения твердых тел - научное наследие Ю.Н.Работнова»**

Труды конференции (24-26 февраля 2014 г.).

М: Изд-во ИМАШ РАН. 2014 г. 225 с. Электронная версия.

ISBN 978-5-4253-0727-9

ББК 22.251

*Конференция посвящена 100-летию со дня рождения выдающегося ученого-механика академика Юрия Николаевича Работнова. Конференция состоялась 24-26 февраля 2014 года в Институте машиноведения им.А.А.Благонравова РАН, где Ю.Н.Работнов возглавлял лабораторию механики разрушения с 1965 по 1985 г.*

*Представленные доклады отражают развитие тех фундаментальных направлений в механике деформируемого твердого тела, в создании которых Ю.Н.Работнов внес существенный, основополагающий вклад.*

*К таким направлениям относятся наследственная теория ползучести, алгебра дробно-экспоненциальных операторов, механика рассеянного разрушения, теория оболочек, теория пластичности, механика композитов, теория устойчивости и др.*

*В докладах учеников и последователей Ю.Н.Работнова показано развитие теоретических и прикладных исследований в этих направлениях, которые во многом определяют успехи современного машиностроения и перспективы создания техники будущего.*

©ИМАШ РАН, 2014



## НАСЛЕДСТВЕННОСТЬ В НАУКЕ И В ЖИЗНИ



Академик Ю.Н.Работнов  
(24.02.1914 – 13.05.1985)

Академик Юрий Николаевич Работнов - выдающийся ученый современности в области механики деформируемого твердого тела. Ему принадлежат фундаментальные результаты практически во всех направлениях науки о прочности: в теории устойчивости, в механике разрушения, в наследственной теории ползучести, в механике композитов, в теории пластичности. Его последняя книга - учебник для университетов "Механика деформируемого твердого тела" фактически служит энциклопедией для студентов, аспирантов, специалистов. Она выдержала два издания, но ее сразу же невозможно было найти на полках магазинов, зато она стоит на книжной полке практически каждого преподавателя "Сопромата". Высокая общая и математическая культура, широчайшая эрудиция, разумное сочетание строгого теоретического обоснования и тщательного эксперимента еще при жизни поставили Ю.Н. Работнова в один ряд с такими признанными классиками как С.П. Тимошенко (фото 2), А.Н. Крылов, Н.И. Мусхелишвили, В.В. Новожилов и др. Подтверждением тому - неослабевающий интерес к его идеям и книгам. По-прежнему развивается наследственная теория ползучести, широко используется предложенный им вариант технической теории оболочек, целое научное направление, получившее во всем мире название Damage Mechanics (механика роста поврежденности) фактически вышло из основополагающих работ Л.М. Качанова и Ю.Н. Работнова, предложивших введение структурных параметров в определяющие соотношения.



*Два классика – о судьбах механики (С.П.Тимошенко – слева)*

Отличал Ю.Н. Работнова и особый дар ученого-педагога. Один из учеников чл.-корр. РАН С.А.Шестериков за глаза называл его "гениальным формализатором". Он так умел отшлифовать постановку задачи, формулировку основных результатов, что это сразу становилось предметом увлекательного изучения учениками и студентами. Умение «упростить не упрощая», а выделяя суть, отбрасывая лишнее - вот что всю жизнь привлекало к Ю.Н. Работнову и научную молодежь, и зрелых ученых. Недаром и первая, и последняя его книги были, по сути, учебниками: "Сопrotивление материалов" (по словам В.В. Новожилова - "жемчужина среди книг по прочности"), отмеченный как один из лучших наряду с общеизвестным учебником В.И. Феодосьева, и упомянутая уже монография - учебное пособие для университетов «Механика деформируемого твердого тела». Вместе с всемирно известной книгой "Ползучесть элементов конструкций" (переведенной на английский язык) - это основные вехи, указывающие ту огромную область в науке, которую осветил и прояснил своим талантом Юрий Николаевич Работнов.

Ю.Н. Работнов родился 24 февраля 1914 года в Нижнем Новгороде в семье учителя гимназии, члена Петербургского астрономического общества, который заложил в сыне любовь к точным наукам. Вот - первое проявление наследственности. Вот - второе: от матери, знавшей по дворянской традиции французский, как родной, он унаследовал интерес к изучению иностранных языков. В дальнейшем во Франции он читал лекции на блестящем, "нюансированном" французском, в Канаде делал доклады на английском, в Германии - на немецком. Любовь к языкам была свойством его прекрасно организованного мозга. Он сам говорил, что изучал разные языки, как решают логические задачи, находя неизвестные закономерности и связи. Собираясь на конференцию в Молдавию, он за несколько дней освоил румынский язык. В качестве сложной шарады - он изучил основы японских иероглифов. В результате он мог переводить научную литературу с польского, чешского, грузинского, румынского. А его владение родным языком до сих пор восхищает

музыкальностью, блеском выражений, точностью формулировок. Чего только стоит его научная полемика, служащая незабываемым примером владения словом и мыслью. "Понятие механико-математической культуры трудно поддается точному определению, однако ее отсутствие для специалиста всегда очевидно" - писал он в рецензии на книгу одного не в меру плодовитого и неразборчивого в соавторах ученого. «Со времен Леонардо да Винчи и Ломоносова наука не знала столь разносторонних специалистов, но если бы NN нашел время хотя бы прочитать написанное соавторами, книга безусловно была бы избавлена от столь досадных неточностей и несуразностей».

Будучи потомственным («наследственным») русским интеллигентом, Ю.Н. Работнов очень серьезно относился к своему научному языку. В последние годы жизни, отвечая на некоторые замечания по своей книге, Ю.Н. Работнов всерьёз объяснял, что сознательно предпочитает сложносочиненные предложения сложноподчиненным, относя эту традицию ещё к литературному языку Гоголя и Щедрина. А вот выдержка из знаменитой дискуссии по проблемам разрушения, дискуссии между физиками и механиками твердого тела, когда один и тот же объект рассматривался с разных позиций. «Современная механика располагает средствами описания и объяснения различных видов разрушения, наблюдаемых в действительности, при этом даже нет необходимости выходить из привычных рамок теории материального континуума. Содержание механики разрушения, в принципе, очень широко и далеко не исчерпывается теорией трещин хрупкого и квазихрупкого разрушения. Поверхностное понимание физики процесса весьма полезно и необходимо для конструирования механических моделей и для выбора предположительной структуры определяющих уравнений, вопрос об их аналитической форме второстепенен и сводится к вопросу о выборе наилучшей в том или ином смысле аппроксимации. Углубленное понимание может быть даже опасно, поскольку истина в последней инстанции неизвестна, а фиксация внимания на деталях может отвлечь механика от сути дела. Исторический опыт убеждает нас в том, что лучшие достижения механики связаны с довольно грубыми моделями, которые описывают явления с той степенью приближения, которая разумна и необходима». Ю.Н.Работнов относил механику к разделу математики. Выступая перед молодёжью, он говорил: «Физик считает – я изучаю мир, механик утверждает – я совершенствую мир (точнее, совершенствую его математическое описание».

Прекрасное образование и математический талант, сочетаемые с увлеченностью и упорством, позволили Ю.Н. Работнову после окончания в 21 год механико-математического факультета МГУ в 32 года защитить докторскую диссертацию и стать профессором МГУ. В 38 лет он становится деканом механико-математического факультета МГУ и создает там кафедру теории пластичности, которую возглавлял до последних лет жизни. В 39 лет Ю.Н. Работнов избирается членом-корреспондентом АН СССР, а в 44 года - академиком.

Важная часть научной жизни Ю.Н. Работнова была связана с Новосибирским Академгородком Сибирского отделения АН СССР (См. фото 3), где он работал заместителем руководителя Научного центра, возглавлял лабораторию в Институте гидродинамики и кафедру в Новосибирском университете. Сочетание научной деятельности и работы со студентами, привлечение их в лабораторию и долготелая персональная работа с молодыми учеными позволили Ю.Н. Работнову воспитать много талантливых ученых, которые, с гордостью относили и относят себя к признанной научной школе Ю.Н. Работнова. Среди них Б.Д. Аннин, В.И. Астафьев, А.В. Березин, Г.И. Брызгалин, Л.П. Исупов, Е.В. Ломакин, Н.И. Малинин, С.Т. Милейко, А.А. Мовчан, Ю.В. Немировский,

И.Ф. Образцов, О.В. Соснин, Ю.В. Суворова, А.Н. Полилов, В.П. Тамуж, Ю.М. Тарнопольский, С.А. Шестериков и многие другие. В Академгородке был заложен фундамент (и в прямом, и в переносном смысле) Института прочности, который организовывал Ю.Н.Работнов вместе с учениками. Этим планам помешала трагическая случайность. Во время экспериментов на Обском море погибли люди. В то время Ю.Н.Работнов исполнял обязанности руководителя научного Центра.



*М.А.Лаврентьев (справа), Ю.Н.Работнов (слева) и Н.С.Хрущев (в центре) выбирают место для будущего Академгородка под Новосибирском в Золотой долине*

Вернувшись в 1965 г. в Московский государственный университет на свою кафедру теории пластичности, Ю.Н. Работнов сохранил верность идее плодотворного сочетания эксперимента и теории, содружества Академии наук и университета. С 1965 г. он возглавляет в Институте машиноведения им. А.А. Благонравова РАН лабораторию прочности машиностроительных материалов, которую затем переименовал одним из первых в стране в лабораторию механики разрушения, а потом - в лабораторию механики композитных материалов, в соответствии с теми научными проблемами, которые казались ему тогда наиболее интересными. Удивительное чувство нового, понимание перспективности интересных красивых задач позволили Ю.Н. Работнову еще на заре становления этих научных направлений предсказать, что именно механика разрушения и механика композитов станут наиболее плодотворными и востребованными областями механики твердого тела.

Уже после ухода из жизни Ю.Н. Работнова в Институте машиноведения была издана книга его избранных трудов "Проблемы механики деформируемого твердого тела", в которую вошли несколько его работ, отобранных по простому принципу - без соавторов, написанные только его рукой. Поразительно, но практически каждая статья стала основой целого научного направления. Обычно он долго вынашивал свои идеи, тщательно шлифовал изложение материала, строгость построения моделей, а затем - щедро отдавал свои работы ученикам, у которых они и получали дальнейшее развитие.

Институт машиноведения им. А.А.Благонравова в начале 60-х годов 20-го века одним из первых начал исследования в области механики и технологии волокнистых композитов. Работы проводились под общим руководством акад. Ю.Н.Работнова и охватывали широкий круг вопросов от исследования микроструктуры волокон до создания основ расчетов на прочность и ползучесть элементов конструкций.

Ю.Н.Работнов понимал и ценил тонкий эксперимент. Собственно, в Институт машиноведения по приглашению директора Анатолия Аркадьевича Благонравова Юрий Николаевич и пришел, увидев действующую лабораторию, в которой были поставлены эксперименты по высокоскоростному нагружению и по испытаниям при криогенных температурах (жидкий азот, водород – 22 К, и даже гелий – 4 К). В сочетании с созданными под его руководством многосекционными установками на ползучесть эти методики позволили завершить обоснование применимости наследственной теории ползучести к композитам, когда вся нелинейность включается в диаграмму мгновенного деформирования, а также получить принципиальные результаты в области линейной механики хрупкого разрушения при климатически низких температурах, характерных для условий Крайнего Севера. Недаром в его лаборатории были подготовлены многие специалисты из Якутии (Институт физико-технических проблем Севера СО РАН), ставшие в дальнейшем докторами наук. Сам же Работнов возглавил в те годы Комиссию по хрупкой прочности при низких температурах.

Вспоминая и анализируя основные результаты Ю.Н. Работнова, ставшие классическими, нельзя не отметить, что они в первую очередь замечательны не числом, а красотой и ясностью постановки задач, которую затем изучали последователи. Такое впечатление, что он работал как математик: больше на основе внутреннего интереса, чем потребностей практики. Хотя проблемы, которые он перед собой ставил, всегда были связаны с глобальными вызовами, возникающими при создании новой техники. Ползучесть дисков газовых турбин, длительная прочность полимерных деталей, хладноломкость конструкций северного исполнения, надежность ядерных энергетических установок, эффективность применения композитов в летательных и аэрокосмических аппаратах – в решении этих и многих других проблем заметна роль Ю.Н.Работнова и его многочисленных учеников.

Необходимо вспомнить о его вкладе в техническую теорию оболочек, в выявление краевого эффекта и локальной неустойчивости упругих оболочек, безмоментное состояние которых может быть рассмотрено путем специального выбора системы координат, не совпадающей в общем случае с главными кривизнами. Для упругопластических сред им сформулирована двумерная модель и в качестве фундаментального примера решена задача об изгибе трубки, что моделирует упрочняющийся материал с сингулярной (конической) поверхностью нагружения. Им исследована потеря устойчивости стержней за пределом упругости, предложена модель с запаздывающим пределом текучести и решены соответствующие задачи о распространении волн в таких средах. Одним из главных результатов научной деятельности Ю.Н. Работнова общепринято считать создание современной наследственной теории ползучести с применением интегральных соотношений типа Вольтерра-Больцмана с ядрами разностного типа. Им предложено дробно-экспоненциальное ядро, являющееся резольвентным (обратимым) и разработана алгебра операторов для таких ядер. Результаты изложены в переведенной на английский язык монографии "Элементы наследственной механики твердых тел", которая дополняет изданные ранее "Таблицы дробно-экспоненциальных функций отрицательных параметров

и интеграла для нее". Эти таблицы служат рабочим инструментом для расчетов сильно нагруженных элементов на ползучесть. Многие практические приложения наследственной теории ползучести с учетом нелинейной диаграммы мгновенного деформирования изложены в книге Ю.Н. Работнова и С.Т. Милейко "Кратковременная ползучесть". Маленькая (и с малым тиражом), но блестящая по своему лаконизму и смысловой насыщенности брошюрка "Введение в механику разрушения" выпущена обратным переводом его лекций во Франции. В МГУ были изданы также "Лекции по теории упругости", наиболее современное и строгое тензорное изложение теории с упором на вариационные принципы. В последние годы интерес Ю.Н. Работнова был связан с задачами о структурных механизмах разрушения композитов: о торможении трещины поверхностью раздела, о модели ромба из нерастяжимых волокон, описывающей зависимость прочности от углов намотки, о разрушении при сжатии композитных труб по форме "китайского фонарика". Он удивительно умел увидеть красоту таких «этюдных» задач. Со временем интерес к ним все возрастает, в том числе - в связи с преподаванием курса "Механика композитов". Наследством Учителя стали прекрасные учебные задачи по механизмам разрушения композитов.

Ю.Н. Работнов был истинным русским интеллигентом и истинным ученым, не очень заботящимся о служебной карьере. Тем не менее, признание его было чрезвычайно велико и в нашей стране, и во всем мире. Он несколько лет исполнял обязанности академика-секретаря Отделения механики и процессов управления АН СССР, работал в комитете по Ленинским премиям, возглавлял редколлегии нескольких академических журналов, Ученый совет в Институте машиноведения и Научно-технический совет по конструкционной прочности. Мировое признание за рубежом было еще выше. Он вместе с Такэо Йокобори создал Международный конгресс по разрушению и был избран его вице-президентом, одним из директоров, а в конце жизни получил звание Почетного президента этого конгресса за выдающиеся, принципиально новые результаты в области механики накопления повреждений Ю.Н.Работнов скончался 13 мая 1985 г. после тяжелой, продолжительной болезни (начавшейся в 1979 г.). Похоронен на Новокунцевском кладбище в Москве.

Но научная школа академика Юрия Николаевича Работнова по наследственной теории ползучести, механике рассеянного разрушения и механике композитов признана и существует - официально и фактически. В неё входят его ученики, работающие на механико-математическом факультете МГУ им. М.В.Ломоносова, в Институте машиноведения РАН, в ИФТТ РАН, в институтах новосибирского Академгородка, в Сибирском отделении РАН и во многих научных центрах России. В широком смысле - это школа по механике деформируемого твердого тела - академического, университетского уровня.

Семинар имени Ю.Н.Работнова (МЕСМУС – Московский Ежемесячный Семинар Молодых Ученых и Студентов по проблемам машиноведения) по-прежнему проводит заседания в Институте машиноведения РАН каждую третью среду месяца в 3 часа пополудни.



*Наследнице-соавтору – дочери Лене – книгу о наследственности в механике*

Научные и педагогические заслуги Ю.Н. Работнова были отмечены многими правительственными наградами, орденами, медалями, Государственной премией. Но, видимо, главная признательность его таланту ученого и педагога осталась в сердцах учеников, соратников, всех, кто с ним работал, и кто бесконечно ценит творческое наследие Ю.Н. Работнова - выдающегося ученого и замечательного человека. С годами его результаты находят все более широкое применение, и становится понятно, что есть потери, которые невозможны.

*Е.В.ЛОМАКИН*

*Чл.-корр. РАН, зав. кафедрой теории пластичности механико-математического факультета МГУ им. М.В.Ломоносова, профессор, доктор физ.-мат наук,*

*А.Н.ПОЛИЛОВ*

*доктор технических наук, профессор. Зав. лабораторией безопасности и прочности композитных конструкций Института машиноведения им.*

*А.А.Благодирова РАН*

**РАЗВИТИЕ НАСЛЕДСТВЕННОЙ МОДЕЛИ РАБОТНОВА И АНАЛИЗ  
ДЕФОРМАЦИОННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК КОМПОЗИТОВ**  
*DEVELOPMENT OF THE RABOTNOV'S HEREDITARY MODEL  
FOR THE MECHANICS OF VISCOELASTIC MATERIALS*

**С.И. Алексеева**<sup>1</sup> - д.т.н., гл.н.с., **И.В. Викторова**<sup>2</sup> - к.т.н., ст.н.с.,  
**М.А. Фроня**<sup>1</sup> – н.с.

<sup>1</sup> Институт машиноведения им.А.А.Благонравова РАН (Россия),

<sup>2</sup> Университет Клемсона (США)

[alexeevasofia@yandex.ru](mailto:alexeevasofia@yandex.ru), [iviktor@clemson.edu](mailto:iviktor@clemson.edu),  
[mikhail@fronya.com](mailto:mikhail@fronya.com)

**Abstract.** Rabotnov's hereditary theory is one of the most advanced approaches for modeling of structural materials with time dependency. The developed modeling equations allow to estimate the mechanical characteristics of viscoelastic materials and predict the long-term durability with exploitation factors.

The presented approach is based on the nonlinear hereditary type relationship between stresses, strains and time in viscoelastic solids - materials with memory. It can be modeled by the second type of Volterra's equation (known as Rabotnov's model).

It has been shown that such an equation can describe rather successfully the wide range of materials including polymers, composites and nanocomposites.

The choice of kernel for the integral operator is the subject of several objective considerations. The exponential of arbitrary order Rabotnov's function presents the most general type to satisfy the constraining conditions.

This work is devoted to experimental studies and mathematical modeling of viscoelastic properties of polymer nanocomposites with nanofillers of various modifications of carbon: nanotubes and ultradispersed diamonds. The bulk specimen assumption was used. On the basis of experimental data using the model of hereditary type, the theoretical creep curve was calculated. The comparison of experimental data obtained for polymer nanocomposites, with the data for the pure polymer material used as a matrix in the studied nanocomposites was carried out.

With the use of the Rabotnov's kernel comes the need to obtain material-dependent parameters associated with the kernel. The standard application of the least squares approach for obtaining optimal parameter estimates given experimental observations is difficult due to expensive and error-prone function evaluations arising from the use of the Rabotnov's kernel.

This work presents a means to obtain an alternative formulation of the least squares approach with the use of the Laplace-Carson transform that yields good parameter estimates with the use of function evaluations that are inexpensive and reliable. Validity and robustness of obtained parameter estimates are also discussed.

В настоящее время наиболее перспективным подходом к расчету материалов с ярко выраженными вязкими характеристиками является наследственная механика. Впервые принцип наследственности был выдвинут в 19 веке Больцманом. В 20-м веке – это известные работы Вольтерра, Грина, Ривлина, ДUFFинга, Трусделла и многих других авторов, представляющие собой математическое развитие принципа наследственности, построение интегральных уравнений, создание методов их решения, нахождение резольвент для различных ядер наследственности, анализ сингулярности и пр. В нашей стране это направление связано, прежде всего, с именем академика Ю.Н. Работнова, чьи труды легли в основу целой школы отечественной наследственной теории:

построение дробно-экспоненциальной функции, развитие алгебры операторов, доказательства теорем умножения, возведения в степень и др.

Дальнейшее развитие научных работ и разработок Работнова Ю.Н. получило, в частности, в лаборатории механики композиционных материалов ИМАШ РАН. Широкое внедрение в промышленность полимеров и композитов с полимерной матрицей создало необходимость в комплексном изучении поведения вязкоупругих материалов при различных режимах нагружения и в построении таких моделей, которые бы могли использовать один и тот же набор параметров для ползучести, релаксации, нагружении с различными скоростями, при разгрузке, циклическом нагружении и т.д. Одна из разработок - обобщение одномерного нелинейного уравнения наследственного типа на сложно-напряженное состояние /1/, что позволяет решать практические задачи и прогнозировать поведение элементов конструкций из вязкоупругих материалов на длительные времена нагружения в реальных условиях эксплуатации и, таким образом, рассчитывать запас прочности, ресурс и безопасность работы изделия

$$\varphi(\varepsilon_i) = (1 + K^*)\sigma_i. \quad (1)$$

Связь между компонентами тензоров напряжений и деформаций записывается в виде

$$(\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^0) \frac{2\varphi(\varepsilon_i)}{3\varepsilon_i} = (1 + K^*)(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^0). \quad (2)$$

Следует подчеркнуть, что оператор в (1)-(2) один и тот же, что возможно при определенных ограничениях, т.е. если степень наследственных эффектов не слишком велика и квадратами операторов можно пренебречь по сравнению с единицей. Соотношения (1) и (2), как видно, аналогичны обобщению теории малых упруго-пластических деформаций Ильюшина /2/ введением в них операторов. С другой стороны, процедура обобщения вполне соответствует примененной Работновым для нелинейных наследственных сред в случае одномерной постановки.

Такой подход позволяет перейти от анализа сложного напряженного состояния к исследованию практически одномерной модели, записанной через интенсивности. Установлено, что параметры определяющих соотношений для сложного напряженного состояния можно определять из одномерных опытов на растяжение, что значительно упрощает обработку опытных данных и использование самой теоретической модели /3-5/.

Для проведения испытаний образцов полимерных композитов на характерных этапах деформирования, определяющих базовые ярко выраженные вязкоупругие свойства исследуемых материалов, разработаны методики. Также большое развитие получили методы определения параметров уравнений и методы численного счета.

Следующий шаг – дополнение определяющего соотношения Работнова введением климатических факторов – функций температуры и влажности /6/.

$$\varphi(\varepsilon) = \sigma + \int_0^t \frac{k}{(t-\tau)^\alpha} f_1(T) f_2(W) \sigma(\tau) d\tau.$$

Формулировка этих функций учитывает некоторую температурную шкалу и шкалу влагонасыщения, каждая из которых основана на выборе двух опорных точек

$$\varphi(\varepsilon) = \sigma + \int_0^t \frac{k}{(t-\tau)^\alpha} \left( \frac{273+T^0C}{273} \right)^\gamma \left( \frac{W_0 + W_{\text{вес}\%}}{W_0} \right)^\beta \sigma(\tau) d\tau.$$

Изменение температуры на 2-3 градуса в некоторых случаях увеличивает деформации на 20-30% и больше. То же и с влажностью. Один из результатов - стала возможной оценка безопасности влияния влаги на композитные материалы, которая осуществляется анализом взаимодействия волокон и матрицы, а также адгезионными характеристиками [7]. Были изучены прочностные свойства базальтопластиков на основе эпоксидных и полиэфирных смол.

В процессе испытаний был обнаружен следующий эффект: за первым периодом, характеризующимся интенсивным водопоглощением, наступает второй, когда оно начинает снижаться, Рис.1. Из этого факта может быть сделан предположительный вывод о том, что некоторая часть матрицы вымывается водой, что приводит к уменьшению веса, а значит, и величины  $W$ . Этот процесс сопровождается конкурирующим процессом - пластификацией матрицы, приводящей к ее удлинению. За счет этого перераспределение напряжений происходит более благоприятно без потери прочности при сдвиге. В результате и реализация прочности оказывается выше, Рис.2. На этом Рисунке приведены данные по зависимости прочности от длительности пребывания базальтопластика в воде. Видно, что за первичным понижением прочности следует упрочнение и стабилизация характеристик. Это весьма существенно для использования материала в конструкциях, подверженных длительному воздействию влаги.

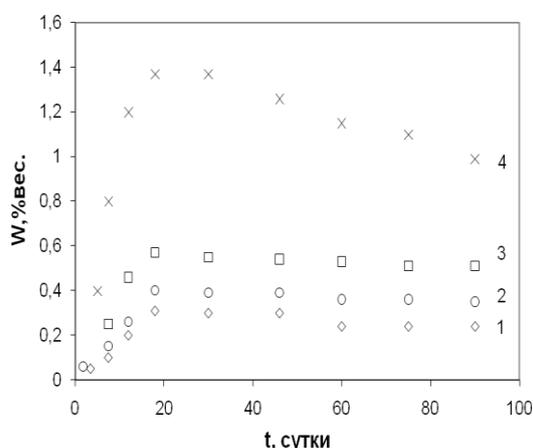


Рис.1 Зависимость влагосодержания четырех марок базальтопластика от длительности пребывания в воде

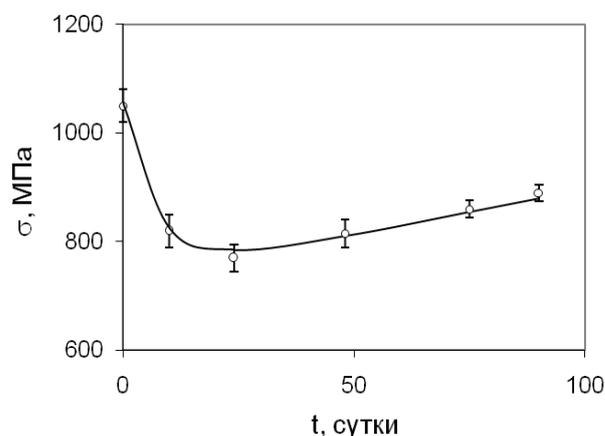


Рис.2 Зависимость прочности базальтопластика от времени выдержки в воде. о – эксперименты с соответствующим разбросом данных; сплошная линия - расчет

Можно отметить, что если при комнатной влажности ( $W=0$ ) разброс прочности достигает примерно 8%, то при повышении  $W$  он уменьшается до 5%, что связано с повышением пластифицирующих свойств матрицы и ее предельного удлинения. Этот же эффект объясняет и некоторое увеличение удлинения материала даже после высушивания образцов до первоначального веса. Прочностные характеристики практически возвращаются на первоначальный уровень.

Актуальной и важной задачей является исследование вязкоупругих, прочностных и других механических характеристик нанокompозитных материалов в сочетании с изучением их структуры, выявление влияния структуры на механическое поведение, разработка методов прогнозирования их поведения во времени. Значительный интерес к материалам обусловлен благодаря особым свойствам наночастиц и конгломератов - конструкционные и функциональные характеристики объемных композитов на их основе значительно отличаются от свойств крупнозернистых аналогов /8-10/.

Далее будут представлены данные по экспериментальным исследованиям механических свойств и структуры нанокompозитных материалов на основе полиамида (ПА) с наполнителями в виде углеродных нанотрубок (УНТ) и ультрадисперсных алмазов (УДА). Образцы материалов подвергались испытаниям на одноосное растяжение и кратковременную ползучесть /11/.

По полученным для каждого материала кривым деформирования при разных скоростях рассчитаны модули упругости. Результаты испытаний приведены до 20-25% деформаций, разброс данных не превысил 5-6%. Модуль упругости зависит от вида наполнителя в нанокompозитах. Для нанокompозитов с УДА модуль упругости самый высокий, однако предельная прочность данного материала уступает материалам с УНТ и даже чистому полимеру. Такого рода явление можно объяснить морфологическими особенностями структуры материалов /12-14/, так как для нанокompозитов с УНТ характерно упорядочивание структуры в одном направлении, что и приводит к увеличению адгезионных свойств наполнителя с матрицей, в то время как УДА, являясь точечными дефектами в структуре материала, дают улучшение механических свойств лишь при небольших деформациях.

Сравнение данных по ползучести всех исследуемых материалов при трех разных уровнях нагрузки ( $\sigma = 0.3, 0.4$  и  $0.5$  от  $\sigma_{пр}$ ) позволило установить влияние структуры на величину деформации ползучести  $\epsilon_{160}$  композитных материалов с нанодобавками (Рис.3-5). Снижение до 2 и 6% величины деформации  $\epsilon_{160}$  для ПА+УДА и ПА+УНТ по сравнению с чистым полиамидом наблюдается при наибольшей нагрузке  $\sigma = 0.5\sigma_{пр}$ . Для стартового уровня нагрузки  $\sigma = 0.3\sigma_{пр}$  такое снижение предельной деформации ползучести  $\epsilon_{160}$  отмечено только для ПА+УНТ. Интересно, что деформации ползучести  $\epsilon_{160}$  для ПА+УНТ отличаются от аналогичных данных по полиамидному материалу на постоянные 6% величины для всех трех уровней нагружения, хотя для ПА+УДА такой тенденции не наблюдается.

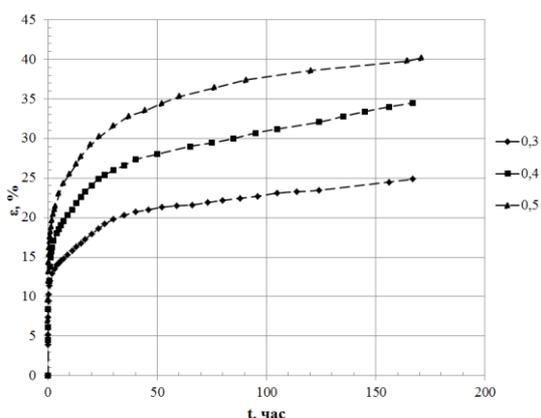


Рис.3 Кривые ползучести ПА при разных уровнях нагрузки: 1 -  $0.3\sigma_{пр}$ , 2 -  $0.4\sigma_{пр}$ , 3 -  $0.5\sigma_{пр}$  ( $\sigma_{пр} = 54$  МПа,  $\dot{\epsilon} = 2 \cdot 10^{-3}$  сек $^{-1}$ )

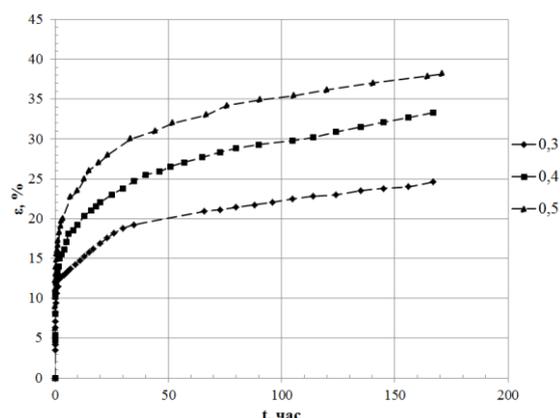


Рис.4 Кривые ползучести ПА+УДА при разных уровнях нагрузки: 1 -  $0.3\sigma_{пр}$ , 2 -  $0.4\sigma_{пр}$ , 3 -  $0.5\sigma_{пр}$  ( $\sigma_{пр} = 53$  МПа,  $\dot{\epsilon} = 2 \cdot 10^{-3}$  сек $^{-1}$ )

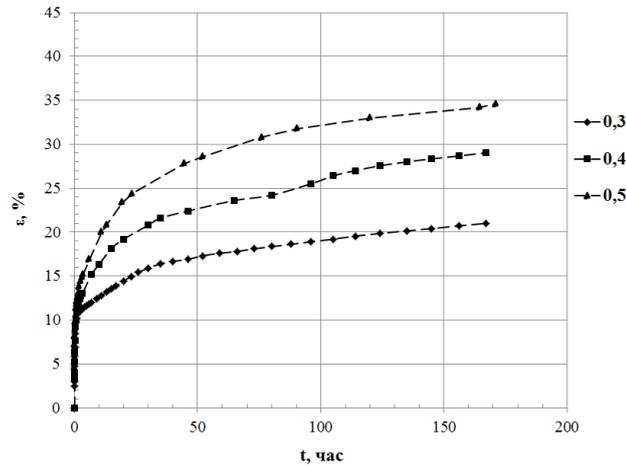


Рис.5 Кривые ползучести ПА+УНТ при разных уровнях нагрузки:  
 1 – 0.3σ<sub>np</sub>, 2 – 0.4σ<sub>np</sub>, 3 – 0.5σ<sub>np</sub> (σ<sub>np</sub> = 62.4 МПа, ε̇ = 2·10<sup>-3</sup> сек<sup>-1</sup>)

Важный момент – использование дробно-экспоненциальной функции Работнова, принятой им в качестве ядра интегрального уравнения. Эта функция была получена как резольвента уравнения с ядром в виде ядра Абеля. Оказалось, что выбранное уравнение хорошо описывает ползучесть материалов, ярко выраженную при приложении нагрузки под углом к направлению армирования.

$$M(t) := \sigma \left[ 1 + \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n t^{(1-\alpha)(n+1)}}{\Gamma[(1-\alpha)(n+1) + 1]} \right]$$

Для получения уточненного решения параметров разработанной модели сформулирована задача оптимизации, основанная на преобразовании Лапласа-Карсона с использованием двух методик LSP и LDLSP /15/.

Первая из методик основана на традиционной задаче оптимизации (LSP) по методу наименьших квадратов отклонений модельных расчетных кривых с экспериментами, полученными в реальном времени. Этот подход связан с определенными вычислительными трудностями из-за аналитической сложности используемой модели. В работах /16-17/ сформулирован альтернативный подход, который основан на применении преобразования Лапласа к интегральной модели Вольтерра и сводится к оптимальному поиску параметров с наилучшим приближением к регрессированным экспериментальным данным, преобразованным аналогичным образом. Таким образом, сформулирована задача оптимизации по методу наименьших квадратов в области преобразования Лапласа (LDLSP).

Ранее эмпирически показана эффективность второй из методик (LDLSP) при получении оптимальных оценок параметров для ряда вязкоупругих материалов. Разработанное в данной работе строгое математическое обоснование позволяет провести сравнительный анализ двух указанных методов (LSP и LDLSP). Каждая из задач оптимизации сводится к минимизации расстояния между двумя функциями в соответствующем функциональном пространстве  $C[a,b]$  функций  $f: [a,b] \rightarrow \mathbf{R}$ . Минимизируемое расстояние задается по соответствующим нормам и является разным для каждой из рассматриваемых задач. Показано, что две определяющие нормы не являются эквивалентными, что является основанием для аппроксимации решения одной из задач оптимизации по решению второй из рассматриваемых задач. Результаты осуществленного математического анализа проиллюстрированы на примере использования

усовершенствованной методики LDLSP описания ползучести композитов с нанодобавками.

Применение разработанного подхода демонстрирует эффективность постановки задачи оптимизации, в особенности при формулировке  $\Delta(s)$  и  $S_N$ , обоснованными теоретически. Последнее вместе с фактом, что задача (4) формулировалась без приближения по методу наименьших квадратов, используемого ранее в /18/, позволило получить наибольшие оптимальные оценки расчетных параметров по сравнению с результатами /18/, в особенности при определении ползучести ПА+УНТ при  $\sigma_{0.5}$  от предельного.

$$\min_{p \in P} \sum_{i=1}^N (m(p, t_i) - y_i)^2 \quad (3)$$

$$\min_{p \in P} \sum_{s \in S_N} |M(p, s) - R(s)|^2 \Delta(s) \quad (4)$$

Следует отметить, что приведенные далее графики (Рис.6) свидетельствуют о хорошей аппроксимации решения задачи (4) в реальной временной области по оценкам параметров в комплексной области  $S$ , что, однако, не всегда возможно. В целом, необходимо использовать оценки, полученные как локальный минимум задачи (4) в качестве исходных при поиске в окрестности каждого из найденных значений для наилучшей аппроксимации оптимального набора параметров  $p^*$  в реальной области временных переменных задачи (3).

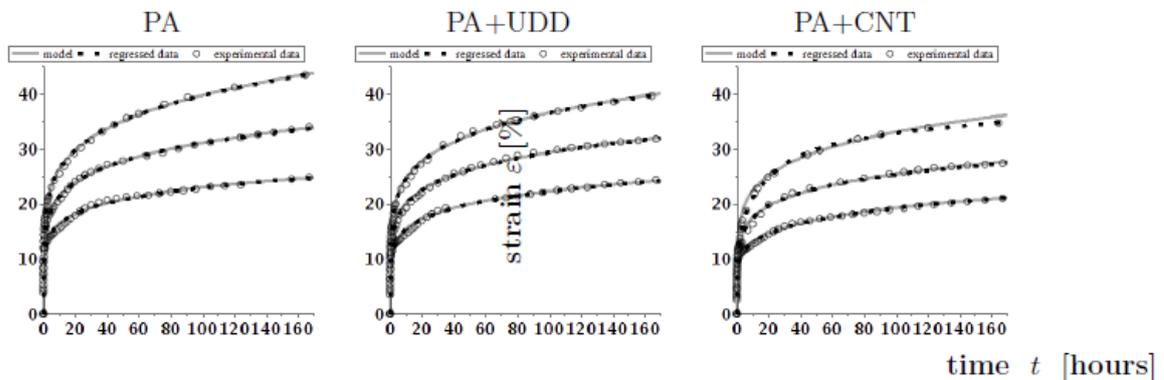


Рис.6 Данные аппроксимации для всех материалов

Сопоставление результатов экспериментов с расчетными данными на основе математической модели с использованием методов нелинейного моделирования и оптимизации демонстрирует хорошее соответствие данных эксперимента и модельных расчетов.

Выполненный комплексный анализ вязкоупругих свойств нанокompозитных материалов представляется весьма перспективным как для адекватного выбора модели и ее описания, так и для предсказания деформационных характеристик полимерных нанокompозитов.

## Литература

1. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977, 383 с.
2. Ильюшин А.А. Пластичность. М.-Л.: Гостехиздат, 1948, 376 с.

3. Суворова Ю.В., Алексеева С.И. Нелинейная модель изотропной наследственной среды в условиях сложного напряженного состояния//Механика композитных материалов, 1993, № 5, с.602-607.
4. Суворова Ю.В., Алексеева С.И. Нелинейная наследственная механика с учетом температуры при сложном напряженном состоянии//Проблемы машиностроения и автоматизации, 1994, № 3-4, с.31-37.
5. Суворова Ю.В., Алексеева С.И. Нелинейная модель изотропной наследственной среды при сложном напряженном состоянии с учетом температуры//Заводская лаборатория, 1994, № 9, с.56-57.
6. Алексеева С.И. Модель нелинейной наследственной среды с учетом температуры и влажности//Доклады Академии наук, 2001, № 4, с.471-473.
7. Нгуен Динь Дык, Суворова Ю.В., Алексеева С.И., Сорина Т.Г. Влияние влагосодержания на прочность базальтопластиков//Заводская лаборатория. Диагностика материалов, 2000, № 12, с.44-48.
8. Суздальев И.П. Нанотехнология. Физико-химия нанокластеров, наноструктур и наноматериалов. М.: Ком Книга, 2006.
9. Полимерные нанокомпозиты. Под ред. Ю-Винг Май, Жонг-Жен Ю. М.: Техносфера, 2011.
10. Суворова Ю.В., Алексеева С.И., Фроня М.А., Викторова И.В. Современное состояние исследований физических и механических свойств полимерных нанокомпозитов (обзор)//Заводская лаборатория. Диагностика материалов, 2012, № 7, т.78, с.46-57.
11. Алексеева С.И., Фроня М.А., Викторова И.В. Анализ деформирования вязкоупругих свойств полимерных композитов с углеродными нанонаполнителями//Композиты и наноструктуры, 2011, № 2, с.28-39.
12. Суворова Ю.В., Сорина Т.Г., Викторова И.В., Михайлов В.В. Влияние скорости нагружения на характер разрушения углепластиков//Механика композитных материалов, 1980, № 5, с.847-851.
13. Суворова Ю.В., Васильев А.И., Машинская Г.П., Финогенов Г.Н. Исследование процессов деформирования органотекстолитов//Механика композитных материалов, 1980, № 3, с.538-540.
14. Суворова Ю.В., Алексеева С.И. Инженерные приложения модели наследственного типа к описанию нелинейного поведения полимеров и композитов с полимерной матрицей//Заводская лаборатория. Диагностика материалов, 2000, № 5, с.47-51.
15. Дандуранд Б., Викторова И.В., Алексеева С.И. Моделирование механических характеристик вязкоупругих материалов по сравнительной оценке параметров во временной и Лапласовой областях переменных//Проблемы машиностроения и автоматизации, 2013, № 3, с.106-111.
16. B. Dandurand, I. Viktorova, S. Alexeeva. Nonlinear Modeling and Optimization of Parameters for Viscoelastic Composites and Nanocomposites//World Journal of Engineering, 2011, Vol.8, Suppl.1, pp.255-256.
17. B. Dandurand, I. Viktorova, S. Alexeeva, S. Goodson. Nonlinear Modeling and Optimization of Parameters for Viscoelastic Composites and Nanocomposites//Проблемы машиностроения и автоматизации, 2011, № 3, с.51-57.
18. Викторова И., Дандуранд Б., Алексеева С., Фроня М. Моделирование ползучести полимерных нанокомпозитов на основе альтернативного метода нелинейной оптимизации//Механика композитных материалов, 2012, Т.48, № 6, с.997-1010.

**ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ СООТНОШЕНИЙ ЛИНЕЙНОЙ  
АНИЗОТРОПНОЙ НАСЛЕДСТВЕННОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ**  
*ON A CLASS OF CONSTITUTIVE RELATIONS OF LINEAR ANISOTROPIC  
HEREDITARY THEORY OF ELASTICITY*

**Б.Д. Аннин** – академик РАН  
Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН,  
Новосибирский государственный университет  
[annin@hydro.nsc.ru](mailto:annin@hydro.nsc.ru)

**Abstract.** The Kelvin approach describing the structure of the generalized Hook's law is used to analyze the constitutive relations of linear anisotropic hereditary theory of elasticity. It is assumed that eigenstates of the tensor of kernels of heredity are time independent and coincide with eigenstates of the tensor of anisotropy of instantaneous elastic moduli, and hereditary operators with kernels in the form of fractional exponential Rabotnov functions act only on their own time-dependent modules tensor hereditary kernels. The maximum number of independent genetic operators is six. Cases of transverse isotropy, orthotropic, cubic symmetry considered.

Подход Кельвина, раскрывающий структуру обобщенного закона Гука, применяется к анализу соотношений анизотропной линейно наследственной теории упругости. Предполагается, что собственные состояния тензора наследственных ядер не зависят от времени и совпадают с собственными состояниями тензора анизотропии мгновенных модулей упругости, а наследственные операторы с ядрами в виде дробно-экспоненциальных функций Работнова действуют только на зависящие от времени собственные модули тензора наследственных ядер. Максимальное число независимых наследственных операторов равно шести. Рассмотрены случаи трансверсальной изотропии, ортотропии, кубической симметрии.

Соотношения линейной наследственной теории упругости имеют вид [1]

$$\sigma_{ij} = \tilde{E}_{ijkl} e_{kl}, \quad i, j, k, l = 1, 2, 3 \quad (1)$$

Здесь  $\sigma_{ij}$  – симметричный тензор напряжений,  $e_{kl}$  – симметричный тензор малой деформации, связанный с вектором перемещений  $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ ,  $u_i = u_i(t, x_1, x_2, x_3)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , где  $t$  – время,  $(x_1, x_2, x_3)$  – декартова система координат, формулами Коши. По повторяющимся индексам производится суммирование от 1 до 3.

В соотношениях (1) обозначено

$$\tilde{E}_{ijkl} = E_{ijkl} - \Gamma_{ijkl}^*, \quad (2)$$

где  $E = \parallel E_{ijkl} \parallel$  – независящий от времени тензор четвертого ранга мгновенных модулей упругости, соответствующих времени  $t = 0$ , для которого справедливы соотношения

$$E_{ijkl} = E_{jikl} = E_{klij}; \quad (3)$$

$\Gamma_{ijkl}^*$  – операторы, действующие на произвольную интегрируемую на интервале  $(0, \infty)$  функцию  $f(t)$  по формуле

$$\Gamma_{ijkl}^* \cdot f(t) = \int_0^t \Gamma_{ijkl}(t - \tau) f(\tau) d\tau \quad (4)$$

В равенствах (4) компоненты тензоров  $\Gamma(s)$ , четвертого ранга  $\Gamma_{ijkl} = \Gamma_{ijkl}(s)$  определены и интегрируемы для  $0 < s < \infty$  и могут обладать слабой особенностью при  $s=0$ . Предполагается также, что операторы  $\Gamma_{ijkl}^*$  ограничены при  $t \rightarrow \infty$ . Это позволяет ввести тензор длительных модулей  $E^\infty = \|E_{ijkl}^\infty\|$  по формуле  $E_{ijkl}^\infty = E_{ijkl}^\infty - \Gamma_{ijkl}^* \cdot 1$ , который также удовлетворяет соотношениям (3).

Заметим, что в случае  $\Gamma_{ijkl}^*(s) \equiv 0$ ,  $0 \leq s < \infty$ , для  $i = \hat{i}$ ,  $j = \hat{j}$ ,  $k = \hat{k}$ ,  $l = \hat{l}$  в силу (1) компоненты  $\tilde{E}_{ijkl}$  при  $i = \hat{i}$ ,  $j = \hat{j}$ ,  $k = \hat{k}$ ,  $l = \hat{l}$  обращаются в постоянные.

Таким образом, соотношения (1) в фиксированной системе координат  $(x_1, x_2, x_3)$  могут входить как наследственные операторы с ядрами, не равными тождественно нулю, так и константы, соответствующие тождественно нулевым ядрам.

Рассмотрим вариант соотношений (1), основываясь на понятии собственных модулей и собственных состояний тензора четвертого ранга (см. например [2–3]).

Представим тензор мгновенных модулей упругости в виде

$$E_{ijkl} = \sum_{n=1}^6 \Lambda_n t_{ij}^{(n)} t_{kl}^{(n)} \quad (6)$$

где  $\Lambda_n > 0$ ,  $n=1, 2, \dots, 6$  – собственные модули (собственные значения) тензора  $E$ , а  $t_{ij}^{(n)}$ ,  $n=1, 2, \dots, 6$ , его собственные состояния, удовлетворяющие условием ортонормированности  $t_{ij}^{(n)} t_{ij}^{(m)} = \delta_{nm}$ , где  $\delta_{nm}$  символ Кронекера.

Предположим, что тензоры  $\Gamma(s)$  при всех  $s > 0$  имеют независимые от  $s$  собственные состояния  $t_{ij}^{(n)}$ ,  $n=1, 2, \dots, 6$ , и зависящие от  $s$  собственные значения  $\gamma_n(s)$ ,  $n=1, 2, \dots, 6$ . Следовательно, компоненты тензора  $\Gamma(s)$  в системе координат  $(x_1, x_2, x_3)$  представляются в виде

$$\Gamma_{ijkl}(s) = \sum_{n=1}^6 \gamma_n(s) t_{ij}^{(n)} t_{kl}^{(n)} \quad (7)$$

Это означает соосность тензоров  $E$  и  $\Gamma(s)$  для  $s > 0$ .

Таким образом, вариант линейной наследственной теории упругости постулируется в виде

$$\sigma_{ij}(t) = \sum_{n=1}^6 t_{ij}^{(n)} t_{kl}^{(n)} \left( \Lambda_n e_{kl}(t) - \int_0^t \gamma_n(t-\tau) e_{kl}(\tau) d\tau \right) \quad (8)$$

Из равенства (8) следует

$$\sigma_{ij} t_{ij}^{(n)} = \tilde{\Lambda}_n (t_{kl}^{(n)} e_{kl}), \quad n=1, 2, \dots, 6 \quad (9)$$

В качестве ядер  $\gamma = \gamma(s)$  можно использовать дробно экспоненциальную функцию [1] Работнова  $\mathcal{E}_\alpha(\beta, t)$ .

$\gamma_n(t) = c_n \mathcal{E}_\alpha(\beta, t)$ , где  $c_n$ ,  $n=1, 2, \dots, 6$ , постоянные,

$$\mathcal{E}_\alpha(\beta, t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\beta^m t^{m(\alpha+1)+\alpha}}{\Gamma[(\alpha+1)(m+1)]}$$

Здесь в знаменателях членов ряда  $\Gamma[x]$  обозначает гамма функцию с аргументом  $x$ .

Рассмотрим частные случаи зависимости, даваемые формулой (8).

Трансверсально – изотропная среда. В системе координат с осью  $x_3$  ортогональной плоскости изотропии базис  $t_{ij}^{(n)}$ ,  $n=1, 2, \dots, 6$ , может быть выбран в следующем виде

$$\begin{aligned} & \left\| \begin{array}{ccc} \cos a/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \cos a/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sin a \end{array} \right\|, \quad \left\| \begin{array}{ccc} -\sin a/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\sin a/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \cos a \end{array} \right\|, \\ & \left\| \begin{array}{ccc} 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|, \quad \left\| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \end{array} \right\|, \\ & \left\| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \end{array} \right\|, \quad \left\| \begin{array}{ccc} 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right\|. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь  $a$  – произвольное число – параметр среды. Независимыми будут четыре собственных значения

Равенства (9) принимают вид

$$\begin{aligned} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) \frac{\cos a}{\sqrt{2}} + \sigma_{33} \sin a &= \tilde{\Lambda}_1 \cdot \left[ (e_{11} + e_{22}) \frac{\cos a}{\sqrt{2}} + e_{33} \sin a \right], \\ -(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \frac{\sin a}{\sqrt{2}} + \sigma_{33} \cos a &= \tilde{\Lambda}_2 \cdot \left[ -(e_{11} + e_{22}) \frac{\sin a}{\sqrt{2}} + e_{33} \cos a \right], \\ (\sigma_{11} - \sigma_{22}) &= \tilde{\Lambda}_3 (e_{11} - e_{22}), \quad \sigma_{12} = \tilde{\Lambda}_3 e_{12}, \\ \sigma_{23} &= \tilde{\Lambda}_4 e_{23}, \quad \sigma_{13} = \tilde{\Lambda}_4 e_{13}. \end{aligned} \quad (11)$$

*Замечание.* В случае, когда  $\cos a = \sqrt{2}/\sqrt{3}$ ,  $\sin a = 1/\sqrt{3}$ , базис (10) соответствует изотропному случаю. Если же дополнительно принять в (6)  $\Lambda_1 = 3\lambda + 2\mu \equiv 3K$ ,  $\Lambda_2 = \Lambda_3 = \Lambda_4 = \Lambda_5 = \Lambda_6 = 2\mu$ , где  $\lambda$ ,  $\mu$  – постоянные Ламе, то тензор мгновенных модулей упругости будет изотропным

$$E_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}),$$

а соотношения (11) превращаются в соотношениями между тензорами напряжений и деформаций для изотропного наследственно упругого тела. Из опытных данных следует [1], что объемная деформация чисто упругая, поэтому объемный модуль  $K$  есть константа и соотношения (11) будут содержаться лишь один оператор  $\tilde{\mu}$ .

В «композитной» интерпретации трансверсально–изотропная среда может быть представлена следующим образом [2]. Изотропная матрица армирована пучком волокон из другого материала, расположенных параллельно оси  $x_3$ . Предполагая, что только матрица отвечает за вязкоупругие свойства композита [4], можно считать  $\tilde{\Lambda}_1$ ,  $\tilde{\Lambda}_2$  – постоянными, а  $\tilde{\Lambda}_3 = \tilde{\Lambda}_4$  – наследственный оператор с ядром в виде дробно – экспоненциальной функцией Работнова, который определяет вязкоупругие свойства матрицы.

Возможна другая интерпретация соотношений (11). Изотропная матрица армирована плоскопараллельным семейством тонких изотропных листов одинаковой толщины  $h_1$ , перпендикулярных оси  $x_3$  и находящихся на одинаковом

расстоянии  $h_2$  между собой. Таким образом, имеется периодическая структура с периодом  $h = h_1 + h_2$ . Толщина слоев матрицы равна  $h_2$ . Для случая плоской деформации, когда  $u_2 \equiv 0$ , а  $u_1, u_3$  – не зависят от  $x_2$ , в [5] строится осредненная модель такой среды, в предположении жесткого контакта на границах слоев. Обозначим плотности матрицы и армирующего слоя  $\rho_m, \rho_a$  соответственно. Предположим, что армирующие слои деформируются упруго и  $\lambda_a, \mu_a$  их упругие постоянные. Предположим, что слои матрицы подчиняются соотношениям линейной изотропной наследственной упругости, причем объемный модуль будет константой, а оператор сдвига  $\tilde{\mu}$  есть линейный оператор Вольтера с ядром в виде дробно-экспоненциальной функции Работнова. Осредненная модель такой композитной среды будет описываться соотношениями (11), в которых операторы  $\tilde{\Lambda}_1, \tilde{\Lambda}_2, \tilde{\Lambda}_3, \tilde{\Lambda}_4$  – будут определены через  $\tilde{\mu}, \tilde{\mu}^{-1}$ , и постоянные  $\rho_m, \rho_a, \lambda_a, \mu_a, h_1, h_2$ . При этом  $\tilde{\mu}^{-1}$  будет также оператором Вольтера с ядром в виде дробно-экспоненциальной функции Работнова.

*Ортотропное тело.* В системе координат  $(x_1, x_2, x_3)$  с координатными плоскостями упругой симметрии для тензора мгновенных модулей упругий базис  $t_{ij}^{(n)}, n=1, 2, \dots, 6$  может быть выбран в следующем виде

$$\begin{aligned} & \left\| \begin{matrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{matrix} \right\|, & \left\| \begin{matrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \end{matrix} \right\|, & \left\| \begin{matrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{matrix} \right\|, \\ & & & (12) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \end{matrix} \right\|, & \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \end{matrix} \right\|, & \left\| \begin{matrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\|. \end{aligned}$$

Постоянные  $a_i, b_i, c_i, i=1, 2, 3$ , определяются из матричного равенства

$$\begin{aligned} \left\| \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} \cos c & -\sin c & 0 \\ \sin c & \cos c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \cos b & 0 & \sin b \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin b & 0 & \cos b \end{matrix} \right\| \left\| \begin{matrix} \cos a & -\sin a & 0 \\ \sin a & \cos a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right\|, \end{aligned}$$

Здесь  $a, b, c$  – произвольные числа – параметры среды.

Будем предполагать, что независимыми будут все шесть собственных значений. Равенства (9) принимают вид

$$\begin{aligned} \sigma_{11}a_1 + \sigma_{22}a_2 + \sigma_{33}a_3 &= \tilde{\Lambda}_1(e_{11}a_1 + e_{22}a_2 + e_{33}a_3), \\ \sigma_{11}b_1 + \sigma_{22}b_2 + \sigma_{33}b_3 &= \tilde{\Lambda}_2(e_{11}b_1 + e_{22}b_2 + e_{33}b_3), \\ \sigma_{11}c_1 + \sigma_{22}c_2 + \sigma_{33}c_3 &= \tilde{\Lambda}_3(e_{11}c_1 + e_{22}c_2 + e_{33}c_3), \\ \sigma_{23} &= \tilde{\Lambda}_4e_{23}, \quad \sigma_{13} = \tilde{\Lambda}_5e_{13}, \quad \sigma_{12} = \tilde{\Lambda}_6e_{12}. \end{aligned} \quad (13)$$

Если считать  $\tilde{\Lambda}_1, \tilde{\Lambda}_2, \tilde{\Lambda}_3$  постоянными, то соотношения (13) можно использовать для описания механического поведения композита, армированного волокнами в трех взаимно-ортогональных направлениях, параллельных осям координат и связанных полимерной матрицей, в предположении, что вдоль направлений армирования ползучесть пренебрежимо мала, а наследственная

упругость проявляется для компонент сдвига, за которую отвечают операторы  $\tilde{\Lambda}_4, \tilde{\Lambda}_5, \tilde{\Lambda}_6$ .

Если принять все  $\tilde{\Lambda}_i, i=1, 2, \dots, 6$  постоянными, то соотношение (13) представляет закон Гука для ортотропного тела.

### Среда с кубической симметрией

В системе координат  $(x_1, x_2, x_3)$  для тензора мгновенных модулей упругости базис  $t_{ij}^{(n)}$ ,  $i=1, 2, \dots, 6$  такой же как для изотропного тела – в формулах (10) следует положить  $\cos a = \sqrt{2}/\sqrt{3}$ ,  $\sin a = 1/\sqrt{3}$ . Равенства (9) имеет вид

$$\begin{aligned}\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} &= \tilde{\Lambda}_1 \cdot (e_{11} + e_{22} + e_{33}), \\ \sigma_{33} - \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} &= \tilde{\Lambda}_2 \cdot (e_{33} - \frac{e_{11} + e_{22}}{2}), \\ \sigma_{11} - \sigma_{22} &= \tilde{\Lambda}_2 (e_{11} - e_{22}), \quad \sigma_{23} = \tilde{\Lambda}_4 e_{23}, \\ \sigma_{13} &= \tilde{\Lambda}_4 e_{23}, \quad \sigma_{12} = \tilde{\Lambda}_4 e_{12}.\end{aligned}$$

Автор выражает благодарность Н.И. Остросаблину за обсуждение.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 13-01-00481).

### **Литература**

1. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977.
2. Рыхлевский Я.К. О законе Гука // Прикл. математика и механика. 1984. Т. 48. Вып.3. С.420–435.
3. Аннин Б.Д., Остросаблин Н.И. Анизотропия упругих свойств материалов // Прикл. механика и техн. физика, 2008. Т.49. №6. С. 131–151.
4. Брызгалин Г.И. К описанию анизотропной ползучести стеклопластиков // Прикл. механика и техн. физика. 1963. Т. 6. №4. С. 177–182.
5. Молотков Л.А. Исследование распространения волн в пористых и трещиноватых средах на основе эффективных моделей Био и слоистых сред. СПб. Наука, 2001.

**КРУЧЕНИЕ ПЛАСТИН С ПОНИЖЕННОЙ СОПРОТИВЛЯЕМОСТЬЮ  
ДЕФОРМАЦИЯМ ПОЛЗУЧЕСТИ В НАПРАВЛЕНИИ ТОЛЩИНЫ**  
*TORSION OF PLATES WITH THE LOWERED RESISTANCE  
TO CREEP DEFORMATIONS IN THE THICKNESS DIRECTION*

**И. А. Банщикова**-к.ф.м.н., **Б. В. Горев** – д.т.н.  
Институт гидродинамики им. М.А.Лаврентьева СО РАН  
[binna@ngs.ru](mailto:binna@ngs.ru)

**Abstract.** Results of calculations and experiments on torsion of plates from isotropic and transversely isotropic with lowered resistance to creep deformation in the thickness direction of the alloys are resulted. The values of numerical modelling for the plates of various thickness, belonging to the class of rigid and flexible plates on theory of pure bending and using finite element package ANSYS are compared. Delay of process of deformation in a sign-variable saddle surface in a problem of plate torsion is received in view of the anisotropy compared with the calculation in an isotropic statement. Depending on the thickness and material constants of this delay creep may be from 10 to 50 %.

Пластины различной толщины находят широкое применение в авиа- и судостроении, при изгибе находятся в условиях неоднородного напряженного состояния и проверка применимости теорий ползучести, а также различных гипотез упрощающих моделирование формообразования представляет важную задачу. В зависимости от отношения размеров в плоскости пластины к ее толщине и прогибу учитывают изгибные и/или мембранные напряжения. Неоднородность напряженно-деформированного состояния при ползучести по толщине пластины накладывает дополнительные трудности моделирования, так как обычно экспериментальные константы ползучести хорошо описывают поведение материала в некотором диапазоне напряжений.

Листовой материал заготовок часто обладает одинаковыми свойствами в плоскости листа, но может иметь отличные свойства по нормали к листу и под 45° к нормали листа. Анизотропия такого рода может быть обусловлена прокаткой исходной заготовки. Для описания трансверсально-изотропного материала используется модель анизотропной ползучести Хилла, развитая в работах Соснина [1] согласно которой при произвольном напряженном состоянии процесс ползучести можно описать в виде

$$\eta_{ij} = \partial\Phi/\partial\sigma_{ij}, \quad \Phi = T^{n+1}/(n+1), \quad (1)$$

где  $\eta_{ij} = d\varepsilon_{ij}^c/dt$ ,  $\sigma_{ij}$  – компоненты тензора скоростей деформаций ползучести и напряжений;  $\Phi$  – скалярная потенциальная функция тензора напряжений;  $T^2$  – квадратичная форма напряжений.  $T^2$  для ортотропного несжимаемого материала в системе координат оси которой совмещены с главными осями анизотропии, имеет вид

$$T(\sigma_{ij}) = (A_{11}(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + A_{22}(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + A_{33}(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 2A_{12}\sigma_{12}^2 + 2A_{23}\sigma_{23}^2 + 2A_{31}\sigma_{31}^2)^{\frac{1}{2}},$$

где  $A_{11} = \frac{1}{2} \left( B_{22}^{n+1} + B_{33}^{n+1} - B_{11}^{n+1} \right)$ ,  $2A_{12} = 4B_{12}^{n+1} - A_{11} - A_{22}$ .

Остальные компоненты получаются циклической перестановкой индексов. Константы  $B_{11}$ ,  $B_{22}$ ,  $B_{33}$  – характеристики одномерной ползучести в трех главных

направлениях,  $B_{12}$ ,  $B_{23}$ ,  $B_{31}$  – аналогичные характеристики в трех направлениях вдоль осей в системе координат, полученной поворотом исходной системы координат на  $45^\circ$ . Коэффициенты  $B_{ij}$  определяются экспериментально.

Считается, что направление  $\eta_{33}$  совпадает с нормалью к пластине. В случае трансропного материала (изотропного в плоскости пластины)  $\eta_{11} = \eta_{22}$  и  $\eta_{33}/\eta_{22} = k$ . «Коэффициент анизотропии» по нормали к пластине  $k$  определяется осреднением отношения изменения размера по толщине пластины (т.е. в направлении нормали к листу) к изменению размера по ширине плоского образца при различных степенях осевой деформации из экспериментов на растяжение. Учитывая, что  $\eta_{33}/\eta_{22} = A_{22}/A_{33}$  и  $A_{11} = A_{22}$ , найдем коэффициенты квадратичных форм

$$A_{11} = A_{22} = \frac{k}{k+1} B^{\frac{2}{n+1}}, \quad A_{33} = \frac{1}{k+1} B^{\frac{2}{n+1}}, \quad A_{12} = \frac{k+2}{k+1} B^{\frac{2}{n+1}}, \quad A_{13} = A_{23} = \frac{3}{2} B^{\frac{2}{n+1}}. \quad (2)$$

Применительно к формообразованию в режимах ползучести особый интерес для тестирования представляют задачи кручения пластин, реализуемые экспериментально. Такое кручение пластины внешним скручивающим моментом  $M$  равномерно приложенным вдоль кромок (изгиб в седлообразную поверхность) можно реализовать путем приложения четырех сил, величиной  $2M$  в углах [2]. Предполагается, что полные деформации состоят из упругих деформаций и деформаций ползучести

$$\varepsilon_{kl}^e + \varepsilon_{kl}^c = \varepsilon_{kl} \quad (3)$$

символы «e» и «c» относятся к компонентам упругим и ползучести соответственно.

Для численного расчета используется две модели [3]:

Модель 1. Предполагается, что реализуется плоское напряженно-деформированное состояние и прогиб сопоставим с толщиной. Мембранными усилиями в срединной поверхности пренебрегаем. Решается задача кручения пластины внешним скручивающим моментом  $M$  равномерно приложенным вдоль кромок.

Для расчета нагрузки и оценки поведения конструкции в целом можно использовать также метод характеристической точки [4]. При чистом изгибе в такой точке напряжения остаются близкие к постоянной величине при упругом деформировании и при деформировании в условиях ползучести.

При кручении пластины постоянным моментом  $M_{12}$  в предположении установившейся ползучести скорость кривизны и напряжения

$$\dot{\chi}_{12} = \frac{B}{2} \left( 2 \frac{k+2}{k+1} \right)^{\frac{n+1}{2}} \left( \frac{2^{\mu+1}(\mu+2) \cdot M_{12}}{h^{\mu+2}} \right)^n, \quad \tau_{12} = \left( \frac{2}{B} \left( 2 \frac{k+2}{k+1} \right)^{-\frac{n+1}{2}} \dot{\chi}_{12} z \right)^\mu, \quad \mu = \frac{1}{n}. \quad (4)$$

Из (4) касательное напряжение как для изотропного, так и трансропного материала  $\tau_{12} = \frac{2^{\mu+1}(\mu+2)}{h^{\mu+2}} M_{12} z^\mu$ . Для определения месторасположения  $\bar{z}$  характеристической точки приравняем напряжения при упругом деформировании и в предположении установившейся ползучести

$$\bar{\tau}_{12} = \frac{12}{h^3} M_{12} \bar{z} = \frac{2^{\mu+1}(\mu+2)}{h^{\mu+2}} M_{12} \bar{z}^\mu.$$

Откуда получаем  $\bar{z} = \left( \frac{2^{\mu-1}(\mu+2)}{3h^{\mu-1}} \right)^{1/(1-\mu)}$ , при больших значениях  $n$  величина  $\bar{z} \rightarrow h/3$ .

Модель 2. Решается задача кручения пластины четырьмя силами, величиной  $2M$ , приложенными в углах. Для расчета используется 8-и узловой объемный конечный элемент Solid45 с тремя степенями свободы программного комплекса ANSYS. Расчет осуществлялся в геометрически линейной и нелинейной постановках.

Вектор перемещений внутри элемента в любой точке аппроксимируются в виде  $u = [N]\{u\}$ , где  $[N]$ - функции формы,  $\{u\}$  – набор значений перемещений в узлах и значений дополнительных параметров. Дополнительные параметры предназначены для улучшения аппроксимации перемещений при нелинейном деформировании. Численное моделирование с помощью объемных элементов позволяет оценить, например, влияние касательных напряжений при деформировании толстых пластин.

Метод конечных элементов основан на принципе виртуальной работы, который можно сформулировать в таком виде

$$\int_V d\{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV - \left( d\{u\}^T \{F\} + \int_V d\{u\}^T \{f\} dV + \int_S d\{u\}^T \{p\} dS \right) = 0 \quad (5)$$

Здесь  $\{\varepsilon\}$ ,  $\{\sigma\}$  – вектора деформаций и напряжений,  $\{F\}$ ,  $\{f\}$ ,  $\{p\}$  – вектора сосредоточенных сил, распределенных нагрузок и поверхностных нагрузок соответственно.

Напряжения связаны с упругими деформациями  $\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon^e\}$ ,  $[D]$  – матрица упругости. Для полных деформаций имеем  $\{\varepsilon\} = [L][N]\{u\} = [P]\{u\}$ ,  $[L]$  – дифференциальная матрица. Учитывая (3) или в векторном виде  $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon^e\} + \{\varepsilon^c\}$  (5) переписывается

$$[K]\{u\} = \int_V [P]^T [D] \{\varepsilon^c\} dV + \{R\}, \quad [K] = \int_V [P]^T [D] [P] dV \quad (6)$$

$[K]$  – матрица жесткости,  $\{R\} = \{F\} + \int_V [N]^T \{f\} dV + \int_S [N]^T \{p\} dS$  – вектор сил, обусловленных внешними нагрузками.

В скоростной форме (6) можно переписать

$$\{\dot{u}\} = [K]^{-1} \left( \int_V [P]^T [D] \{\dot{\varepsilon}^c\} dV + \{\dot{R}\} \right), \quad (7)$$

$\{\dot{\varepsilon}^c\} = B \left( \sqrt{\{\sigma\}^T [A] \{\sigma\}} \right)^{n-1} [A] \{\sigma\}$  – вектор скоростей деформаций ползучести, где матрица

$$[A] = B^{-\frac{2}{n+1}} \begin{bmatrix} A_{22} + A_{33} & -A_{33} & -A_{22} & 0 & 0 & 0 \\ -A_{33} & A_{11} + A_{33} & -A_{11} & 0 & 0 & 0 \\ -A_{22} & -A_{11} & A_{11} + A_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2A_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2A_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2A_{23} \end{bmatrix}$$

Коэффициенты этой матрицы в случае трансверсально-изотропного при ползучести материала определяются согласно (2).

Напряжения  $\{\sigma\}$  и деформации  $\{\varepsilon\}$  находятся в интеграционных точках, объемные интегралы в (4), (5) вычисляются с использованием квадратур Гаусса с весовыми коэффициентами соответствующими этим точкам [5]. Для решения (7) используется неявная схема численного интегрирования по времени с начальным условием  $\{u_0\} = [K]^{-1}\{R_0\}$ , поскольку  $\{\varepsilon^c\} = 0$  при  $t = 0$ . Представленная схема расчета справедлива для решения задачи в геометрически линейной постановке [3].

В случае геометрически нелинейной постановки матрицы элементов и векторы нагрузки получают с использованием модифицированного вариационного принципа Лагранжа. Для уточнения перемещений  $\{u\}$  на каждом временном шаге используется процедура Ньютона-Рафсона [5]. Получаемая при этом матрица касательной жесткости (6) преобразуется к виду  $[K] = \int_V [P]^T [D] [P] dV + [S]$ , где  $[S]$  геометрическая матрица или матрица текущих напряжений Коши,  $[P]$  – матрица соотношений «деформации-перемещения» для текущей геометрии, т.е. для деформированного состояния. Матрицу  $[P]$  можно представить в виде  $[P] = [P_0] + [P_1(\{u\})]$ , где  $[P_0]$  – матрица, определяющая малые деформации,  $[P_1(\{u\})]$  – матрица зависит от перемещений  $\{u\}$ .

Кручение пластины из изотропного сплава ВТ-20 при  $T=750^\circ\text{C}$ . На рис.1 изображена пластина толщины 25 мм, поверхность пластины после деформирования имеет линейчатый характер. Это свидетельствует о том, что деформации срединной поверхности незначительны и для расчета можно воспользоваться моделью 1.

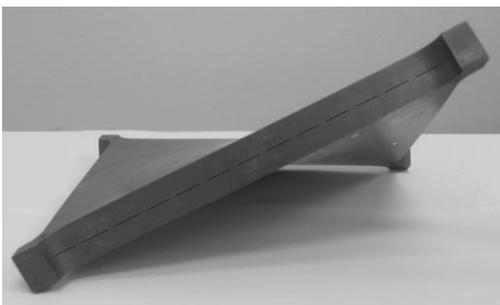


Рис.1

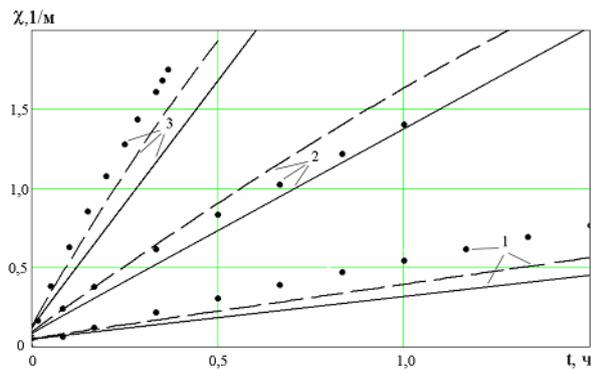


Рис.2

Численное моделирование выполнено для пластин с размерами  $200 \times 200 \text{ мм}$ ,  $h=25 \text{ мм}$ , с аппроксимационными коэффициентами для степенной зависимости скорости деформации ползучести на установившейся стадии  $n=2,5$ ,  $B=8,89 \cdot 10^{-10} (\text{МПа}/\text{м}^2)^{-n \cdot \text{с}^{-1}}$ , при  $k=1$  [6].

Рис.2. Точки - экспериментальные значения кривизны вдоль диагонали при кручении силами  $F=2\text{М}$ , приложенными в углах; сплошные линии – расчет методом 1; штриховые линии – расчет методом 2 в геометрически нелинейной постановке. Линии 1, 2, 3 соответствуют крутящему моменту  $M=1284; 2453; 3422 \text{ Н}\cdot\text{м}/\text{м}$ , интенсивность напряжений в характеристической точке соответственно  $\bar{\sigma}_i = \sqrt{3}\bar{\tau}_{12} = 14,72; 27,68; 39,23 \text{ МПа}$ . Кривизна полученная методами 1 и 2 отличается на 5-10%. Это отличие объясняется тем, что эквивалентность задач

кручения силами, проложенными в углах и моментом равномерно распределенным вдоль кромок в условиях ползучести для достаточно толстых пластин можно считать приближенной, поскольку краевой эффект в условиях ползучести затухает медленнее, чем при упругом деформировании.

Кручение пластины из трансверсально-изотропного сплава 1163Т при  $T=400^{\circ}\text{C}$ .

На рис. 3 изображены диаграммы ползучести и их аппроксимация на установившейся стадии при растяжении образцов вырезанных из плиты толщиной 12мм из сплава 1163Т в направлении проката и поперек при  $T=400^{\circ}\text{C}$ . На рис.4 для тех же диаграмм ползучести зависимость « $\ln(\dot{\epsilon}^c) \sim \ln(\sigma)$ » по которой определяются константы ползучести для (1). Получены аппроксимационные коэффициенты  $n=7$ ,  $B=6,57 \cdot 10^{-16} (\text{МПа}/\text{м}^2)^{-n} \text{с}^{-1}$ ,  $k=2,5$ .

На рис.5 пластина из сплава 1163Т после 4 ч эксперимента,  $F=2M=760\text{Н}$ . Размеры пластин  $180 \times 180\text{мм}$ ,  $h=10,4\text{мм}$ . На рис.6. точки 1, 2 - экспериментальные значения кривизны при кручении силами  $F=2M=760$ ;  $900\text{Н}$  соответственно; линии 3-6- расчет методом 2; 7-10 расчет методом 1. Линии 4, 8 расчет при  $k=1$ , линии 3, 7 при  $k=2,5$  для  $F=2M=760\text{Н}$ . Линии 6,10 расчет при  $k=1$ , линии 5, 9 при  $k=2,5$  для  $F=2M=900\text{Н}$ . На графиках видно, что значения кривизны, полученные методами 1 и 2 совпадает до значений порядка  $0,6-0,8\text{ 1/м}$ . Экспериментальные значения кривизны на этом участке выше расчетных. Возможная причина – более интенсивный процесс деформирования, характеризующийся высоким уровнем напряжений при ползучести в начале деформирования, при этом аппроксимационные коэффициенты согласно рис.4 хорошо описывают поведение материала в диапазоне  $20 \text{ ГПа} < \sigma_i < 30 \text{ ГПа}$ .

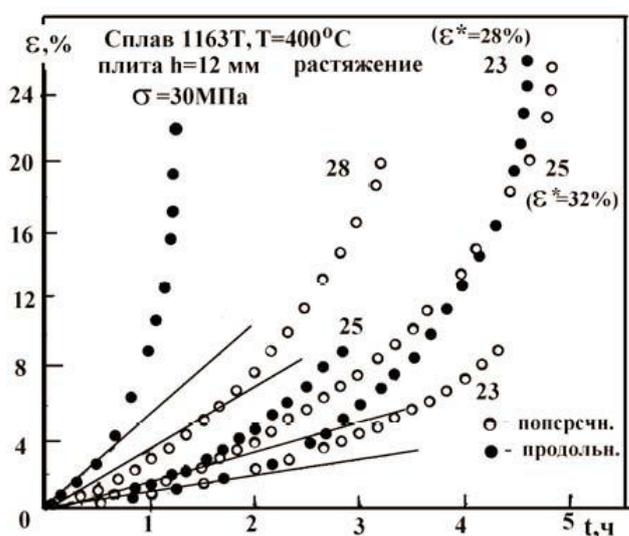


Рис.3

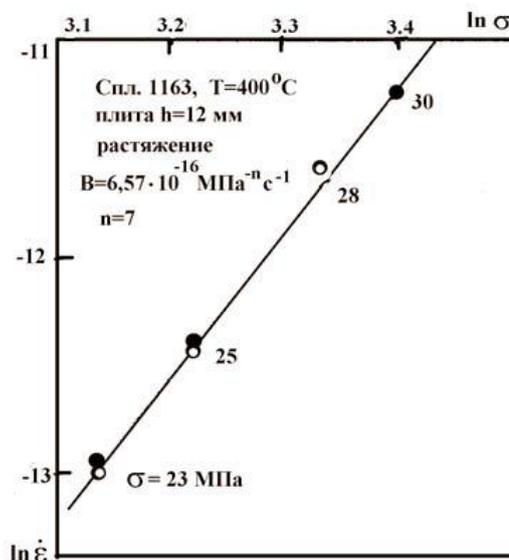


Рис.4



Рис.5

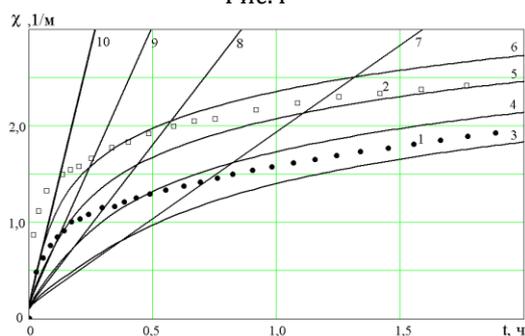


Рис.6

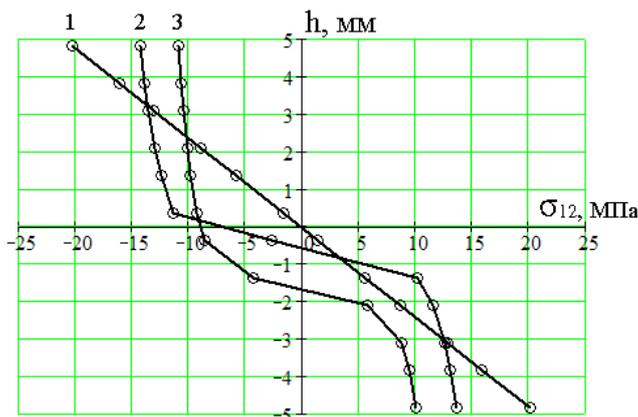


Рис.7

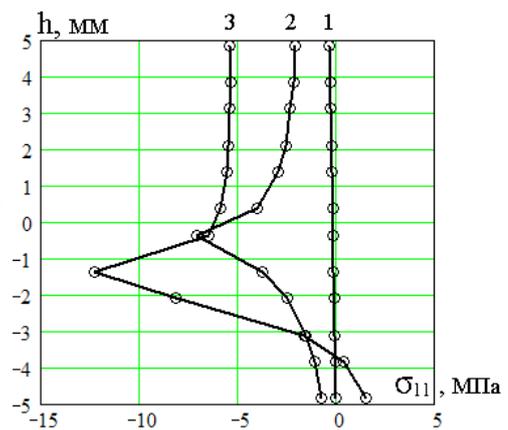


Рис.8

На рис.7 и 8 изображены зависимости напряжений  $\sigma_{12}$ ,  $\sigma_{11} = \sigma_{22}$  по толщине пластины в точке на диагонали  $x_1 = x_2 = 35$  мм для  $F=2M=760$ Н. Линии 1, 2, 3 – соответствуют  $t=0, 900, 7200$  сек.

Влияние анизотропии по нормали, полученное в предположении чистого изгиба при плоском напряженном состоянии дает замедление деформирования (величины кривизны) порядка 45%, с увеличением прогиба и соответственно увеличением мембранных деформаций это замедление уменьшается и составляет 15-20%. Расчет в предположении чистого изгиба дает верхнюю оценку возможного влияния транстропии при ползучести.

Оценить это влияние можно по формуле (5), составив соотношение скорости кривизны  $\dot{\chi}_{12} = \dot{\chi}_{12}(k)$  для транстропного и изотропного материала

$$\lambda = \frac{\dot{\chi}_{12}(k)}{\dot{\chi}_{12}(1)} = \left( \frac{2k+2}{3k+1} \right)^{\frac{n+1}{2}}, \text{ для сплава 1163Т при } k=2,5 \text{ имеем } \lambda = 0,54, \text{ т.е.}$$

замедление деформирование на 46%.

### Литература

1. Соснин О. В. Об анизотропной ползучести материалов // ПМТФ., 1965. № 6. С. 99-104.
2. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука. 1966. С.547.
3. Банщикова И. А. Расчет пластин двойной кривизны из анизотропных сплавов при ползучести // Вестн. Нижегород. ун-та им. Н. И. Лобачевского. Н. Новгород: Изд-во Нижегород. гос. ун-та, 2011. № 4. ч 4. С.1385-1387.
4. Горев Б.В. К оценке ползучести и длительной прочности элементов конструкций по методу характеристических параметров. Сообщений 1 // Проблемы прочности, 1979, № 4, - С.30-36.
5. ANSYS Release 9.0 Documentation.
6. Горев, Б.В. Метод интегральных характеристик для расчетов изгиба элементов конструкций [Текст] / Б.В. Горев, В.А. Панамарев // Научно-технические ведомости СПбГПУ. Серия «Физико-математические науки». 2013. Вып. 3(177). С. 268-273.

**ОСРЕДНЕННЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ МИКРОНЕОДНОРОДНОЙ  
СРЕДЫ ПРИ НЕСТАНДАРТНЫХ УСЛОВИЯХ КОНТАКТА СЛОЕВ**  
*HOMOGENIZED CONSTITUTIVE RELATIONS FOR MICRO-INHOMOGENEOUS  
MEDIA WITH NONSTANDARD INTERLAYER TRANSMISSION CONDITIONS*

Ю. А. Боган - д.ф.-м.н., с. н.с.,  
Институт Гидродинамики СО РАН им. М. А. Лаврентьева  
[bogan@hydro.nsc.ru](mailto:bogan@hydro.nsc.ru)

**Abstract.** In recent years the deformation of chiral bodies has been the subject of intensive study. Moreover, the stress tensor can be non-symmetric. In studying composite- and nano-materials ideal contact of constituents is usually assumed. On the other hand, presence of weak connection of layers in modern composite- and nano-materials essentially influences on its elastic behaviour. It is known, that the chiral effects cannot be described by the classical continuum mechanics. The classical method of homogenization belonging to the academician N. S. Bachvalov is used below to deriving constitutive relations for an elastic micromorphic plate consisting from thin parallel layers with weak interlayer connection. It is shown, that smallness of some parameters entering into transmission conditions makes a considered boundary value problem singularly perturbed and leads to loss of its ellipticity and changes the type of a limiting problem.

**Абстракт.** В последние годы проблемы деформации хиральных тел являются предметом интенсивного изучения. В частности, тензор напряжений может быть несимметричным. При изучении композитных и наноматериалов обычно предполагается идеальный контакт составляющих. С другой стороны, присутствие слабого взаимодействия слоев существенно влияет на его упругое поведение. Известно, что хиральные эффекты нельзя описать классической механикой сплошной среды. Классический метод осреднения академика Н. С. Бахвалова использован ниже для вывода определяющих соотношений для упругой микроморфной пластины, состоящей из тонких слабо взаимодействующих слоев. Показано, что малость некоторых параметров, входящих в условия сопряжения, делает изучаемую краевую задачу сингулярно возмущенной, потере эллиптичности предельной и меняет ее тип.

**1. Введение.** Для современных и наноматериалов при их упаковке в нанотрубки существенно наличие слабой связи между слоями. Кроме того, для тонких слоев, например, графена, существенно наличие отсутствие симметрии тензора напряжений и наличие микронапряжений. Здесь построены осредненные соотношения для слоистого композита, составленного из подобного рода слоев, характеризуемой некоторыми положительными коэффициентами «вязкости». При обращении некоторых коэффициентов вязкости в нуль, т. е. при наличии сингулярного возмущения, исходная краевая задача теряет свойство эллиптичности и меняет тип, приводя к ряду новых эффектов.

**2. Основные соотношения.** В качестве исходной ниже используется модель линейно упругого тела с несимметричным тензором напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= b_{11}\varepsilon_{11} + b_{12}\varepsilon_{22}, & \sigma_{22} &= b_{12}\varepsilon_{11} + b_{22}\varepsilon_{22}, \\ \sigma_{12} &= b_{77}\varepsilon_{12} + b_{78}\varepsilon_{21}, & \sigma_{21} &= b_{78}\varepsilon_{12} + b_{88}\varepsilon_{21}, \\ m_{13} &= b_{66}\frac{\partial u_3}{\partial x_1}, & m_{23} &= b_{44}\frac{\partial u_3}{\partial x_2}, & \varepsilon_{\beta\alpha} &= \frac{\partial u_\beta}{\partial x_\alpha} + \varepsilon_{\beta\alpha 3}u_3. \end{aligned}$$

Здесь  $\varepsilon_{\beta\alpha 3}$  – тензор Леви-Чивита,  $\varepsilon_{\alpha\beta}$ ,  $\alpha, \beta = 1, 2$  -- деформации,  $u_1(x_1, x_2), u_2(x_1, x_2)$  -- перемещения,  $m_{13}, m_{23}$  -- моментные напряжения, а  $u_3(x_1, x_2)$

-- функция микронапряжений. Компоненты усилий и микронапряжений даются формулами

$$t_\alpha = \sigma_{\beta\alpha} n_\beta, \quad m = m_{\alpha 3} n_\alpha, \quad n_\alpha = \cos(n, x_\alpha), \quad \alpha, \beta = 1, 2.$$

По повторяющимся индексам суммирование от 1 до 2,  $\mathbf{n}$  - вектор внешней нормали к границе. Необходимые и достаточные условия положительности потенциальной энергии деформации имеют вид:

$$b_{11}, b_{22} > 0, \quad b_{11}b_{22} - b_{12}^2 > 0, \quad b_{77}b_{88} - b_{78}^2 > 0, \\ b_{77}, b_{88} > 0, \quad b_{66}, b_{44} > 0, \quad \kappa = b_{77} + b_{88} - 2b_{78} > 0.$$

Систему уравнений равновесия можно записать так:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} (b_{11} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + b_{12} \frac{\partial u_2}{\partial x_2}) + \frac{\partial}{\partial x_2} (b_{78} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + b_{88} \frac{\partial u_1}{\partial x_2}) - k_1 \frac{\partial u_3}{\partial x_2} &= f_1, \\ \frac{\partial}{\partial x_1} (b_{77} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + b_{78} \frac{\partial u_1}{\partial x_2}) + \frac{\partial}{\partial x_2} (b_{12} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + b_{22} \frac{\partial u_2}{\partial x_2}) + k_2 \frac{\partial u_3}{\partial x_1} &= f_2, \\ b_{66} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + b_{44} \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} + k_2 \frac{\partial u_2}{\partial x_1} + k_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \kappa u_3 &= f_3. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $f_1, f_2, f_3$  -- вектор массовых сил, а  $k_1 = b_{78} - b_{88}, k_2 = b_{78} - b_{77}$ .

**3. Процедура осреднения.** Назовем (условно) рассматриваемую задачу задачей с вязким трением на границе слоев. Предположим, что ячейка периодичности  $(-1/2, 1/2)$  состоит, вообще говоря, из двух материалов, при этом

$$b_{ij} = b_{ij}^1, y \in (-1/2, 0), b_{ij} = b_{ij}^2, y \in (0, 1/2), i, j = 1, 2, 4, 6, 7, 8.$$

Здесь  $y = x_2/\varepsilon$  -- быстрая переменная. Слои располагаются ортогонально оси  $x_1$ .

Примем условия сопряжения при  $y = 0$  в виде

$$\sigma_{21}^\varepsilon = b_{78} \frac{\partial u_2^\varepsilon}{\partial x_1} + b_{88} \frac{\partial u_1^\varepsilon}{\partial x_2} - k_1 u_2^\varepsilon|_{y=0} = \frac{\alpha}{\varepsilon} [u_1^\varepsilon], \quad (2)$$

$$\sigma_{22}^\varepsilon = b_{12} \frac{\partial u_1^\varepsilon}{\partial x_1} + b_{22} \frac{\partial u_2^\varepsilon}{\partial x_2}|_{y=0} = \frac{\beta}{\varepsilon} [u_2^\varepsilon], \quad (3)$$

$$m_{23}^\varepsilon = b_{44} \frac{\partial u_3^\varepsilon}{\partial x_2}|_{y=0} = \frac{\gamma}{\varepsilon} [u_3^\varepsilon]. \quad (4)$$

Здесь коэффициенты  $\alpha, \beta, \gamma$  положительны; в каком-то смысле их можно назвать коэффициентами вязкости. Значок  $\varepsilon$  наверху означает зависимость функции от параметра;  $[u_k^\varepsilon], k = 1, 2, 3$  - скачки функций при переходе через границу раздела слоев. Условия сопряжения (2)-(4) допускают несколько механических интерпретаций; например, их можно моделировать как заполнение тонкой прослойки малоподатливым на растяжение и сдвиг материалом. Произведем в системе уравнений (1) замену оператора дифференцирования  $\partial/\partial x_2$  на  $\partial/\partial x_2 + \varepsilon^{-1} \partial/\partial y$ . Ищем решение системы уравнений (1) в виде ряда по степеням  $\varepsilon$ :

$$u_k = \sum_{n=0}^{\infty} u_k^n(x_1, x_2, y), \quad k = 1, 2, 3.$$

Для построения осредненных соотношений достаточно знать только три члена этого ряда; ими и ограничимся. Опустим достаточно стандартные детали вычислений и выпишем окончательный результат. Отметим, что нулевой член разложения не зависит от  $y$  и приводит к осредненной системе уравнений, выписанной ниже.

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left( \langle b_{11} - \frac{b_{12}^2}{b_{22}} \rangle \frac{\partial u_1^0}{\partial x_1} + \frac{\beta \lambda_{12}}{1 + \beta \lambda_2} \left( \frac{\partial u_2^0}{\partial x_2} + \lambda_{12} \frac{\partial u_1^0}{\partial x_1} \right) \right) + \quad (5)$$

$$\frac{\alpha}{1 + \alpha \lambda_8} \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial u_1^0}{\partial x_2} + \lambda_{78} \frac{\partial u_2^0}{\partial x_1} - \gamma_1 u_3^0 \right) = f_1,$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left( \langle b_{77} - \frac{b_{78}^2}{b_{88}} \rangle + \frac{\alpha}{1 + \alpha \lambda_8} \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial u_1^0}{\partial x_2} + \lambda_{78} \frac{\partial u_2^0}{\partial x_1} - \gamma_1 u_3^0 \right) \right) + \quad (6)$$

$$\begin{aligned}
& \langle \frac{b_{78}}{b_{88}} - k_2 \rangle \frac{\partial u_3^0}{\partial x_1} + \frac{\beta}{1 + \beta \lambda_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial u_2^0}{\partial x_2} + \lambda_{12} \frac{\partial u_1^0}{\partial x_1} \right) = f_2, \\
& \frac{\gamma}{1 + \gamma \lambda_4} \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_2^2} + \langle b_{66} \rangle \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_1^2} - \langle k_1 \frac{b_{78}}{b_{88}} \rangle \frac{\partial u_2^0}{\partial x_1} + \langle \frac{k_1^2}{b_{88}} - \kappa \rangle u_3^0 + \\
& \langle \frac{b_1}{b_{88}} \rangle \frac{\alpha}{1 + \alpha \lambda_8} \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{\partial u_1^0}{\partial x_2} + \lambda_{78} \frac{\partial u_2^0}{\partial x_1} - \gamma_1 u_3^0 \right) = f_3.
\end{aligned} \tag{7}$$

Здесь

$$\lambda_{12} = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{b_{12}}{b_{22}} ds, \quad \lambda_2 = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{b_{22}} ds, \quad \gamma_1 = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{k_1}{b_{44}} ds.$$

$$\lambda_{78} = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{b_{78}}{b_{88}} ds, \quad \lambda_8 = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{b_{88}} ds, \quad \gamma_1 = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{k_1}{b_{88}} ds.$$

При этом

$$\langle G \rangle = \int_{-1/2}^{1/2} G(s) ds.$$

**4. Пример.** Рассмотрим в качестве примера случай, когда  $\alpha = \gamma = 0$ . Тогда предельная система уравнений (5)-(7) упрощается до системы

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \langle b_{11} - \frac{b_{12}^2}{b_{22}} \rangle \frac{\partial u_1^0}{\partial x_1} + \frac{\beta \lambda_{12}}{1 + \beta \lambda_2} \left( \frac{\partial u_2^0}{\partial x_2} + \lambda_{12} \frac{\partial u_1^0}{\partial x_1} \right) \right) = f_1, \\
& \langle b_{77} - \frac{b_{78}^2}{b_{88}} \rangle \frac{\partial^2 u_2^0}{\partial x_1^2} + \frac{\beta}{1 + \beta \lambda_2} \left( \frac{\partial^2 u_2^0}{\partial x_2^2} + \lambda_{12} \frac{\partial^2 u_1^0}{\partial x_1 \partial x_2} \right) = f_2, \\
& \langle b_{66} \rangle \frac{\partial^2 u_3^0}{\partial x_1^2} - \langle k_1 \frac{b_{78}}{b_{88}} \rangle \frac{\partial u_2^0}{\partial x_1} + \langle \frac{k_1^2}{b_{88}} - \kappa \rangle u_3^0 = f_3.
\end{aligned}$$

Последняя система уравнений имеет составной тип и ее характеристическая форма неотрицательна. В частности, с механической точки зрения это означает, что жесткость конструкции в направлении оси  $x_2$  бесконечна.

### Литература

1. Salvetat J.-P., Desamort G., Gauthier C., Poulin P. Mechanical properties of individual nanotubes and composites// Lecture Notes in Physics.- 2006.- V. 677.- p. 439-493.
2. Бахвалов Н. С. , Панасенко Г. П. Осреднение процессов в периодических средах. М., Наука, 1984.
3. Iesan D. // The plane micropolar strain of orthotropic elastic solids. Arch. Mech., 25, 1973, 547-561.
4. Ciarletta M., Iesan D. Non-Classical Elastic Solids. Longman Scientific., Harlow, 1993.
5. Боган Ю. А. Об анизотропии многослойных нанотрубок и высококомодульных волокон. // Сиб. Ж. инд. Мат., Т. 14, 2011, 40-45.
6. Гольдштейн Р. В., Городцов В. А., Лисовенко Д. С. К описанию многослойных нанотрубок в рамках моделей цилиндрически анизотропной упругости// Физ. Мезомеханика. Т. 12, № 5, 2009, С. 5-14.

# МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ БОЛЬШИХ УПРУГОПОЛЗУЧЕПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ

## *A MATHEMATICAL THEORY OF FINITE ELASTIC-CREEP-PLASTIC STRAIN*

**А.А. Буренин** - чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н., проф.,

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт  
машиноведения и металлургии Дальневосточного отделения РАН, [burenin@dvo.ru](mailto:burenin@dvo.ru)

**Е.В. Мурашкин** - к.ф.-м.н.,

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем  
механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, [murashkin@ipmnet.ru](mailto:murashkin@ipmnet.ru),  
[evmurashkin@gmail.com](mailto:evmurashkin@gmail.com)

**Abstract.** The present study is devoted to the geometric and kinematic description of the motion of an elastic-creep-plastic body undergoing finite deformation is considered. In some circumstances, elastic-plastic deformation occurs in which both components of strain are finite. Such situations fall outside the scope of classical plasticity theory which assumes either infinitesimal strains or plastic-rigid theory for large strains. The present theory modifies the kinematics to include finite elastic and plastic strain components. The present study generalizes a theory of finite ideal elastic-plastic strain to permit nonlinear viscous deformation. In this model the plastic strain rate tensor is proposed as a source of irreversible strain in the plastic flow area. The creep strain rate tensor should be chosen as a source of irreversible strains in the elastic and unstressed areas. Such source tensor can be defined through certain creep law, such as power law.

Необходимость повышения точности математического описания процессов происходящих при технологической обработке и эксплуатации металлоизделий вынуждает учитывать упругие свойства материалов на всех стадиях жизненного цикла изделия. Рассмотрение задач в классических моделях малых деформаций невозможно, когда относительное изменение формы рассматриваемого тела велико. Одной из таких характерных задач, где нельзя обойтись без применения модели больших деформаций, является задача о моделировании процессов в окрестности микропоры в металле, происходящих под действием интенсивного давления.

Актуальность данной задачи обусловлена обнаруженным на опыте эффектом существенного повышения эксплуатационных характеристик металла при интенсивном всестороннем сжатии образцов [1] "залечивания" микродефектов сплошности.

Теория пластического течения подразумевает разделение полных деформаций на обратимую и необратимую составляющие. Из-за невозможности опытного измерения таких составляющих в отличие от полных деформаций, данное разделение оказывается произволом конструктора математической модели. Именно такой произвол является главной причиной существующего разнообразия в построениях моделей больших упругопластических деформаций. Отметим в этой связи лишь некоторые работы отечественных авторов [2-8].

Впервые геометрически корректная математическая модель больших упругопластических деформаций была построена в 1969 году [9], в которой разделение деформаций на обратимые и необратимые было связано с предположении о соответствии каждому деформированному состоянию единственного состояния разгрузки, когда обратимые деформации отсутствуют во всем продеформированном теле. Добиться этого, оставаясь в рамках упругопластической модели, возможно [6] предельным разделением тела на

части и снятия усилий с границ таких бесконечно малых элементов тела. В то же время такой подход остается доминирующим при построении моделей больших упругопластических деформаций [2, 6].

Другой геометрически и термодинамически непротиворечивый подход к построению модели предложил В.П.Мясников [4], в котором в соответствии с формализмом неравновесной термодинамики определение обратимых и необратимых деформаций следовало из формулировки для них дифференциальных уравнений переноса. Вариант конкретизации источников и потоковых слагаемых в уравнении изменения (переноса) обратимых и необратимых деформаций был предложен в [5]. Рассматривался только случай идеальной пластичности. Обобщения на случай учета вязкости при пластическом течении были даны в [8]. Реологические эффекты в других моделях больших упругопластических деформаций рассматривались в [2, 7, 10].

В настоящем сообщении проведено обобщение модели [5] на случай учета нелинейной вязкости деформируемой среды, как в случае ее пластического течения, так и при разгрузке, и при деформировании, предвещающем течение. Диссипативный потенциал для источника деформаций ползучести выберем в форме степенного закона [11, 12]. Начало пластического течения свяжем с выполнением в некоторой области условия пластичности Мизеса [13], которое в условиях принятия принципа максимума диссипации энергии будет пластическим потенциалом.

Полагаем, что наряду с температурой (энтропией) параметрами состояния деформируемого тела являются обратимые и необратимые деформации. Компоненты последних в прямоугольной системе пространственных координат Эйлера обозначим через  $e_{ij}$  и  $p_{ij}$  соответственно. Постулируем уравнения изменения (переноса) для данных составляющих полных деформаций в форме

$$\begin{aligned} \frac{De_{ij}}{Dt} &= \varepsilon_{ij} - \gamma_{ij} - \frac{1}{2}((\varepsilon_{ik} - \gamma_{ik} + z_{ik})e_{kj} + \\ &+ e_{ik}(\gamma_{kj} - \varepsilon_{kj} - z_{kj})), \\ \frac{Dp_{ij}}{Dt} &= \gamma_{ij} - p_{ik}\gamma_{kj} - \gamma_{ik}p_{kj}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь обозначено:

$$\begin{aligned} \frac{Dn_{ij}}{Dt} &= \frac{dn_{ij}}{dt} - r_{ik}n_{kj} + n_{ik}r_{kj}, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}), \\ r_{ij} &= w_{ij} + z_{ij}(e_{ij}, \varepsilon_{ij}), \quad w_{ij} = \frac{1}{2}(v_{i,j} - v_{j,i}), \\ z_{ij} &= A^{-1}\{(\varepsilon_{ik}e_{kj} - e_{ik}\varepsilon_{kj})B^2 + B(\varepsilon_{ik}e_{km}e_{mj} - e_{ik}e_{km}\varepsilon_{mj}) + \\ &+ e_{ik}\varepsilon_{km}e_{mn}e_{nj} - e_{ik}e_{km}\varepsilon_{mn}e_{nj}\}, \quad z_{ij} = -z_{ji}, \\ A &= 8 - 8E_1 + 3E_1^2 - E_2 - \frac{1}{3}E_1^3 + \frac{1}{3}E_3, \quad B = 2 - E_1, \\ E_1 &= e_{jj}, \quad E_2 = e_{jm}e_{mj}, \quad E_3 = e_{jm}e_{mn}e_{nj}. \end{aligned} \quad (2)$$

В записи уравнений переноса для тензоров  $e_{ij}$  и  $p_{ij}$  наряду с естественными требованиями их симметрии принято условие обращения тензора  $p_{ij}$  в ноль при отсутствии источника ( $\gamma_{ij} = 0$ ) в изменении данного тензора; согласно второму равенству из (1) компоненты  $p_{ij}$  тензора необратимых деформаций изменяются в таком случае также, как если бы тело (или система координат) поворачивалась как жесткое целое ( $\frac{Dp_{ij}}{Dt} = 0$ ). Данное условие заставляет [5, 14] ввести объективную производную специального вида (в (2) она записана для

произвольного тензора  $n_{ij}$ ). При этом источником в уравнениях изменения компонент  $e_{ij}$  тензора обратимых деформаций оказывается тензор с компонентами  $\varepsilon_{ij} - \gamma_{ij}$ . Если бы в тензоре вращения  $r_{ij}$  отсутствовала нелинейная добавка  $r_{ij} = w_{ij}$  ( $z_{ij} = 0$ ), то введенная объективная производная по времени совпадала бы с производной Яумана [15, 16]. Таким образом, требование геометрической корректности при формулировке уравнений изменения тензоров обратимых  $e_{ij}$  и необратимых  $p_{ij}$  деформаций в предположении осуществимости процесса с неизменным тензором необратимых деформаций при  $\gamma_{ij} = 0$  приводит к достаточно простым уравнениям (1). Разделение полных деформаций Альманси  $d_{ij}$  на составляющие следует из (1) и (2) в форме

$$d_{ij} = e_{ij} + p_{ij} - \frac{1}{2} e_{ik} e_{kj} - e_{ik} p_{kj} - p_{ik} e_{kj} + e_{ik} p_{km} e_{mj},$$

$$d_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i} - u_{i,k} u_{k,j})$$
(3)

В (3)  $u_i$  — компоненты вектора перемещений точек деформированной среды. Согласно (3) в качестве тензора обратимых деформаций следовало бы выбрать тензор  $s_{ij} = e_{ij} - \frac{1}{2} e_{ik} e_{kj}$ , так как при  $p_{ij} = 0$  имеем  $d_{ij} = s_{ij}$ . Введение в рассмотрение тензора  $e_{ij}$  вызвано не только относительной простотой в записи для него уравнения переноса (1), но и в простоте записи с таким тензором аналога формулы Мурнагана [14].

Формула Мурнагана в нелинейной теории упругости следует из записи закона сохранения энергии

$$\rho \frac{de}{dt} + q_{j,j} = \sigma_{ij} \varepsilon_{ji}$$
(4)

В (4)  $e$  — плотность распределения внутренней энергии,  $q_j$  — компоненты вектора потока тепла,  $\sigma_{ij}$  — компоненты тензора напряжений Эйлера-Коши. В качестве термодинамического потенциала будем использовать свободную энергию с плотностью распределения  $\Psi = e - sT$ , где  $s$  — плотность распределения энтропии,  $T$  — температура. Примем еще одно допущение о том, что термодинамический потенциал  $\Psi = \Psi(T, e_{ij})$ , то есть не зависит от необратимых деформаций  $p_{ij}$ . Данное положение может быть спорным, но его принятие позволяет получить наиболее простую замкнутую модель деформирования материалов с упругими, вязкими и пластическими свойствами. В условиях принятия данной гипотезы из (4) следует [5, 14]

$$\sigma_{ij} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial W}{\partial e_{ik}} (\delta_{kj} - e_{kj}), \quad W = \rho_0^{-1} \Psi$$
(5)

$$\rho T \frac{ds}{dt} + q_{j,j} = \sigma_{ij} \gamma_{ji}$$
(6)

Таким образом обратимые деформации задают консервативный механизм деформирования: по известным таким деформациям определяются, как и в классической среде Прандтля-Рейса, напряжения, если только упругий потенциал  $W = W(e_{ij})$  определен ( $\rho_0$  — плотность среды в свободном ее состоянии). Диссипативный механизм деформирования задается источником в правой части уравнения баланса энтропии (6), который определяется скоростями  $\gamma_{ij}$  накопления необратимых деформаций. Заметим, что (5) непосредственно переходит в известную в нелинейной теории упругости формулу Мурнагана при отсутствии необратимых деформаций ( $p_{ij} \equiv 0$ )

$$\sigma_{ij} = \frac{\rho}{\rho_0} \frac{\partial W}{\partial d_{ik}} (\delta_{kj} - 2d_{kj}) \quad (7)$$

Далее будет использоваться аналог формулы Мурнагана (5), переписанный для случая несжимаемой среды

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \frac{\partial W}{\partial e_{ik}} (\delta_{kj} - e_{kj}), \text{ при } p_{ij} \neq 0. \quad (8)$$

В качестве упругого потенциала изотропной и несжимаемой среды будем использовать разложение

$$W = W(J_1, J_2) = (\alpha - \mu)J_1 + \alpha J_2 + \beta J_1^2 - \xi J_1 J_2 - \chi J_1^3, \quad (9)$$

$$J_1 = s_{jj}, \quad J_2 = s_{ij}s_{ji}, \quad s_{ij} = e_{ij} - \frac{1}{2}e_{ik}e_{kj}$$

В (9) параметр среды  $\mu$  отождествляется с модулем сдвига,  $\alpha, \beta, \xi, \chi$  — упругие модули более высокого порядка. Поскольку при  $p_{ij} \equiv 0$  инварианты  $J_1, J_2$  совпадают с инвариантами тензора деформаций Альманси  $d_{ij}$ , а первый инвариант  $d_{jj}$  последнего тензора неположителен, второй  $d_{ik}d_{kj}$  неотрицателен, то в (9) выбраны знаки минус с тем, чтобы все упругие постоянные среды были положительными.

Считаем, что вязкие свойства среды проявляются с самого начала процесса деформирования. Соответствующий диссипативный механизм деформирования зададим, введя потенциал  $V = V(\sigma_{ij})$  в форме

$$V(\sigma_{ij}) = B\Sigma^n(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3),$$

$$\Sigma = \sqrt{\frac{3}{2}\{(\sigma_1 - \sigma)^2 + (\sigma_2 - \sigma)^2 + (\sigma_3 - \sigma)^2\}}, \quad (10)$$

$$\sigma = \frac{1}{3}\sigma_{jj} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3).$$

Здесь  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  — главные значения тензора напряжений,  $B, n$  — постоянные материала. Инвариант  $\Sigma$  тензора напряжений с точностью до постоянного множителя совпадает с октаэдрическим напряжением (интенсивностью напряжений). Для источника  $\gamma_{ij}$  в уравнении (1) изменения (переноса) необратимых деформаций, считая последние деформациями ползучести, полагаем

$$\gamma_{ij} = \varepsilon_{ij}^v = \frac{\partial V(\Sigma)}{\partial \sigma_{ij}}. \quad (11)$$

Таким образом  $\gamma_{ij}$  отождествляется с тензором скоростей деформаций ползучести  $\varepsilon_{ij}^v$ , а диссипативный потенциал выбран в форме степенного закона ползучести Нортонa [11, 17]. Очевидно, что выбор закона Нортонa в форме (10) и (11) является только одной из возможностей. Возможен выбор любого иного закона ползучести. Записанные выше соотношения составляют замкнутую математическую модель изотермического деформирования. Конкретизация данной модели с помощью задания потенциалов  $W(e_{ij})$  и  $V(\sigma_{ij})$ , связанная с зависимостями (9) и (10), выбрана в качестве возможной, не запрещающей другие в том числе и усложняющие математическую модель.

Когда напряженное состояние в некоторых точках деформируемой среды достигает поверхности нагружения, диссипативный механизм деформирования в окрестностях таких точек меняется — начинается пластическое течение. С целью конкретизации последующего принимаем, что поверхностью нагружения в пространстве главных напряжений является цилиндрическая поверхность Мизеса с уравнением

$$f(\sigma_{ij}) = \tau_{ij}\tau_{ji} - \frac{8}{3}k^2 = 0, \quad \tau_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma, \quad (12)$$

В (12)  $k$  — постоянная материала (предел текучести). Согласно (12) вязкими свойствами материала в условиях его пластического течения пренебрегается. Если учет таких свойств необходим, то следует соответственно усложнить условия текучести (12) так, как это было сделано, например, в [8] или иным возможным способом. Принимая условия принципа максимума Мизеса [18], формулируем ассоциированный закон пластического течения

$$\gamma_{ij} = \varepsilon_{ij}^p = \lambda \frac{\partial f(\sigma_{ij})}{\partial \sigma_{ij}}, \quad \lambda > 0 \quad (13)$$

В областях пластического течения  $\gamma_{ij}$  отождествляется со скоростями пластических деформаций. Отмечаем, что (12) и (13) задают простейшую конкретную модель течения, которая может при необходимости уточняться. Для того, чтобы учесть влияние вязких свойств на пластическое течение вместо (12) можно, например, использовать условие пластичности в форме, обобщающей условие Треска [19]

$$\max |\sigma_i - \sigma_j| = 2k + 2\eta \max |\varepsilon_m^p| \quad (14)$$

Здесь  $\varepsilon_m^p$  — главные компоненты тензора скоростей пластических деформаций,  $\eta$  — коэффициент вязкости. Также возможно учесть упрочнение среды в процессе ее пластического течения, например заданием поверхности нагружения в форме, предлагаемой в [20]

$$(\tau_{ij} - c p_{ij} - \eta \varepsilon_{ij}^p)(\tau_{ji} - c p_{ji} - \eta \varepsilon_{ji}^p) = \frac{8}{3}k^2 \quad (15)$$

где  $c$  — параметр, характеризующий проявление эффекта Баушингера.

В [21] на примере одиночного дефекта сплошности (микropора, микротрещина) в среде с упругими и пластическими свойствами и допускающей большие деформации было показано, что неучет реологических свойств среды приводит к эффекту "приспосабливаемости" среды к нагрузкам по типу "нагрузка-разгрузка". В таком случае размеры дефекта после каждой разгрузки оказываются одинаковыми, неизменным остается и уровень и распределение остаточных напряжений в окрестности дефекта. Если учитывать вязкость среды только при её пластическом течении [8, 14], то с ростом циклов размеры дефекта будут возрастать, что задает степень роста поврежденности и снижение усталостной прочности. Известен противоположный эффект, когда за счет предварительной квазистатической обработки материала значительным гидростатическим давлением его усталостная прочность возрастает, что объясняется [1] явлением "залечивания" микродефектов в условиях ползучести материала. Таким образом учет реологических свойств материала выводит из парадоксальной ситуации приспособляемости к циклическим нагрузкам по типу "нагрузка - разгрузка". В [22] предпринималась попытка объяснения упрочнения материала при таких нагрузках, когда до стадии пластического течения и при разгрузке свойства материала моделировались тензорно-линейным уравнением вязкоупругости. Оказалось, что действительно на каждом шаге цикла нагружения и разгрузки размеры дефекта уменьшаются, как и уровень остаточных напряжений. Однако, количественная оценка данного эффекта оказалась незначительной. Связываем это с тем, что свойства ползучести материала и релаксации напряжений в нем не могут подчиняться тензорно-линейной связи напряжений со скоростями деформаций [12]. Построенная здесь математическая модель больших деформаций в отличие от используемой в [22]

базируется на нелинейном законе ползучести (10) и (11) и потому предоставляет возможность оценить эффект залечивания микродефектов сплошности.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 12-01-33064 «Развитие моделей и методов механики необратимого деформирования для описания процессов формоизменения материалов с нелинейными теплофизическими и реологическими свойствами»).

### **Литература**

1. Горелов В.И. Исследование влияний высоких давлений на механические характеристики алюминиевых сплавов // Прикл. механика и техн. физика. 1984. № 5. С. 157-158.
2. Левитас В.И. Большие упругопластические деформации материалов при высоком давлении. Киев.: Наукова думка. 1987. 232 с.
3. Быковцев Г.И., Шитиков А.В. Конечные деформации упругопластических сред // Докл. АН СССР. 1990. Т. 311, № 1. С. 59-62.
4. Мясников В.П. Уравнения движения упругопластических материалов при больших деформациях // Вестн. ДВО РАН. 1996. № 4. С. 8-13.
5. Буренин А.А., Быковцев Г.И., Ковтанюк Л.В. Об одной простой модели для упругопластической среды при конечных деформациях.// ДАН 1996.Т. 347, № 2. С.199-201.
6. Чернышов А.Д. Определяющие уравнения для упругопластического тела при конечных деформациях // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2000. № 1. С. 120-128.
7. Роговой А.А. Определяющие соотношения для конечных упруго-неупругих деформаций // Прикл. мех. и техн. физ. 2005. Т. 46, № 5. С. 138-149.
8. Ковтанюк Л.В., Шитиков А.В. О теории больших упругопластических деформаций материалов при учете температурных и реологических эффектов // Вестник ДВО РАН. 2006. № 4. С. 87-93.
9. Lee E.H. Elastic-plastic deformation at finite strains // ASME: J. Appl. Mech. 1969. Vol. 36. Iss. 1. Pp. 1-6.
10. Коробейников С.Н. Нелинейное деформирование твердых тел. Новосибирск: Изд-во СО РАН. 2000. 262 с.
11. Локощенко А.М. Моделирование процесса ползучести и длительной прочности металлов. М.: МГИУ, 2007. 264 с.
12. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
13. Ивлев Д.Д. Теория идеальной пластичности. М.: Наука, 1966. 232 с.
14. Буренин А.А., Ковтанюк Л.В. Упругие эффекты при интенсивном необратимом деформировании. Владивосток: Изд-во ДВГТУ, 2011. 270с.
15. Прагер В. Введение в механику сплошных сред. М.: Изд-во иностр. лит. 1963. 312 с.
16. Коробейников С.Н. Нелинейное деформирование твердых тел. Новосибирск: Изд-во СО РАН. 2000. 262 с.
17. Никитенко А.Ф. Ползучесть и длительная прочность металлических материалов. Новосибирск: НГАСУ, 1997. 278 с.
18. Ивлев Д.Д. Теория идеальной пластичности. М.: Наука. 1966. 232 с.
19. Знаменский В.А., Ивлев Д.Д. Об уравнениях вязкопластического тела при кусочно-линейных потенциалах // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1963. № 6. С. 114-118.
20. Спорыхин А.А. Метод возмущений в задачах устойчивости сложных сред. Воронеж: Из-во ВГУ, 1997. 360 с.

21. Буренин А.А., Ковтанюк Л.В., Полоник М.В. Формирование одномерного поля остаточных напряжений в окрестности цилиндрического дефекта сплошности упругопластической среды // Прикл. математика и механика. 2003. Т. 67, вып. 2. С. 316-325.
22. Буренин А.А., Ковтанюк Л.В., Мурашкин Е.В. Об остаточных напряжениях в окрестности цилиндрического дефекта сплошности вязкоупругопластического материала // Прикл. механика и техн. физика. 2006. Т. 47, № 2. С. 110-119.

**КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ВДАВЛИВАНИЯ КОНУСА В ТОРЕЦ  
КОРОТКОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ**  
*CONTACT PROBLEM INDENTATION CONE IN FRONT SHORT  
CYLINDRICAL SHELL*

**А.М. Долотов** – д.т.н., проф.

Иркутский государственный университет путей сообщения

[amdolotov@mail.ru](mailto:amdolotov@mail.ru)

**Abstract.** Considered structural indentation contact problem of a rigid cylinder in the short end of the cylindrical shell. In the process of loading the contact between the plug and the shell can be transformed from the line of contact to the contact on the surface and back, which determines (except reverse friction force) nonlinearity of the contacting.

Description of stress-strain standing shell must be performed in the framework of the model' Timoshenko-Reissnera, which avoids the appearance of concentrated forces on the boundaries of the contact that occurs when using the Korkhgofo-Lyava model.

The usage of the new normal of the fundamental functions for the solution of shell deformation under model' Timoshenko-Reissnera similar functions of A.N. Krylov used to solve the equations of shell deformation in the framework of the Korkhgofo-Lyava.

Shows the transformation of the contact pressure as a function of pressure sealed working environment.

В современной технике часто рассматривается конструкционная контактная задача (когда учитываются не только местные, но и общие деформации контактирующих тел) вдавливания конуса в торец короткой цилиндрической оболочки. Такая задача возникает при анализе работы уплотнительных соединений, стыковочных узлов, центрирующих устройств, демпфирующих устройств.

В частности, такие конструкции могут быть использованы в двигателестроении, при разработке уплотнительных соединений больших размеров, когда трудно обеспечить плотность контактирования элементов уплотнения из-за их коробления в результате монтажа, термоциклирования [3, 6, 7, 8].

Отметим также, что обычно использование уплотнений «металл-металл» связано с особыми условиями эксплуатации и особыми свойствами рабочей среды. Из-за относительного проскальзывания уплотнительных поверхностей материал оболочки должен быть износостойким, с высокими механическими характеристиками. Такому комплексу разнообразных требований удовлетворяет малое число материалов, но и среди них выделяются высокопрочные высоколегированные матренично-старяющиеся стали, использование которых позволяет выполнить оболочку особо тонкостенной, что и определяет постановку задач, рассмотренных в статье.

Схематически процесс контактирования показан на рис. 1. Жесткий конус силой  $F_0$  вдавливается в торец короткой цилиндрической оболочки. Первоначальный контакт конуса и оболочки осуществляется по линии (рис. 1, а), в ходе дальнейшего нагружения оболочка деформируется (рис. 1, б), при этом можно ожидать, что при дальнейшем росте силы  $F_0$  контакт из линейного перейдет в контакт по поверхности (рис. 1, в), ширину которой обозначим  $\delta$ .

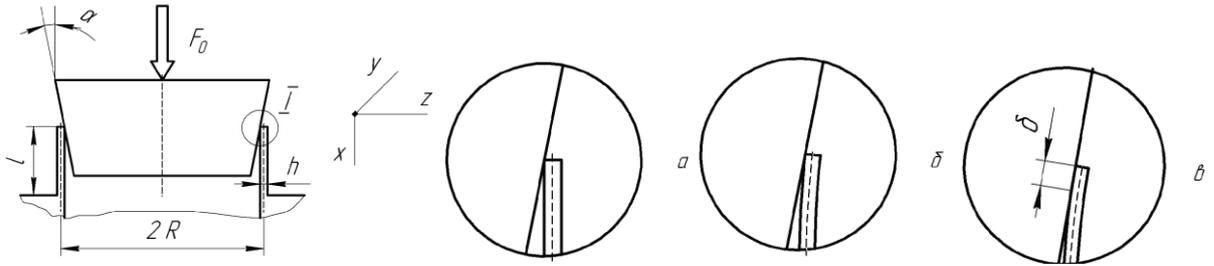


Рис. 1 Расчетная схема вдавливания конуса в оболочечный элемент

Оболочку разбиваем на две зоны: зону контактирования с затвором, для которой будем использовать индекс 1, и зону, свободную от контактного давления, с индексом 2.

В первой зоне радиальное смещение оболочечного элемента удовлетворяет равенству:

$$w(x_1) = w(0) - x_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha; \quad 0 \leq x_1 \leq \delta, \quad (1)$$

где  $w(0)$  – смещение торца оболочечного элемента.

В [9] показано, что напряженно-деформированное состояние оболочки в рамках модели Тимошенко-Рейснера может быть описано с помощью соотношений деформаций

$$\varepsilon_1 = \frac{du}{dx}; \quad \varepsilon_2 = \frac{w}{R}; \quad \varepsilon_{13} = \psi + \frac{dw}{dx}; \quad \chi = \frac{d\psi}{dx}, \quad (2)$$

соотношений упругости:

$$N_1 = \frac{Eh}{1-\nu^2}(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2); N_2 = \frac{Eh}{1-\nu^2}(\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1); M_1 = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\chi; M_2 = \nu M_1; Q = \frac{kEh}{2(1+\nu)}\varepsilon_{13}, \quad (3)$$

и уравнений равновесия:

$$\rho h \frac{\delta^2 u}{dt^2} - \frac{\delta N_1}{\delta x} - p_1 = 0; \rho h \frac{\delta^2 w}{dt^2} - \frac{\delta Q}{\delta x} + \frac{N_2}{R} - p_3 = 0; \rho h \frac{\delta^2 \psi}{dt^2} + \frac{\delta M_1}{\delta x} - Q = 0. \quad (4)$$

В уравнениях (2)-(4)  $u, v, w$  – компоненты перемещения точек срединной поверхности оболочки;  $\psi$  – угол поворота нормали к срединной поверхности;  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  – тангенциальная (мембранная) деформация;  $\varepsilon_{13}$  – сдвиг в трансверсальном направлении;  $\chi$  – изгиб срединной поверхности;  $N_1, N_2, Q$  – нормальная и поперечная силы;  $M_1, M_2$  – изгибающие моменты.

Пренебрегая в (4) инерционными слагаемыми (рассматривается статическая задача) систему уравнений (2)-(4) можно свести к следующей:

$$\frac{Eh}{1-\nu^2} \left( \frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{\nu}{R} \frac{dw}{dx} \right) + p_1 = 0; \quad \frac{kEh}{2(1+\nu)} \left( \frac{d\psi}{dx} + \frac{d^2 w}{dx^2} \right) - \frac{Eh}{(1-\nu^2)R} \left( \frac{w}{R} + \nu \frac{du}{dx} \right) + p_3 = 0; \quad (5)$$

$$\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \frac{d^2 \psi}{dx^2} - \frac{kEh}{2(1+\nu)} \left( \psi + \frac{du}{dx} \right) = 0,$$

где  $E, \nu$  – упругие постоянные материала оболочки;  $k$  – коэффициент сдвига;  $p_1, p_3$  – проекции распределенной нагрузки на оси  $x, z$  соответственно.

Общее усилие  $F_0$  разбиваем на слагаемые  $F_H$  и  $F$ .

Усилие  $F_H$  определяет исходное напряженно-деформированное состояние оболочки, которое характеризуется тем, что  $\delta = 0$ , т.е. формирование контакта по поверхности начинается с момента, когда общее усилие превысит силу  $F_H$ . Усилие  $F$  определяет контактное давление и дальнейшую трансформацию напряженно-деформированного состояния оболочки. В дальнейших расчетах сжимающими напряжениями, вызываемыми усилием  $F_H$ , пренебрегаем.

$$\begin{aligned} \text{С учетом разбиения оболочки на зоны назначаются граничные условия} \\ N_1(0) = 0; M_1(0) = 0; w(l - \delta) = 0; \psi(l - \delta) = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

и условия совместности

$$w(\delta - 0) = w(\delta + 0); u(\delta - 0) = u(\delta + 0); \psi(\delta - 0) = \psi(\delta + 0); M_1(\delta - 0) = M_1(\delta + 0); Q_1(\delta - 0) = Q_1(\delta + 0). \quad (7)$$

Контактное давление разложим на осевую  $p_1$  и радиальную  $p_3$  составляющие.

Будем считать, что между ними справедливо очевидное соотношение

$$dp_1(x) = \operatorname{tg}(\alpha \pm \psi) dp_3(x), \quad (8)$$

где знак «+» относится к нагружению оболочки, а «-» к разгрузению.

Тогда осевая (сжимающая) сила, действующая на оболочку

$$N_1(x_1) = -\int p_1(x) dx; \quad (9)$$

$$N_1(x_1) = -\operatorname{tg}(\alpha \pm \psi) \int p_3(x) dx, \text{ если } 0 \leq x_1 \leq \delta, \quad N_1(x_2) = -\frac{F}{2\pi R}, \text{ если } 0 \leq x_2 \leq l - \delta.$$

После соответствующих подстановок находим:

$$\frac{dw}{dx_1} = \frac{h^2}{6k(1-\nu)} \frac{d^2\psi}{dx_1^2} - \psi = -\operatorname{tg}\alpha. \quad (10)$$

$$\frac{d^4\psi}{dx_1^4} - \frac{2(1+\nu)}{kR^2} \frac{d^2\psi}{dx_1^2} + \frac{12(1-\nu^2)}{R^2h^2} \psi = -\frac{12(1-\nu^2)}{Eh^3} \left( \frac{dp_3}{dx_1} + \frac{\nu \operatorname{tg}(\alpha \pm \psi)}{R} p_3 \right). \quad (11)$$

$$\frac{d^4\psi}{dx_2^4} - \frac{2(1+\nu)}{kR^2} \frac{d^2\psi}{dx_2^2} + \frac{12(1-\nu^2)}{R^2h^2} \psi = 0. \quad (12)$$

Выражения для внутренних усилий и моментов в области контактирования могут быть получены из соотношений упругости и равновесия:

$$M_1 = D \frac{d\psi}{dx_1}; Q_1 = \frac{dM_1}{dx_1} = D \frac{d^2\psi}{dx_1^2}; N_2 = R \frac{dQ_1}{dx_1} + Rp_3 = RD \frac{d^3\psi}{dx_1^3} + Rp_3. \quad (13)$$

Вне области контактирования:

$$M_1 = D \frac{d\psi}{dx_2}; Q_1 = \frac{dM_1}{dx_2} = D \frac{d^2\psi}{dx_2^2}; N_2 = R \frac{dQ_1}{dx_2} = RD \frac{d^3\psi}{dx_2^3}. \quad (14)$$

Решение (10) запишем в виде

$$\psi(x_1) = C_1 e^{\gamma x_1} + C_2 e^{-\gamma x_1} + \operatorname{tg}\alpha, \quad \gamma^2 = \frac{6k(1-\nu)}{h^2}. \quad (15)$$

Выполняя соответствующие подстановки ( $C$  – постоянная интегрирования):

$$M_1(x_1) = CD\gamma \operatorname{sh}\gamma x_1; \quad Q_1(x_1) = CD\gamma^2 \operatorname{ch}\gamma x_1. \quad (16)$$

Для выяснения закона изменения  $\psi$  на втором участке рассмотрим корни характеристического уравнения, соответствующего дифференциальному уравнению (11):

$$\lambda_{1..4} = \pm \sqrt{\frac{1+\nu}{kR^2} \pm \sqrt{\frac{(1+\nu^2)}{k^2 R^4} - \frac{12(1-\nu^2)}{R^2 h^2}}}. \quad (17)$$

Используя известные соотношения для корня из комплексного числа, выражение (17) можно представить в виде:

$$\lambda_{1..4} = \pm \left( \sqrt{\frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{Rh} + \frac{1+\nu}{2kR^2}} \pm i \sqrt{\frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{Rh} - \frac{1+\nu}{2kR^2}} \right)$$

Введем обозначения:

$$\xi^2 = \frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{Rh} + \frac{1+\nu}{2kR^2}; \quad \eta^2 = \frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{Rh} - \frac{1+\nu}{2kR^2}. \quad (18)$$

$$\psi(x_2) = \sum_i A_i B_i(x_2), \quad i = 1..4, \quad (19)$$

где  $A_0..A_3$  – постоянные интегрирования;  $B_0..B_3$  – нормальные, фундаментальные функции, предложенные И.А. Биргером [1]:

$$B_0(x) = \frac{1}{2\xi\eta} [2\xi\eta ch(\xi x) \cos(\eta x) - (\xi^2 - \eta^2) sh(\xi x) \sin(\eta x)];$$

$$B_1(x) = \frac{1}{2\xi\eta(\xi^2 + \eta^2)} [\xi(3\eta^2 - \xi^2) ch(\xi x) \sin(\eta x) - \eta(3\xi^2 - \eta^2) sh(\xi x) \cos(\eta x)];$$

$$B_2(x) = \frac{1}{2\xi\eta} sh(\xi x) \sin(\eta x); \quad B_3(x) = \frac{1}{2\xi\eta(\xi^2 + \eta^2)} [\xi ch(\xi x) \sin(\eta x) - \eta sh(\xi x) \cos(\eta x)].$$

По своей структуре и назначению функции И.А. Биргера эквивалентны функциям А.Н. Крылова, при  $\psi = \eta$  совпадают с ними с точностью до множителя.

В работе [4] вместо функций  $B_i$  предложено использовать функции  $DS_i$ :

$$DS_0(x) = \frac{1}{2\xi\eta} [2\xi\eta ch(\xi x) \cos(\eta x) - (\xi^2 - \eta^2) sh(\xi x) \sin(\eta x)];$$

$$DS_1(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\xi\eta}\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} [\xi(3\eta^2 - \xi^2) ch(\xi x) \sin(\eta x) - \eta(3\xi^2 - \eta^2) sh(\xi x) \cos(\eta x)]; \quad (20)$$

$$DS_2(x) = \frac{\xi^2 + \eta^2}{4\xi\eta} sh(\xi x) \sin(\eta x); \quad DS_3(x) = \frac{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}{4\sqrt{2\xi\eta}} [\xi ch(\xi x) \sin(\eta x) - \eta sh(\xi x) \cos(\eta x)].$$

Отличие функции  $DS_i$  от  $B_i$  заключается в том, что функции  $DS_i$  при  $\xi = \eta$  (оболочки Кирхгофа-Лява) совпадают с функциями академика А.Н. Крылова.

Дальнейшие выкладки ведутся с использованием функции  $B_i$ .

Из соотношений деформации (2) и упругости (3) оболочки, можно получить:

$$N_2(x_2) = \frac{Eh}{R} w(x_2) - \frac{\nu F}{2\pi R}. \quad (21)$$

Сопоставляя (14) и (21), находим

$$w(x_2) = \frac{R^2 h^2}{12(1-\nu^2)} \frac{d^3 \psi}{dx_2^3} + \frac{\nu F}{2Eh}. \quad (22)$$

Для определения контактного давления рассмотрим выражения из (13) и (3):

$$N_2(x_1) = \frac{Eh}{R} w(x_1) - \nu tg(\alpha \pm \varphi) \int p_3(x) dx = RD \frac{d^3 \psi}{dx_1^3} + Rp_3, \quad (23)$$

Откуда находим  $p_3(x_1)$

$$p_3(x_1) = \frac{Eh(aw(0) + tg\alpha)}{aR^2} e^{-ax} - \frac{Ehtg\alpha}{aR^2} - \frac{CD\gamma^3}{(\gamma^2 - a^2)} (\gamma^2 sh\gamma x_1 - a\gamma ch\gamma x_1 + a\gamma e^{-ax}), \quad a = \frac{\nu tg(\alpha \pm \varphi)}{R} \quad (24)$$

Обычно при постановке контактных задач  $w(0)$  (осадка штампа) задается. В нашем случае задано усилие  $F$ . Можно показать:

$$\frac{FR}{2\pi Ehtg(\alpha \pm \varphi)} = \frac{aw(0) + tg\alpha}{a^2} (1 - e^{-a\delta}) - \frac{\delta tg\alpha}{a} - \frac{C\gamma^3}{(\xi^2 + \eta^2)^2 (\gamma^2 - a^2)} (\gamma ch\gamma\delta - a sh\gamma\delta - \gamma e^{-a\delta}). \quad (25)$$

Таким образом, задача сводится к решению системы семи трансцендентных алгебраических уравнений для нахождения семи неизвестных:

$$A_0 B_0(l - \delta) + A_1 B_1(l - \delta) + A_2 B_2(l - \delta) + A_3 B_3(l - \delta) = 0; \quad A_0 B_0'''(l) + A_1 B_1'''(l) + A_2 B_2'''(l) + A_3 B_3'''(l) = -\frac{6\nu(1-\nu^2)F}{\pi R^2 Eh^3};$$

$$w(0) - \delta tg\alpha = \frac{A_3}{(\xi^2 + \eta^2)^2} + \frac{\nu F}{2\pi Eh}, \quad Cch\gamma\delta + tg\alpha = A_0; \quad C\gamma sh\lambda\delta = A_1; \quad C\gamma^2 ch\gamma\delta = A_2; \quad (26)$$

$$\frac{FR}{2\pi Ehtg(\alpha \pm \varphi)} = \frac{aw(0) + tg\alpha}{a^2} (1 - e^{-a\delta}) - \frac{\delta tg\alpha}{a} - \frac{C\gamma^3}{(\xi^2 + \eta^2)^2 (\gamma^2 - a^2)} (\gamma ch\gamma\delta - a sh\gamma\delta - \gamma e^{-a\delta}).$$

Для решения системы уравнений (25) была использована система MathCAD. При выполнении численных расчетов было принято:  $R = 50$  мм;  $h = 0,5$  мм;  $l = 10$  мм;  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа;  $\nu = 0,3$ ;  $\alpha = 15^\circ$ ;  $\varphi = \text{arctg } 0,05$ .

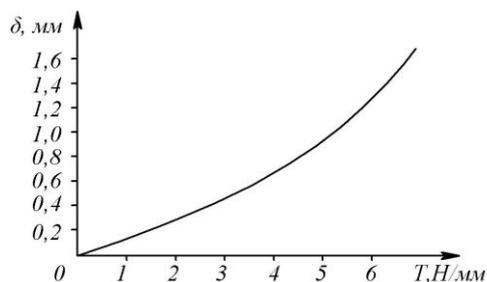


Рис. 2. Зависимость ширины контакта от интенсивности осевой нагрузки

На рис. 2 показан график зависимости ширины области контакта от погонной осевой нагрузки, а на рис. 3 представлены эпюры контактного давления как функции погонной осевой нагрузки. Отметим, что предельное значение контактного давления растет только при малых значениях нагрузки.

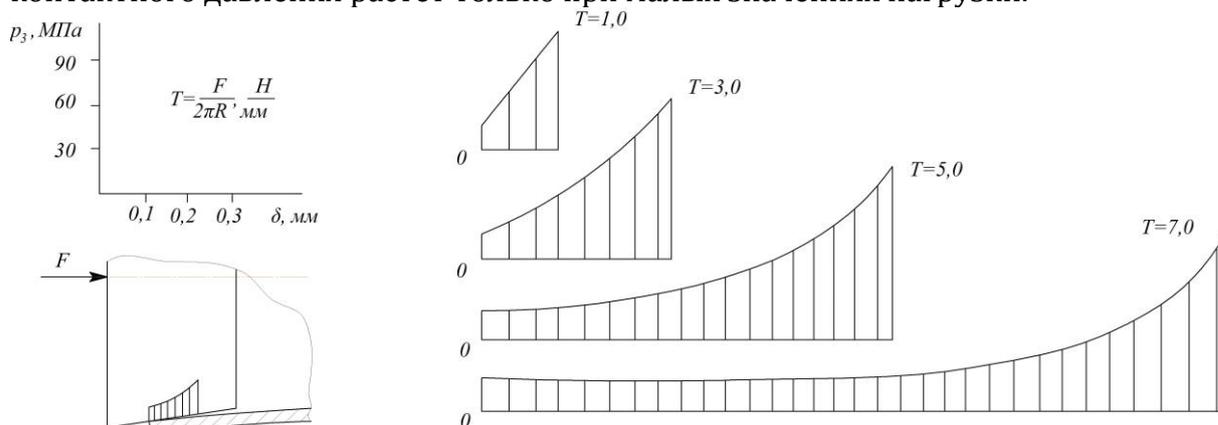


Рис. 3. Трансформация эпюры контактного давления с ростом интенсивности осевой нагрузки

Возвращаясь к системе уравнений (5), получаем:

$$\frac{d^4 w}{dx_1^4} - \frac{2(1+\nu)}{kR^2} \frac{d^2 w}{dx_1^2} + \frac{12(1-\nu^2)}{R^2 h^2} w = -\frac{2(1+\nu)}{kEh} \left[ \frac{d^2 p_3}{dx_1^2} + \frac{\nu \operatorname{tg}(\alpha \pm \varphi)}{R} \frac{dp_3}{dx_1} \right] + \frac{12(1-\nu^2)}{Eh^3} \left( p_3 + \frac{\nu \operatorname{tg}(\alpha \pm \varphi)}{R} \int p_3 dx \right). \quad (27)$$

Усилие и моменты также могут быть выражены через  $w$ :

$$N_2(x_2) = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left( \frac{w}{R} + \nu \frac{dw}{dx_1} \right) = \frac{Eh}{R} w - \nu \operatorname{tg}(\alpha \pm \varphi) \int p_3 dx$$

$$Q_1(x_1) = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \times \left[ -\frac{d^3 w}{dx_1^3} + \frac{2(1+\nu)}{kR^2} \frac{dw}{dx_1} - \frac{2(1+\nu)}{kEh} \left( \frac{dp_3}{dx_1} + \frac{\nu \operatorname{tg}(\alpha \pm \varphi)}{R} p_3 \right) \right], \quad (28)$$

$$M_1(x_1) = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \frac{d^2 w}{dx_1^2} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \times \left[ -\frac{d^2 w}{dx_1^2} + \frac{2(1+\nu)}{kR^2} w - \frac{2(1+\nu)}{kEh} \left( p_3 + \frac{\nu \operatorname{tg}(\alpha \pm \varphi)}{R} \int p_3 dx \right) \right].$$

Переходя ко второй области, свободной от контактного давления, получаем:

$$\frac{d^4 w}{dx_2^4} - \frac{2(1+\nu)}{kR^2} \frac{d^2 w}{dx_2^2} + \frac{12(1-\nu^2)}{R^2 h^2} w = \frac{12(1-\nu^2)}{Eh^3} \frac{\nu F}{2\pi R^2};$$

$$N_2(x_2) = \frac{Eh}{R} w - \frac{\nu F}{2\pi R}; Q_1(x_2) = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left[ -\frac{d^3 w}{dx_2^3} + \frac{2(1+\nu)}{kR^2} \frac{dw}{dx_2} \right]; \quad (29)$$

$$M_1(x_2) = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \times \left[ -\frac{d^2 w}{dx_2^2} + \frac{2(1+\nu)}{kR^2} w - \frac{2(1+\nu)}{kEh} \frac{\nu F}{2\pi R^2} \right].$$

Возвращаясь к физической трактовке полученных результатов, отметим, что «...контактным задачам теории оболочек Кирхгофа-Лява присущи...

формальные противоречия. Если оболочка контактирует с жестким банджом с гладким основанием (без углов), то на концах зоны контакта нужно вводить сосредоточенные погонные нормальные усилия» [2]. Но в этом случае не будет выполняться последнее условие совместности. Кроме того, введение сосредоточенных сил приводит к ошибке в сотни процентов для контактного давления.

На начальном этапе нагружения уплотнения усилием  $F$ , а также при малых усилиях  $F$  (понятие «малости» усилия будет определено ниже) затвор контактирует с оболочечным седлом не по поверхности, а по линии.

Принимая допущение об отсутствии пластических деформаций в месте контакта, проанализируем расчетную схему, показанную на рис. 4. Определение  $T^*$  и  $Q^*$  показано в [5].

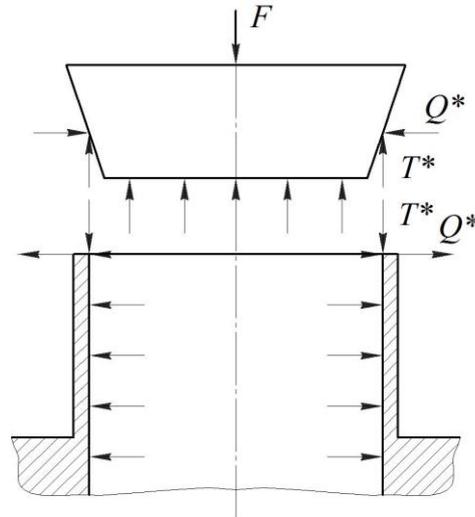


Рис. 4. Расчетная схема для определения жесткостных параметров оболочечного элемента

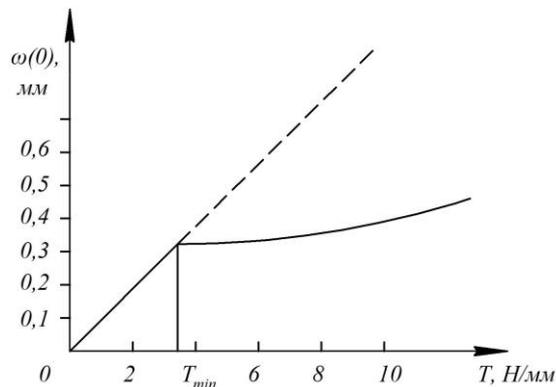


Рис. 5. Зависимость смещения торца от общей погонной осевой нагрузки

Уравнение деформированной образующей оболочки:

$$\frac{d^4 \psi}{dx^4} - \frac{2(1+\nu)}{kR^2} \frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{12(1-\nu^2)}{R^2 h^2} \psi = 0. \quad (30)$$

Решение этого уравнения ищем в виде (19), принимая граничные условия:

$$x=0; M_1(0)=0; Q(0)=-Q; x=l; \psi(l)=0; w(l)=0. \quad (31)$$

Раскрывая граничные условия, получаем систему уравнений для нахождения постоянных интегрирования:

$$A_1=0; A_2=-\frac{Q}{D}; A_0 B_0(l) + A_1 B_1(l) + A_2 B_2(l) + A_3 B_3(l) = 0; A_0 B_0''(l) + A_1 B_1''(l) + A_2 B_2''(l) + A_3 B_3''(l) = -\frac{\nu T + pR}{RD}. \quad (32)$$

Решая полученную систему уравнений, находим постоянные интегрирования:

$$A_0 = \frac{Q}{D} \frac{B_2(l)B_3''(l) - B_3(l)B_2''(l)}{B_0(l)B_3''(l) - B_3(l)B_0''(l)} + \frac{\nu T + pR}{RD} \frac{B_3(l)}{B_0(l)B_3''(l) - B_3(l)B_0''(l)}; A_1 = 0; A_2 = -\frac{Q}{D}; \quad (33)$$

$$A_3 = \frac{Q}{D} \frac{B_0(l)B_2''(l) - B_2(l)B_0''(l)}{B_0(l)B_3''(l) - B_3(l)B_0''(l)} - \frac{\nu T + pR}{RD} \frac{B_0(l)}{B_0(l)B_3''(l) - B_3(l)B_0''(l)}.$$

$$w(0) = \frac{R^2 D}{Eh} \frac{d^3 \psi}{dx^3}(0) + \frac{R(\nu T + pR)}{Eh} = \frac{A_3}{(\xi^2 + \eta^2)^2} + \frac{R(\nu T + pR)}{Eh}. \quad (34)$$

$$\frac{dw}{dx} = \frac{h^2}{6k(1-\nu)} \frac{d^2 \psi}{dx^2} - \psi; \frac{dw}{dx}(0) = \frac{h^2}{6k(1-\nu)} A_2 - A_0 = \frac{A_2}{\gamma_2} - A_0. \quad (35)$$

При отсутствии износа уплотнительных поверхностей контакт по поверхности возможен только в случае, когда  $w'(0) = -\text{tg} \alpha$ . Это позволяет определить то минимальное силовое нагружение, когда обеспечивается указанные тип контакта уплотнительных элементов.

Если давление герметизируемой среды равно нулю или им можно пренебречь, то:

$$F_{\min} = \frac{2\pi R D \text{tg}(\alpha \pm \varphi)}{\frac{1}{\gamma^2} + \frac{B_2(l)B_3''(l) - B_3(l)B_2''(l) + \nu \text{tg}(\alpha \pm \varphi) B_3(l)}{B_0(l)B_3''(l) - B_3(l)B_0''(l)}}. \quad (36)$$

Для оболочечного элемента, рассмотренного выше,  $F_{\min} = 1134 \text{ Н}$ , что соответствует  $T_{\min} = 3,61 \text{ Н/мм}$ . При этом  $w(0) = 0,34 \text{ мм}$ .

На рис. 5 приведен график зависимости смещения торца от общей погонной осевой нагрузки. При  $T > T_{\min}$  происходит образование контакта по поверхности, зависимость становится нелинейной. Пунктирная линия показывает смещение, подсчитанное в предположении сохранения контакта затвора и оболочечного седла по линии.

В уплотнительных соединениях эпюра контактного давления зависит еще от давления рабочей среды и закона ее истечения. Результаты моделирования для молекулярного режима истечения представлены на рис. 3.

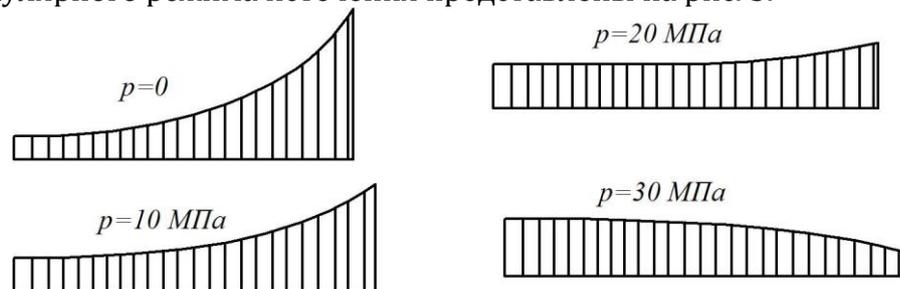


Рис. 6. Трансформация контактного давления при изменении давления рабочей среды

Герметизирующая способность уплотнения, и его износ, во многом определяются законом распределения контактного давления по ширине уплотнительного пояска

### Литература

1. Биргер И.А. Стержни, пластинки, оболочки. – М.: Физматлит, 1992. – 392 с.
2. Григолюк Э.И., Толкачев В.М. Контактные задачи теории пластин и оболочек – М.: Машиностроение, 1980. – 411 с.
3. Долотов А.М., Гозбенко В.Е., Белоголов Ю.И Уплотнительные соединения с использованием тонкостенных элементов // Иркутский государственный

- университет путей сообщения. Иркутск, 2011. 72 с., 78. Библиогр. 87 назв. – Рус. – Деп. в ВИНТИ 22. 11. 2011, № 508-В2011.
4. Долотов А.М., Саакян К.Т. Новый вариант представления функций А.Н. Крылова. Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. - Иркутск. ИрГУПС, 2010., № 4 (28), С 92-94.
  5. Долотов А.М., Огар П.М., Чегодаев Д.Е. Основы теории и проектирование уплотнений пневмогидро-арматуры летательных аппаратов. М.: Изд-во МАИ, 2000. 296 с.
  6. Авиационный газотурбинный двигатель: пат. 2162975 Рос. Федерация. № 98100457/06; заявл: 06.01.1998; опубл. 10.02.2001. 2 с.
  7. Затвор клапана: пат. 2186276 Рос. Федерация. № 2000114115/06: заявл. 02.06.2000; опубл. 27.07.2002. 4 с.
  8. Уплотнительное соединение: пат. 2129681 Рос. Федерация, № 97101302/06: заявл. 30.01.1997; опубл. 27.04.1999. 4 с.
  9. Пелех Б.Л. Обобщенная теория оболочек – Львов: Вища школа, 1987. – 159 с.

# ИССЛЕДОВАНИЕ РЕЛАКСАЦИОННЫХ СВОЙСТВ ЭЛАСТОМЕРНЫХ КОМПОЗИТОВ

## *INVESTIGATION of RELAXATION PROPERTIES of ELASTOMERIC COMPOSITES*

Ю.П.Зезин - д.т.н.

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,

Институт механики

[yuzezin@gmail.com](mailto:yuzezin@gmail.com)

**Abstract.** The results of the experimental investigation of relaxation properties of the elastomeric composite are presented. The base of investigated material is the synthetic rubber with nano-size filler (carbon black) that was reinforced by the layers of the cotton fabric. The tests of the specimens of material were carried out at the stress relaxation in the range of the tensile strain 0.02 – 0.08 at temperature 20°C. It was shown that material displays linearity of the relaxation properties if the strain values do not exceed the value 0.06. The constitutive equation of the linear theory of the viscoelasticity with the fractional-exponential kern of Rabotnov was used to description of obtained data. The procedure of determination of the constants of the constitutive equation was developed on the base of approximate transformation of Laplas-Karson. The obtained values of constants were used to prediction of the creep curves of the investigated material. The calculated curves of the creep were compared with experimental ones.

Композиты с эластомерной матрицей широко применяются в различных отраслях современной техники. Одно из применений подобных материалов – офсетная печать. Качество полиграфической продукции, получаемой в процессе офсетной печати, в значительной степени зависит от механических свойств резино-тканевых пластинок – композиционного материала на основе наполненного техническим углеродом эластомера. Пластины предназначены для передачи усилия с печатной формы на бумагу. Устанавливаются пластины с требуемым натяжением и для обеспечения высокого качества печатной продукции усилие натяжения не должно снижаться в процессе печати ниже допустимого уровня. С другой стороны, уровень падения напряжений в пластине обусловлен особенностями вязкоупругого поведения материала пластины – эластомерного композита. В предлагаемой работе представлены результаты экспериментального исследования вязкоупругих свойств резино-тканевых пластинок для офсетной печати производства завода «Вулкан». Основой этого материала является синтетический каучук, усиленный наночастицами технического углерода и армированный слоями ткани. В плоскости пластины композит практически изотропен.

Вязкоупругие свойства пластинок изучались по результатам их испытаний на растяжение в режиме релаксации напряжений и ползучести. Испытания образцов на релаксацию напряжений материала проведены на специальной установке, разработанной для изучения процессов релаксации напряжений в полимерных материалах [1]. Основным отличием этой установки от стандартных разрывных машин является система быстрого нагружения образца до заданного уровня деформации, выполненная в виде пружины сжатия, освобождаемой при нагружении образца спусковым механизмом. Такая конструкция нагружающего устройства позволяет существенно повысить скорость деформации до уровня  $1 \text{ с}^{-1}$  и существенно уменьшить время нагружения образца (до 0.05 с). Испытания проведены на образцах пластинок в виде двойной лопатки с размерами рабочей части 75X10 мм. Образцы вырубались из пластины фигурным ножом в одном

направлении. Толщина пластин составляла около 2 мм. Испытания проведены при температуре 20°C. Величины деформации в испытаниях на релаксацию напряжений варьировалась на четырех уровнях и составляла 0.04, 0.053, 0.067 и 0.08. Нагружение образцов в режиме ползучести осуществлялось с использованием установки для испытаний на растяжение полимерных материалов [2]. Установка оборудована следящей системой, позволяющей в течение длительного времени поддерживать постоянным заданный уровень растягивающего усилия на образец. Изменение деформации образца при этом регистрируется с использованием соответствующей системы на основе дифференциально-трансформаторного датчика и записывающего прибора. На рис. 1 представлены две кривые релаксации напряжений исследуемого материала, полученные при уровне деформации 0.04.

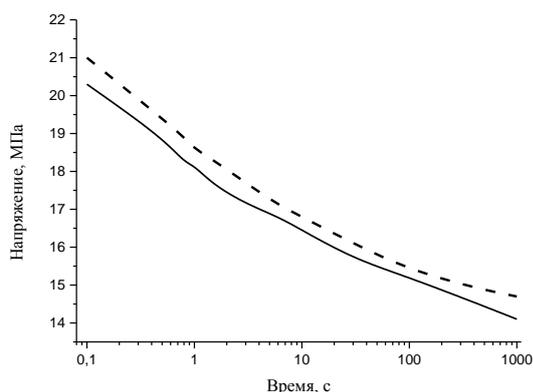


Рис. 1. Кривые релаксации резино-тканевой пластины при деформации 0,04.

Следует отметить хорошую воспроизводимость экспериментальных кривых релаксации напряжений исследуемого материала. Различие в значениях напряжения при фиксированных моментах времени не превышает 5%. На рис. 2 представлены усредненные кривые релаксации исследуемого резино-тканевого композита в виде зависимостей от времени релаксационного модуля материала  $E(t)$  – отношения текущего значения напряжения к заданной величине деформации.

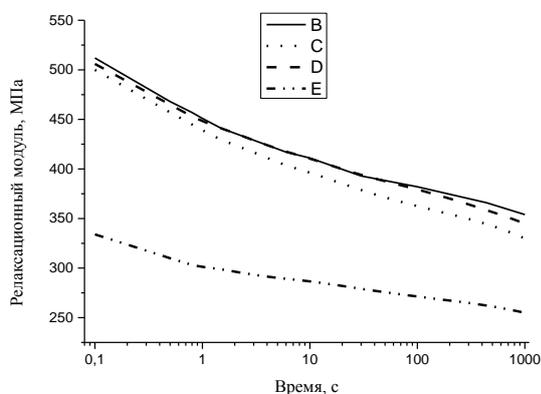


Рис. 2 Усредненные экспериментальные зависимости релаксационного модуля резино-тканевого композита от времени для различных значений деформации: B – 0,04; C – 0,053; D – 0,067; E – 0,08

Из представленных экспериментальных данных легко сделать вывод, что исследуемый материал проявляет линейность вязкоупругих свойств при деформациях, не превышающих уровень 0,67 – экспериментальные зависимости релаксационного модуля практически не зависят от величины деформации. Для описания полученных экспериментальных данных использованы определяющие соотношения линейной теории вязкоупругости в виде интегральных уравнений Вольтерры второго рода с дробно-экспоненциальным ядром Ю.Н.Работнова [3]:

$$\sigma(t) = E_0[\varepsilon(t) - \lambda \int_0^t \mathcal{E}_\alpha(-\beta, t-\tau)\varepsilon(t)d\tau] \quad (1);$$

где  $\mathcal{E}_\alpha(-\beta, t-\tau)$  - дробно-экспоненциальное ядро Ю.Н. Работнова:

$$\mathcal{E}_\alpha(-\beta, t-\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^k t^{k(\alpha+1)+\alpha}}{\Gamma[(k+1)(\alpha+1)]} \quad (2);$$

$t$  - время;  $\tau$  - переменная интегрирования;  $\alpha, \beta, k$  - параметры ядра;  $\Gamma[(k+1)(\alpha+1)]$  - гамма-функция Эйлера. Для идентификации постоянных величин, входящих в определяющие соотношения, использован метод, основанный на сопоставлении преобразований Лапласа экспериментальных кривых релаксации напряжений и уравнения, принятого для их описания. Подобный подход использовался ранее для анализа явления ползучести ряда полимерных материалов [4]. Для анализа полученных экспериментальных данных по релаксации напряжения удобно использовать соотношение (1), записанное для изменения релаксационного модуля:

$$E(t) = E_0(1 - \lambda \int_0^t \mathcal{E}_\alpha(-\beta, t-\tau)d\tau) \quad (3)$$

Преобразование Лапласа-Карсона для соотношения (3) имеет следующий вид [5]:

$$\varphi(P) = E_0(1 - \frac{\lambda}{P^{1+\alpha} + \beta}) \quad (4)$$

С другой стороны, для изображения  $\varphi(P)$  имеем по определению:

$$\varphi(P) = P \int_0^{\infty} E(t)e^{-Pt} dt \quad (5);$$

где  $E(t)$ -экспериментальная зависимость релаксационного модуля от времени. Далее для (5) получим приближенное изображение экспериментальной зависимости  $E(t)$  в соответствии с известной методикой [6]:

$$\varphi(P_i) = P_i \sum_{j=0}^{n-1} \int_{t_j}^{t_{j+1}} E(t)e^{-P_i t} dt + \int_{t_{j+1}}^{\infty} E(t)e^{-P_i t} dt \quad (6)$$

При достаточно высоких значениях  $t$  и  $P_i$  второй интеграл в соотношении (6) пренебрежимо мал по сравнению с первым. Величину интеграла легко оценить, положив постоянным релаксационный модуль при  $t \geq t_{j+1}$ . Очевидно, что в этом случае для  $P_i=1$  обсуждаемый интеграл можно принять равным 0. При возрастании  $P_i$  значение второго интеграла уменьшается. Для вычисления первого интеграла в правой части (6) разобьем рассматриваемый интервал времени на конечное число участков и на каждом из участков аппроксимируем зависимость  $E(t)$  какой-либо простой функцией. В данной работе использована кусочно-линейная аппроксимация:

$$E(t)_j = E_j + \frac{E_j - E_{j-1}}{t_j - t_{j-1}}(t - t_{j-1}). \quad (7)$$

После интегрирования (6) с учетом (7) для изображения экспериментальной зависимости релаксационного модуля от времени получим:

$$\begin{aligned} \varphi(P_i) = & \sum_{j=0}^{n-1} E(t_j)(e^{-P_i t_j} - e^{-P_i t_{j+1}}) + \\ & + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{E_j - E_{j-1}}{t_j - t_{j-1}} [t_j e^{-P_i t_j} - t_{j+1} e^{-P_i t_{j+1}} - \frac{1}{P_i} (e^{-P_i t_j} - e^{-P_i t_{j+1}})] \end{aligned} \quad (8)$$

Далее, задавая достаточное число значений переменной функции-изображения, получим приближенное преобразование исследуемой зависимости релаксационного модуля. В работе принималось 7 значений переменной изображения в интервале от 1 до 20. Время испытаний составляло 1000 с. Этот интервал времени разбивался неравномерно на 7 участков. Аппроксимация приближенного отображения экспериментальной зависимости релаксационного модуля от времени отображением определяющего соотношения сводится к подбору соответствующих значений постоянных уравнения линейной теории вязкоупругости. Соотношение (4) перепишем в более удобном для анализа виде:

$$\lg[\lambda\Phi(P) - \beta] = (1 + \alpha)\lg P \quad (9)$$

где:  $\Phi(P) = (1 - \varphi(P) / E_0)^{-1}$ . Далее использовалась следующая последовательность операций при подборе параметров соотношения (4). На первом этапе выбиралось некоторое значение  $E_0$ , задавалось некоторое значение параметра  $\lambda$  и с использованием частных случаев выражения (9) вычислялись значения параметров  $\alpha$  и  $\beta$ . Затем, с использованием соотношения (8) определялась зависимость  $\varphi(P_i)$  и зависимость величины  $\lg[\Phi(P) - \beta]$  от  $\lg P$ . Как следует из соотношения (9), линейная аппроксимация полученной зависимости определяет величину  $(1 + \alpha)$ . Таким образом, критерием правильности выбора значений параметров принятого определяющего соотношения служит точность линейной аппроксимации и совпадение заданного значения параметра  $\alpha$  с полученным. В результате получается первое приближение в оценке параметров определяющего соотношения, а окончательные значения параметров достигаются в результате дальнейшей итерационной процедуры. Необходимость уточнения значений параметров определяющих соотношений теории вязкоупругости, полученных в результате сопоставления преобразований Лапласа экспериментальных данных и исследуемых уравнений отмечалась и в работе [4]. По-видимому, это связано с утратой возможности более детального анализа особенностей изменения релаксационного модуля материала со временем при переходе от экспериментальных данных к их изображениям.

В результате анализа экспериментальных кривых релаксации для исследуемого резино-тканевого материала получены следующие значения принятого определяющего соотношения:  $E_0 = 800$  МПа;  $\alpha = -0,85$ ;  $\beta = 1,4$ ;  $\lambda = 1$ . В таблице 1 представлено сопоставление экспериментальных значений релаксационного модуля  $(E(t)_{\text{эксп}})$  с расчетными  $E(t)_{\text{расч}}$ , полученными с использованием соотношения (3) и указанных значений параметров. Для вычисления интегралов от дробно-экспоненциальной функции  $\mathcal{E}_\alpha(-\beta, t)$  использовались таблицы [7].

Таблица 1.

Сопоставление экспериментальных и расчетных значений  
релаксационного модуля резино-тканевой пластины.

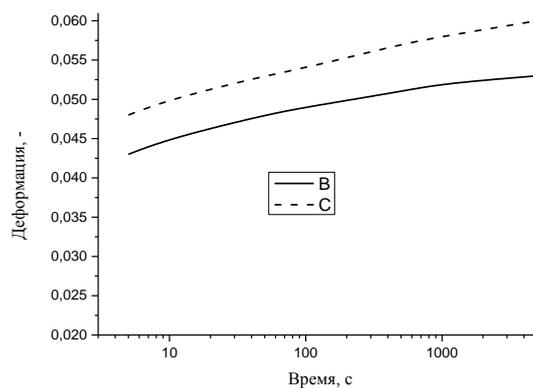
t, с	0,1	0,5	1	5	10	50	100	1000
$E(t)_{\text{эксп}}$ , МПа	510	460	450	411	405	385	370	360
$E(t)_{\text{расч}}$ , МПа	504	465	453	415	408	380	369	335

Данные, представленные в Таблице 1 показывают, что уравнения линейной теории вязкоупругости с дробно-экспоненциальным ядром Ю.Н. Работнова позволяют с достаточной точностью описать релаксационные свойства резино-тканевых композитов для офсетной печати. Расхождение между экспериментальными и расчетными значениями релаксационного модуля, представленными в Таблице 1, не превосходят 7%, что сопоставимо со статистическим разбросом значений релаксационного модуля материала, полученных при различных значениях деформации.

Для проверки применимости соотношений линейной теории вязкоупругости с значениями постоянных, определенных в результате анализа кривых релаксации, для описания процессов ползучести материала проведены испытания на ползучесть при уровне напряжения 20,4 МПа. Теоретическая кривая ползучести рассчитана по соответствующему уравнению теории вязкоупругости с дробно-экспоненциальным ядром ползучести  $\mathcal{E}_\alpha(-\beta + \lambda, t - \tau)$  [3]:

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E_0} \left[ \sigma(t) + \lambda \int_0^t \mathcal{E}_\alpha(-\beta + \lambda, t - \tau) \sigma(\tau) d\tau \right] \quad (10)$$

Параметры ядра ползучести определены по представленным результатам исследования процесса релаксации напряжений. На рис. 3 представлены две экспериментальные кривые ползучести, полученные при испытаниях двух одинаковых образцов при напряжении 20,4 МПа. Расчетная кривая ползучести при том же уровне напряжения получена с использованием соотношения (10) и таблиц дробно-экспоненциальной функции [7].



*Рис. 3. Экспериментальные кривые ползучести резино-тканевого композита при напряжении 20,4 МПа (B – образец № 1; C – образец № 2)*

В таблице 2 представлено сопоставление осредненных экспериментальных значений деформации с расчетными для фиксированных моментов времени. Из представленных в таблице 2 данных видно, что наибольшее расхождение между расчетными и осредненными экспериментальными значениями деформации ползучести не превосходят 13%. Результаты представленного исследования

позволяют сделать вывод, что уравнения линейной теории вязкоупругости с ядрами релаксации и ползучести в виде дробнолинейных функций Ю.Н. Работнова пригодны для анализа реономных свойств и режимов эксплуатации резино-тканевых пластин для офсетной печати.

Таблица 2.

Сопоставление экспериментальных и расчетных значений деформации ползучести резино-тканевой пластины при напряжении 20,4 МПа..

t, с	5	10	50	100	500	1000	5000
$\varepsilon(t)_{\text{расч}}$	0,048	0,05	0,052	0,055	0,058	0,061	0,064
$\varepsilon(t)_{\text{эксп}}$	0,046	0,048	0,05	0,052	0,054	0,055	0,058

Выводы. Проведено экспериментальное исследование релаксационных свойств резино-тканевых пластин для офсетной печати. Определен диапазон деформаций, в котором исследуемый материал проявляет линейность вязкоупругого поведения. Для описания полученных экспериментальных кривых релаксации использовано интегральные соотношения линейной теории вязкоупругости с ядром релаксации в виде дробно-линейной функции Ю.Н. Работнова. Значения параметров уравнения получены в соответствии с методикой, основанной на сопоставлении его преобразования Лапласа-Карсона с аналогичным преобразованием экспериментальной зависимости релаксационного модуля от времени. Показано, что принятые определяющие соотношения с значениями параметров, полученными из анализа экспериментальных данных по релаксации напряжений, позволяют с достаточной точностью описать и явление ползучести исследуемого материала.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 12-08-00252).

### Литература

1. Испытательные машины для испытания полимерных материалов, созданные в отделе пластичности НИИ механики МГУ. Всесоюзный научно-техн. Симп. «Методы и техника экспериментального исследования механических свойств пластмасс. Ростов на Дону. 1976, ч. 1, с. 25-26. Авт.: Зезин Ю.П., Козырев Ю.И., Малинин Н.И. Никифорова В.М., Смирнов В.С..
2. Зезин Ю.П., Керштейн И.М., Малинин Методика исследования трещиностойкости материалов в условиях вибрационного нагружения. Заводская лаборатория. 1975, № 8.
3. Н.И.Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с
4. Звонов Е.Н., Малинин Н.И., Паперник Л.Х., Цейтлин Б.М. Определение характеристик ползучести линейных упругонаследственных материалов с использованием ЭВМ. Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1968. № 5, с. 76-82.
5. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1976. 384 с.
6. Баренблатт Г.И., Борисов Ю.П., Каменецкий С.Г., Крылов А.П. Об определении параметров нефтеносного пласта по данным о восстановлении давления в остановленных скважинах. Изв. АН СССР. ОН. 1957. № 11, с.
7. Работнов Ю.Н., Паперник Л.Х., Звонов Е.Н. Таблицы дробно-экспоненциальной функции отрицательных параметров и интеграла от нее. М.: Наука, 1969. 132 с.

**НЕКОТОРЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ  
ДЛЯ СРЕД С РАЗУПРОЧНЕНИЕМ**  
*SOME DINAMIC PROBLEMS FOR CONTINUUMS WITH SOFTENING*

**В.В. Зуев** – д.ф.-м.н., проф., **А.Г. Шмелева** – к.ф.-м.н., доц.  
Московский государственный университет приборостроения и информатики  
[mgupi@mail.ru](mailto:mgupi@mail.ru)

**Abstract.** Possibilities of the applied program systems developed by authors for analyze deformation and destruction of structures and buildings under dynamic influences are shown. Extensive numerical experiments are made.

Рассмотрим в рамках осесимметричной постановки задачи о разнообразных динамических нагружениях упруго-пластических тел. В качестве определяющих соотношений для модельных материалов используются соотношения, предложенные в [1], позволяющие описывать такие усложнения как переменный предел текучести (разупрочнение, упрочнение), существенно необратимые объёмные деформации, взаимное влияние шаровых и сдвиговых характеристик и т.д.

Условие пластичности задается в виде:

$$\psi(\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ij}^p) = 2G\sqrt{(e_{ij} - e_{ij}^p)(e^{ij} - e^{p ij})} - F(\theta, \theta^p, \varepsilon_{ij}^p) = 0, \quad (1)$$

где  $e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{\theta}{3}\delta_{ij}$  и  $e_{ij}^p = \varepsilon_{ij}^p - \frac{\theta^p}{3}\delta_{ij}$  – компоненты девиаторов тензоров полных ( $\varepsilon_{ij}$ ) и пластических ( $\varepsilon_{ij}^p$ ) деформаций,  $\theta = \varepsilon_{ij}\delta^{ij}$  – полная объёмная деформация,  $\theta^p = \varepsilon_{ij}^p\delta^{ij}$  – пластическая объёмная деформация,  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера,  $G$  – модуль сдвига;  $F$  – имеет вид:

$$F = k(\theta - \theta^p) + C_0 - \alpha\sqrt{I_2^p}$$

где  $k = K\varphi$ ,  $K$  – коэффициент объёмного сжатия,  $\varphi$  – величина, обусловленная внутренним трением среды,  $I_2^p = \frac{1}{2}e_{ij}^pe^{p ij}$  – интенсивность пластических деформаций сдвига,  $C_0$  – начальный предел текучести,  $\alpha$  – коэффициент, определяющий интенсивность разупрочнения-упрочнения.

В осесимметричной постановке рассматриваемое динамическое взаимодействие твердых тел описывается системой уравнений для десяти неизвестных функций  $u_r, u_z, S_r, S_z, S_{rz}, p, \varepsilon_r^p, \varepsilon_z^p, \varepsilon_\theta^p, \varepsilon_{rz}^p$  [2-4]:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial u_r}{\partial t} - (2G + K) \left( \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial r} - \frac{\partial \varepsilon_r^p}{\partial r} \right) - K \left( \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial r} - \frac{\partial \varepsilon_z^p}{\partial r} + \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial r} - \frac{\partial \varepsilon_\theta^p}{\partial r} \right) - \\ - 2G \left( \frac{\partial \varepsilon_{rz}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_{rz}^p}{\partial z} - \frac{1}{3} \left( \frac{\partial \theta}{\partial z} - \frac{\partial \theta^p}{\partial z} \right) \right) = \frac{2G(2\varepsilon_r - 2\varepsilon_r^p + \varepsilon_z - \varepsilon_z^p)}{r}, \\ \rho \frac{\partial u_z}{\partial t} - (2G + K) \left( \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_r^p}{\partial z} \right) - K \left( \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_z^p}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_\theta^p}{\partial z} \right) - \\ - 2G \left( \frac{\partial \varepsilon_{rz}}{\partial r} - \frac{\partial \varepsilon_{rz}^p}{\partial r} - \frac{1}{3} \left( \frac{\partial \theta}{\partial r} - \frac{\partial \theta^p}{\partial r} \right) \right) = \frac{2G \left( \varepsilon_{rz} - \varepsilon_{rz}^p - \frac{1}{3}(\theta - \theta^p) \right)}{r}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varepsilon_r}{\partial t} + \left(\frac{1}{3}DB_r - \frac{2}{3}\right) \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{3}DB_{rz} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{1}{3}DB_{rz} \frac{\partial u_r}{\partial z} + \left(\frac{1}{3}DB_z + \frac{1}{3}\right) \frac{\partial u_z}{\partial z} &= -\left(\frac{1}{3}DB_\theta + \frac{1}{3}\right) \frac{u_r}{r}, \\
\frac{\partial \varepsilon_z}{\partial t} + \left(\frac{1}{3}DB_r + \frac{1}{3}\right) \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{3}DB_{rz} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{1}{3}DB_{rz} \frac{\partial u_r}{\partial z} + \left(\frac{1}{3}DB_z - \frac{2}{3}\right) \frac{\partial u_z}{\partial z} &= -\left(\frac{1}{3}DB_\theta + \frac{1}{3}\right) \frac{u_r}{r}, \\
\frac{\partial \varepsilon_\theta}{\partial t} - \left(\frac{2}{3}DB_r + \frac{2}{3}\right) \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{2}{3}DB_{rz} \frac{\partial u_z}{\partial r} - \frac{2}{3}DB_{rz} \frac{\partial u_r}{\partial z} - \left(\frac{2}{3}DB_z + \frac{2}{3}\right) \frac{\partial u_z}{\partial z} &= \left(\frac{2}{3}DB_\theta + \frac{5}{3}\right) \frac{u_r}{r}, \quad (2) \\
\frac{\partial \varepsilon_{rz}}{\partial t} - \left(\frac{1}{3}C_{rz}B_r + \frac{1}{3}\right) \frac{\partial u_r}{\partial r} - \left(\frac{1}{3}C_{rz}B_{rz} + \frac{1}{6}\right) \frac{\partial u_z}{\partial r} - \left(\frac{1}{3}C_{rz}B_{rz} + \frac{1}{6}\right) \frac{\partial u_r}{\partial z} - \\
&- \left(\frac{1}{3}C_{rz}B_z + \frac{1}{3}\right) \frac{\partial u_z}{\partial z} = \left(\frac{1}{3}C_{rz}B_\theta + \frac{1}{3}\right) \frac{u_r}{r},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varepsilon_r^p}{\partial t} - A_r B_r \frac{\partial u_r}{\partial r} - A_r B_{rz} \frac{\partial u_z}{\partial r} - A_r B_{rz} \frac{\partial u_r}{\partial z} - A_r B_z \frac{\partial u_z}{\partial z} &= A_r B_\theta \frac{u_r}{r}, \\
\frac{\partial \varepsilon_z^p}{\partial t} - A_z B_r \frac{\partial u_r}{\partial r} - A_z B_{rz} \frac{\partial u_z}{\partial r} - A_z B_{rz} \frac{\partial u_r}{\partial z} - A_z B_z \frac{\partial u_z}{\partial z} &= A_z B_\theta \frac{u_r}{r}, \\
\frac{\partial \varepsilon_\theta^p}{\partial t} - A_\theta B_r \frac{\partial u_r}{\partial r} - A_\theta B_{rz} \frac{\partial u_z}{\partial r} - A_\theta B_{rz} \frac{\partial u_r}{\partial z} - A_\theta B_z \frac{\partial u_z}{\partial z} &= A_\theta B_\theta \frac{u_r}{r}, \\
\frac{\partial \varepsilon_{rz}^p}{\partial t} - A_{rz} B_r \frac{\partial u_r}{\partial r} - A_{rz} B_{rz} \frac{\partial u_z}{\partial r} - A_{rz} B_{rz} \frac{\partial u_r}{\partial z} - A_{rz} B_z \frac{\partial u_z}{\partial z} &= A_{rz} B_\theta \frac{u_r}{r},
\end{aligned}$$

где  $\theta = \varepsilon_r + \varepsilon_z + \varepsilon_\theta$ ,  $\theta^p = \varepsilon_r^p + \varepsilon_z^p + \varepsilon_\theta^p$ ,

$$C_r = \frac{2GH(\varepsilon_r - \varepsilon_r^p)}{H_\varepsilon F}, \quad C_z = \frac{2GH(\varepsilon_z - \varepsilon_z^p)}{H_\varepsilon F}, \quad D = \frac{HF'}{H_\varepsilon},$$

$$C_{rz} = \frac{2GH\left(\varepsilon_{rz} - \varepsilon_{rz}^p - \frac{1}{3}(\theta - \theta^p)\right)}{H_\varepsilon F} + D, \quad A_r = C_r - \frac{1}{3}D, \quad A_z = C_z - \frac{1}{3}D,$$

$$A_\theta = -A_r - A_z - D, \quad A_{rz} = \frac{C_{rz} - D}{2}, \quad B_r = \frac{2GC_r F'}{D} - KF',$$

$$B_z = \frac{2GC_z F'}{D} - KF', \quad B_\theta = -B_r - B_z - 3KF', \quad B_{rz} = \frac{G(C_{rz} - D)F'}{D},$$

$$H = \text{sign}(1 + \text{sign} \psi) \cdot \text{sign}(1 + \text{sign} \dot{\psi}) \cdot \text{sign} \dot{\psi},$$

$$\dot{\psi} = B_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + B_z \frac{\partial u_z}{\partial z} + B_{rz} \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + B_\theta \frac{u_r}{r}, \quad F' = \frac{1}{K} \frac{\partial F}{\partial \theta},$$

$H_\varepsilon$  - функция упрочнения в пространстве деформаций [1],  $\rho$  - плотность среды.

Для решения системы уравнений (2) создана и реализована программа, позволяющая рассматривать различные варианты динамического нагружения упруго-пластических континуумов с усложненными свойствами. Решение задач проводилось с помощью модифицированного авторами метода конечных элементов.

В качестве иллюстрации возможностей созданного программного продукта ниже будут приведены некоторые практически важные результаты численного моделирования ряда актуальных задач динамического воздействия на

конструкции и сооружения различного назначения. Решения многочисленных задач об ударном нагружении подробно изложены в работах [1-4], там же приведены физико-механические характеристики материалов.

На рисунке 1 приведены результаты численного моделирования внедрения упруго-пластического индентора (металл) в основание (бетон). Начальная скорость на верхней границе индентора  $u_0 = 100 \text{ м/с}$ , время  $t = 3 \text{ мкс}$ , радиус индентора  $0,005 \text{ м}$ , высота индентора  $0,01 \text{ м}$ , радиус основания  $0,01 \text{ м}$ , высота индентора  $0,02 \text{ м}$ . Зоны разрушения – показаны красным цветом, зоны пластичности – желтым.

На рисунке 2 представлено поведение системы «сооружение-основание» (сооружение – бетон, двухслойное основание – бетон, скальный грунт) при динамических воздействиях. Рассмотрено воздействие нормальной синусоидальной волны значительной интенсивности, моделирующей сейсмические явления, на поведение как сооружения, так и основания. Амплитуда скорости нагружения  $u_{\text{max}} = 100 \text{ м/с}$ , время  $t = 3 \text{ мкс}$ , радиус сооружения  $5 \text{ м}$ , высота сооружения  $7 \text{ м}$ , радиус основания  $10 \text{ м}$ , высота основания  $7 \text{ м}$ . Показано распределение зон пластичности (желтый цвет) и разрушения (на рисунке представлено красным) в системе «сооружение-основание». Серый цвет – отсутствие необратимых деформаций.

На рисунке 3 представлено поведение системы «сооружение-основание» (сооружение – бетон, основание – скальный грунт) при динамических воздействиях внутри полости под сооружением. Амплитуда скорости нагружения  $u_{\text{max}} = 200 \text{ м/с}$ , время  $t = 10 \text{ мкс}$ , радиус сооружения  $10 \text{ м}$ , высота сооружения  $20 \text{ м}$ , радиус основания  $35 \text{ м}$ , высота основания  $20 \text{ м}$ , радиус полости  $5 \text{ м}$ . Рассмотрено влияние как на сооружение, так и на основание синусоидальной волны значительной интенсивности, моделирующей подземные взрывные процессы.

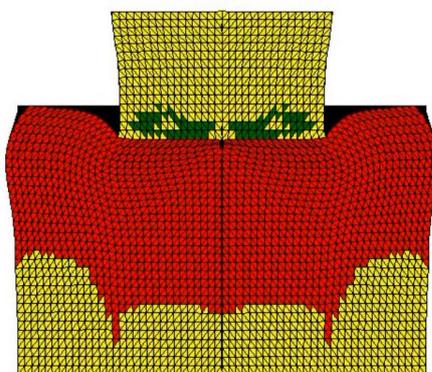


Рис. 1

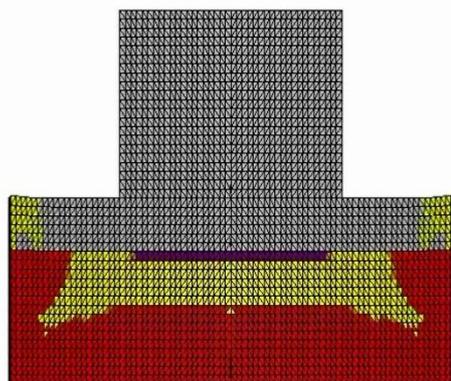


Рис. 2

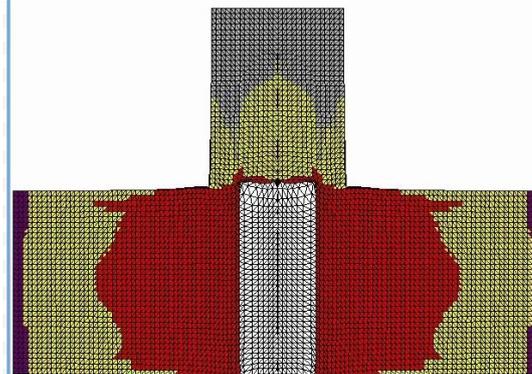


Рис. 3

Таким образом, базируясь на определяющих соотношениях работы [1] и модификации метода конечных элементов, созданы и реализованы прикладные программные системы, позволяющие рассматривать разнообразные варианты динамического нагружения упруго-пластических материалов и конструкций с усложненными свойствами, в частности, однородные и слоистые защитные преграды при ударных нагружениях в широком диапазоне изменения скоростей удара, поведение системы “сооружение-основание” при различных комбинациях разнообразных динамических воздействий. Пользователь может задавать разнообразные деформационные и прочностные характеристики материалов; начальные условия (скорости удара, размеры взаимодействующих конструкций и сооружений, количество слоев и т.д.); граничные условия (задание напряжений и перемещений на границах взаимодействующих тел, в частности, различные условия закреплений, характеристик внешних воздействий - амплитуда, частота и т.д.). Программа позволяет представлять любые интересующие пользователя кинематические и динамические величины в графическом виде и наглядно показывать динамику развития зон пластичности и разрушения в нагружаемых телах. Разработанный подход и его численная реализация дают возможность всесторонне и наглядно исследовать напряженно-деформированное состояние и разрушение материалов и конструкций с различными особенностями при разнообразных динамических воздействиях.

#### **Литература**

1. Зуев В.В. Определяющие соотношения и динамические задачи для упруго-пластических сред с усложненными свойствами. М.: Физматлит, 2006. 174 с.
2. Зуев В.В., Шмелёва А.Г. Осесимметричное ударное нагружение упруго-пластической среды с разупрочнением и переменными упругими свойствами. Вестник СамГУ. Естественная серия. 2007. №2(52). С.100-106.
3. Зуев В.В., Шмелева А.Г. Некоторые актуальные задачи динамического нагружения упруго-пластических сред с усложненными свойствами. Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Н. Новгород: ННГУ им. Н.И. Лобачевского. №4, часть 5, 2011, с. 2189-2191.
4. Шмелева А.Г. Ударное нагружение пластических сред. LAP Lambert Academic Publishing, 2012, 128 с.

**РОТАЦИОННО-ИНВАРИАНТНЫЕ ЛАГРАНЖИАНЫ  
КОНТИНУУМОВ С РАССЕЯННЫМ ПОЛЕМ МИКРОПОВРЕЖДЕНИЙ  
ROTATIONALLY INVARIANT LAGRANGIANS OF DAMAGED CONTINUA**

**В. А. Ковалев** – д.ф.-м.н., проф., Государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Московский городской университет управления Правительства Москвы», [kovalev.kam@gmail.com](mailto:kovalev.kam@gmail.com)

**Ю. Н. Радаев** – д.ф.-м.н., проф., Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, [radayev@ipmnet.ru](mailto:radayev@ipmnet.ru)

**Abstract.** The paper contains new results related to derivation of rotationally invariant forms of Lagrangians proposed for type-II thermoelastic damaged continua. First, a mathematical model of type-II (GNII) thermoelastic (TE) damaged (D) continuum is considered as a field theory. Damage state is represented by a second rank damage tensor. A formulation of the least thermoelastic action principle is then discussed. Partial differential equations subsequent to the least action principle are obtained. The space rotational invariance of the action and corresponding Lagrangians are studied. For Lagrangians of type-II thermoelastic damaged continuum following the usual procedure due to Cauchy independent rotationally invariant functional arguments are obtained. Objective forms of the Lagrangians and corresponding constitutive equations satisfying the frame indifference principle are given.

Под поврежденностью понимается сокращение обратимого механического отклика тела вследствие сокращения эффективной площади, передающей внутренние контактные усилия от одной части тела к другой его части, обусловленного, в свою очередь, появлением и развитием микроповреждений. В рамках математической модели поврежденность, следуя Л. М. Качанову (1958 г.) и Ю. Н. Работнову (1959 г.), представляется специальной тензорной переменной – тензором поврежденности ( $d$ -тензором). Тензорная мера поврежденности является мерой сокращения, вследствие распределения микроповреждений, реально несущей нагрузку («эффективной») площади двумерного элемента континуума в зависимости от его пространственной ориентации. Одновременно тензор поврежденности (обычно, симметричный тензор второго ранга) выступает и как «медленная» термодинамическая переменная состояния. Последнее обстоятельство позволяет, опираясь на основные принципы рациональной термомеханики, получить необходимые для анализа напряжений и деформаций дифференциальные уравнения, а также определяющие уравнения поврежденного континуума. Более сложные модели включают также референциальные градиенты тензора поврежденности в число термодинамических переменных состояния (указанные градиенты относятся к «быстрым» переменным состояния). Заметим, что наибольшее распространение получил *симметричный* тензор поврежденности второго ранга [1] как максимально простой тензорный параметр, который в состоянии отображать достаточно сложные пространственно-анизотропные структуры поврежденности континуума. Ясно, что симметричный тензор поврежденности второго ранга может быть в принципе заменен системой трех единичных векторных директоров  $d^j_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3$ ), направленных вдоль его

главных осей, и трех скалярных  $D$ -параметров  $D^\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ) – главных поврежденностей (собственных чисел тензора поврежденности), –

удовлетворяющих двусторонним ограничениям  $0 \leq \overset{a}{D} \leq 1$ . Единичные директоры  $d^j$  ( $\alpha = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3$ ) вообще говоря, должны сохранять взаимную ортогональность. Это обстоятельство можно учесть в форме дополнительных кинематических ограничений на заключительных этапах развития теории. До определенного момента  $d$ -векторы можно считать «мягкой» системой, не вводя а priori ограничений на их взаимную ориентацию в пространстве и их длины.

В настоящей работе, следуя [2–5], приводится построение нелинейной теоретико-полевой модели термоупругого микроповрежденного континуума. Лагранжевы переменные  $X^\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ), дополненные четвертой временной координатой, выступают как пространственно-временные координаты. Эйлеровы переменные  $x^j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) представляют собой физические поля. Последнее относится и к системе трех полярных  $d$ -векторов и главных поврежденностей  $\overset{a}{D}$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ). Но они классифицируются как экстраполевые (сверх полевых переменных  $x^j$ ) переменные и вводятся в формализм теории поля с помощью контравариантных пространственных компонент  $d^j$  ( $\alpha = 1, 2, 3; j = 1, 2, 3$ ) и трех скалярных параметров  $\overset{a}{D}$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ). В качестве основной термической полевой переменной, следуя теориям термоупругости второго типа (GNII), примем температурное смещение  $\vartheta$ , которое определяется как первообразная по времени (при фиксированных лагранжевых переменных) от абсолютной температуры. Переменной состояния считается также референциальный градиент температурного смещения. Плотность действия (лагранжиан)  $\mathcal{L}$  термоупругого микроповрежденного континуума определяется как наиболее общая функциональная форма от определяющих переменных

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(X^\beta, x^j, d^j, \overset{a}{D}, \vartheta, \partial_4 x^j, \partial_4 d^j, \partial_4 \overset{a}{D}, \partial_4 \vartheta, \partial_\alpha x^j, \partial_\alpha d^j, \partial_\alpha \overset{a}{D}, \partial_\alpha \vartheta).$$

В работе рамках теоретико-полевой схемы получены связанные дифференциальные уравнения поля в форме Эйлера–Лагранжа (EL). Приводится вывод выражений для полной энергии, импульсов, канонических импульсов, вектора Умова–Пойнтинга и тензора напряжений Эшелби. Обсуждаются вопросы построения определяющих уравнений термоупругого микроповрежденного континуума. Корректные формы определяющих уравнений требуют, как хорошо известно, знания ротационно-инвариантных (речь идет о поворотах эйлеровой координатной системы) форм плотности действия. Заключительная часть работы посвящена выводу ротационно-инвариантных форм плотности действия. Получены все возможные ротационно-инвариантные лагранжианы термоупругого микроповрежденного континуума и соответствующие им объективные формы определяющих уравнений.

**1.** В современных математических теориях континуума с микроструктурой (см., например, [6, 7]) обычно предполагается, что произвольная «конечная» деформация континуума, представляемая чисто геометрическим преобразованием

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t) \quad (1)$$

положения  $\mathbf{X}$  отсчетной конфигурации в соответствующее актуальное место  $\mathbf{x}$  пространства, сопровождается экстрадеформацией, проявляющейся в форме нарушений взаимной ориентации и метрических характеристик системы трех

пространственных некопланарных  $d$ -векторов  $\mathbf{d}_a$  ( $a=1,2,3$ ), связанных с микроэлементом:

$$\mathbf{d}_a = \mathbf{d}_a(\mathbf{X}, t). \quad (2)$$

Система трех пространственных полярных  $d$ -векторов, ассоциированных с каждой точкой континуума, задает микроструктуру континуума, в том числе возможную микроструктуру поврежденности. Как указывалось выше, эта  $d$ -система в самом общем случае предполагается «мягкой».

Переменные  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{x}$  (и позиционные координаты  $X^\alpha$ ,  $x^j$ ) выступают как соответственно лагранжева (отсчетная, референциальная) и эйлерова (пространственная) переменные, если воспользоваться стандартной терминологией механики континуума [8, 9]. С этими переменными связаны соответствующие метрики: отсчетная метрика  $\overset{\sim}{g}_{\alpha\beta}$  и пространственная (эйлерова) метрика  $g_{ij}$ . Конвективная (сопутствующая) метрика характеризуется метрическим тензором  $g_{\alpha\beta}$  и, в отличие от  $\overset{\sim}{g}_{\alpha\beta}$  и  $g_{ij}$ , полностью определяется деформацией (1). Как ясно из предложенных обозначений, эйлеровы пространственные индексы всегда будут обозначаться латинскими буквами, греческие буквы всегда будут указывать на отсчетные или сопутствующие индексы; символ  $\overset{\sim}$  слева означает принадлежность к референциальному состоянию.

Деформация и экстрадеформация в координатах  $X^\alpha$ ,  $x^j$  имеют следующий вид:

$$x^j = x^j(X^\alpha, t), \quad (3)$$

$$d_a^j = d_a^j(X^\alpha, t). \quad (4)$$

Следуя известным схемам построения математических теорий континуумов, введем градиент «конечной» деформации (градиент места, position gradient) или «дисторсию» [10, 11]

$$\partial_\alpha x^j \quad (j, \alpha = 1, 2, 3) \quad (5)$$

и соответствующий якобиан

$$J = \det(\partial_\alpha x^j). \quad (6)$$

Конвективная метрика  $g_{\alpha\beta}$  вычисляется с помощью градиента деформации и пространственной (эйлеровой) метрики согласно формуле

$$g_{\alpha\beta} = g_{ij}(\partial_\alpha x^i)(\partial_\beta x^j) \quad (7)$$

и в силу своего определения ротационно-инвариантна при произвольных поворотах эйлеровой координатной системы.

Заметим, что в рамках теоретико-полевого подхода лагранжевы переменные  $X^\alpha$  ( $\alpha=1,2,3$ ), дополненные четвертой временной координатой  $X^4$ , выступают как пространственно-временные координаты. Эйлеровы переменные  $x^j$  ( $j=1,2,3$ ) представляют собой физические поля. То же самое относится к «мягкой» системе полярных  $d$ -векторов  $\mathbf{d}_a$  ( $a=1,2,3$ ) и  $D$ -параметров. Но они классифицируются в дальнейшем как экстраполевые (сверх полевых переменных  $x^j$ ) переменные и вводятся в формализм теории поля с помощью контравариантных пространственных компонент  $d_a^j$  ( $a=1,2,3; j=1,2,3$ ) и скаляров  $\overset{\sim}{D}$  ( $a=1,2,3$ ).

В качестве основной термической полевой переменной, следуя теориям термоупругости второго типа, примем температурное смещение  $\vartheta$ , которое

определяется как первообразная по времени (при фиксированных лагранжевых переменных) от абсолютной температуры  $\theta$ . Переменной состояния считается также референциальный градиент температурного смещения (так называемая «быстрая» переменная термодинамического состояния).

Таким образом, определяющие полевые переменные термоупругого континуума второго типа с микроструктурой, помимо  $x^j$  ( $j=1,2,3$ ) и  $\mathcal{G}$ , включают: градиент деформации  $\partial_\alpha x^j$  ( $j,\alpha=1,2,3$ ); три пространственных  $d$ -вектора «нежесткой» микроструктуры континуума  $d_\alpha^j$  ( $\alpha=1,2,3; j=1,2,3$ ); три  $D$ -параметра  $\overset{\alpha}{D}$  ( $\alpha=1,2,3$ ); референциальные градиенты  $d$ -векторов  $\partial_\alpha d_\alpha^j$  ( $\alpha=1,2,3; j=1,2,3; \alpha=1,2,3$ ); референциальные градиенты  $D$ -параметров  $\partial_\alpha \overset{\alpha}{D}$  ( $\alpha=1,2,3; \alpha=1,2,3$ ); референциальный градиент температурного смещения  $\partial_\alpha \mathcal{G}$  ( $\alpha=1,2,3$ ); скорости главных поврежденностей  $\partial_4 \overset{\alpha}{D}$  ( $\alpha=1,2,3$ ); скорость температурного смещения  $\partial_4 \mathcal{G}$ .

2. Любая теоретико-полевая модель подразумевает задание вариационного интегрального функционала действия и соответствующей плотности действия. В дальнейшем мы будем использовать «естественные» плотности (см., например, [12]), часто называемые еще «квазиплотностями». «Естественная» плотность действия (лагранжиан) поврежденного термоупругого континуума может быть, как это принято в теориях термоупругости второго типа [12], представлена в виде функции с указанием всех явных вхождений определяющих переменных:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(X^\beta, x^j, d_\alpha^j, \overset{\alpha}{D}, \mathcal{G}, \partial_4 x^j, \partial_4 d_\alpha^j, \partial_4 \overset{\alpha}{D}, \partial_4 \mathcal{G}, \partial_\alpha x^j, \partial_\alpha d_\alpha^j, \partial_\alpha \overset{\alpha}{D}, \partial_\alpha \mathcal{G}). \quad (8)$$

В теориях континуумов лагранжиан, как известно, имеет несколько более специальную форму, чем (8), разности плотности кинетической энергии и свободной энергии Гельмгольца:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \rho_R g_{kj} \dot{x}^k \dot{x}^j + \frac{1}{2} \rho_R g_{ij} \overset{ab}{\mathfrak{J}} d_\alpha^i d_\beta^j - \psi(X^\beta, x^j, d_\alpha^j, \overset{\alpha}{D}, \mathcal{G}, \overset{\alpha}{D}^\bullet, \dot{\mathcal{G}}, \partial_\alpha x^j, \partial_\alpha d_\alpha^j, \partial_\alpha \overset{\alpha}{D}, \partial_\alpha \mathcal{G}), \quad (9)$$

где точкой (вместо оператора  $\partial_4$ ) обозначается частное дифференцирование по времени при постоянных лагранжевых координатах  $X^\alpha$  ( $\alpha=1,2,3$ );  $\rho_R$  – референциальная плотность;  $\overset{ab}{\mathfrak{J}}$  – тензор инерции микроэлемента.

Вариационный интеграл термоупругого действия с «естественной» плотностью действия (8) будет иметь, таким образом, следующий вид:

$$\mathfrak{I} = \int \mathcal{L}(X^\beta, x^j, d_\alpha^j, \overset{\alpha}{D}, \mathcal{G}, \partial_4 x^j, \partial_4 d_\alpha^j, \partial_4 \overset{\alpha}{D}, \partial_4 \mathcal{G}, \partial_\alpha x^j, \partial_\alpha d_\alpha^j, \partial_\alpha \overset{\alpha}{D}, \partial_\alpha \mathcal{G}) d^4 X \quad (10)$$

$(\alpha=1,2,3; \alpha,\beta=1,2,3; j=1,2,3).$

Соответствующие вариационному интегралу (10) и принципу наименьшего действия связанные уравнения поля могут быть представлены в стандартной форме Эйлера–Лагранжа (EL):

$$\begin{aligned} \partial_\alpha S_j^{\alpha} - \dot{P}_j &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^j}, & \partial_\alpha j_R^{\alpha} + \dot{\overset{\alpha}{D}} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \overset{\alpha}{D}}, \\ \partial_\alpha \overset{\alpha}{M}_j + \overset{\alpha}{A}_j - \partial_4 \overset{\alpha}{Q}_j &= 0, & \partial_\alpha j_R^{\alpha} + \dot{s} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{G}}, \quad \alpha=1,2,3; j=1,2,3; \alpha=1,2,3. \end{aligned} \quad (11)$$

Здесь принимаются следующие обозначения для полевых частных производных, которые вводятся с целью дать по возможности более компактную

запись дифференциальных уравнений поля (11):

$$\begin{aligned}
 P_j &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^j}, & S_{\cdot j}^{\alpha} &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\alpha} x^j)}, & \mathcal{D}_{\alpha} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial D_{\alpha}^{\cdot}}, \\
 \overset{\alpha}{Q}_j &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial d_{\alpha}^j}, & \overset{\alpha}{M}_{\cdot j}^{\alpha} &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\alpha} d_{\alpha}^j)}, & j_{\alpha}^{\alpha} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\alpha} D_{\alpha})}, \\
 s &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathcal{G}}}, & j_{\alpha}^{\alpha} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\alpha} \mathcal{G})}, & \overset{\alpha}{A}_j &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial d_{\alpha}^j}.
 \end{aligned} \quad (12)$$

Поясним смысл символов, использованных в данных выше формулах (12) с целью сокращенного обозначения полевых частных производных:  $P_j$  – обобщенный импульс, соответствующий трансляционным степеням свободы;  $\overset{\alpha}{Q}_j$  – обобщенные экстраимпульсы, соответствующие дополнительным степеням свободы;  $S_{\cdot j}^{\alpha}$  – первый тензор напряжений Пиола–Кирхгофа;  $\overset{\alpha}{M}_{\cdot j}^{\alpha}$  – «первые» тензоры экстранапряжений;  $\overset{\alpha}{A}_j$  – обобщенные силы-моменты, сопряженные экстраполевому переменным  $d_{\alpha}^j$ ;  $\mathcal{D}_{\alpha}$  – обобщенные импульсы, ассоциированные с поврежденностью;  $j_{\alpha}^{\alpha}$  – обобщенные референциальные векторы потока, ассоциированные с поврежденностью;  $s$  – плотность энтропии (в расчете на единицу объема в отсчетном состоянии);  $j_{\alpha}^{\alpha}$  – референциальный вектор потока энтропии (в единицу времени через единицу площади в отсчетном состоянии).

**3.** «Естественная» плотность действия в форме (8) пока еще не позволяет вести речь о ее объективности в том смысле, что в разных эйлеровых координатных системах эта форма будет сохраняться. Ясно, что вывод объективных форм лагранжиана представляет собой первый и весьма важный шаг на пути построения объективных форм определяющих уравнений, первоначально задаваемых уравнениями (12).

Вводя в пространстве прямоугольные декартовы координаты  $x^j$ , заметим, что одно из свойств инвариантности проявляется в форме трансляционной инвариантности интегрального функционала действия (10) относительно произвольных сдвигов переменных  $x^j$  и времени  $t$ . Другое, как хорошо известно, – ротационной инвариантности относительно произвольных поворотов эйлеровой координатной системы  $x^j$ .

Инвариантность действия относительно поворотов эйлерова координатного репера является проявлением изотропии эйлерова координатного пространства, т. е. отсутствия предпочтительных направлений в этом пространстве.

Инвариантность действия относительно преобразований лагранжевых переменных связана с симметрией физических свойств континуума. Так, трансляционная инвариантность действия (10) относительно произвольных сдвигов координат  $X^{\alpha}$  означает, что континуум однороден. Ротационная инвариантность относительно произвольных поворотов лагранжевой координатной системы указывает на изотропность континуума.

Таким образом, действие, в частности, должно быть инвариантно относительно преобразований сдвигов и поворотов координатной системы наблюдателя (принцип объективности) и сдвигов времени:

$$x^i = R_j^i x^j + C^i, \quad \tilde{d}_a^i = R_j^i d_a^j, \quad \tilde{t} = t + C. \quad (13)$$

В приведенных выше формулах преобразования  $C^i$ ,  $C$  есть произвольные постоянные;  $R_j^i$  – произвольная постоянная собственно ортогональная матрица.

Действие (10) и плотность действия  $\mathcal{L}$  инвариантны относительно преобразований (13) тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^k} = 0, \quad \partial_4^{\text{expl}} \mathcal{L} = 0, \quad \mathcal{K}_{[ij]} = 0, \quad (14)$$

где тензор  $\mathcal{K}_{ij}$  определяется согласно

$$\mathcal{K}_{ij} = x_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^j} + d_a^i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial d_a^j} + \dot{x}_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^j} + \dot{d}_a^i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{d}_a^j} + (\partial_\alpha x_i) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha x^j)} + (\partial_\alpha d_a^i) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha d_a^j)}, \quad (15)$$

и в (14) по индексам, заключенным в квадратные скобки, выполняется антисимметризация.

Заметим, что в силу (14) и в обозначениях (12) тензор  $\mathcal{K}_{ij}$  сводится к

$$\mathcal{K}_{ij} = d_a^i \mathcal{A}_j + \dot{x}_i P_j + \dot{d}_a^i \mathcal{Q}_j - (\partial_\alpha x_i) S_j^{\alpha i} - (\partial_\alpha d_a^i) \mathcal{M}_j^{\alpha i}. \quad (16)$$

Ясно, что в том случае, когда плотность действия не зависит явно от директоров  $d_a^j$ ,

их производных по времени  $\dot{d}_a^j$  и референциальных градиентов  $\partial_\alpha d_a^j$ , последнее в группе условий (14) позволяет сразу же установить *симметрию* тензора напряжений Коши

$$T_k^l = -J^{-1} (\partial_\beta x^l) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\beta x^k)} \quad (\beta = 1, 2, 3). \quad (17)$$

Инвариантность действия относительно трансляций эйлеровых координат, известная как принцип галилеевой инвариантности действия (принцип относительности Галилея), мы *дополним* требованием инвариантности действия относительно сдвигов температурного смещения ( $C'$  – произвольная постоянная):

$$\tilde{\mathcal{G}} = \mathcal{G} + C', \quad (18)$$

что обеспечивается выполнением следующего условия:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{G}} = 0. \quad (19)$$

Поскольку кинетическая составляющая плотности действия инвариантна относительно преобразований (13), (18), то плотность свободной энергии Гельмгольца ( $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ )

$$\psi = \psi(X^\beta, d_a^j, D, D^\bullet, \dot{\mathcal{G}}, \partial_\alpha x^j, \partial_\alpha d_a^j, \partial_\alpha D, \partial_\alpha \mathcal{G}),$$

в свою очередь, обязана выдерживать преобразования вида (13), (18), т. е.

$$\psi(X^\beta, R_j^i d_a^j, D, D^\bullet, \dot{\mathcal{G}}, R_j^i \partial_\alpha x^j, R_j^i \partial_\alpha d_a^j, \partial_\alpha D, \partial_\alpha \mathcal{G}) = \psi(X^\beta, d_a^j, D, D^\bullet, \dot{\mathcal{G}}, \partial_\alpha x^j, \partial_\alpha d_a^j, \partial_\alpha D, \partial_\alpha \mathcal{G}). \quad (20)$$

Последнее обстоятельство означает, что свободная энергия Гельмгольца является некоторой функцией от переменных

$$X^\beta, D, D^\bullet, \dot{\mathcal{G}}, \partial_\alpha D, \partial_\alpha \mathcal{G}, \quad (21)$$

в запись которых не входят эйлеровы индексы, а также следующих инвариантных относительно вращений эйлеровой координатной системы аргументов:

$$g_{\alpha\beta} = g_{ij}(\partial_\alpha x^i)(\partial_\beta x^j), \quad \mathcal{R}_\alpha = g_{ij}(\partial_\alpha x^i)d_\alpha^j, \quad \mathcal{T}_{\alpha\beta} = g_{ij}(\partial_\alpha x^i)(\partial_\beta d_\alpha^j). \quad (22)$$

Каждая из величин, перечисленных в (22), действительно инвариантна относительно произвольных вращений эйлеровой координатной системы, поскольку по всем эйлеровым индексам производится сворачивание с помощью эйлеровых метрических коэффициентов  $g_{ij}$ .

Заметим, что в списке инвариантных аргументов (22) отсутствуют тензоры

$$\mathcal{R}_{ab} = g_{ij}d_\alpha^i d_\beta^j, \quad \mathcal{R}_{\alpha a} = g_{ij}(\partial_\alpha d_\alpha^i)d_\beta^j, \quad \mathcal{T}_{ab\alpha\beta} = g_{ij}(\partial_\alpha d_\alpha^i)(\partial_\beta d_\beta^j). \quad (23)$$

Рациональной основой для этого выступает требование того, чтобы экстрадеформация континуума была невозможна, если отсутствует деформация ( $g_{\alpha\beta} = \overset{\circ}{g}_{\alpha\beta}$ ).

Заметим также, что кинематическое ограничение  $\mathcal{R}_{ab} = \delta_{ab}$  устанавливает, что  $d$ -векторы составляют «жесткий» репер, поэтому экстрадеформация континуума сводится лишь к вращениям составляющих его элементов.

В итоге, считая, что континуум однороден, т. е.

$$\partial_\beta^{\text{expl}} \mathcal{L} = 0 \quad (\beta = 1, 2, 3), \quad (24)$$

и, следовательно, все лагранжевы переменные  $X^\beta$  являются циклическими (игнорируемыми), получаем следующую, удовлетворяющую принципу объективности, ротационно-инвариантную форму свободной энергии Гельмгольца ( $\alpha = 1, 2, 3; \alpha, \beta = 1, 2, 3$ ):

$$\psi = \psi(g_{\alpha\beta}, \mathcal{R}_\alpha, \mathcal{T}_{\alpha\beta}, \overset{\circ}{D}, \overset{\circ}{D}^\bullet, \dot{\mathcal{G}}, \partial_\alpha \overset{\circ}{D}, \partial_\alpha \mathcal{G}). \quad (25)$$

Мы неявно подразумеваем, что приведенная форма (25) должна зависеть также от отсчетной метрики  $\overset{\circ}{g}_{\alpha\beta}$  и референциального положения  $d$ -векторов  $d_\alpha^j$  ( $\alpha = 1, 2, 3$ ).

В форме (25) ротационно-инвариантный аргумент  $g_{\alpha\beta}$  без ограничения общности может быть заменен на

$$\epsilon_{\alpha\beta} = (g_{\alpha\beta} - \overset{\circ}{g}_{\alpha\beta}) / 2. \quad (26)$$

Компоненты  $\epsilon_{\alpha\beta}$  преобразуются по тензорному закону при заменах лагранжевых координат. Тензор  $\epsilon_{\alpha\beta}$  называется тензором деформации Грина. Использование тензора деформации Грина в качестве ротационно-инвариантного аргумента лагранжиана исключительно удобно, т. к. он в силу своего определения учитывает только ту часть деформации континуума, которая наблюдается относительно некоторой фиксированной референциальной конфигурации.

По аналогичным соображениям вместо векторной меры экстрадеформации  $\mathcal{R}_\alpha$  следует использовать относительный вектор экстрадеформации

$$-\gamma_\alpha = \mathcal{R}_\alpha - g_{\alpha\beta} d_\alpha^\beta. \quad (27)$$

Здесь векторы  $d_\alpha^\beta$  указывают референциальное состояние системы  $d$ -векторов.

Вектор  $\gamma_\alpha$  оказывается нулевым, только если каждый из  $d$ -векторов поворачивается и удлиняется так, как это в точности предписывается деформацией континуума. Если последнее обстоятельство имеет место, то  $d_\alpha^i - (\partial_\alpha x^i) d_\alpha^i = 0$ ; умножая обе

части полученного равенства на  $\partial_\beta x^j$  и сворачивая с  $g_{ij}$ , находим  $\mathcal{R}_\alpha^\beta - g_{\beta\alpha} \dot{d}_\alpha^\alpha = 0$ , т. е. относительный вектор экстрадеформации становится равным нулю:  $\gamma_\alpha^\beta = 0$ .

Таким образом, окончательно ротационно-инвариантная форма свободной энергии Гельмгольца получается в виде

$$\psi = \psi(\epsilon_{\alpha\beta}, \gamma_\alpha^\alpha, T_{\alpha\beta}, \overset{\alpha}{D}, \overset{\alpha}{D}^\bullet, \dot{\vartheta}, \partial_\alpha \overset{\alpha}{D}, \partial_\alpha \vartheta) \quad (\alpha = 1, 2, 3; \alpha, \beta = 1, 2, 3). \quad (28)$$

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 13-01-00139 «Гиперболические тепловые волны в твердых телах с микроструктурой»).

## Литература

1. Мураками С., Радаев Ю. Н. Математическая модель трехмерного анизотропного состояния поврежденности // Изв. РАН. Мех. тверд. тела. 1996. №4. С. 93–110.
2. Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Нелинейные уравнения гиперболического термоупругого континуума со сложной микроструктурой: теоретико-полевой подход // Труды VII Всероссийской конф. по механике деформируемого твердого тела, 15–18 октября 2013 г., г. Ростов-на-Дону. Т. II. Ростов-на-Дону: Изд-во Южного федерального университета, 2013. С. 11–15.
3. Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Полевые уравнения и  $d$ -тензоры термоупругого континуума с «тонкой» микроструктурой // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13. Вып. 2. Ч. 1. С. 60–68.
4. Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Теоретико-полевая модель гиперболического термоупругого континуума с «тонкой» микроструктурой // Изв. Тульского гос. университета. Естественные науки. 2013. Вып. 2. Ч. 2. С. 117–127.
5. Радаев Ю. Н., Ковалев В. А. Ротационная инвариантность и объективные формы лагранжианов нелинейного микрополярного континуума второго типа // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13. Вып. 4. Ч. 1. С. 96–102.
6. Cosserat E. et F. Théorie des corps déformables. Paris: Librairie Scientifique A. Hermann et Fils, 1909. 226 pp.
7. Toupin R. A. Theories of Elasticity with Couple-stress // Arch. Rational Mech. Anal. 1964. Vol 17. №5. P. 85–112.
8. Седов Л. И. Введение в механику сплошных сред. М.: Физматгиз, 1962. 284 с.
9. Ильюшин А. А. Механика сплошных сред. М.: Изд-во Московского университета, 1978. 287 с.
10. Грин А., Адкинс Дж. Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. М.: Мир, 1965. 456 с.
11. Бердичевский В. Л. Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука, 1983. 448 с.
12. Ковалев В. А., Радаев Ю. Н. Волновые задачи теории поля и термомеханика. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2010. 328 с.

**КОМПЛЕКСНЫЕ ПОСТОЯННЫЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ПЛОСКИХ  
ТЕРМОУПРУГИХ ВОЛН В КОНТИНУУМАХ С МИКРОСТРУКТУРОЙ**  
*ON COMPLEX PROPAGATION CONSTANTS OF THERMOELASTIC PLANE  
WAVES IN CONTINUA WITH MICROSTRUCTURE*

**В.А. Ковалев**, д.ф.-м.н., проф., Государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования Московский городской университет управления Правительства Москвы, [kovalev.kam@gmail.com](mailto:kovalev.kam@gmail.com)

**Е.В. Мурашкин**, к.ф.-м.н., Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, [murashkin@ipmnet.ru](mailto:murashkin@ipmnet.ru), [evmurashkin@gmail.com](mailto:evmurashkin@gmail.com)

**Ю.Н. Радаев**, д.ф.-м.н., проф., Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, [radayev@ipmnet.ru](mailto:radayev@ipmnet.ru), [y.radayev@gmail.com](mailto:y.radayev@gmail.com)

**Abstract.** The present study is devoted to an analysis of plane harmonic coupled thermoelastic waves propagating in continua with microstructure. The analysis is carried out in the framework of linear type-I thermoelastic micropolar continuum (GNI/CTE) theory. Microstructure is represented by additional microrotations and moment stresses therefore are taken into consideration. Propagation wave surfaces of weak discontinuities of displacements, microrotations, and temperature are studied. Complex propagation constants of plane harmonic coupled thermoelastic waves are obtained. In order to determine complex propagation constants bicubic and biquadratic algebraic equations are derived for waves of displacements, microrotations, and temperature. Those equations are then analyzed by the computer algebra system *Mathematica*.

Появление публикаций [1, 2] способствовало бурному развитию математических моделей термоупругого поведения твердых деформируемых тел (GN-термоупругость), основанных на различных модификациях закона теплопроводности Фурье, ставивших своей целью получение связанных гиперболических уравнений термоупругости, которые гарантировали бы конечную скорость распространения теплового сигнала и возможность пространственного распространения теплового импульса без затухания и искажения.

GN-теории можно разделить на три различных варианта: термоупругость, основанную на законе теплопроводности Фурье, с бесконечно большой скоростью распространения экспоненциально затухающего теплового сигнала (континуум первого типа, GNI/CTE); термоупругость с нулевым производством энтропии и конечной скоростью распространения термических волн «второго звука» (континуум второго типа, GNII, гиперболическая термоупругость); третий вариант (континуум третьего типа, GNIII) смешанный, включает первые два в качестве предельных случаев. Очевидно, что GNIII-теория охватывает более широкий круг моделируемых явлений, по сравнению с классической теорией теплопроводности Фурье. Отметим, также что GNII – единственная известная в настоящее время термодинамически корректная теория, которая позволяет описать теплопроводность в твердом теле как волновой процесс, не сопровождающийся производством энтропии, и сформулировать математическую модель процесса теплопроводности в твердых телах с помощью системы гиперболических уравнений в частных производных, обеспечивающих (в

силу своей аналитической классификации) конечную скорость распространения тепла.

Проблема анализа волновых процессов еще более усложняется, если наряду с обычными перемещениями микрообъем континуума допускает также микровращения. Подобные задачи механики давно привлекают внимание исследователей, начиная с классической работы Э. и Ф. Коссера [3]. В подобных моделях [4-6], в отличие от классических теорий, напряженное состояние описывается несимметричными тензорами деформаций и напряжений, поэтому упругие континуумы в рамках несимметричной теории характеризуются весьма большим числом определяющих упругих постоянных. Необходимость подобного усложнения объясняется невозможностью в рамках классической теории упругости (и пьезоэластичности) объяснить, например, аномальный пьезоэффект в кварце, дисперсию упругих волн, а также ряд других экспериментально наблюдаемых упругих свойств чистых кристаллов.

Полный анализ плоских гармонических GNI/СТЕ-термоупругих волн был выполнен в статье [7] и было показано, что для каждой частоты всегда имеется ровно две постоянных распространения, вещественная и мнимая части которых строго положительны. Плоские волны в GNII-термоупругих средах исследованы в работе [8]. Плоские термоупругие волны «второго звука» характеризуются четырьмя вещественными постоянными распространения, две из которых положительны. В работах [9, 10] проведен анализ постоянных распространения плоских гармонических связанных термоупругих волн, которые описываются линейными уравнениями GNIII-термоупругости. Все указанные исследования проводились в рамках линейной симметричной упругости.

В представляемом докладе рассматривается круг вопросов, посвященных алгоритмам поиска и вычисления комплексных констант распространения плоских связанных гармонических GNI/СТЕ-термоупругих волн в континуумах с микрополярной структурой. В работу включается также исследование задачи о распространении слабых разрывов перемещений, микровращений и температуры. Постоянные распространения в том виде, в котором они обычно находятся, помимо всего прочего, определяются достаточно большим числом независимо изменяющихся параметров, что существенно усложняет анализ волновой картины. В результате исследования детерминантного частотного уравнения для определения комплексных постоянных плоских волн удастся, с помощью факторизации свести полиномиальное уравнение 14-ой степени к биквадратному и бикубическому алгебраическим уравнениям. Все вычисления были реализованы в системе компьютерной алгебры *Mathematica*.

## 1. УРАВНЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ СВЯЗАННОЙ МИКРОПОЛЯРНОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ ПЕРВОГО ТИПА

Рассмотрим линейную модель термоупругого микрополярного континуума первого типа (см., например, [3, 4]). Такой континуум подразумевает, кроме перемещений  $\mathbf{u}$ , наличие микроповоротов  $\boldsymbol{\phi}$ . В этом случае имеется две меры деформации и два тензора деформации:

$$\mathbf{e} = (\nabla \otimes \mathbf{u})^T - \boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{\phi}, \quad \boldsymbol{\Gamma} = (\nabla \otimes \boldsymbol{\phi})^T, \quad (1)$$

где  $\mathbf{e}$  – несимметричный тензор деформаций,  $\boldsymbol{\Gamma}$  – тензор изгиба-кручения,  $\boldsymbol{\epsilon}$  – полностью антисимметричный единичный тензор третьего ранга (символ Леви-Чивита),  $\nabla$  – векторный дифференциальный оператор (набла Гамильтона).

Определяющие соотношения выберем в форме простейших линейных зависимостей [4]. При таком подходе следует учитывать появление в

микрополярном континууме наряду с несимметричным тензором силовых напряжений  $\sigma$  отличного от нуля тензора моментных напряжений  $m$

$$\begin{aligned}\sigma &= (\mu + \eta)e + (\mu - \eta)e^T + (\lambda \text{tr}e - \alpha\theta)\mathbf{I}, \\ m &= (\gamma + \varepsilon)\Gamma + (\gamma - \varepsilon)\Gamma^T + (\beta \text{tr}\Gamma - \zeta\theta)\mathbf{I}.\end{aligned}\quad (2)$$

В приведенных выше соотношениях (2):  $\lambda, \mu, \eta, \gamma, \beta, \varepsilon$  – изотермические определяющие постоянные микрополярной термоупругой среды первого типа;  $\mathbf{I}$  – единичный тензор;  $\theta$  – приращение температуры над отсчетной температурой  $\theta_0$ ;  $\alpha, \zeta$  – определяющие постоянные, обеспечивающие связанность уравнений движения и теплопроводности. Постоянные  $\alpha, \zeta$  зависят не только от механических характеристик континуума, но и от его свойств теплопередачи.

Следствием локальной формулировки закона сохранения количества движения в предположении отсутствия массовых сил и массовых моментов являются уравнения движения микрополярной среды

$$\nabla \cdot \sigma = \rho \ddot{u}, \quad \varepsilon : \sigma + \nabla \cdot m = \mathfrak{I} \dot{\phi}.\quad (3)$$

Здесь  $\rho$  – плотность среды,  $\mathfrak{I}$  – мера микроинерции среды при вращении, точка над символом обозначает частное дифференцирование по времени при фиксированных пространственных координатах.

Определяющий закон теплопроводности выберем в форме закона Фурье  $h = -\Lambda_* \nabla \theta$ , который устанавливает пропорциональность вектора потока тепла  $h$  и отрицательного градиента температуры  $\theta$ ;  $\Lambda_*$  – коэффициент теплопроводности (коэффициент термической диффузии),  $\Lambda_* > 0$ . Тогда следствием закона сохранения энергии будет уравнение теплопроводности.

Выполнив подстановку напряжений  $\sigma$  и  $m$  из формул (2) в уравнения движения (3) и выразив тензоры  $\Gamma$  и  $e$  через перемещения  $u$  и микроповороты  $\phi$ , получим замкнутую систему связанных уравнений теплопроводности и движения для линейного изотропного микрополярного термоупругого тела первого типа при условии отсутствия массовых сил, моментов и внешних источников тепла [4, 5]:

$$\begin{cases} (\lambda + \mu - \eta) \nabla \nabla \cdot u + (\mu + \eta) \nabla \cdot \nabla u + 2\eta \nabla \times \phi - \alpha \nabla \theta - \rho \ddot{u} = 0, \\ (\beta + \gamma - \varepsilon) \nabla \nabla \cdot \phi + (\gamma + \varepsilon) \nabla \cdot \nabla \phi - 4\eta \phi + 2\eta \nabla \times u - \zeta \nabla \theta - \mathfrak{I} \ddot{\phi} = 0, \\ \nabla^2 \theta - \frac{\kappa}{\Lambda_*} \dot{\theta} - \frac{\alpha}{\Lambda_*} \nabla \cdot \dot{u} - \frac{\zeta}{\Lambda_*} \nabla \cdot \dot{\phi} = 0. \end{cases} \quad (4)$$

В системе (4) величина  $\kappa$  – теплоемкость (на единицу объема) при постоянной деформации.

Отметим, что обычно полагают  $\zeta = 0$  [4]. Однако, ради полноты анализа мы сохраним эту определяющую постоянную во всех дальнейших рассуждениях, таким образом учтем связанность процессов микрокручения и теплопередачи.

Скалярное уравнение в системе (4) называется обобщенным уравнением теплопроводности, сопряженным с векторными уравнениями движения (первое и второе уравнения в системе (4)).

## 2. ДЕТЕРМИНАНТНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ПЛОСКИХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ВОЛН В ТЕРМОУПРУГОМ МИКРОПОЛЯРНОМ КОНТИНУУМЕ ПЕРВОГО ТИПА

Плоскую гармоническую связанную микрополярную термоупругую волну можно задать простой аналитической зависимостью вида:

$$u = A e^{i(k \cdot r - \omega t)}, \quad \phi = S e^{i(k \cdot r - \omega t)}, \quad \theta = B e^{i(k \cdot r - \omega t)}, \quad (5)$$

где  $k$  – волновой вектор,  $\omega$  – циклическая частота;  $A, S$  – векторы поляризации волны;  $B$  – амплитуда отклонений температуры от отсчетной температуры. Модуль волнового вектора  $k$  или постоянная распространения  $k$  (волновое число) может быть как вещественной, так и комплекснозначной величиной.

Прямая подстановка (5) в систему дифференциальных уравнений в частных производных (4), с учетом

$$\nabla = i\mathbf{k}, \quad \partial/\partial t = -i\omega,$$

позволяет получить систему линейных уравнений, связывающую волновой вектор  $\mathbf{k}$ , циклическую частоту  $\omega$ , векторы поляризации плоской волны  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{S}$  и амплитуду температурного отклонения  $B$ :

$$\begin{cases} (\rho\omega^2 - (\mu + \eta)k^2)\mathbf{A} - (\lambda + \mu - \eta)\mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}) + 2\eta i\mathbf{k} \times \mathbf{S} - \alpha i\mathbf{k}B = \mathbf{0}, \\ (\mathfrak{I}\omega^2 - 4\eta - (\gamma + \varepsilon)k^2)\mathbf{S} - (\beta + \gamma - \varepsilon)\mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{S}) + 2\eta i\mathbf{k} \times \mathbf{A} - \zeta i\mathbf{k}B = \mathbf{0}, \\ \left(\frac{\kappa}{\Lambda_*} i\omega - k^2\right)B - \frac{\alpha}{\Lambda_*} \omega \mathbf{k} \cdot \mathbf{A} - \frac{\zeta}{\Lambda_*} \omega \mathbf{k} \cdot \mathbf{S} = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Полученную систему линейных уравнений перепишем как следующую формальную линейную алгебраическую систему линейных уравнений относительно комплексных амплитуд  $\boldsymbol{\alpha} = (\mathbf{A}, \mathbf{S}, B)^T$ :

$$\mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}. \quad (7)$$

В том случае, когда волновой вектор  $\mathbf{k}$  сонаправлен с одной из координатных осей (например, с декартовой осью  $x_3$ ), а этого всегда можно добиться за счет поворота координатных осей, комплексная матрица  $\mathbf{D}$  будет обладать достаточно простой структурой, которая легко приводится к блочно-диагональной форме. Для этого, переставим местами 2-ю и 3-ю строки и 2-й и 3-й столбцы, а затем 3-ю и 5-ю строки и 3-й и 5-й столбцы матрицы  $\mathbf{D}$ , после этого структура матрицы системы (7) примет вид

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \mathbf{D}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{D}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{D}_3 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Здесь, составляющие блоки  $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2, \mathbf{D}_3$  представляются через элементы исходной матрицы  $\mathbf{D}$  системы линейных уравнений (7) следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_1 &= \begin{pmatrix} c_{\perp}^{\mu 2} k^2 - \omega^2 & \frac{2i\eta k}{\rho} \\ -\frac{2i\eta k}{\mathfrak{I}} & c_{\perp}^{\mu\mu 2} k^2 - \omega^2 + \frac{4\eta}{\mathfrak{I}} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{D}_2 &= \begin{pmatrix} c_{\perp}^{\mu 2} k^2 - \omega^2 & -\frac{2i\eta k}{\rho} \\ \frac{2i\eta k}{\mathfrak{I}} & c_{\perp}^{\mu\mu 2} k^2 - \omega^2 + \frac{4\eta}{\mathfrak{I}} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{D}_3 &= \begin{pmatrix} c_{\parallel}^2 k^2 - \omega^2 & 0 & \frac{i\alpha k}{\rho} \\ 0 & c_{\parallel}^{\mu\mu 2} k^2 - \omega^2 + \frac{4\eta}{\mathfrak{I}} & \frac{i\zeta k}{\mathfrak{I}} \\ \frac{\alpha\omega k}{\Lambda_*} & \frac{\zeta\omega k}{\Lambda_*} & k^2 - \frac{i\omega}{l_*^2} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где для скоростей продольных и поперечных термоупругих микрополярных волн принято

$$c_{\parallel} = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad c_{\parallel}^{\mu\mu} = \sqrt{\frac{\beta + 2\gamma}{\mathfrak{I}}}, \quad c_{\perp}^{\mu} = \sqrt{\frac{\mu + \eta}{\rho}}, \quad c_{\perp}^{\mu\mu} = \sqrt{\frac{\gamma + \varepsilon}{\mathfrak{I}}}.$$

Нетривиальные решения системы (7) возможно в случае обнуления определителя матрицы  $\mathbf{D}$ . Учитывая представление (8), рассматриваемый

определитель может быть достаточно легко вычислен. При этом, очевидно, выполняется равенство

$$\det \mathbf{D}_1 = \det \mathbf{D}_2.$$

Окончательно для определителя матрицы  $\mathbf{D}$  получим

$$\det \mathbf{D} = (\det \mathbf{D}_1)^2 \det \mathbf{D}_3. \quad (9)$$

Символьные вычисления были выполнены средствами системы компьютерной алгебры *Mathematica*. Встроенная процедура факторизации дает тот же самый результат (9). Условие нетривиальной разрешимости системы (7)

$$\det \mathbf{D} = 0 \quad (10)$$

будет выполнено, если хотя бы один из сомножителей в формуле (9) будет равен нулю, что приводит к биквадратному  $\det \mathbf{D}_1 = 0$  и бикубическому  $\det \mathbf{D}_3 = 0$  уравнениям относительно неизвестной постоянной распространения  $k$ . При этом из биквадратного уравнения определяются фазовые скорости распространения поперечных волн, а из бикубического – фазовые скорости продольных волн.

### 3. ПОСТОЯННЫЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ПЛОСКИХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ПОПЕРЕЧНЫХ ВОЛН В КОНТИНУАМАХ ПЕРВОГО ТИПА

Поиск корней детерминантного (частотного) уравнения (10) начнем с вопросов распространения плоских гармонических поперечных волн. Для этого необходимо найти нули определителя  $\mathbf{D}_1$ , что приводит к биквадратному уравнению

$$\det \mathbf{D}_1 = (c_{\perp}^{\mu 2} k^2 - \omega^2)(c_{\perp}^{\mu \mu 2} k^2 - \omega^2 + \Omega) - \frac{\Omega^2 k^2 \eta}{\rho} = 0, \quad (11)$$

где вводится характерная постоянная, имеющая размерность циклической частоты

$$\Omega = \frac{4\eta}{\mathfrak{F}}.$$

Дальнейшее исследование уравнения (11) удобно проводить, в следующей системе обозначений:

характерные безразмерные постоянные

$$h_1^2 = \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2, \quad h_2^2 = h_1^2 \widetilde{k}_1^{\mu 2} - 1 - \widetilde{k}_1^{-2};$$

отношения скоростей поперечных волн

$$\widetilde{k}_1^{-2} = \frac{c_{\perp}^{\mu 2}}{c_{\perp}^{\mu \mu 2}}, \quad \widetilde{k}_1^{\mu 2} = \frac{c_{\perp}^2}{c_{\perp}^{\mu 2}};$$

постоянные распространения, соответствующие распространению поперечных волн

$$k_{\perp}^{\mu \mu} = \frac{\omega}{c_{\perp}^{\mu \mu}}, \quad k_{\perp}^{\mu} = \frac{\omega}{c_{\perp}^{\mu}}.$$

Тогда в новых переменных уравнение (10) примет более компактный вид

$$\frac{k^4}{k_{\perp}^{\mu 4}} + h_2^2 \frac{k^2}{k_{\perp}^{\mu 2}} + (1 - h_1^2) \widetilde{k}_1^{-2} = 0. \quad (12)$$

Квадраты постоянных распространения поперечной плоской гармонической волны находятся из уравнения (12) в виде

$$\frac{2k^2}{k_{\perp}^{\mu 2}} = -h_2^2 \pm \sqrt{\mathfrak{D}}, \quad \mathfrak{D} = h_2^4 - 4(1 - h_1^2) \widetilde{k}_1^{-2}.$$

Нетрудно показать, что дискриминант  $\mathfrak{D}$  всегда положителен [4], поэтому при произвольной частоте уравнение (12) имеет два вещественных квадрата постоянных распространения. С помощью теоремы Виета можно показать, что

при  $\omega < \Omega$  имеется один положительный квадрат постоянной распространения  $k$ , а при  $\omega > \Omega$  – два положительных квадрата. Отсюда следует, что при  $\omega < \Omega$  существует одна поперечная волна, при  $\omega > \Omega$  – две поперечные волны распространяющиеся без диссипации энергии.

В итоге, получим значения постоянных распространения, соответствующих поперечным волнам:

если  $\omega < \Omega$

$$\sqrt{2} \frac{k_{1,2}}{k_1^\mu} = \pm \sqrt{-h_2^2 + \sqrt{\mathfrak{D}}}, \quad \sqrt{2} \frac{k_{3,4}}{k_1^\mu} = \pm i \sqrt{h_2^2 + \sqrt{\mathfrak{D}}};$$

если  $\omega > \Omega$

$$\sqrt{2} \frac{k_{1,2;3,4}}{k_1^\mu} = \pm \sqrt{-h_2^2 \pm \sqrt{\mathfrak{D}}}.$$

#### 4. ПОСТОЯННЫЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ПЛОСКИХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ПРОДОЛЬНЫХ ТЕРМОУПРУГИХ ВОЛН В КОНТИНУУМАХ ПЕРВОГО ТИПА

Исследование нулей второго сомножителя  $\det \mathbf{D}_3$  в формуле (9) приводит к бикубическому уравнению для определения постоянных распространения плоских гармонических связанных термоупругих волн, в случае, когда такие волны являются продольными. Вычислив определитель, получим

$$\det \mathbf{D}_3 = (\rho \omega^2 - (\lambda + 2\mu)k^2)(\mathfrak{J} \omega^2 - 4\eta - (\beta + 2\gamma)k^2) \left( i \frac{\omega}{l_*^2} - k^2 \right) - \frac{i\omega \alpha^2 k^2}{\Lambda_*} (\mathfrak{J} \omega^2 - 4\eta - (\beta + 2\gamma)k^2) - \frac{i\zeta^2 k^2 \omega}{\Lambda_*} (\rho \omega^2 - (\lambda + 2\mu)k^2). \quad (1)$$

Для упрощения анализа корней уравнения (13), введем следующие обозначения:

постоянные, характеризующие связанность механических и тепловых эффектов

$$s_1^2 = \frac{\alpha^2}{\omega \Lambda_* \rho}, \quad s_1^{\zeta^2} = \frac{\zeta^2}{\omega \Lambda_* \mathfrak{J}};$$

безразмерные постоянные

$$\tilde{k}_1^2 = \tilde{k}_\parallel^2 (1 - h_1^2), \quad Q_1^2 = \frac{\omega}{l_*^2 k_\parallel^2},$$

$$Q_2^2 = Q_1^2 + \tilde{k}_\parallel^2 s_1^{\zeta^2} + s_1^2, \quad Q_3^2 = Q_1^2 (\tilde{k}_1^2 + 1) + \tilde{k}_\parallel^2 (s_1^{\zeta^2} + s_1^2 (1 - h_1^2));$$

постоянные распространения

$$k_\parallel^{\mu\mu} = \frac{\omega}{c_\parallel^{\mu\mu}}, \quad k_\parallel = \frac{\omega}{c_\parallel};$$

отношения скоростей поперечных волн

$$\tilde{k}_\parallel = \frac{k_\parallel^{\mu\mu}}{k_\parallel} = \frac{c_\parallel}{c_\parallel^{\mu\mu}}.$$

После несложных аналитических преобразований, получим более компактную форму уравнения  $\det \mathbf{D}_3 = 0$

$$\frac{k^6}{k_\parallel^6} - (1 + \tilde{k}_1^2 + iQ_2^2) \frac{k^4}{k_\parallel^4} + (\tilde{k}_1^2 + iQ_3^2) \frac{k^2}{k_\parallel^2} - iQ_1^2 \tilde{k}_1^2 = 0. \quad (14)$$

Замена в соответствии с

$$\frac{k^2}{k_\parallel^2} = Y + \frac{1 + \tilde{k}_1^2 + iQ_2^2}{3}$$

позволяет свести бикубическое уравнение (14) к неполному кубическому уравнению

$$Y^3 + pY + q = 0, \quad (15)$$

где коэффициенты уравнения

$$p = \text{Re}p + i\text{Im}p, \quad q = \text{Re}q + i\text{Im}q$$

определяются формулами

$$\text{Re}p = \widetilde{k}_1^{-2} - \frac{1}{3} \left( (1 + \widetilde{k}_1^{-2})^2 - Q_2^4 \right), \quad \text{Im}p = Q_3^2 - \frac{1}{3} \left( (1 + \widetilde{k}_1^{-2})^2 Q_2^2 \right),$$

$$\text{Re}q = \frac{2}{27} + \frac{1}{3} \widetilde{k}_1^{-2} + \frac{1}{3} \widetilde{k}_1^{-4} - \frac{2}{9} Q_1^4 + \frac{2}{27} \widetilde{k}_1^{-6} - \frac{2}{9} \widetilde{k}_1^{-2} Q_1^4 - \frac{1}{9} Q_1^2 Q_3^2,$$

$$\text{Im}q = \frac{2}{9} Q_1^2 - \frac{4}{9} Q_1^2 \widetilde{k}_1^{-2} + \frac{2}{9} \widetilde{k}_1^{-4} Q_1^2 - \frac{2}{27} Q_1^6 + \frac{1}{9} Q_3^2 + \frac{1}{9} \widetilde{k}_1^{-2} Q_3^2.$$

Решение неполного кубического уравнения (15) можно найти согласно формулам Кардано. Приведем указанное решение в канонической алгебраической форме

$$Y_1 = a + b, \quad Y_{2,3} = -\frac{1}{2}(a + b) \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}(a - b), \quad (16)$$

где введены обозначения для кубических радикалов

$$a = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\mathfrak{D}_1}}, \quad b = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\mathfrak{D}_1}}, \quad \mathfrak{D}_1 = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27},$$

$$\text{Re}\mathfrak{D}_1 = \frac{1}{4}(\text{Re}q)^2 - \frac{1}{4}(\text{Im}q)^2 + \frac{1}{27}(\text{Re}p)^3 - \frac{1}{9}(\text{Re}p)(\text{Im}p)^2,$$

$$\text{Im}\mathfrak{D}_1 = \frac{1}{2}(\text{Re}q)(\text{Im}q) + \frac{1}{9}(\text{Re}p)^2(\text{Im}p) - \frac{1}{27}(\text{Im}p)^3.$$

Достаточно выбрать одно из двух возможных значений квадратного корня  $\sqrt{\mathfrak{D}_1}$ . Воспользуемся далее известной формулой для нахождения квадратного корня из комплекснозначного выражения  $p = \text{Re}p + i\text{Im}p$ . Положив  $\sqrt{p} = q = \text{Re}q + i\text{Im}q$ , имеем ровно два значения для  $\sqrt{p}$ , которые вычисляются согласно формулам

$$\sqrt{2}\text{Re}q = \pm \sqrt{\text{Re}p + \sqrt{(\text{Re}p)^2 + (\text{Im}p)^2}}, \quad \text{Im}q = \frac{\text{Im}p}{2\text{Re}q}.$$

Находим также, что

$$\sqrt{2}\text{Re}\sqrt{\mathfrak{D}_1} = \sqrt{\text{Re}\mathfrak{D}_1 + \sqrt{(\text{Re}\mathfrak{D}_1)^2 + (\text{Im}\mathfrak{D}_1)^2}},$$

$$\text{Im}\sqrt{\mathfrak{D}_1} = \frac{\text{Im}\mathfrak{D}_1}{2\text{Re}\sqrt{\mathfrak{D}_1}}.$$

Применяя формулы (16), для каждого из трех возможных значений величины  $a$  необходимо подбирать такое значение  $b$ , для которого выполняется условие  $ab = -p/3$ .

Следуя указанной схеме, получаются все три корня неполного кубического уравнения.

Остается разрешить использованную выше подстановку относительно постоянной распространения и получить итоговые формулы

$$\frac{k_{1,2,3;4,5}}{k_{\parallel}} = \pm \sqrt{Y_{1,2,3} + \frac{1 + \widetilde{k}_1^{-2} + iQ_2^2}{3}}.$$

Значения постоянных распространения, полученные при исследовании бикубического (14) и биквадратного (12) уравнений, можно впоследствии

использовать при отделении однозначных ветвей многозначных квадратных и кубических радикалов на комплексной плоскости  $k = \text{Re}k + i\text{Im}k$ .

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 13-01-00139 «Гиперболические тепловые волны в твердых телах с микроструктурой»).

### Литература

1. Green A.E., Naghdi P.M. On undamped heat waves in an elastic solid // J. Therm. Stress, 1992. V. 15. P. 253-264.
2. Green A.E., Naghdi P.M. Thermoelasticity without energy dissipation // J. Elasticity, 1993. V. 31. P. 189-208.
3. Cosserat E. et F. Théorie des corps déformables. Paris: Librairie Scientifique A. Hermann et Fils. 1909. 242 pp.
4. Nowacki W. Theory of asymmetric elasticity. Oxford: Pergamon Press, 1986. 384 pp.
5. Eringen A.C. Microcontinuum field theories. Vol. 1. Foundations and Solids. Berlin; Heidelberg; N.Y.: Springer-Verlag, 1999. 325 pp.
6. Новацкий В. Теория упругости. М.: Мир, 1975. 872 с.
7. Радаев Ю.Н., Семенов Д.А. Гармонические связанные СТЕ-термоупругие волны в свободном цилиндрическом волноводе // Вестн. Самар. гос. ун-та. Естественнонауч. сер., 2008. №8/1(67). С. 411-459.
8. Ковалев В.А., Радаев Ю.Н., Семенов Д.А. Связанные динамические задачи гиперболической термоупругости // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика, 2009. Т. 9. Вып. 4. Ч. 2. С. 94-128.
9. Ковалев В.А., Радаев Ю.Н. Волновые числа плоских GNIII-термоупругих волн и неравенства, обеспечивающие их нормальность // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика, 2010. Т. 10. Вып. 3. С. 46-53.
10. Ковалев В.А., Радаев Ю.Н. Волновые задачи теории поля и термомеханика. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 2010. 328 с.

# ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ БИОКОМПОЗИТОВ С РАЗЛИЧНЫМИ СТРУКТУРАМИ АРМИРОВАНИЯ

## EXPERIMENTAL INVESTIGATION OF BIOCOMPOSITES WITH DIFFERENT REINFORCEMENT STRUCTURE

А.М. Кокуров - м.н.с., Т.П. Плугатарь - асп., А.В. Малахов - м.н.с.,  
И.Н. Одинцев - к.т.н.

Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН

**Abstract.** This paper describes an experimental investigations of the deformed state of biocomposites by using tensile testing and the coherent optical method. The samples of wood consider as biocomposite. In the present paper the strength of the sample having uniform and heterogeneous reinforcement structures is investigate. These structures are the sample with a knot and without one. The results of tensile tests and displacement fields using coherent optical method are given.

При проектировании современных элементов конструкций всё большее внимание уделяется возможности использования композиционных материалов (КМ) с криволинейным армированием, свойства которых наилучшим образом соответствуют условиям эксплуатации изделий [1]. Можно провести аналогию с природными композитами: их внутренняя структура и геометрическая форма идеально подстраиваются под различные типы характерных нагрузок [2]. В свою очередь, оценка деформационного поведения таких КМ требует проведения комплексных теоретических, численных и экспериментальных исследований.

В настоящей статье представлено экспериментальное исследование поведения биокomпозитов с криволинейным армированием. В качестве биокomпозитов рассмотрены образцы из массива сосны. В работе исследовалась прочность образцов, обладающих однородной (образец без сучка) и неоднородной (образец с сучком) структурами армирования.

Поскольку свойства древесины вдоль ее ствола сильно изменяются, как по высоте, так и по толщине. Для того, чтобы свести к минимуму разброс механических характеристик древесины, использовалась схема изготовления образцов, приведенная на рис. 1. Таким образом получались два образца с различной структурой армирования:

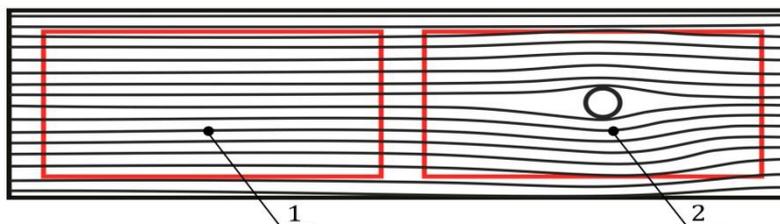


Рис.1. 1 – образец без сучка, 2 – образец с сучком

- 1) Образец с прямолинейной структурой армированием (без сучка);
- 2) Образец с криволинейной структурой армированием (с сучком).

Благодаря такой схеме изготовления, образцы получались с одинаковым концентратором напряжений и объемной долей волокон. Отметим, что сучок удалялся из образца, а в образце с однородной структурой армирования высверливалось отверстие равное диаметру сучка.

В ходе изучения деформационного поведения биокomпозитов при различных вариантах нагрузки, были произведены два типа испытаний:

1) Испытание при одноосном растяжении с доведением образцов до разрушения.

Испытания проводились на универсальной электромеханической испытательной машине «Instron 6025». Для исключения разрушения в зоне самозатягивающихся захватов использовались стальные вставки в виде цилиндров (рис 2). Полученные образцы из массива сосны испытывались на растяжение до полного их разрушения.

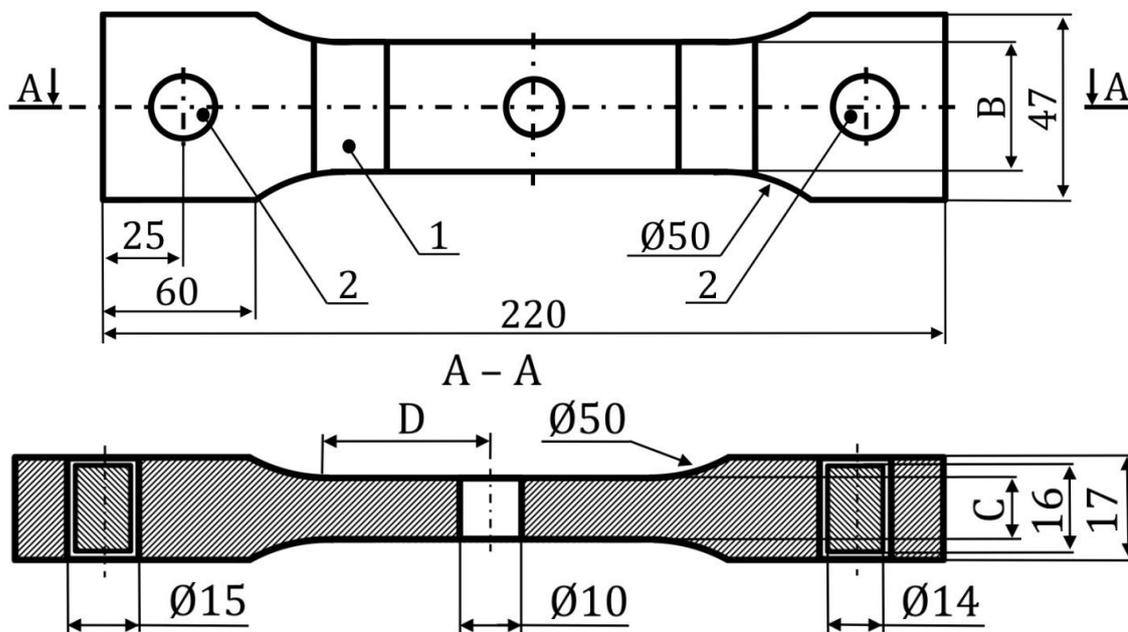


Рис.2. 1 – образец из массива сосны, 2 – стальные вставки

2) Испытание на чистый изгиб методами электронной цифровой спекл-интерферометрии (ЭЦСИ).

Определение полей перемещений при изгибе осуществлялось методом электронной цифровой спекл-интерферометрии [3]. Для данных исследований был смонтирован интерферометр по оптической схеме Майкельсона (рис.3). Источником когерентного излучения служил твердотельный лазер (длина волны света  $\lambda = 0,532$  мкм), Для регистрации изображений применялась цифровая видеокамера.

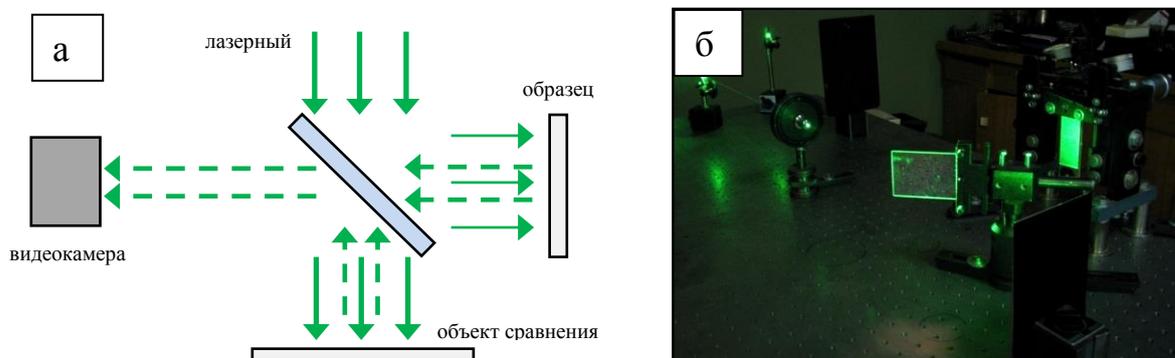


Рис. 3 Схема интерферометра Майкельсона (а) и общий вид экспериментального стенда (б)

Геометрические размеры образцов (рис.4а):  
- ширина  $V=40$  мм;

- высота  $L=150$  мм;

- толщина  $H=4$  мм.

Масса шара использовавшегося в виде груза была равна 66.8 г.

При проведении эксперимента верхняя часть образца была жестко закреплена. Нагружение производилось по нижней части образца, Схема закрепления и нагружения исследуемых образцов приведена на рис 4б.

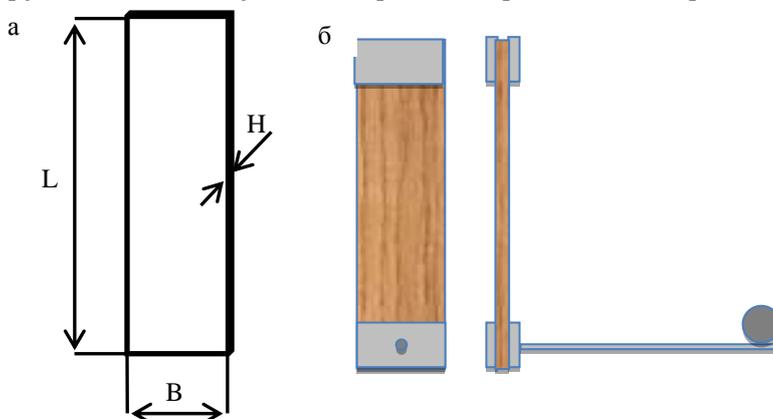


Рис. 4 Размер образца (а) и схема закрепления и нагружения (б)

## Результаты

Результаты испытаний на одноосному растяжению представлены в таблице 1 и на рисунках 5,6.

Таблица 1. Результаты эксперимента

№ образц а	Вид образца	В (мм)	С (мм)	Диаметр отверстия (мм)	Д (мм)	Нагрузка при разрушении (кН)	Предел прочности (МПа)	Партия
1	с сучком	30.5	4	10	40	4.2	51.2	1
2	с сучком	30	4.1	10	10	6.54	79.8	2
3	без сучка	30	4.2	10	10	8.31	98.9	2
4	с сучком	32.5	4.1	10	0	8.13	88.1	3
5	без сучка	30	4	10	0	6.35	79.4	3

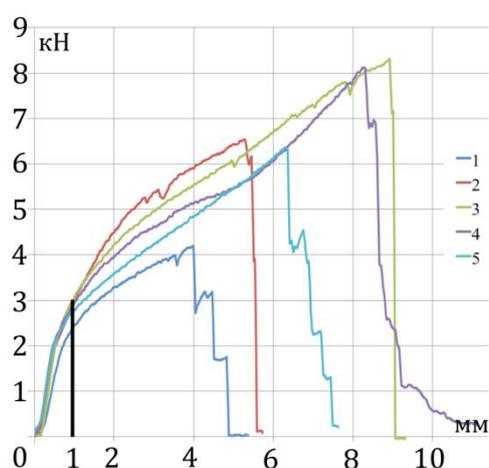


Рис.5. Диаграмма растяжения  
1 – образец 1; 2 – образец 2; 3 – образец 3;  
4 – образец 4; 5 – образец 5.



Рис.6. Разрушение образцов  
а – образец 1; б – образец 5;  
в – образец 4.

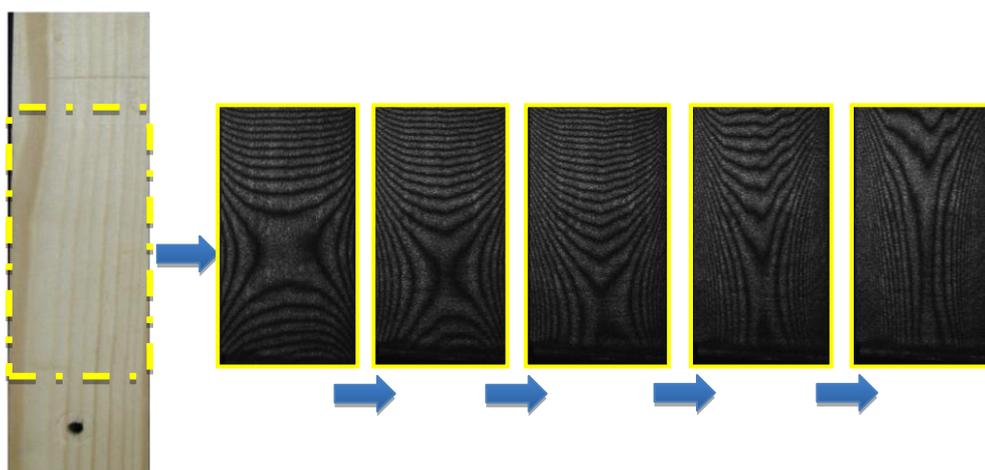
По результатам испытаний были сделаны следующие выводы:

1. На диаграмме растяжения рис.5 участок соответствующий удлинению  $0 \div 1$  (мм) есть участок влияния захватов. Поскольку именно на этот момент происходило смятие образца в захватах до цилиндрических вставок.

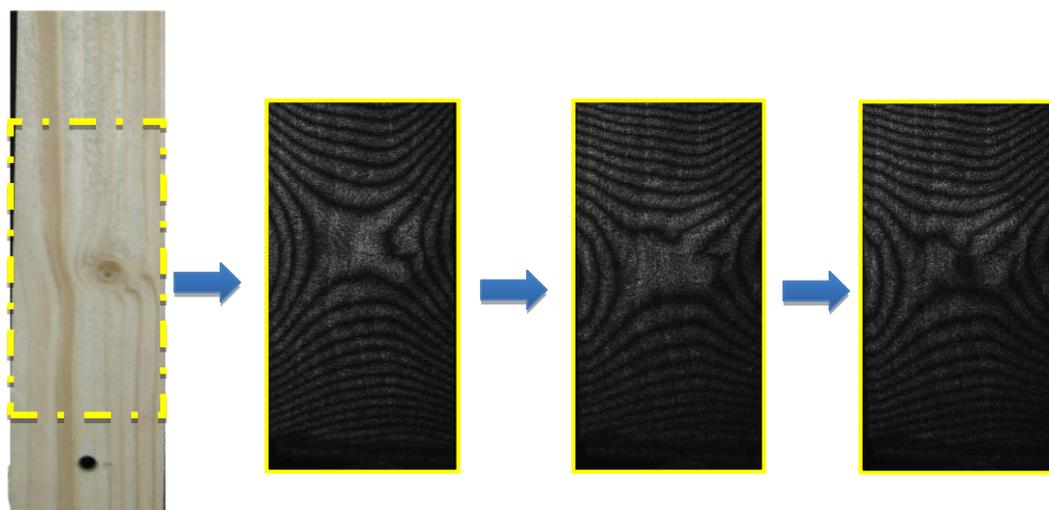
2. Образцы имеют различные механизмы разрушения рис 6. Так, для образца №1 механизмом разрушения является расслаивание, в то время как для образцов №4 и №5 - разрушение волокон. Эти различия в разрушении напрямую связаны с технологическим операциями (фрезерование).

3. У образцов с сучком выше несущая способность, чем у образцов с прямолинейным армированием (рис. 5, таблица 1.). Так же было замечено, что разрушение образца с сучком (№4,№1) происходит не по отверстию, что говорит о равнопрочности этого образца (рис. 6).

В ходе испытаний на чистый изгиб были получены интерференционные картины представленные на рисунках 7,8.



*Рис. 7 Интерферограммы полей перемещений образца без сучка*



*Рис. 8 Интерферограммы полей перемещений образца с сучком*

Полученные картины отражают влияние дефекта в виде сучка на деформацию образца. Как видно, линии искажаются, искривляются и прерываются в месте нахождения дефекта. Что, в свою очередь, дает возможность использовать электронную цифровую спекл-интерферометрию для анализа дефектов и неоднородностей структуры материала, в частности древесины.

По проведенному экспериментальному исследованию можно сделать следующие выводы:

1. Для исследования образцов из древесины можно применять такой высокочувствительный метод как электронно-цифровая спекл интерферометрия.

2. Возможно использование электронной цифровой спекл-интерферометрии для изучения влияния дефектов и неоднородностей структуры материала на деформацию объекта.

### **Литература**

1. Малахов А.В. Полилов А.Н. Построение траекторий волокон, огибающих отверстие, и их сравнение со структурой древесины в зоне сучка // Проблемы машиностроения и надежности машин, 2013, №4, с. 57-62.
2. Cheng L., Thomas A., Glancey J.L., Karlsson A.M. Mechanical Behavior of Bio-inspired Laminated Composites // Composites: Part A, 2011, vol. 42, № 2, p. 211-220.
3. Разумовский И.А. Интерференционно-оптические методы механики деформируемого твердого тела. – М.: Изд. МГТУ. 2007. – 240 с.

**ВЫПУЧИВАНИЕ СЖАТЫХ КРУГОВЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ  
ОБОЛОЧЕК ИЗ ЦИРКОНИЕВОГО СПЛАВА В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ**  
*CREEP BUCKLING OF COMPRESSED CIRCULAR CYLINDRICAL SHELLS  
OF ZIRCONIUM ALLOY*

**С.Н. Коробейников** – д.ф.-м.н., с.н.с, **И.В. Любашевская** - к.ф.-м.н.,

**Н.Г. Торшенов** – к.т.н., **А.Ю. Ларичкин, Е.В. Чунихина**

Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН,

Новосибирский государственный университет

[S.N.Korobeynikov@mail.ru](mailto:S.N.Korobeynikov@mail.ru)

**Abstract:** Experiments were performed to study the deformation and buckling of axially compressed circular cylindrical shells of Zr2.5Nb zirconium alloy under creep conditions. Computer simulation using the MSC.Marc 2012 software was conducted by step-by-step integration of the equations of quasistatic deformation of thin shells using Norton's law of steady creep. The results of the experiment and computer simulation show that the buckling modes are a combination of axisymmetric bulges located near one end or both ends of the shell and nonaxisymmetric buckling modes with the formation of three or four waves in the circumferential direction. A comparison is made of the time dependences of the axial strain of the shells obtained in the experiment and by computer simulation. It is shown that for large axial compressive stresses, these dependences are in satisfactory agreement. For lower values of these stresses, the difference between the theoretical and experimental dependences is greater.

Проведены экспериментальные исследования деформирования и выпучивания сжатых по оси круговых цилиндрических оболочек из циркониевого сплава Zr<sub>2,5</sub>Nb в условиях ползучести. Компьютерное моделирование с использованием пакета MSC.Marc 2012 проводилось путем пошагового интегрирования уравнений квазистатического деформирования тонких оболочек с помощью закона Нортон установившейся ползучести. По результатам конечно-элементного моделирования и лабораторных экспериментов установлено, что формы выпучивания являются комбинацией осесимметричных складок, расположенных либо вблизи одного торца, либо вблизи обоих торцов оболочки и несимметричных форм выпучивания с образованием трех или четырех волн в окружном направлении. Проведено сравнение осевых деформаций оболочек от времени, полученных в эксперименте и при компьютерном моделировании. Показано, что при больших значения осевых сжимающих напряжений эти зависимости удовлетворительно согласуются. При меньших значениях этих напряжений различия теоретических и экспериментальных зависимостей более значительно.

Известно, что нагруженные металлические изделия при повышенных температурах испытывают свойство ползучести [1-10]. Это свойство проявляется в том, что при постоянных напряжениях материал изделий испытывает медленные квазистатические деформации во времени (от нескольких минут до нескольких лет). Для тонкостенных конструкций в условиях сжатия при некоторых пороговых значениях времени эти деформации быстро нарастают и процесс деформирования этих конструкций теряет устойчивость, сопровождающуюся быстрым изменением формы и потерей несущей способности. Для избежания подобного рода катастрофических явлений, необходимо уметь определять как критические времена, так и формы выпучивания сжатых тонкостенных конструкций в условиях ползучести.

Круговые цилиндрические оболочки принадлежат к типичным силовым нагруженным элементам конструкций, в частности, эксплуатируемым в ядерных реакторах в условиях повышенной температуры. Известно, что величины критических нагрузок выпучивания сжатых по оси круговых цилиндрических оболочек чувствительны к несовершенствам формы, неизбежным при их изготовлении [11-16]. При выпучивании таких оболочек в пределах упругого деформирования, малые начальные неправильности геометрии могут в несколько раз снизить значения критических нагрузок, а сжатые оболочки, деформирующиеся в условиях ползучести, могут иметь большой разброс критических времен при различных амплитудах и формах начальных неправильностей. Разработанные пакеты прикладных программ позволяют проводить математическое моделирование процессов деформирования твердых тел в условиях, близких к реальности. Тем не менее задачи выпучивания сжатых по оси круговых цилиндрических оболочек остаются «крепким орешком» для пользователей современных коммерческих пакетов прикладных программ.

Целью настоящей работы является проведение математического моделирования процессов деформирования и выпучивания сжатых по оси круговых цилиндрических оболочек из циркония в условиях ползучести с использованием пакета прикладных программ MSC.Marc 2012 [17]. Результаты математического моделирования сопоставляются с данными экспериментов, проведенных авторами настоящей работы.

Геометрические параметры и схема нагружения цилиндрических оболочек приведена на рис. 1 (см. рис. 1,а). На этом же рисунке приведены геометрические параметры двух различных типов оболочек, с которыми проводились эксперименты. Рассматривались оболочки одной и той же толщины  $h=1$  мм, одного и того же радиуса срединной поверхности  $R=40,5$  мм, но различной длины  $L$ : «короткие» оболочки с рабочей длиной 48 мм (рис. 1,б) и «длинные» оболочки с рабочей длиной 69 мм (рис. 1,в). Размеры экспериментальных образцов и сжимающих напряжений приведены в Таблице 1.

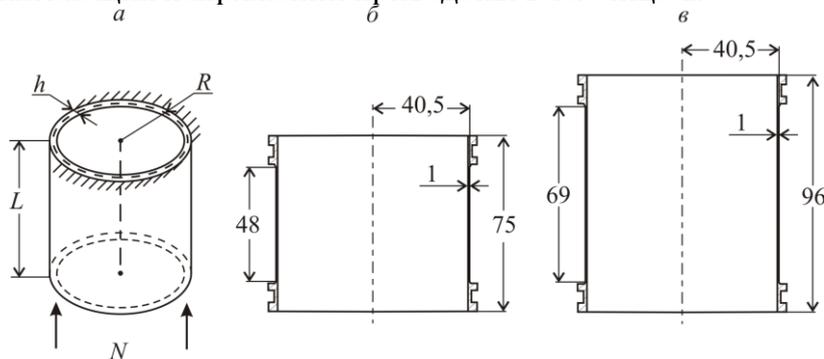


Рис. 1. Круговые цилиндрические оболочки, сжатые по оси: (а) геометрические параметры и схема нагружения; (б) «короткие» оболочки; (в) «длинные» оболочки.

Таблица 1

Геометрические параметры оболочек и сжимающие напряжения в образцах

Номер образца	$R, \text{мм}$	$L, \text{мм}$	$H, \text{мм}$	$L/R$	$R/h$	$\sigma, \text{МПа}$
4	40,136	48,544	0,964	1,210	41,657	10,0
6	40,639	48,525	0,953	1,194	42,643	7,5
7	40,622	48,869	0,960	1,203	42,315	6,0
12	40,587	69,811	0,916	1,720	44,309	6,0
13	40,651	69,631	1,025	1,713	39,659	10,0
14	40,692	69,247	0,963	1,702	42,255	10,0

Так как деформации оболочки малы, но повороты и перемещения могут быть большими, то используем общую лагранжеву формулировку уравнений, справедливую для такого рода деформаций неупругой среды [18].

Для общей лагранжевой формулировки уравнений определяющие соотношения упруго-ползучей среды имеют следующий вид [18,19]:

$$\dot{\mathbf{S}} = \mathbb{C}^E : \dot{\mathbf{E}} - 2\mu \dot{\mathbf{E}}^c, \quad (1)$$

где операция «:» обозначает двойное внутреннее произведение тензоров [18], точка над величиной обозначает ее скорость изменения во времени,  $\mathbf{S}$  – второй тензор напряжений Пиолы – Кирхгофа,  $\mathbf{E}$  – тензор деформаций Грина – Лагранжа,  $\mathbb{C}^E$  – тензор упругости (четвертого порядка), который для малых деформаций упругой среды имеет следующий вид [18]:

$$\mathbb{C}^E \equiv \lambda \mathbb{C}_I + \mu (\mathbb{C}_{II} + \mathbb{C}_{III}), \quad (2)$$

где  $\mathbb{C}_I$ ,  $\mathbb{C}_{II}$ ,  $\mathbb{C}_{III}$  – базовые изомеры изотропного тензора четвертого порядка [18]. Здесь  $\lambda$  и  $\mu$  – константы Ламэ, которые выражаются через модуль Юнга  $E$  и коэффициент Пуассона  $\nu$  следующим образом

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (3)$$

В (1)  $\dot{\mathbf{E}}^c$  обозначает скорость изменения ползучей составляющей тензора деформаций Грина – Лагранжа, которую мы определяем следующим образом [18]:

$$\dot{\mathbf{E}}^c = \gamma \mathbf{S}', \quad \mathbf{S}' \equiv \mathbf{S} - \frac{1}{3}(\text{tr}\mathbf{S})\mathbf{I}, \quad (4)$$

где  $\mathbf{I}$  обозначает единичный тензор второго порядка, «tr» обозначает след тензора второго порядка. Параметр  $\gamma$  определяем в соответствии с законом Нортон (установившейся ползучести)

$$\gamma(S_e) = \frac{3}{2} B S_e^{n-1}, \quad (5)$$

где  $B$  и  $n$  – параметры, определяемые из эксперимента,  $S_e$  – эффективное напряжение, которое определяется следующим образом:

$$S_e \equiv \sqrt{\frac{3}{2} \text{tr}((\mathbf{S}')^2)}. \quad (6)$$

Рассматривались оболочки из циркониевого сплава, которые деформировались при температуре 730° С. Для этой температуры упругие деформации оболочек характеризуются следующими константами материала [20]: модуль Юнга  $E = 50$  ГПа, коэффициент Пуассона  $\nu = 0,4$ . Константы ползучести материала в (5) имеют разные значения для материалов «коротких» и «длинных» оболочек: для «коротких» оболочек  $B = 5,17 \cdot 10^{-8} (\text{МПа})^{-n} \text{c}^{-1}$ ,  $n = 2,75$ , для «длинных» оболочек  $B = 1,54 \cdot 10^{-9} (\text{МПа})^{-n} \text{c}^{-1}$ ,  $n = 4,10$ .

Как для «коротких», так и для «длинных» оболочек эксперименты по ползучести проводились для трех разных значений сжимающих напряжений:  $\sigma = 10; 7,5; 6,0$  МПа (приложенная к торцу оболочки сила не изменялась во времени). Испытанные оболочки выпучивались с образованием как трех, так и четырех волн по окружности. Результаты проведенных экспериментов по деформированию и выпучиванию оболочек в условиях ползучести представлены на рис. 2,3. Видно, что оболочки при приложении напряжения  $\sigma = 10$  МПа выпучиваются по четырем волнам (рис. 2,а, 3,б,в), а при приложении напряжения  $\sigma = 6,0$  МПа – по трем волнам (рис. 2,в, 3,а). На рис.4 приведены графики

зависимости относительного перемещения торца оболочки, к которому приложена осевая сила, от времени.

Компьютерное моделирование деформирования оболочек проводилось с использованием пакета MSC.Marc 2012. Конечно-элементная модель строилась с изопараметрическими восьми узловыми элементами оболочки с биквадратичной интерполяцией вектора перемещений (элемент тип 22 пакета MSC.Marc 2012 [21]). Результаты компьютерного моделирования деформирования и выпучивания оболочек в условиях ползучести представлены на рис. 2 - 4. Отметим, что без задания каких-либо возмущений оболочки в расчете выпучиваются осесимметрично с образованием двух складок около торцов. Для моделирования неосесимметричного выпучивания, к оболочке прикладывались постоянные сжимающие силы малой величины (0,06 Н), действующие по нормали к срединной поверхности оболочки, приложение которых согласовывалось с формами выпучивания, полученными в эксперименте. На рис. 2 и 3 приведены деформированные конфигурации «коротких» и «длинных» оболочек соответственно при приложении осевого напряжения  $\sigma = 6,0$  МПа (рис. 2,в, 3,а),  $\sigma = 7,5$  МПа (рис. 2,б),  $\sigma = 10$  МПа (рис. 2,а, 3,б,в). На рис. 4 приведены полученные в расчете графики относительного перемещения торца оболочки от времени. Точки бифуркации, соответствующие ответвлению неосесимметричного решения от осесимметричного, приведены на графиках.

Из рис. 2 и 3 следует, что формы выпучивания, полученные в численном решении, хорошо согласуются с такими формами, полученными в эксперименте. Однако кривые ползучести, полученные в численном решении, хорошо согласуются только при нагружении оболочки напряжением  $\sigma = 10$  МПа (рис. 4,а), при нагружении же оболочки напряжениями  $\sigma = 7,5$  МПа,  $\sigma = 6,0$  МПа графики кривых ползучести (а, следовательно, и критическое время) различаются (рис. 4).



Рис. 2. Формы выпучивания «коротких» оболочек, полученные в эксперименте (слева) и при компьютерном моделировании (справа): а – образец 4 ( $\sigma = 10$  МПа), б – образец 6 ( $\sigma = 7,5$  МПа), в – образец 7 ( $\sigma = 6,0$  МПа),  $t$  – критические времена выпучивания.

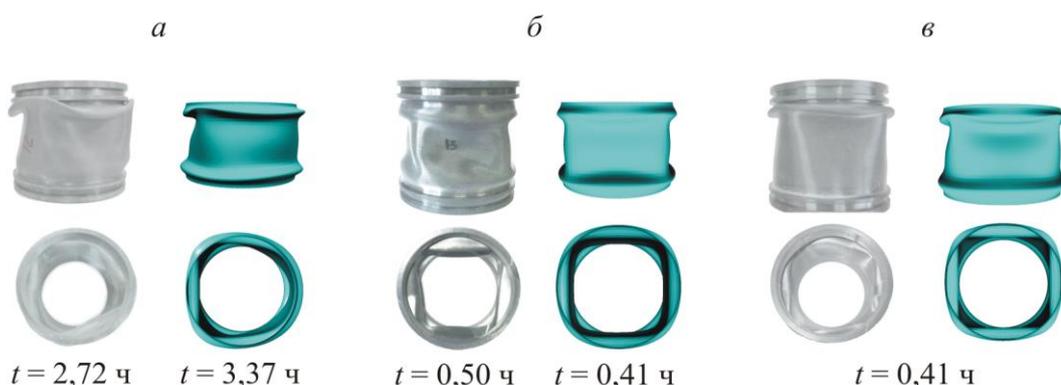


Рис. 3. Формы выпучивания «длинных» оболочек, полученные в эксперименте (слева) и при компьютерном моделировании (справа): а – образец 12 ( $\sigma = 6,0$  МПа), б – образец 13 ( $\sigma = 10$  МПа), в – образец 14 ( $\sigma = 10$  МПа),  $t$  – критические времена выпучивания.

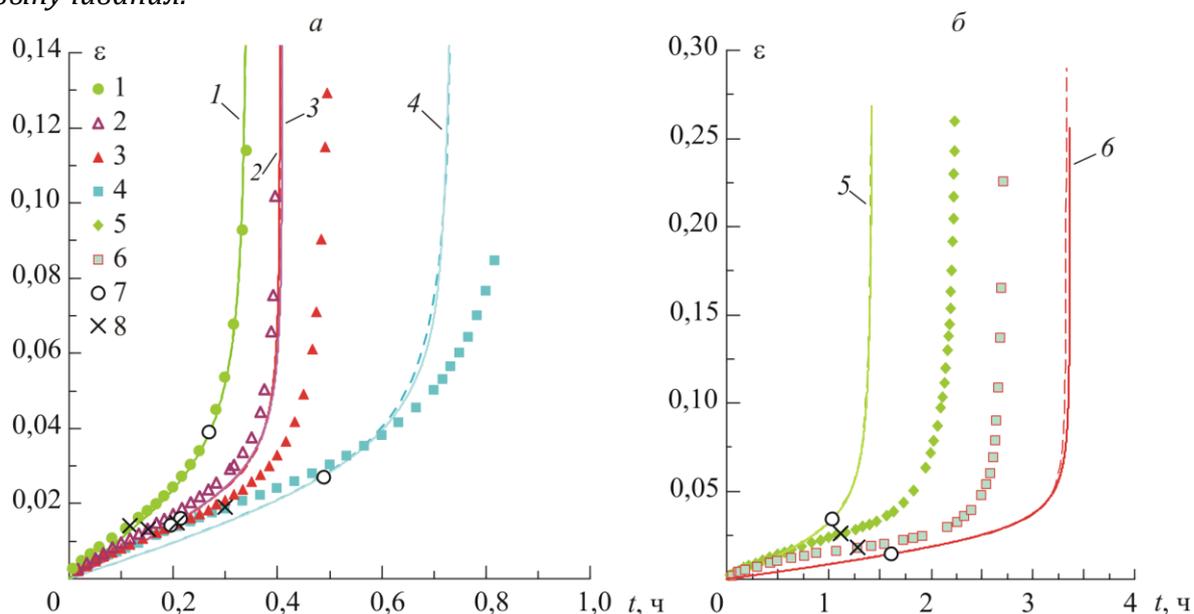


Рис. 4. Зависимость относительного сжатия оболочки  $\varepsilon$  от времени  $t$ : а – оболочки к которым приложено осевое напряжение  $\sigma = 10$  МПа (1 – 3), и  $\sigma = 7,5$  МПа (4);

б – оболочки, к которым приложено осевое напряжение  $\sigma = 6,0$  МПа (5, 6); точки (1 – 6) – экспериментальные данные, линии (1 – 6) – результаты компьютерного моделирования (штриховые линии – осесимметричное деформирование, сплошные линии – неосесимметричное деформирование при воздействии возмущающих сил); маркеры: 1 – образец 4, 2 – образец 14, 3 – образец 13, 4 – образец 6, 5 – образец 7, 6 – образец 12, 7 – точки бифуркации, полученные при компьютерном моделировании, 8 – точки, соответствующие моментам времени, в которые, скорость изменения величины  $\dot{\varepsilon}$  равна нулю.

В экспериментальных исследованиях установлено, что выпучивание оболочек сопровождается образованием либо четырех волн в окружном направлении, либо комбинации трех и четырех волн. Кроме того, для «длинных» оболочек с близкими геометрическими и механическими параметрами установлено, что выпучивание оболочки может происходить с образованием складки либо вблизи одного торца оболочки, либо вблизи обоих торцов. Выпучивание оболочек происходит по следующему сценарию: сначала имеет

место осесимметричное деформирование оболочки с образованием складок вблизи обоих торцов с почти постоянной скоростью, затем скорость деформирования начинает возрастать, происходит медленно развивающееся неосесимметричное выпучивание оболочек с постоянно растущей скоростью движения нагруженного торца, при резком увеличении скорости этого движения эксперимент заканчивается.

В настоящей работе впервые в решениях задач о выпучивании оболочек в условиях ползучести несимметричная относительно ортогональной плоскости (плоскости перпендикулярной к образующей оболочки) форма деформации трактуется как форма выпучивания сжатой по оси круговой цилиндрической оболочки. При этом как в эксперименте, так и при компьютерном моделировании получены симметричные (рис. 2,а,б,в, 3,б) и несимметричные (рис. 3,а,в) относительно ортогональной плоскости формы выпучивания. С использованием компьютерного моделирования деформирования оболочки показано, что, вводя возмущающую силу, можно получить несимметричную относительно ортогональной плоскости форму деформирования.

При моделировании, для реализации возможности несимметричного относительно ортогональной плоскости выпучивания оболочек, возмущающие силы смещались от середины образующей оболочки ближе к одному из торцов (рис. 5,б). Если возмущающие силы расположены симметрично относительно ортогональной плоскости (рис. 5,а), то осесимметричные складки образуются вблизи обоих торцов с последующим наложением на поверхности оболочки неосесимметричных форм выпучивания с образованием трех или четырех волн в окружном направлении. При действии возмущающих сил, расположенных несимметрично относительно ортогональной плоскости, в случае «длинных» оболочек реализуется форма выпучивания с одной складкой вблизи одного из торцов (рис. 3,а,в). В то же время для «коротких» оболочек действие сил, вызывающих несимметричное выпучивание оболочки относительно ортогональной плоскости, не приводит к развитию несимметричных форм выпучивания.

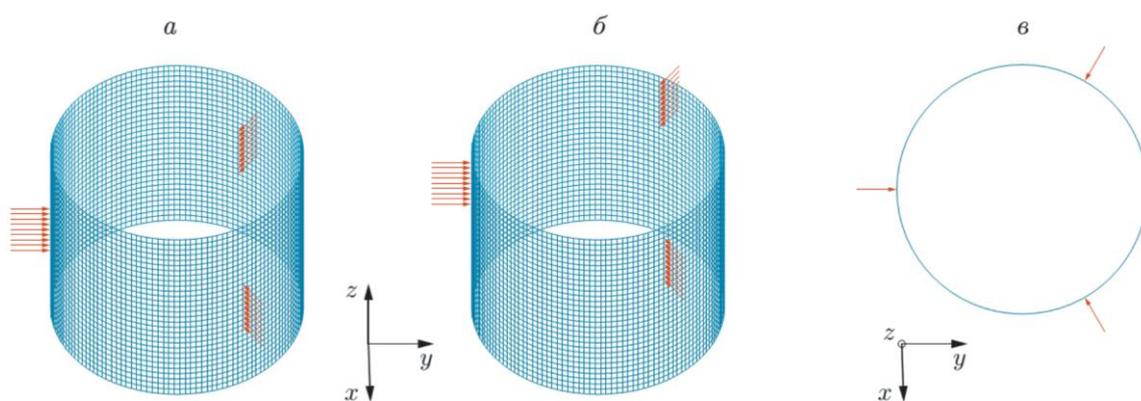


Рис. 6. Возмущающие силы типов 3 и 7, соответствующие формам выпучивания оболочки с тремя волнами в окружном направлении: а — возмущающие силы типа 3 (вид оболочки сбоку), б — возмущающие силы типа 7 (вид оболочки сбоку), в — возмущающие силы типов 3 и 7 (вид оболочки сверху).

**Заключение.** Проведены экспериментальные исследования по деформированию и выпучиванию тонкостенных круговых оболочек из сплава Zr2,5Nb при температуре 730° С. Проведено моделирование выпучивания круговых оболочек в

условиях ползучести, которое показало совпадение форм выпучивания в эксперименте и расчете.

При решении задач в отсутствие возмущения геометрии и без добавления каких-либо возмущающих сил получены осесимметричные формы выпучивания, которые не согласуются с формами выпучивания, полученными в эксперименте. Для реализации возможности неосесимметричного выпучивания оболочек к ним прикладывались возмущающие силы, соответствующие формам выпучивания с образованием от одной до шести волн в окружном направлении. Тем не менее, при задании возмущающих сил, соответствующих одной, двум или шести волнам в окружном направлении, форма выпучивания с пятью волнами не возникает, но, так же как в эксперименте, таким возмущениям соответствуют формы выпучивания с образованием четырех волн или комбинации трех и четырех волн в окружном направлении. Таким образом, для рассматриваемых оболочек формы выпучивания с образованием трех или четырех волн в окружном направлении почти равновероятны.

В экспериментах и численном моделировании получены несимметричные относительно ортогональной плоскости формы выпучивания для исследуемого материала. Показано, что удовлетворительное соответствие расчетных кривых с экспериментальными данными зависимостей относительного перемещения торца оболочки от времени достигается только в случае приложения значительных сжимающих напряжений. При меньших напряжениях различия теоретических и экспериментальных данных более существенны.

Работа выполнена при финансовой поддержке  
Российского фонда фундаментальных исследований  
(код проекта 12-08-00707, 13-01-00481)  
и программы Президиума РАН № 25.8.

### **Литература**

1. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. – 752 с.
2. Bazant Z. P. Stability of structures. 2nd ed. / Z. P. Bařzant, L. Cedolin. Mineola; N. Y.: Dover Publ., 2003.
3. Betten J. Creep mechanics. 3rd ed. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2008.
4. Качанов Л. М. Теория ползучести. М.: Физматгиз, 1960.
5. Работнов Ю. Н. Теория ползучести // Механика в СССР за 50 лет: В 4 т. М.: Наука, 1972. Т. 3. С. 143–149.
6. Kassner M. E. Fundamentals of creep in metals and alloys. 2nd ed. Amsterdam: Elsevier, 2009.
7. Цвелодуб И. Ю. Постулат устойчивости и его приложения в теории ползучести металлических материалов. Новосибирск: Ин-т гидродинамики, 1991.
8. Никитенко А. Ф. Ползучесть и длительная прочность металлических материалов. Новосибирск: Ин-т гидродинамики, 1997.
9. Соснин О. В. Энергетический вариант теории ползучести / О. В. Соснин, Б. В. Горев, А. Ф. Никитенко. Новосибирск: Ин-т гидродинамики, 1986.
10. Работнов Ю. Н., Шестериков С. А. Устойчивость стержней и пластинок в условиях ползучести // Прикл. математика и механика. 1957. Т. 21, № 3. С. 406–412.
11. Баранов А. Н., Морозов М. А. Экспериментальное исследование критической деформации цилиндрических оболочек в условиях ползучести // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1971. № 1. С. 114–118.

12. Кузнецов А. П., Юнгерман Н. М. Экспериментальное исследование устойчивости оболочек в условиях ползучести // ПМТФ. 1965. № 4. С. 128–131.
13. Samuelson L. A. Experimental investigation of creep buckling of circular cylindrical shells under axial compression and bending // Trans. ASME. Ser. B. J. Engng Indust. 1968. V. 90, N 4. P. 589–595.
14. Hagihara S., Miyazaki N. Finite element creep buckling analysis of circular cylindrical shell under axial compression taking account of creep damage // Metals Materials. 1998. V. 4, N 3. P. 295–298.
15. Григолюк Э.И., Кабанов В.В. Устойчивость оболочек. М.: Наука, 1978.
16. Yamaki N. Elastic Stability of Circular Cylindrical Shells. Amsterdam: North-Holland, 1984.
17. MARC Users Guide. Vol. A: Theory and Users Information. Santa Ana: MSC Software Corporation, 2012.
18. Коробейников С.Н. Нелинейное деформирование твердых тел. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.
19. Коробейников С.Н., Олейников А.И., Горев Б.В., Бормотин К.С. Математическое моделирование процессов ползучести металлических изделий из материалов, имеющих разные свойства при растяжении и сжатии // Вычислительные методы и программирование. 2008. Т. 9, № 1, с. 346-365.
20. Любашевская И.В., Торшенов Н.Г., Соснин О.В., Локтионов В.Д. Деформационно-прочностные свойства циркониевого сплава при температурах 600-800 °С // Сб. научн. тр. «Динамика сплошной среды», Вып. 116, Новосибирск: изд-во СО РАН, 2000, с. 198-201.
21. MARC Users Guide. Vol. B: Element Library. Santa Ana: MSC Software Corporation, 2012.

# НЕКОТОРЫЕ ПРОБЛЕМЫ ПОЛЗУЧЕСТИ И ДЛИТЕЛЬНОЙ ПРОЧНОСТИ МЕТАЛЛОВ

## SOME PROBLEMS OF CREEP AND CREEP RUPTURE OF METALS

А.М. Локощенко – д.ф.-м.н., проф.

НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова

[loko@imec.msu.ru](mailto:loko@imec.msu.ru)

**Abstract.** The basic experimental and theoretical results on creep and creep rupture of metals are described, which are received by researches of Institute of Mechanics (Lomonosov Moscow State University). These results are development of the kinetic theory of creep and creep rupture, which was discovered by distinguished soviet academician Yuri Nikolayevich Rabotnov. The basic special features of creep models are described, which correspond to tests at constant and variable stresses, strain and complex stress states, aggressive media etc.

В этом году исполняется 100 лет со дня рождения выдающегося советского ученого, академика Юрия Николаевича Работнова. Юрий Николаевич разработал несколько принципиально новых научных направлений. Особое место в этом ряду занимают его пионерские результаты в области ползучести и длительной прочности материалов.

В фундаментальной монографии [1] Ю.Н. Работнов подытожил результаты широкого круга исследований, проводившихся во всем мире, и сформулировал теорию ползучести в форме концепции механического уравнения состояния. Согласно этой концепции скорость ползучести  $\dot{p}$  структурно устойчивого материала зависит от величины приложенного напряжения  $\sigma$ , температуры  $T$  и структурного состояния материала в этот момент времени  $t$ :

$$\dot{p} = \dot{p}(\sigma, T, q_1, q_2, \dots, q_N). \quad (29)$$

Структурное состояние материала можно характеризовать набором величин  $q_1, q_2, \dots, q_N$ , которые называются структурными параметрами. Структурные параметры  $q_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) в процессе деформирования изменяются во времени в соответствии с кинетическими уравнениями

$$dq_i = a_i dp + b_i d\sigma + c_i dt + g_i dT, \quad (30)$$

причем коэффициенты  $a_i, b_i, c_i, g_i$  - функции от  $p, \sigma, t, T$ , а также от параметров  $q_1, q_2, \dots, q_N$ . В качестве структурных параметров  $q_i$  можно рассматривать деформацию ползучести  $p$ , поврежденность  $\omega$ , рассеянную работу, эффективную площадь сечения, уменьшаемую вследствие растрескивания, размер магистральной трещины, плотность дислокаций, уменьшаемую при растяжении плотность материала и др. С помощью системы уравнений (29) - (30) можно описать различные наблюдаемые в экспериментах особенности ползучести и длительной прочности металлов.

В данной статье приведены некоторые экспериментально-теоретические результаты, полученные в этом направлении сотрудниками Института механики Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова. До 2002 года эти исследования проводились под руководством члена-корреспондента Российской Академии наук Сергея Александровича Шестерикова, с 2003 г. по настоящее время – под руководством автора настоящей статьи.

1. Условное разделение II и III стадий процесса ползучести. Существующая методика введения  $\omega$  в виде отношения  $\sigma / (1 - \omega)$  приводит к тому, что в случае условного разделения кривой ползучести при постоянном напряжении на участки установившейся и ускоренной ползучести граница между ними строго определена. Было показано [2], что если в качестве эффективного напряжения вместо  $\sigma / (1 - \omega)$  принять отношение  $\sigma / (1 - \omega^r)$ , где показатель степени  $r > 0$  характеризует нелинейность влияния накопленной поврежденности на процесс ползучести, то это расширит возможности описания реально наблюдаемых кривых ползучести.

2. Формулировка соотношений ползучести с учетом нескольких параметров состояния. Наиболее перспективной в этом направлении оказалась гипотеза наличия двух кинетических параметров поврежденности  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , для которых уравнения могут быть записаны в виде [3]

$$\dot{\omega}_1 = F_1(\sigma, T, \omega_1, \omega_2), \quad \dot{\omega}_2 = F_2(\sigma, T, \omega_1, \omega_2).$$

Эти соотношения являются дополнением к механическому уравнению состояния, которое в данном случае может быть представлено в виде

$$\dot{p} = \dot{p}(p, \sigma, T, \omega_1, \omega_2).$$

Подобно тому, как для одного параметра  $\omega$  условием разрушения считается достижение  $\omega$  некоторого критического значения, которое можно принять за единицу, для случая двухпараметрической системы предельное состояние можно определить условием [3]

$$\max(\omega_1(t^*), \omega_2(t^*)) = 1.$$

Такое представление процесса накопления повреждений позволяет описать ряд наблюдаемых в экспериментах явлений. Так, в случае, если кинетические уравнения записать в форме независимой простейшей системы

$$\dot{\omega}_1 = A_1 [\sigma / (1 - \omega_1)]^{n_1}, \quad \dot{\omega}_2 = A_2 [\sigma / (1 - \omega_2)]^{n_2}, \quad (31)$$

легко показать, что кривая длительной прочности в логарифмических координатах имеет вид ломаной, при этом наклон отрезков определяется показателями  $n_1$  и  $n_2$ . Точка пересечения двух прямых определяет напряжение  $\sigma_0$ , при котором одновременно  $\omega_1$  и  $\omega_2$  достигают за одно и то же время своего критического значения. В дальнейших работах были рассмотрены различные варианты обобщения соотношений (31): учет взаимного влияния параметров поврежденности  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , мгновенной поврежденности при квазистатическом нагружении, видоизмененного критерия длительного разрушения и т.д. Показано, что с помощью различного введения двух параметров поврежденности можно описать наблюдаемые во многих испытаниях различные отклонения суммы парциальных времен  $A$  от единицы, при этом величина  $A$  изменяется в диапазоне от 0 до 2.

3. Немонотонная зависимость предельной деформации ползучести от напряжения. Характерной особенностью зависимостей  $\dot{p}$  и  $\dot{\omega}$  от напряжения  $\sigma$  является то, что эти зависимости обычно имеют вид степенных функций, в этом случае предельная деформация  $p^*$ , соответствующая разрушению, оказывается монотонной функцией от напряжения, однако в ряде экспериментальных данных это условие нарушается. Было показано, что моделирование немонотонной

зависимости  $p^*(\sigma)$  возможно при использовании различных функциональных соотношений для учета влияния напряжения на скорость ползучести и на скорость накопления поврежденности [4, 5]. Если, например, рассмотреть степенную зависимость  $\dot{p}$  от  $\sigma$  и экспоненциальную зависимость  $\dot{\omega}$  от  $\sigma$

$$\dot{p} = B \cdot \left( \frac{\sigma}{1-\omega} \right)^n, \quad \dot{\omega} = C \cdot \frac{\text{sh}(\sigma/c)}{(1-\omega)^n}, \quad (32)$$

то можно показать, что зависимость предельной деформации  $p^*$  от уровня напряжения  $\sigma$  имеет внутренний максимум. Видоизменением уравнений (32) можно легко добиться, что при промежуточном значении напряжений предельная деформация будет минимальна.

4. Учет мгновенной поврежденности. Существенно расширяется круг качественно новых эффектов, когда уравнение состояния и стандартное кинетическое уравнение заменяются соотношениями, учитывающими «мгновенную» поврежденность материала. В качестве простейшего варианта таких соотношений можно использовать уравнения, предложенные Бробергом:

$$\dot{\varepsilon} = As^{m_1} \dot{s} + Bs^{m_2}, \quad \dot{\omega} = Cs^{n_1} \dot{s} + Ds^{n_2}, \quad s = \sigma / (1-\omega). \quad (33)$$

Показано [6], что при определенных ограничениях, наложенных на показатели степени в (33), возможна немонотонная зависимость деформации при разрушении от напряжения в задаче длительной прочности.

5. Ресурс деформационной способности материала. В известных испытаниях, проводившихся при постоянной скорости логарифмической деформации  $\dot{\varepsilon}_0$ , получена немонотонная зависимость предельной логарифмической деформации  $\varepsilon^*$  от величины  $\dot{\varepsilon}_0$  (с внутренним максимумом). Для моделирования полученных результатов испытаний было использовано кинетическое уравнение в следующей форме [7]:

$$\dot{\omega} = C \sqrt{\dot{\varepsilon}_0} \exp(\beta \dot{\varepsilon}_0^n), \quad \omega(t=0) = 0, \quad \omega(t=t^*) = 1.$$

В этом случае зависимость предельной деформации  $\varepsilon^*$  от скорости  $\dot{\varepsilon}_0$  имеет внутренний максимум:

$$\varepsilon^* = \sqrt{\dot{\varepsilon}_0} \left[ C \exp(\beta \dot{\varepsilon}_0^n) \right]^{-1}.$$

6. Дробно-степенная модель установившейся ползучести. Для модели установившейся ползучести  $\dot{p}(\sigma)$  обычно принимают либо степенную зависимость от напряжения, либо экспоненциальную зависимость (типа гиперболического синуса). Соотношениями такого вида не удается достаточно хорошо описать наблюдаемые в опытах зависимости параметров ползучести во всем диапазоне изменения напряжения.

Под руководством С.А. Шестерикова выполнен цикл статей ([8, 9] и др.), в которых предложен принципиально новый вид уравнения установившейся ползучести  $\dot{p} = f(\sigma)$ :

$$f(\sigma) = A \left( \frac{\sigma}{\sigma_b - \sigma} \right)^n. \quad (34)$$

Параметр  $\sigma_b$  соответствует напряжению, при котором имеет место неограниченный рост скорости деформации ползучести (условный предел

прочности). Оказалось, что с точностью до наблюдаемого в экспериментах разброса с помощью соотношения (34) можно описать кривые ползучести при постоянной  $T$  во всем диапазоне изменения напряжения. Это особенно важно потому, что Ю.Н. Работнов [1], используя степенную или экспоненциальную зависимости для описания кривых ползучести в широком диапазоне изменения  $\sigma$ , отмечал необходимость введения зависимости показателя степени или коэффициента в экспоненте от напряжения. Следует отметить, что соотношение (34) при  $n = 1$  применимо также для низких уровней напряжений, поскольку во многих экспериментальных работах в этом диапазоне отмечается линейный характер зависимости скорости ползучести от напряжения.

При различном сопротивлении растяжению и сжатию в разных статьях применялись соотношения [9]:

$$\dot{p} = \frac{B\sigma\sigma_b}{(\sigma_b - \sigma)(\sigma_b' + \sigma)}, \quad \dot{p} = \frac{B\sigma}{\sqrt{(\sigma_b - \sigma)(\sigma_b' + \sigma)}} \text{ и др.}$$

( $\sigma_b$  и  $\sigma_b'$  - пределы прочности при растяжении и сжатии соответственно).

7. Экспериментальные методы измерения поврежденности. В отличие от известных методов измерения поврежденности, был предложен метод измерения структурных изменений в металле непосредственно в ходе высокотемпературной ползучести, без охлаждения и разгрузки образцов [10]. Для достижения этой цели проводилось измерение электрического сопротивления  $R(t)$  цилиндрических образцов при одноосном растяжении, и эти данные сопоставлялись с результатами измерения длины  $l(t)$  испытываемых образцов при тех же значениях времени  $t$ .

В Институте механики МГУ были проведены испытания медных образцов при  $400^\circ\text{C}$  при напряжениях 40 – 70 МПа [10]. При обработке результатов испытаний образцов рассматривались две меры деформации: обычная логарифмическая мера деформации ползучести  $p(t)$ , основанная на данных автоматической записи удлинения образца в процессе ползучести, и мера  $p_R(t)$ , в которой использованы результаты измерения электрического сопротивления образцов в предположении об отсутствии микроповреждений в образцах. Анализ кривых ползучести  $p(t)$  и  $p_R(t)$  показал, что при всех значениях номинального напряжения  $\sigma_0$  зависимость  $p_R(t)$  возрастает быстрее, чем  $p(t)$ . При достаточно высоких напряжениях (из рассматриваемого диапазона), когда ползучесть происходит в основном за счет сдвиговых деформаций, превышение деформации  $p_R(t)$  над  $p(t)$  относительно невелико. Различие этих кривых возрастает при меньших напряжениях, для которых характерны раннее развитие пор и трещин вдоль межзеренных границ, охрупчивание и последующее межзеренное разрушение.

Под поврежденностью  $\omega(t)$  при измерении электрического сопротивления образцов понимается отношение приращения электросопротивления, вызываемого образованием пор и микротрещин, их накоплением и слиянием в процессе ползучести, к электросопротивлению ненагруженного образца при температуре  $T$ . Для исследования структуры испытанных образцов металлографическим способом проводилось их разрезание по осевому сечению с целью приготовления микрошлифов. Под поврежденностью  $\Omega$  понимается отношение суммарной длины поперечных границ между зернами, занятых порами и микротрещинами, к длине всех поперечных границ между

зернами. Зависимости времени до разрушения  $t^*$  и значений предельной поврежденности  $\omega^*$  и  $\Omega^*$  от номинального напряжения  $\sigma$  обнаруживают характерный для ряда металлов излом внутри рассматриваемого диапазона изменения напряжения  $\sigma$  (при одном и том же значении  $\sigma_0=56$  МПа). В рассматриваемом диапазоне исследуемых напряжений можно выделить участки с преимущественным межзёренным разрушением (при относительно малых напряжениях  $\sigma_0=40 - 56$  МПа) и с преимущественным внутризёренным разрушением (при относительно больших напряжениях  $\sigma_0=56 - 70$  МПа).

8. Эффект виброползучести. Под явлением виброползучести понимается резкое ускорение процесса ползучести в условиях, при которых к статическому напряжению добавляется циклическая составляющая малой амплитуды (не превышающей величину порядка 1% от статического напряжения). В НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова были проведены испытания трубчатых образцов из алюминиевых сплавов Д16Т и АД1 при температурах от 20 до 200°C. Эти испытания показали, что добавление к постоянному растягивающему напряжению продольных вибраций на растяжение-сжатие не приводит к изменению кривой ползучести. При добавлении к постоянному растягивающему напряжению крутильных вибраций или при добавлении к постоянному касательному напряжению продольных вибраций наблюдается эффект виброползучести, характеризующийся увеличением скорости ползучести в несколько раз. Во всех случаях проявления эффекта виброползучести наблюдается его «насыщение»: данный эффект наиболее заметен на первых циклах приложения вибрационной составляющей напряжения. В [11] проведено моделирование полученных ранее экспериментальных результатов с помощью кинетической теории Ю.Н. Работнова. С этой целью использована модифицированная теория упрочнения.

9. Влияние агрессивной среды на ползучесть и длительную прочность металлов. В [12 - 13] разработаны методы моделирования высокотемпературного деформирования и длительного разрушения металлов при одновременном воздействии внешних механических нагрузок (в условиях одноосного или сложного напряжённых состояний и агрессивной окружающей среды). Предложено приближенное решение уравнения диффузии, которое основано на разделении рассматриваемого тела на невозмущенную и возмущенную части и на определении движения границы между этими частями. Показана высокая точность рассмотренного приближения. Исследовано взаимодействие диффузионного фронта и фронта разрушения в процессе ползучести. С помощью учета нарастающего во времени поверхностного разрушающегося слоя качественно и количественно описаны масштабный эффект длительной прочности и другие особенности экспериментальных данных.

Предложена вероятностная модель ползучести и длительной прочности, при этом материал представляется состоящим из большого количества структурных элементов. Для описания явления длительной прочности вводится понятие вероятности разрушения отдельных элементов, на основе которого выводится кинетическое уравнение для плотности неразрушенных структурных элементов. Для частного случая нагружения цилиндрической оболочки рассмотрены условия возникновения и развития фронта разрушения. Вероятностная модель применена для описания ползучести и длительной прочности типовых элементов конструкций в агрессивных средах.

10. Влияние концентрации напряжение на длительную прочность. В НИИ механики МГУ были изготовлены образцы для испытаний из одного стержня, одна часть образцов (I серия) представляла собой цилиндры кругового сечения, другая часть (II серия) имела осесимметричные поперечные кольцевые выточки полукруглого сечения [14]. Сравнивались времена до разрушения  $t^*$  этих образцов при условии, что напряжения в минимальном сечении образцов II серии совпадают с напряжениями в образцах I серии. Результаты этого анализа показали, что концентраторы напряжений оказывают систематическое подкрепляющее влияние на время до разрушения  $t^*$ . Особенно заметен подкрепляющий эффект концентраторов при относительно малых напряжениях, при которых наличие выточки приводит к увеличению времени  $t^*$  более, чем в два раза.

Для объяснения этого эффекта используется основанная на учете микронеоднородности материала гипотеза «слабого звена». При растяжении образца переменного сечения вероятность того, что самое слабое по структуре сечение имеет минимальную площадь, очень мала. В связи с этим разрушение образца с выточкой, происходящее в самом узком сечении (достаточно прочном в структурном отношении) или вблизи него, должно наступать при большем времени, чем разрушение образца постоянного поперечного сечения, что и наблюдается в экспериментах.

Дополнительно к этому исследованию было проведено экспериментальное исследование влияния величины рабочей длины растягиваемых образцов на длительную прочность. Для этого из одного стержня были изготовлены цилиндрические образцы с одним и тем же диаметром 5 мм и различной длиной  $l_0$  рабочей части ( $l_0 = 10 - 100$  мм). Испытания на длительную прочность при одинаковой температуре  $T$  и напряжении  $\sigma$  показали наличие явно монотонно убывающей зависимости времени разрушения  $t^*$  от величины  $l_0$  (в рассматриваемом диапазоне изменения  $l_0$  среднее время  $t^*$  изменяется почти в два раза). Для объяснения полученного результата используется учет микронеоднородности структуры реальных образцов. С увеличением рабочей длины повышается вероятность появления в образце более слабых в структурном отношении сечений, поэтому более длинные образцы должны разрушаться быстрее. С помощью привлечения дополнительных данных по масштабному эффекту получено количественное подтверждение правильности предложенного объяснения подкрепляющего эффекта концентрации напряжений.

11. Длительная прочность при сложном напряженном состоянии. Очевидно, что при моделировании длительного разрушения в условиях сложного напряженного состояния наиболее простые соотношения имеют место при использовании скалярного параметра поврежденности. Однако дефекты, определяющие накопление повреждений, - полости, микропоры, микротрещины - ориентированы нагрузками, под действием которых эти дефекты возникают. Как известно, микротрещины обычно развиваются приблизительно перпендикулярно максимальному из главных напряжений. Увеличение этих микротрещин приводит к разрушению соединений зерен в поликристалле, и в результате происходит разрыв. Для описания такого типа разрушений недостаточно использовать скалярный параметр поврежденности

Впервые экспериментально получена зависимость времени до разрушения при стационарном сложном напряженном состоянии от программы

кратковременного нагружения. Отмечено, что различные виды напряженного состояния при одинаковых значениях  $\sigma_{\max}$  и  $\sigma_{ii}$  могут приводить к различным значениям времен до разрушения  $t^*$ . Все эти и другие особенности результатов испытаний могут быть описаны с помощью кинетического уравнения для анизотропного материала с векторным параметром поврежденности [15, 16]:

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = F(\sigma_{\max}) \cdot \begin{pmatrix} \vec{\sigma}_{\max} \\ \sigma_{\max} \end{pmatrix}, \quad \vec{\omega}(t=0) = 0.$$

В некоторых работах рассматривается сочетание скалярного и векторного параметров поврежденности. С.А. Шестериков с соавторами [17] отметили, что в процессе ползучести при сложном напряженном состоянии фактически появляется анизотропия свойств накопленной поврежденности, и предложили модель с комбинацией скалярного и векторного подходов. Скалярный параметр может быть использован для моделирования поведения материалов, в которых развиваются сферические поры или максимальное главное напряжение значительно больше остальных главных напряжений; в случае развития трещиновидных дефектов описание длительного разрушения следует проводить с помощью векторного подхода.

Работа выполнена при финансовой поддержке  
РФФИ (проект № 14-08-00570)

## Литература

1. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
2. Локощенко А.М., Шестериков С.А. Методика описания ползучести и длительной прочности при чистом растяжении // Ж. прикл. мех. и техн. физ. 1980. № 3. С. 155-159.
3. Локощенко А.М., Шестериков С.А. К проблеме оценки длительной прочности при ступенчатом изменении напряжения // Ж. прикл. мех. и техн. физ. 1982. № 2. С. 139-143.
4. Локощенко А.М., Шестериков С.А. Модель длительной прочности с немонотонной зависимостью деформации при разрушении от напряжения // Ж. прикл. мех. и техн. физ. 1982. № 1. С. 160-163.
5. Локощенко А.М., Назаров В.В. Экспериментально-теоретическое исследование ползучести и длительной прочности титанового сплава ВТ6 при 600°C // Известия ВУЗов. Машиностроение. 2008. №7. С. 3-11.
6. Дачева. М.Д., Локощенко А.М., Шестериков С.А. Модельное представление предельной деформации при ползучести // Ж. прикл. мех. и техн. физ. 1984. №4. С. 139-142.
7. Веклич Н.А., Локощенко А.М., Веклич П.Н. Моделирование ресурса деформационной способности материала // Прикладная механика и техническая физика. 2007. №5. С. 183-188.
8. Шестериков С.А., Юмашева М.А. Конкретизация уравнения состояния в теории ползучести // Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела. 1984. № 1. С. 86-91.
9. Шестериков С.А., Лебедев С.Ю., Юмашева М.А. О длительной прочности // Пробл. мех. сплошной среды: Сб. научн. тр. / Ин-т автомат. и процессов упр. – ДВО РАН. Владивосток. 1996. С. 80-85.
10. Локощенко А.М. Новый метод измерения поврежденности металлов при ползучести // Известия РАН. Механика твердого тела. 2005. №5. С.108-122.
11. Локощенко А.М. Ползучесть и длительная прочность при переменных напряжениях // Тр. междунар. конф. «Актуальные проблемы механики сплошной

- среды», посвящ. 100-летию Н.Х. Арутюняна (08-12.10.2012, Цахкадзор, Армения), Изд-во ЕГУАС, Ереван. 2012. Том 1. С. 325-328.
12. Локощенко А.М. Ползучесть и длительная прочность металлов в агрессивных средах. М.: Издательство МГУ. 2000. 178 с.
  13. Локощенко А.М. Моделирование процесса ползучести и длительной прочности металлов. М.: Моск. гос. индустр. ун-т. 2007. 264 с.
  14. Шестериков С.А., Локощенко А.М. Влияние концентрации напряжений на длительную прочность // Пробл. прочности. 1996. № 5. С. 39-43.
  15. Локощенко А.М. Методы моделирования длительной прочности металлов при стационарном и нестационарном сложных напряженных состояниях // Упругость и неупругость. Материалы межд. научн. симп. по проблемам механики деформируемых тел, посвященного 100-летию со дня рождения А.А.Ильюшина (20-21.01.2011, Москва). Изд-во МГУ. 2011. С. 389-393.
  16. Локощенко А.М., Назаров В.В. Длительная прочность металлов при равноосном плоском напряженном состоянии // Прикладная механика и техническая физика. 2009. № 4. С. 150-157.
  17. Дачева М.А., Шестериков С.А. Юмашева М.А. Поврежденность при сложном нестационарном напряженном состоянии // Изв. РАН. Мех. тверд. тела. 1998. № 1. С. 44-47.

# СЖАТИЕ ПЛАСТИНЫ С КРУГОВЫМ ВЫРЕЗОМ ИЗ СЛОИСТОГО КОМПОЗИТА С УЧЕТОМ УПРУГИХ НЕЛИНЕЙНЫХ СДВИГОВЫХ СВОЙСТВ

## COMPRESSION OF PLATE WITH CIRCULAR CUTOUT FROM LAMINATE COMPOSITE WITH TAKING INTO ACCOUNT NONLINEAR SHEAR PROPERTY

Е.В.Ломакин – д.ф.м.н., проф., Б.Н.Федулов – к.ф.м.н.

Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова

[lomakin@mech.math.msu.su](mailto:lomakin@mech.math.msu.su), [fedulov.b@mail.ru](mailto:fedulov.b@mail.ru)

**Abstract.** Most of all composite materials exhibit significant nonlinearity, especially in plane shear tests. This nonlinearity usually takes place even at elasticity conditions. Usual approach is to use initial shear modulus in combination with linear anisotropic elastic material model. This research shows that shear nonlinearity could be taken into account with special constitutive equations. The analysis of experiment of compression of laminate composite plate with circular concentrator is performed. Comparison of test and model results is analyzed.

Для многих слоистых композитов характерна нелинейность сдвиговых свойств [1]. Наиболее распространенный подход к моделированию заключается в использовании первоначального сдвигового модуля в комбинации с анизотропной линейной упругостью. В случае плоского напряженного состояния определяющие соотношения для такого подхода выглядят следующим образом:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\nu/E_1 & 0 \\ -\nu/E_1 & 1/E_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

Используя потенциал специального вида:

$$U = \frac{1}{2} E_{ijkl}(q) \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} \quad (2)$$

где  $q = D_{ij} \varepsilon_{ij}$ , коэффициенты  $D_{ij}$  имеют следующее выражение в системе координат совпадающей с ориентацией материала:

$$D_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

В системе координат связанной с главными осями анизотропии параметр  $q = \varepsilon_{12}$ . Для выбранного потенциала (2) определяющие соотношения выглядят следующим образом:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\partial E_{mnkl}(q) \varepsilon_{mn} \varepsilon_{kl}}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\partial E_{mnkl}(q)}{\partial \varepsilon_{ij}} \varepsilon_{mn} \varepsilon_{kl} + E_{ijkl}(q) \varepsilon_{kl}. \quad (3)$$

Рассматривая плоское напряженное состояние и, оставляя зависимость от параметра  $q$  только в сдвиговом модуле  $G$ , нелинейная часть уравнений (3) возможно представить в виде:

$$\frac{\partial E_{mnkl}(q)}{\partial \varepsilon_{12}} \varepsilon_{mn} \varepsilon_{kl} = \frac{dG(q)}{dq} \frac{dq}{d\varepsilon_{12}} \varepsilon_{12} \varepsilon_{12} = G' \varepsilon_{12}^2,$$

где штрихом обозначена производная по параметру  $q$ .

Таким образом, соотношения для сдвиговых компонент можно представить в следующем виде:

$$\sigma_{12} = (G' \varepsilon_{12} + G) \varepsilon_{12}. \quad (4)$$

Теперь, представим функцию  $G(q)$  в виде произвольного полинома:

$$G(q) = \sum_n C_n q^n.$$

Тогда уравнение (4) можно записать в виде:

$$\sigma_{12} = \left[ \left( \sum_n C_n n q^{n-1} \right) q + \sum_n C_n q^n \right] \varepsilon_{12} = \left[ \sum_n (C_n n + 1) q^n \right] \varepsilon_{12}.$$

Делая подстановку  $B_n = C_n n + 1$ , можно получить следующее выражение:

$$\sigma_{12} = \left[ \sum_n B_n q^n \right] \varepsilon_{12}. \quad (5)$$

При этом  $B_n$  и  $n$  являются произвольными константами. Таким образом, возможна любая зависимость между сдвигowymi компонентами, единственное ограничение это возможность приближения ее полиномиальной функцией.

Таким образом, в ортогональной системе координат совпадающей с ориентацией волокон определяющие уравнения для материала с нелинейными сдвигowymi свойствами, возможно представить следующим образом:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\nu/E_1 & 0 \\ -\nu/E_1 & 1/E_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\tilde{G}(\varepsilon_{12}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix}, \quad (6)$$

где  $\tilde{G}(\varepsilon_{12})$  это произвольная зависимость характеризующая нелинейность сдвигowych соотношений.

Такой вид уравнений по своей сути очень схож с классическим подходом, что позволяет легко внедрять его в любой тип методик прочностных расчетов основанных на известной ламинатной теории слоистых композитов.

Система уравнений (6) довольно просто встраивается в систему инженерных расчетов Abaqus по средствам пользовательской процедуры USDFLD. На основе чего возможны решения конкретных задач.

В работах [2,3] приведены данные об испытаниях образца ослабленного круговым вырезом. Укладка слоев в образце  $[(+45/-45)_6]_s$ , полная толщина 3.429мм, геометрия отображена на рисунке 1. На рисунке 2 отображена сетка используемая в расчетах.

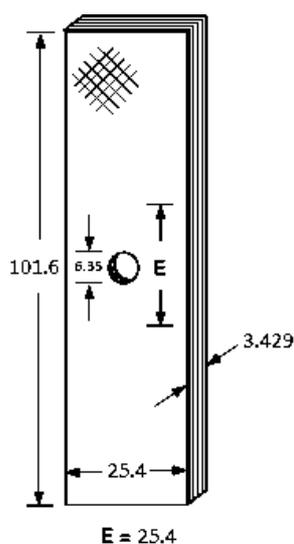


Рис.1

Геометрия образца (мм)

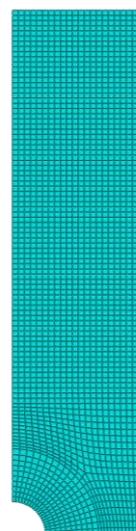


Рис.2

Сетка используемая в модели

Таблица 1

Модуль Юнга вдоль волокон	$E_1$ МПа	156512
Модуль Юнга поперек волокон	$E_2$ МПа	12962
Коэффициент Пуассона	$\nu$	0.23
Сдвиговой модуль	$G$ МПа	6964

Свойства материала, используемые в расчете, приведены в таблице 1, при этом в качестве сдвигового модуля приведено начальное значение.

На рисунках 3 и 4 продемонстрированы зависимости сдвиговых компонент напряжений и деформаций и соответствующая зависимость для функции  $G(q)$ .

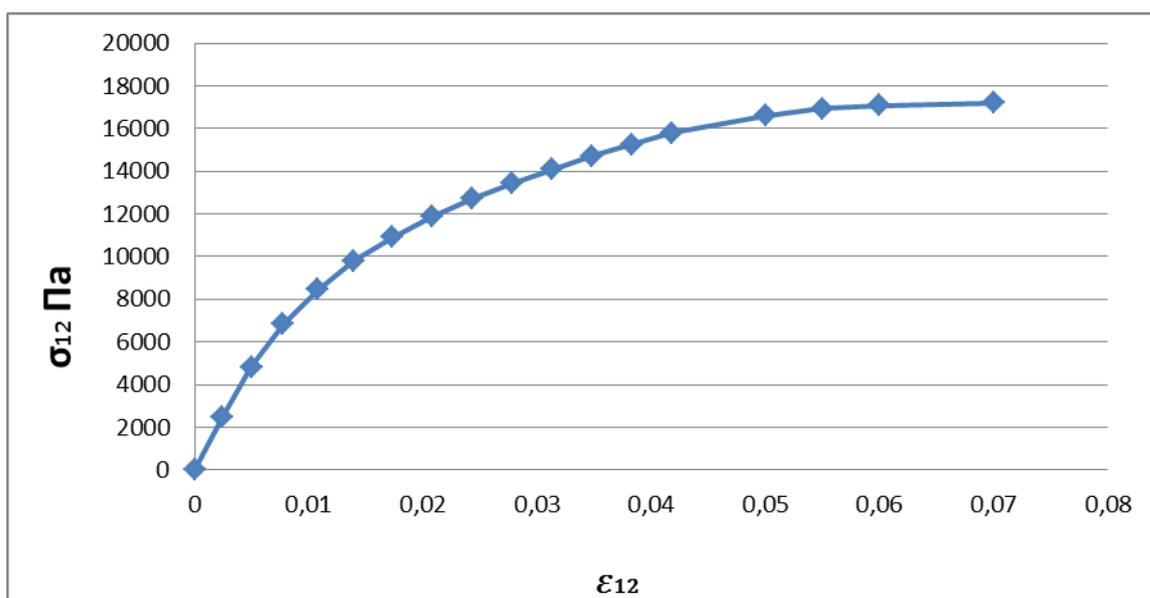


Рис. 3

Диаграмма сдвиговых напряжений и деформаций

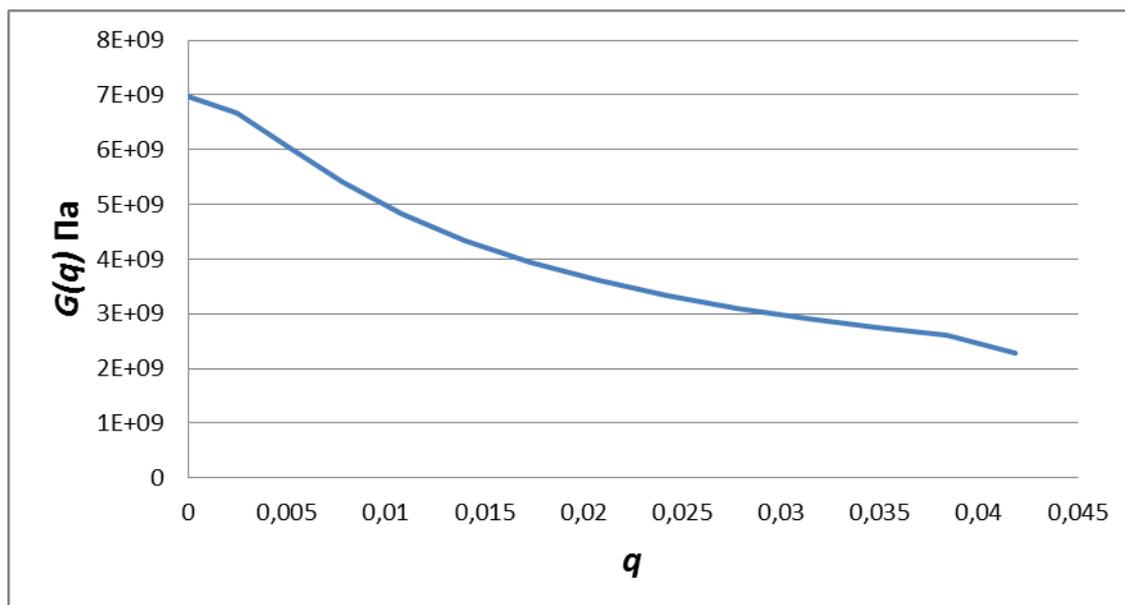


Рис. 4

Зависимость для функции  $G(q)$

На рисунках 5-8 показаны результаты моделирования.

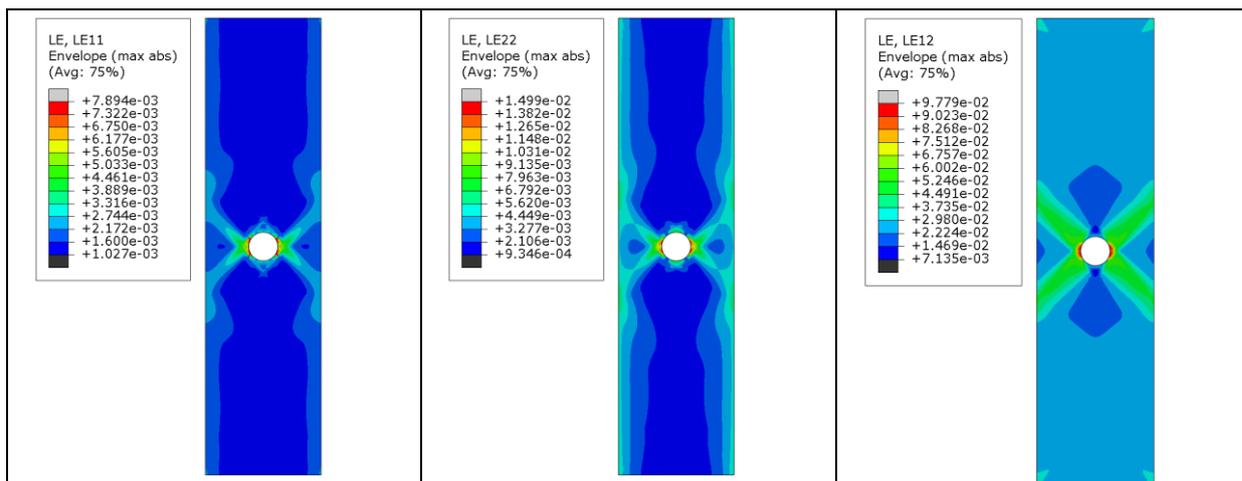


Рис. 5

Максимальные по толщине абсолютные значения компонент деформаций

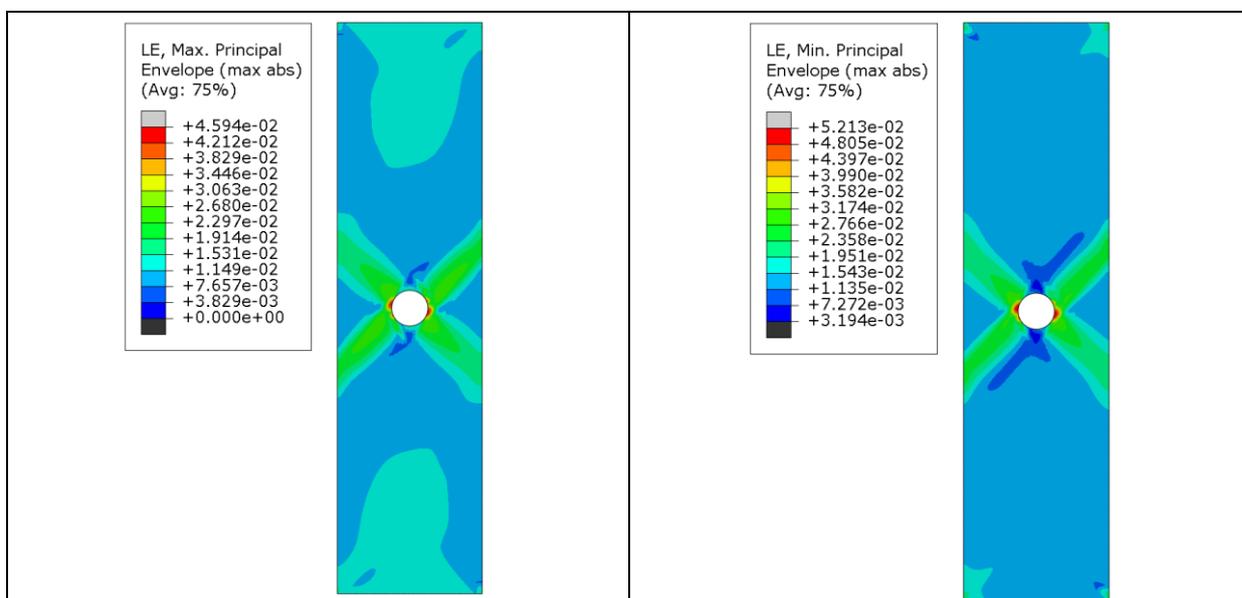


Рис. 6

Максимальные по толщине абсолютные значения главных компонент деформаций

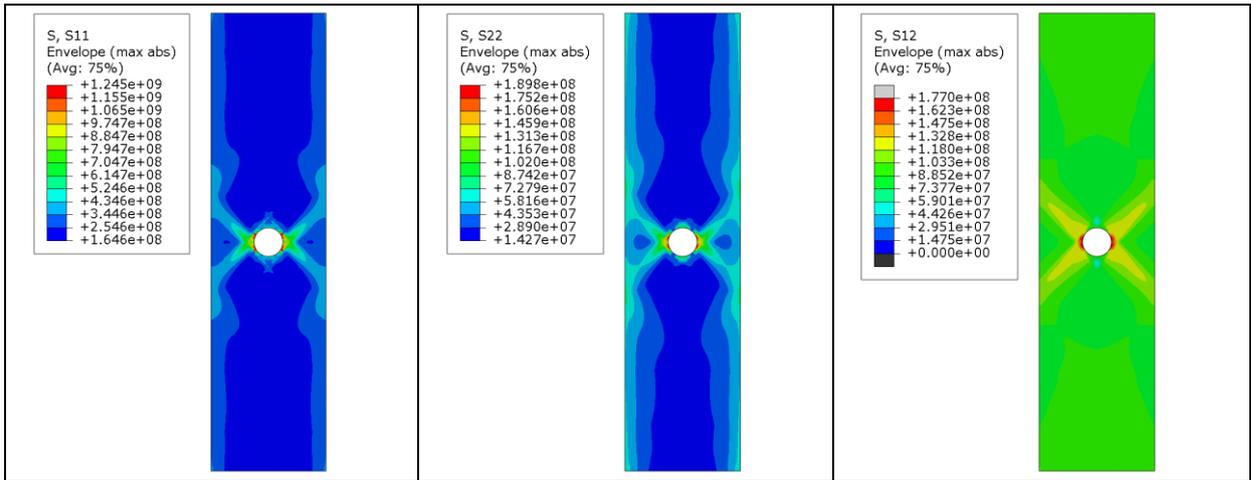


Рис. 7

Максимальные по толщине абсолютные значения компонент напряжений

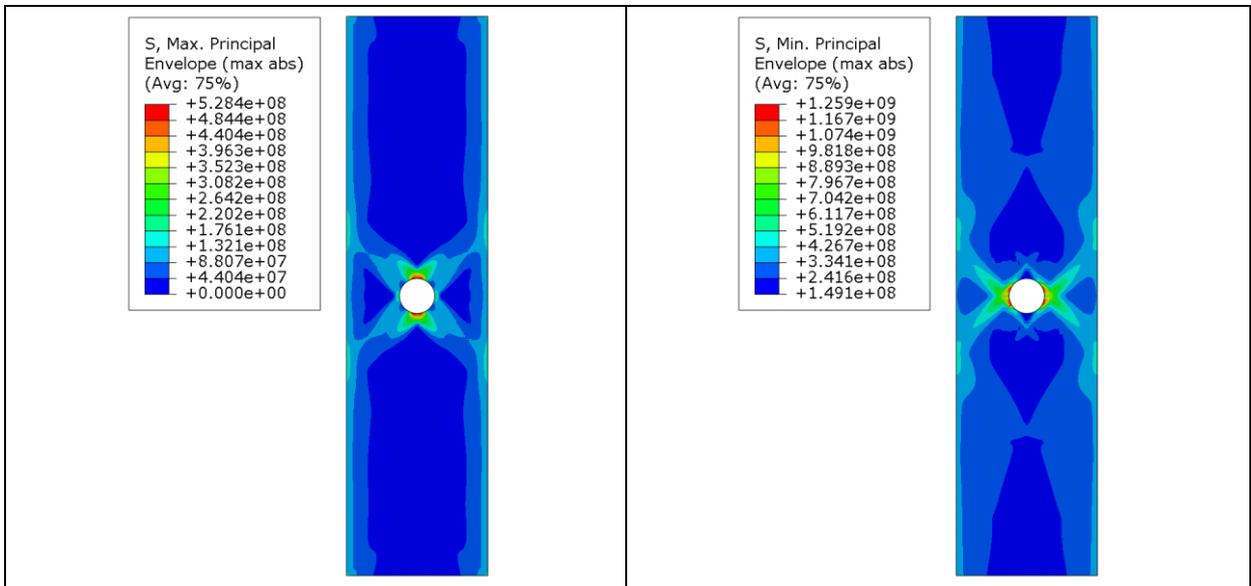


Рис. 8

Максимальные по толщине абсолютные значения главных компонент напряжений

Результат эксперимента и моделирования в виде диаграмм силы сжатия и соответствующих перемещений отображены на рисунке 9.

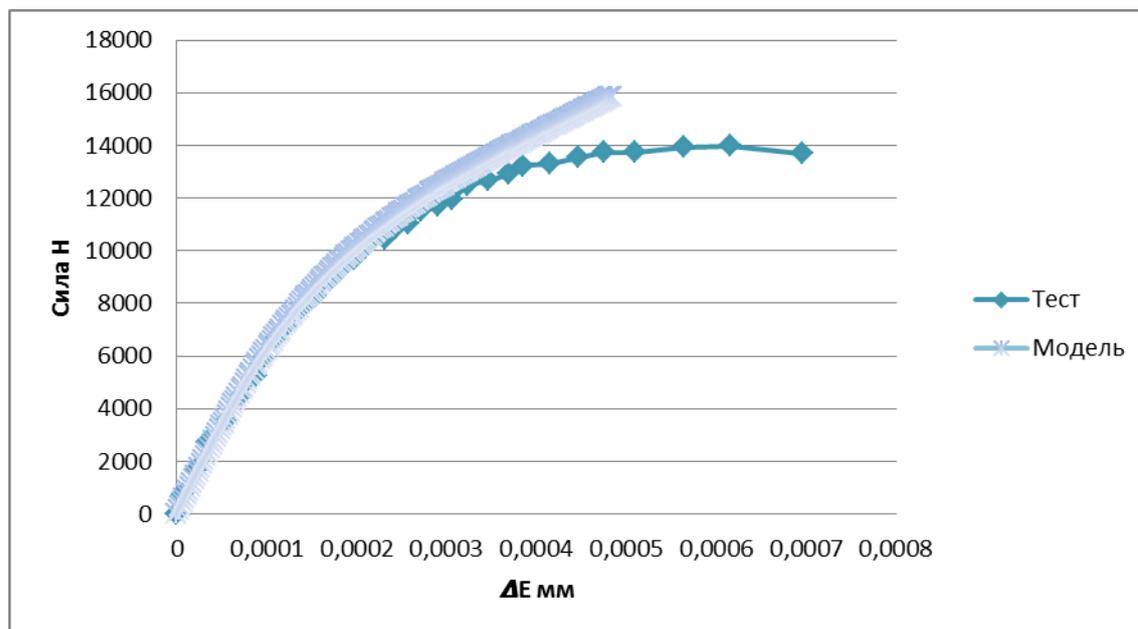


Рис.9

*Диаграмма нагружающей силы и перемещений экстензометра*

Видно, что начиная, примерно с нагрузки 8кН диаграммы эксперимента и модели начинают расходиться. Этот факт связан с началом разрушения образца, можно показать, что при упомянутых значениях нагрузки напряжения в районе концентратора превышают разрушающие.

### Литература

1. Yihong He, Andrew Makeev, Brian Shonkwiler. Characterization of nonlinear shear properties for composite materials using digital image correlation and finite element analysis. Composites Science and Technology, Volume 73, 23 November 2012, Pages 64–71.
2. Chang, F-K., and L. B. Lessard, "Damage Tolerance of Laminated Composites Containing an Open Hole and Subjected to Compressive Loadings: Part I—Analysis," Journal of Composite Materials, vol. 25, pp. 2–43, 1991.
3. Abaqus Users Manual, Version 6.12-3, Dassault Systèmes Simulia Corp., Providence, RI.

**ВЛИЯНИЕ АДГЕЗИИ НА СИЛУ ТРЕНИЯ  
ПРИ СКОЛЬЖЕНИИ ВЯЗКОУПРУГИХ ТЕЛ**  
*INFLUENCE OF ADHESION ON THE FRICTION FORCE  
IN SLIDING OF VISCOELASTIC BODIES*

Ю.Ю.Маховская – к.ф.-м.н.

Институт проблем механики им.А.Ю.Ишлинского РАН  
[makhovskaya@mail.ru](mailto:makhovskaya@mail.ru)

**Абстракт.** A model is proposed for the analysis of the combined effect of viscoelastic properties of bodies and adhesive interaction between their surfaces in sliding. The model is based on the solution of the contact problem for a 3D wavy surface sliding on the boundary of a viscoelastic foundation taking into account the molecular attraction in the gap between the bodies. The influence of adhesion on the contact stress distribution, real contact area and hysteretic friction force is analyzed.

**1. Введение**

Ю.Н.Работновым был разработан метод решения задачи о движении с постоянной скоростью нагрузки по границе вязкоупругого основания [1], основанный на применении принципа Вольтерра. Было показано, что несовершенная упругость основания приводит к смещению эпюры распределения давления в направлении движения и появлению силы сопротивления движению штампа – деформационной составляющей силы трения. Подходы к точному определению этой силы были развиты в дальнейшем в работах Л.А.Галина и И.Г.Горячевой [2,3].

Адгезионное притяжение между поверхностями действует при величинах зазора порядка радиуса действия межмолекулярных сил [4]. Влияние адгезионного притяжения на деформационную составляющую силы трения было исследовано в плоской постановке для случая скольжения отдельного выступа [5] и периодической системы выступов [6]. В настоящей работе исследуется совместный эффект вязкоупругости и адгезии в контакте скольжения для трехмерной волнистой поверхности.

**2. Постановка задачи**

Рассматривается жесткая волнистая поверхность, скользящая со скоростью  $v$  вдоль оси  $x$  по поверхности вязкоупругого основания. Форма поверхности описывается периодической функцией

$$f(x, y) = h - \frac{h}{4} \left( \cos\left(\frac{2\pi x}{l}\right) + 1 \right) \left( \cos\left(\frac{2\pi y}{l}\right) + 1 \right), \quad (1)$$

где  $h$  и  $l$  – высота выступов и расстояние между ними, соответственно,  $h \ll l$  (рис. 1, а).

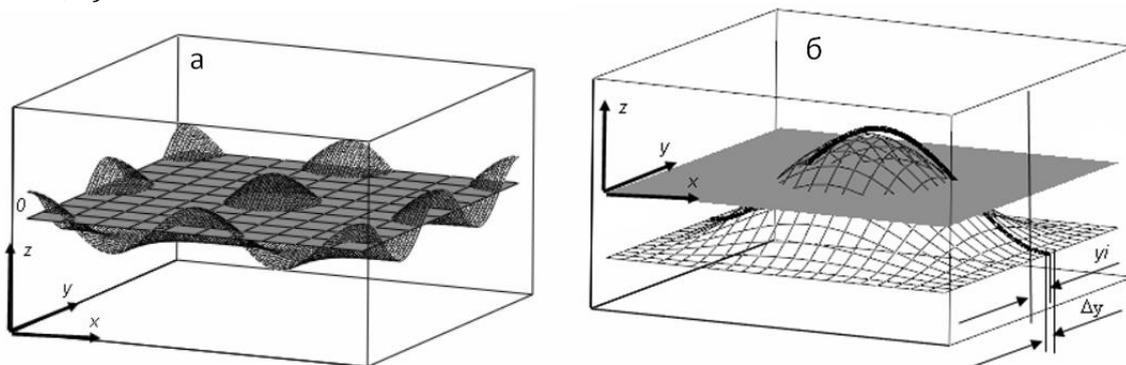


Рис. 1. Схема контакта жесткой волнистой поверхности и вязкоупругого основания (а). Область  $x \in (-l/2; l/2)$ ,  $y \in (-l/2; l/2)$  и ее деление на полосы (б)

Механические свойства вязкоупругого основания описываются линейной одномерной моделью, обладающей ограниченной ползучестью [1]

$$w + T_\varepsilon \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{(1-\nu^2)H}{E} \left( p + T_\sigma \frac{\partial p}{\partial t} \right) \quad (2)$$

где  $p$  и  $w$  - соответственно, давление и перемещение границы,  $E$  - модуль Юнга,  $\nu$  - коэффициент Пуассона,  $H$  - толщина вязкоупругого основания,  $T_\varepsilon$  и  $T_\sigma$  - времена запаздывания и релаксации, соответственно. Поскольку  $h \ll l$ , полагаем, что  $\partial w_z / \partial x \ll 1$ , и тогда величины  $p$  и  $w$  можно считать равными их проекциям на ось  $z$  -  $p_z$  и  $w_z$ , соответственно.

Пусть система координат  $(x', y', z')$  связана с вязкоупругим основанием, а система  $(x, y, z)$  - с движущейся волнистой поверхностью, тогда

$$x' = x + Vt, \quad y' = y, \quad z' = z \quad (3)$$

В движущейся системе координат  $(x, y, z)$  соотношение (2) принимает вид

$$w - VT_\varepsilon \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{(1-\nu^2)H}{E} \left( p - T_\sigma V \frac{\partial p}{\partial x} \right) \quad (4)$$

Зависимость силы адгезионного притяжения на единицу площади поверхности от величины зазора между поверхностями  $p = -p_a(\delta)$  описывается моделью Можи-Дагдейла [7]:

$$p_a(\delta) = \begin{cases} p_0, & 0 < \delta \leq \delta_0 \\ 0, & \delta > \delta_0 \end{cases} \quad (5)$$

где  $\delta_0$  - это максимальная величина зазора, при которой еще действует адгезионное притяжение. Поверхностная энергия  $\gamma$  определяется соотношением:

$$\gamma = \int_0^{+\infty} p_a(\delta) d\delta = p_0 \delta_0 \quad (6)$$

В силу периодической формы поверхности контактную задачу можно рассматривать в области  $x \in (-l/2; l/2)$ ;  $y \in (-l/2; l/2)$ , которая содержит один выступ. На границе этой области должны удовлетворяться условия периодичности для давления  $p(x, y) = p(x+l, y)$  и перемещения  $w(x, y) = w(x+l, y)$ . В подвижной системе координат  $(x, y, z)$ , граничные условия для напряжений и перемещений при  $z=0$  в области  $x \in (-l/2; l/2)$ ;  $y \in (-l/2; l/2)$  имеют вид:

$$\begin{aligned} w(x, y) &= f(x, y) + D, & (x, y) &\in \Omega^c; \\ p(x, y) &= -p_0, & (x, y) &\in \Omega^a; \\ p(x, y) &= 0, & (x, y) &\notin \Omega^c \cup \Omega^a; \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь  $\Omega^c$  - это область контакта,  $\Omega^a$  - область адгезии,  $D$  - сближение поверхностей. Выполняется также условие равновесия:

$$P = \iint_{\Omega^c \cup \Omega^a} p(x, y) dx dy \quad (8)$$

где  $P$  - нагрузка на один выступ волнистой поверхности.

### 3. Метод решения

Задача решается методом полос [8], который для случая одномерного основания является точным. Область  $x \in (-l/2; l/2)$ ;  $y \in (-l/2; l/2)$  делится на  $2N$  полос одинаковой толщины  $\Delta$  (рис.1, б). Нормальное перемещение  $j$ -й полосы равно:

$$D_j = \frac{h}{2} \left( \cos \left( \frac{2\pi \Delta j}{l} \right) - 1 \right) + D \quad (9)$$

Если максимальное сближение поверхностей  $D$  задано, то максимальное

сближение для каждой полосы задается выражением (9). Формы волнистой поверхности в каждой полосе имеет вид

$$f_j(x) = \frac{h_j}{2} \left( \cos\left(\frac{2\pi x}{l}\right) - 1 \right), \quad h_j = \frac{h}{2} \left( \cos\left(\frac{2\pi \Delta j}{l}\right) + 1 \right) \quad (10)$$

Задача решается в каждой полосе отдельно. Для  $j$ -той полосы, условия для перемещения  $w_j(x)$  и давления  $p_j(x)$  следуют из (7) и имеют вид:

$$\begin{aligned} w_j(x) &= f_j(x) + D_j, & x \in \Omega_j^c \\ p_j(x) &= -p_0, & x \in \Omega_j^a \\ p_j(x) &= 0, & x \notin \Omega_j^c \cup \Omega_j^a; \end{aligned} \quad (11)$$

После определения контактного давления  $p_j(x)$  для каждой полосы, нормальная нагрузка, действующая на каждый выступ, определяется суммированием (8):

$$P = 2 \sum_{j=1}^N P_j, \quad P_j = \Delta \int_{-l/2}^{l/2} p_j(x) dx \quad (12)$$

Если максимальное сближение  $D$  неизвестно, а задана нагрузка  $P$ , тогда задается начальная величина  $D$  и производятся итерации до достижения величины  $P$  с заданной точностью.

Для определения тангенциальной нагрузки, действующей на жесткую волнистую поверхность со стороны вязкоупругого основания, используется соотношение

$$\tau_j(x) = p_j(x) \sin \left[ \arctg \left( f_j'(x) \right) \right] \approx p_j(x) f_j'(x) \quad (13)$$

с помощью которого тангенциальная сила определяется как

$$T = 2 \sum_{j=1}^N T_j, \quad T_j = \Delta \int_{l/2}^{l/2} \tau_j(x) dx \quad (14)$$

Эта сила отлична от нуля, поскольку распределение контактного давления несимметрично относительно оси симметрии выступа вследствие гистерезисных потерь в вязкоупругом материале. Эта сила называется деформационной составляющей силы трения. Соответственно, коэффициент трения определяется соотношением

$$\mu = T / P \quad (15)$$

Таким образом, задача сводится к плоской контактной задаче для определения в каждой полосе контактного давления  $p_j(x)$  в области контакта  $x \in \Omega_j$  и перемещения  $w_j(x)$  в области адгезии  $\Omega^a$ , после чего нормальная нагрузка и сила трения определяются соотношениями (12)-(15). Для точной формулировки граничных условий в каждой полосе необходимо рассмотреть различные режимы заполнения зазора.

#### 4. Решение задачи для полосы при различных режимах заполнения зазора

Рассмотрены три возможных режима заполнения зазора: насыщенный контакт (рис. 2,а), дискретный контакт с насыщенным адгезионным взаимодействием (рис. 2,б), дискретный контакт с областями адгезионного взаимодействия (рис. 2,в). В  $j$ -й полосе реализуется один из этих режимов, в зависимости от сближения поверхностей  $D_j$  в этой полосе.

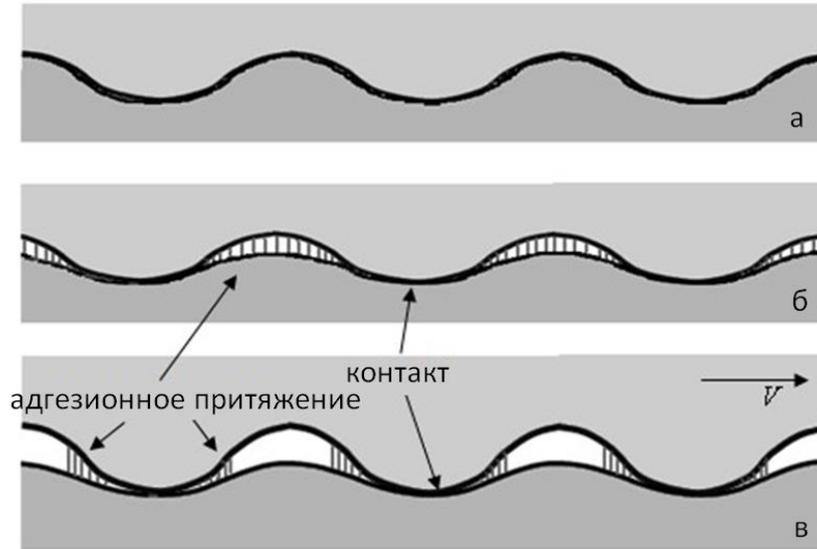


Рис. 2. Режимы заполнения зазора между поверхностями

**Насыщенный контакт.** В этом случае (рис. 2,а) перемещение границы  $z=0$  вязкоупругого основания  $w_j(x)$  удовлетворяет первому условию (11) на всей поверхности, т.е. на всем отрезке  $x \in (-l/2; l/2)$ . Решая дифференциальное уравнение (4) с первым условием (11) и используя условие периодичности для давления  $p_j(x-l/2) = p_j(x+l/2)$ , получим контактное давление в виде:

$$p_j(x) = \frac{E}{2H(l^2 + 4\pi^2 T_\sigma^2 V^2)} \left[ h_j(l^2 + 4\pi^2 T_\sigma^2 V^2) \cos \frac{2\pi x}{l} + 2\pi l h_j V (T_\epsilon - T_\sigma) \sin \frac{2\pi x}{l} + (4\pi^2 T_\sigma^2 V^2 + l^2)(2D_j - h_j) \right] \quad (16)$$

где  $D_j$  и  $h_j$  заданы соотношениями (9) и (10). Нормальная сила  $P_j$ , действующая в  $j$ -й полосе, определяется выражением:

$$P_j = \Delta \int_{-l/2}^{l/2} p(x) dx = \Delta \frac{El}{2Hl} (2D_j - h_j) \quad (17)$$

Насыщенный контакт в  $j$ -й полосе реализуется при условии:

$$\min(p_j(x)) \geq -p_0 \quad (18)$$

Заметим, что вследствие адгезии контактные давления могут быть отрицательными, но не меньшими, чем адгезионное давление  $-p_0$ . Если минимальное контактное давление в  $j$ -й полосе не удовлетворяет условию (18), то насыщенный контакт не реализуется. В этом случае необходимо искать решение для дискретного контакта с насыщенным адгезионным взаимодействием (полной адгезией).

**Дискретный контакт с полной адгезией.** В этом случае (рис. 2,б) задача рассматривается на отрезке  $x \in [-a_j, l-a_j]$ . Дифференциальное уравнение (4) решается в области контакта  $-a_j < x < b_j$  относительно контактного давления  $p_j(x)$ , при этом перемещение  $w_j(x)$  задано первым из условий (11). В области адгезионного притяжения  $b_j < x < l-a_j$  дифференциальное уравнение (4) решается относительно  $w_j(x)$ , при этом давление  $p_j(x)$  задается вторым из условий (11). Кроме того, необходимы два условия для определения границ  $a_j$  и  $b_j$  области контакта. В качестве таких условий используются условия непрерывности

функций  $p_j(x)$  и  $w_j(x)$  в точках  $x = -a_j$  и  $x = b_j$  и условия периодичности, которые приводят к двум нелинейным уравнениям для численного определения величин  $a_j$  и  $b_j$ , если сближение  $D_j$  в  $j$ -й полосе задано. Давление  $p_j(x)$  в области контакта  $-a_j < x < b_j$  определяется соотношением

$$p_j(x) = -p_0 e^{(x-a_j)/\beta V} + \frac{Eh_j}{2H(l^2 + 4\pi^2\alpha\beta V^2)} \left[ (l^2 + 4\pi^2\alpha\beta V^2) \left( \cos \frac{2\pi x}{l} - e^{(x-a_j)/\beta V} \cos \frac{2\pi a}{l} \right) - 2\pi l V (\alpha - \beta) \left( \sin \frac{2\pi x}{l} - e^{(x-a_j)/\beta V} \sin \frac{2\pi a}{l} \right) + 2D_j l^2 h \left( 1 - e^{(x-a_j)/\beta V} \right) \right] + \frac{E}{2H} (2D_j - h_j) \left( 1 - e^{(x-a_j)/\beta V} \right) \quad (19)$$

Аналогичное выражение получено для определения неизвестной функции перемещения  $w_j(x)$  в области адгезионного взаимодействия  $b_j < x < l - a_j$ .

Нормальная и тангенциальная силы, действующие на один период волнистой поверхности, рассчитываются из соотношений

$$P_j = \Delta \int_{-a_j}^{l-a_j} p_j(x) dx, \quad T_j = \Delta \int_{-a_j}^{l-a_j} \tau_j(x) dx \quad (20)$$

Дискретный контакт с полной адгезией реализуется при условии, что в полученном решении выполняется условие  $b_j < l - a_j$ . Если же получено  $b_j \geq l - a_j$ , тогда реализуется случай насыщенного контакта. Другое условие существования режима дискретного контакта с полной адгезией вытекает из принятой модели адгезионного взаимодействия (5) и (6) – максимальная величина зазора между поверхностями  $w_j(x) - f_j(x) - D_j$  не должна превышать  $\delta_0$ , то есть:

$$\max(w_j(x) - f_j(x) - D_j) \leq \gamma/p_0 \quad (21)$$

Если функция  $w_j(x)$  на интервале  $b_j < x < l - a_j$  не удовлетворяет условию (21), тогда в  $j$ -й полосе не реализуется дискретный контакт с полной адгезией. В этом случае необходимо искать решение для дискретного контакта с зонами адгезионного взаимодействия и зонами свободной от нагружения поверхности.

**Дискретный контакт с областями адгезионного взаимодействия.** В этом случае (Fig 2,в), имеем различные граничные условия для трех различных интервалов. Дифференциальное уравнение (4) решается в области контакта  $-a_j < x < b_j$  для контактного давления  $p_j(x)$  и на двух других интервалах для перемещения  $w_j(x)$ . Для определения неизвестных постоянных используются условия непрерывности для давления  $p_j(x)$  и перемещения  $w_j(x)$  в точках  $x = -a_j$ ,  $x = -a_j$  и  $x = b_j$ ,  $x = b_j$  и условия периодичности. Для определения граничных точек областей адгезионного взаимодействия  $a_{1j}$  and  $b_{1j}$  используются условия, следующие из (5) и (6), согласно которым величина зазора между поверхностями в точках  $x = -a_{1j}$  и  $x = b_{1j}$  должна быть равна  $\delta_0$ :

$$\begin{aligned} w(-a_{1j}) - f(-a_{1j}) - D &= \gamma/p_0, \\ w(b_{1j}) - f(b_{1j}) - D &= \gamma/p_0 \end{aligned} \quad (22)$$

В результате получим четыре нелинейных алгебраических уравнения относительно четырех неизвестных  $a_j, b_j, a_{1j}$ , и  $b_{1j}$ , при условии, что сближение поверхностей в  $j$ -й полосе  $D_j$  задано. Давление  $p_j(x)$  в области контакта  $-a_j < x < b_j$  определяется соотношением (19).

## 5. Результаты расчета

На рис. 3 представлено распределение поверхностных давлений  $p(x, y)$  на периоде  $x \in [-l/2, l/2]$ ,  $y \in [0, l/2]$  без адгезии (а) и с учетом адгезии (б) при одной и той же внешней нормальной нагрузке на период  $P = 6.356 \text{ Н}$ . Приведенные результаты получены при  $h = 0.0005 \text{ м}$ ,  $l = 0.005 \text{ м}$ ,  $E/H = 2 \times 10^9 \text{ Па/м}$ ,  $T_\sigma = 0.0001 \text{ с}$ ,  $T_\tau / T_\sigma = 10$ ,  $V = 1 \text{ м/с}$ . Учет адгезии (рис. 3, б), приводит к появлению отрицательных давлений в области контакта.

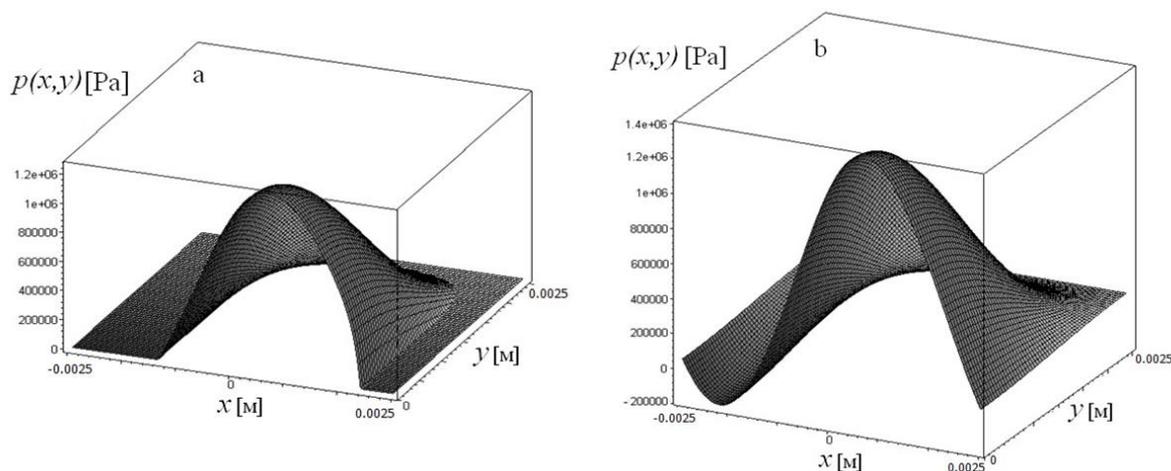


Рис 3. Распределение контактного давления на ячейке периодичности при отсутствии адгезии (а) и с учетом адгезии (б)

Результаты расчетов показывают также, что учет адгезии приводит к значительному увеличению фактической области контакта и деформационной составляющей силы трения в случае дискретного контакта поверхностей. Учет адгезии также приводит к появлению отрицательных давлений в области контакта. В случае насыщенного контакта, адгезия не оказывает влияния на площадь контакта и силу трения, но она может влиять на распределение контактных давлений. Кроме того, при наличии адгезии переход от дискретного контакта к насыщенному происходит при более низких нагрузках, чем без адгезии.

Графики зависимости силы трения от нагрузки, действующей на один выступ, приведены на рис.4 для случая без адгезии (штриховые линии) и с учетом адгезии (сплошные линии). Скорость скольжения волнистой поверхности  $V = 0.1 \text{ м/с}$  (рис. 4, а) и  $V = 1 \text{ м/с}$  (рис. 4, б). Приняты следующие величины для параметров адгезии,  $\gamma = 0.01 \text{ Н/м}$  и  $p_0 = 5.5 \times 10^5 \text{ Па}$ , и волнистости,  $l = 0.010753 \text{ мм}$  и  $h = 0.000971 \text{ мм}$ . Результаты показывают, при больших скоростях (т.е. для большей эффективной жесткости материала) влияние адгезии на силу трения меньше. При малых скоростях и в случае дискретного контакта влияние адгезии на силу трения более значительно. Учет адгезии приводит к тому, что сила трения  $T$  отлична от нуля при нулевой нагрузке  $P = 0$  и в некотором диапазоне отрицательных нагрузок. Вследствие этого коэффициент трения  $\mu = T/P$  при малых нагрузках резко возрастает. Это позволяет заключить, что для реальных шероховатых поверхностей влияние адгезии на силу трения будет существенным для тех выступов, на которые действуют малые или отрицательные нагрузки, и учет этих выступов является важным при подсчете суммарной силы трения.

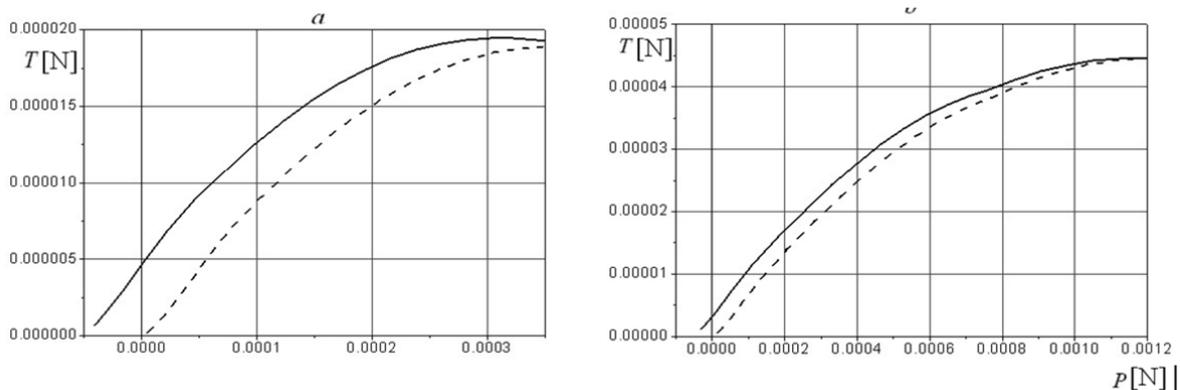


Рис. 4. Зависимость силы трения, действующей на один выступ при наличии адгезии (сплошные линии) и без учета адгезии (штриховые линии)

## 6. Заключение

Основные выводы, сделанные на основе анализа полученных результатов:

- учет адгезии приводит к увеличению фактической площади контакта и деформационной составляющей силы трения;
- переход от дискретного контакта к сплошному в случае адгезии происходит при меньшей нагрузке, чем без учета адгезии;
- при наличии адгезионного притяжения контакт имеет место и при отрицательных нагрузках;
- эффект адгезии значительнее при малых и отрицательных нагрузках;
- увеличение удельной силы адгезионного притяжения приводит к возрастанию деформационной составляющей силы трения, если не достигнуто насыщение контакта.

Полученные результаты могут быть использованы для анализа распределения контактного давления и деформационной составляющей силы трения на различных масштабных уровнях шероховатости. Рассмотренные механизмы трения играют особенно важную роль на микромасштабном уровне, когда величина зазора сравнима с радиусом действия адгезионных сил.

## Литература

1. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966.
2. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. М.: Наука, 1980.
3. Горячева И. Г. Механика фрикционного взаимодействия. - М.: Наука, 2001.
4. Дерягин Б. В., Чураев Н. В., Муллер В. М. Поверхностные силы. М.: Наука, 1985.
5. Маховская Ю. Ю. Скольжение вязкоупругих тел при наличии адгезии // ПММ. 2005. Т. 69. Вып. 2. С. 334-344.
6. Горячева И.Г., Маховская Ю.Ю. Моделирование трения на разных масштабных уровнях // Изв. РАН. МТТ. 2010. № 3. С. 100-110.
7. Maugis. D. Adhesion of spheres: the JKR-DMT transition using a Dugdale model // J. Colloid Interface Sci., 1991, Vol 150, P. 243-269.
8. Kalker J.J. Three-Dimensional Elastic Bodies in Rolling Contact. Series: Solid Mechanics and Its Applications, Kluwer Academic Publishers, 1990.

Работа выполнена при финансовой поддержке  
РФФИ (№ 14-01-00372)

# НАУЧНОЕ И УЧЕБНОЕ НАСЛЕДИЕ Ю.Н. РАБОТНОВА В МЭИ (НИУ)

## SCIENTIFIC AND EDUCATIONAL HERITAGE

### YU.N. RABOTNOV IN MPEI

Г.Х. Мурзаханов – к.т.н., доц., В.Е. Хроматов - к.т.н., проф.

В.Н. Щугорев – к.т.н., доц.

Национальный исследовательский университет «МЭИ»

[MurzakhanovGK@mpei.ru](mailto:MurzakhanovGK@mpei.ru)

**Abstract.** In the report YU.N. Rabotnov's scientific and educational heritage in MPEI is described. YU.N. Rabotnov had been worked at the chair of dynamics and strength of machines department in MEI within twelve years. Correlation of educational and methodical and scientific work of the Department's staff with the ideas and scientific developments outlined in textbooks and monographs YU.N. Rabotnov. The main attention is paid to the development of applied mechanics of destruction, combined with elements of hereditary mechanics.

Юрий Николаевич Работнов приступил к преподавательской работе в Московском энергетическом институте на кафедре сопротивления материалов в 1935 году сразу после окончания МГУ им. М.В.Ломоносова и проработал там до 1947 года. Кафедра сопротивления материалов была сформирована в МЭИ в 1930 году, в год образования МЭИ, а с 1962 года стала выпускающей по специальности «Динамика и прочность машин».

Выпущенный в 1962 году Ю.Н. Работновым учебник по сопротивлению материалов [1] до сих пор выгодно отличается от множества учебников с аналогичным названием широким охватом физических моделей деформирования твердых тел. Этот учебник занимает особое место в формировании мировоззрения на науку о прочности материалов. Дальнейшее развитием работы над учебными и научными монографиями явилось издание Ю.Н. Работновым учебного пособия Механика деформируемого твердого тела (МДТТ) [2], который включает в себя уже не только основной курс сопротивления материалов, но и главы по теории упругости, теории пластичности и ползучести, механике разрушения и механике композиционных материалов.

Развитие научных направлений на кафедре ДПМ МЭИ в таких областях как механика композиционных материалов, механика разрушения, теории ползучести и упруго пластического деформирования тел развивались и продолжают развиваться. Научные исследования сотрудников кафедры ДПМ связаны с прикладной механикой разрушения, включающей элементы наследственной механики Ю.Н. Работнова. [3-4].

В [5] рассматривается расширение области применения методики и программного комплекса по оценке индивидуального остаточного ресурса трубопроводов. Программный комплекс позволяет в интерактивном режиме проводить расчеты остаточного ресурса для протяженных линейных участков трубопроводов, содержащих различные дефекты. Проводится оценка остаточного ресурса трубопроводов пара и горячей воды, работающих при повышенных температурах в условиях ползучести, адаптируется к инженерным расчетам теории роста трещин в условиях ползучести, основанная на синтезе микро- и макромеханики разрушения [5, 6]. При этом рост трещин трактуется как процесс последовательной смены состояний устойчивости и неустойчивости с учетом

микрповреждений, накопленных у фронтов трещин. В качестве ядер ползучести используются слабо сингулярные ядра, предложенные Ю.Н. Работновым [4].

Данная методика применена для диагностики технического состояния и оценки остаточного ресурса участка главного паропровода ОАО «Одесская ТЭЦ». Технические характеристики паропровода: диаметр  $d=273$  мм, толщина стенки  $h=11$  мм, марка стали: 12М1ХФ, критическое значение коэффициента интенсивности напряжений  $K_{1c}=35$  МПа $\sqrt{м}$ , избыточное давление  $P=3,7$  МПа, температура рабочей среды  $T=555$  °С. Используя экспериментальные данные по ползучести, стандартным методом наименьших квадратов [5] определяем параметры аналитической кривой ползучести. Для интегрирования интегро-дифференциального уравнения, которым описывается рост трещин, помощью математического пакета Matlab создана программа для компьютера, позволяющая оценить остаточный ресурс участков паропровода, содержащих продольные краевые трещины. Ресурс бездефектных сечений паропровода оценивался типовым методом на основе опытных данных по пределам длительной прочности и ползучести стали марки 12М1ХФ. Анализ результатов расчета показывает, что обнаруженные трещины существенно снижают остаточный ресурс, минимальный срок безопасной эксплуатации паропровода менее пяти лет.

Методами приборной дефектоскопии обнаружены трещины, глубиной от 1,5 до 2 мм. Результаты оценки остаточного ресурса участка паропровода приведены на рис.1. Ресурс бездефектных сечений паропровода оценивался типовым методом на основе опытных данных по пределам длительной прочности и ползучести стали марки 12М1ХФ

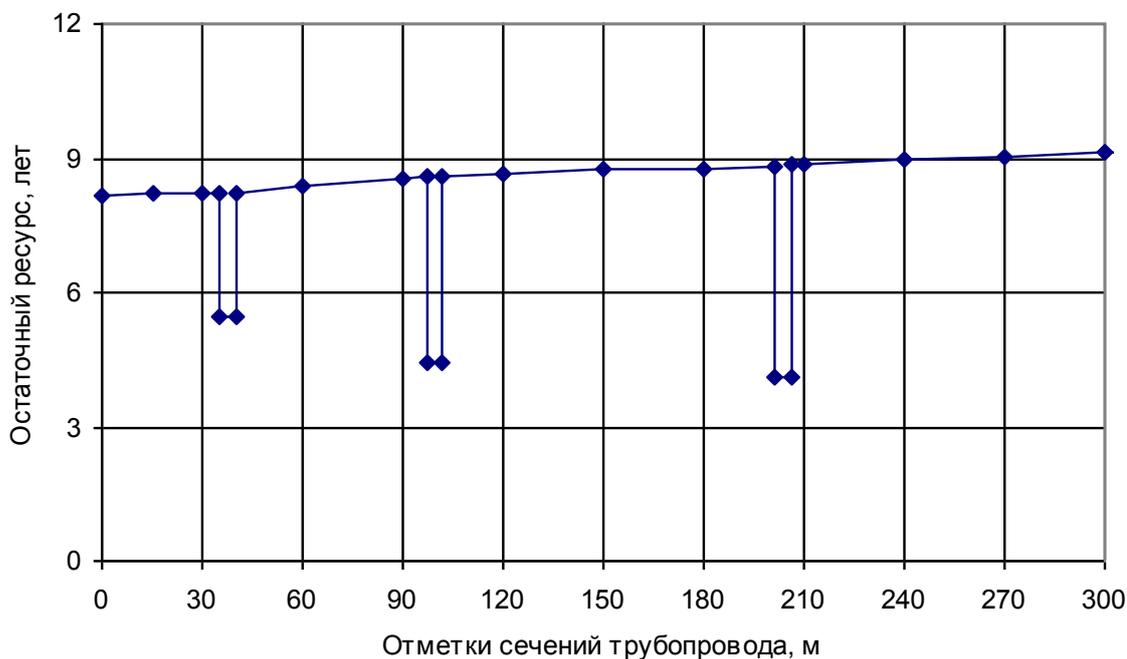


Рис 1. Остаточный ресурс участка паропровода ОАО «Одесская ТЭЦ»

Анализируя результаты расчета, показанные на рис.1, видим, что обнаруженные трещины существенно снижают остаточный ресурс, минимальный срок безопасной эксплуатации паропровода менее пяти лет.

Опыт преподавания дисциплин МДТТ на кафедре ДПМ в МЭИ показал, что включение в читаемые курсы исторических сведений о научной деятельности и жизни основоположников общеобразовательных дисциплин, изучаемых студентами, в значительной степени повышает интерес к обучению [7-9]. На

кафедре ДПМ МЭИ было выпущено учебное пособие [7], в котором, наряду с теоретическими вопросами и практическими задачами курса механики материалов, изложены научные и биографические сведения об ученых-классиках российской школы механиков. Приведены сведения об основоположниках и выдающихся преподавателях научной школы кафедры сопротивления материалов (ныне ДПМ) МЭИ [7, 8], к которым мы причисляем и Юрия Николаевича Работнова (24.02.1914-13.05.1985).

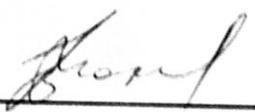
Предложения о включении в курсы естественных и технических дисциплин историко-биографических сведений об ученых-основоположниках научных направлений были доложены на XVI Международной научно-технической конференции «Машиностроение и техносфера XXI века» в 2009 г. в г. Севастополь [10]; в 2010 и 2013 годах на Международном симпозиуме «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» имени А.Г. Горшкова [11], проводимого Московским авиационным институтом, и были одобрены участниками конференций.

Биографии ученых – механиков включены в экзаменационные программы и билеты по курсам МДТТ.

<b>МЭИ</b>	<b>ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ № 15</b>	Утверждаю: Зав. кафедрой
	Кафедра Динамики и прочности Машин им. В.В. Болотина	
	Дисциплина <u>Сопротивление материалов</u>	
	Институт <u>ЭнМИ</u>	« » _____ 2013 г.

1. Вынужденные колебания механических систем с конечным числом степеней свободы. Амплитуды вынужденных колебаний. Динамический коэффициент.
2. Чему равно изменение внутреннего диаметра толстостенной трубы, имеющей радиусы  $r_1, r_2$  нагруженной внутренним давлением  $p_1$ ?
3. Задача.
4. Работнов Юрий Николаевич.



Теоретический вопрос 1 относится к выводу основных формул курса, которые могут быть проведены в структурно-логических схемах.

Вопрос 2 относится к прикладным и требует от студента умения применять основные формулы к практическим задачам.

Задачи, включенные в экзаменационные билеты, выдаются на отдельном бланке, а перечень экзаменационных задач содержится в учебных пособиях [7, 8], с которыми студенты могут ознакомиться при подготовке к экзаменам.

Ответы студентов на 4-й вопрос билета, в основном, были уверенными и полными. Некоторые из них при подготовке к экзамену распечатывали сведения

об ученых из интернета, что на наш взгляд свидетельствует об успехе эксперимента. Также с большим интересом было воспринято студентами и участниками конференции «Наследственная механика деформирования и разрушения твердых тел», посвященной 100-летию академика Ю.Н.Работнова (Институт машиноведения им. А.А.Благодатова РАН, 24-26 февраля 2014 года) изложение истории сопротивления материалов в стихотворной форме [8.10], написанной выпускником МЭИ докт.техн.наук Г.М.Хажинским.

## ИСТОРИЯ СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ

(кратко и в рифму)

*Послушайте, ребята,  
Что вам расскажет дед.  
Земля наша богата,  
Порядка в ней лишь нет.*

*Алексей Толстой «История государства российского»*

Начав в века дремучие,  
Уже три сотни лет  
Мы Сопромату учимся,  
А все порядка нет.

Прошло еще лет полтора  
И Гук был Юнгом уточнен.  
Чтоб в нашей памяти остаться.  
Им модуль Юнга был введен.

Ломаются конструкции,  
Рванет вдруг агрегат –  
Все вопреки инструкции,  
А как же Сопромат?

И Юнгу точно в унисон,  
Чтоб также в памяти остаться.  
Коэффициент ввел Пуассон –  
Для поперечных деформаций.

\*

Похоже не освоили,  
Не взяли в оборот.  
Без знания Истории  
Не сдвинешься вперед.

Но мы еще не помянули  
Семейство славное Бернулли.  
Средь множества их увлечений  
Гипотеза плоских сечений.

\*

Известно, первым маху дал  
Премудрый Галилей,  
Когда изгиб он изучал,  
В закате своих дней.

И в Академию России  
Из них двух братьев пригласили,  
Но что особо хорошо,  
Был также Эйлер приглашен.

\*

Не понял он, что раз консоль,  
Согнулась без помех,  
То снизу она сжата вдоль,  
Растянута у ней – верх.

И вот они наворотили...  
Здесь немца русским не уешь,  
И Ломоносовым не в силах  
Закрыть пробитую здесь брешь.

Весьма жизнелюбивым был  
Великий Роберт Гук,  
Когда упругость заложил  
В основу всех наук.

Французов славных имена  
Вошли навеки в Сопромат:  
Навьё, Коши и Сен-Венан  
Выше похвал и всех наград.

Был президентом избран он  
Учеными мужами.  
Ценился выше, чем Ньютон,  
Но это - между нами.

Особо Сен-Венан велик.  
Мы принцип от него узнали:  
Если система сил вдали,  
То не важны ее детали.

Был Баушингером предел  
Упругости введен в науку.  
И как же это он посмел –  
Границу обозначить Гуку!

А сложный случай развели  
На интенсивность напряжений,  
Что Хубер с Мизесом ввели  
Для всех расчетных приложений.

Талант – такой случайный гость.  
Все ж добралась к России слава.  
Но это время началось  
С отмены крепостного права.

Запомни созидателей основ:  
Журавский, Тимошенко, Шухов  
И, разумеется, Крылов –  
Не надо с баснописцем путать.

Вояка славный - Головин  
Успел и с турками подраться,  
И с брусом, под разрывы мин,  
Криволинейным разобраться.

Секретом, что был свыше дан,  
Расчетов разных оболочек,  
С нами делился Бидерман,  
Отдав в науку своих дочек.

Поверив Сопромат гармонией,  
Никем не превзойденной после,  
Создал учебник, как симфонию,  
Блестящий В.И.Феодосьев.

Рос Сопромат, как не крути,  
Рос из упругости в текучесть,  
Чтобы за двести лет пути  
Забраться, наконец, в ползучесть.

Надаи, Удквист и Эндрейд  
Ее успехам послужили,  
Но как наука – этот брэнд  
Все же оформился в России.

Малинин книгою «Основ  
Расчета на ползучесть»  
Сказал одно из первых слов,  
Определив предмета участь.

Общей теории начала  
И поврежденность разных тел  
Подробно изложил Качанов,  
И тем прославиться сумел.

Академической громадой  
Строил науку Работнов.  
И в его творческой бригаде  
Талантливый Шестериков.

Хотя иные есть кумиры,  
Но помнить мы всегда должны  
О вкладе Биргера с Вольмиром  
В воздухоплаванье страны.

Нужна в расчетах осторожность.  
И уходя от неприятностей,  
Болотин укрепил «надежность»  
На зыбкой почве «вероятности».

Надеюсь, что меня простят,  
Кого я так и не назвал,  
Ведь необъятное объять  
Мне все равно никто б не дал.

\*

Ну, а студенты должны знать,  
Два века это им твердят,  
Мужчиной тот лишь может стать,  
Кто сдал успешно сопромат.

Долби настойчиво науку.  
С экзаменом не промахнись.  
И сдав его, беги к подруге  
И, если хочется, женись!

### Литература

1. Работнов Ю.Н. Соппротивление материалов М.: Физматгиз. 1962.
2. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела.-2-е изд. М.: Наука. 1987.
3. Работнов Ю.Н. Введение в механику разрушения. М.: Наука. 1977.

4. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука. 1987.
5. Мурзаханов Г.Х., Щугорев В.Н. Методы оценки конструкционной прочности трубопроводов. М.: Издательский дом МЭИ. 2009.
6. Болотин В.В. Ресурс машин и конструкций. М.: Машиностроение. 1990.
7. Окопный Ю.А., Радин В.П., Хроматов В.Е., Чирков В.П. Механика материалов и конструкций. Основные формулы. Контрольные вопросы и задачи. Основоположники механики: учебное пособие – М.: Издательский дом МЭИ. 2008.
8. Хроматов В.Е., Новикова О.В., Самогин Ю.Н. Механика материалов в структурно-логических схемах: учебное пособие. –М.: Издательский дом МЭИ. 2011.
9. Хроматов В.Е., Самогин Ю.Н., Новикова О.В. Структурно-логические схемы и историко-биографические сведения при изложении курсов механики твердого тела//Вестник МЭИ. 2010. № 2. С.179-185.
10. Хроматов В.Е., Самогин Ю.Н., Новикова О.В., Хажинский Г.М. Историко-биографические сведения в курсе сопротивления материалов об ученых-основоположниках механики твердого тела// Труды XVI Международной конференции «Машиностроение и техносфера XXI века».14—19 сентября, 2009 г., Севастополь. Донецкий государств. техн. ун-т. 2009. Т.3. С. 221–226.
11. Хроматов В.Е., Щугорев В.Н., Новикова О.В. Гуманитарная составляющая в курсах прикладной механики и математики// Материалы XIX междунар. симпозиума «Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред» им. А.Г. Горшкова . 18-22 февраля 2013 г., с. Ярополец. М.: Изд-во МАИ. 2013. Т. 1 С. 196 – 200

**ВОСПОМИНАНИЯ О ФУНКЦИОНАЛАХ ВОЛЬТЕРРА, ДРОБНО-ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ РАБОТНОВА, МИТТАГ-ЛЕФФЛЕРА И ВЫРОЖДЕННОЙ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФУНКЦИЯХ, А ТАКЖЕ КРАТКИЙ ОБЗОР СООТВЕТСТВУЮЩИХ РАБОТ**

*MEMORIES ABOUT FUNCTIONAL OF VOLTERRA, FRACTIONAL EXPONENTIAL FUNCTION  $E_\alpha(\beta, t)$ , MITTAG - LEFFLER AND KUMMER FUNCTIONS AS WELL AS SHORT REVIEW OF RELEVANT ARTICLES*

**О.Г.Новоженова** - к.т.н.

ИМАШ РАН

[info-viniti@yandex.ru](mailto:info-viniti@yandex.ru)

**Abstract.** Memoirs about Yu.N.Rabotnov as a teacher and a person, about his following and their ideas, as well as review of the relevant publications.

После окончания второй мировой войны в руки Юрия Николаевича Работнова попали трофейные диаграммы по ползучести стали, выполненные с немецкой тщательностью. Эти данные позволили сделать предположение о том, что объемная деформация при ползучести чисто упруга и объемное последствие отсутствует. Он слушает доклад А.Н.Герасимова в Институте механики, опубликованный позднее в ПММ [1], в котором используется производная дробного порядка  $\alpha$ , выраженная через интеграл Коши, а также вводятся дифференциальные соотношения между напряжением и деформацией первого [2] и второго порядка. Обобщение этих соотношений на зависимость с производными  $n$ -ого порядка, принцип Вольтерра, замена кратного интеграла степенью функционала в сочетании с гениально простой формулой геометрической прогрессии легли в основу статьи Ю.Н. о равновесии упругой среды с последствием [3]. Введенные в этой статье соотношения, по мнению авторов [4], были предтечей дробного дифференцирования (фрактального исчисления).

Я познакомилась с  $E_\alpha$ -функциями Работнова в 1968 г. при написании диплома по ползучести косоугольно - армированных композитов. Юрий Николаевич послал нас с Лазарем Паперником переводить монографию В.Вольтерра [5], которая нашлась в библиотеке иностранной литературы на итальянском языке. Лазарь с соавторами [6] на Минск-32 определяли параметры плохо сходящихся  $E_\alpha$ -функций непосредственно по изображению преобразования Лапласа без перехода к оригиналу [7].

В дальнейшем, теория  $E_\alpha$ -функций разрабатывалась Розовским М. И. [8-13]. В днепропетровском горном институте аппарат интегро-дифференциальных операторов он использовал для развития теории наследственной ползучести горных пород и изучения влияния реологических процессов на устойчивость подземных сооружений. Им было показано, что для экспоненциальной функции дробного порядка

$$E_\alpha(\beta, z) = z^{-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^n z^{n(1-\alpha)}}{\Gamma[(n+1)(1-\alpha)]},$$

где  $\Gamma$ - гамма-функция,

$z = t - s$ ,  $\alpha$  и  $\beta$  – постоянные, причем  $\beta > 0$ ,  $0 < \alpha < 1$ , интеграл от ядра релаксации  $\chi \mathcal{E}_\alpha(-\beta; z)$ , выражается через функцию Миттаг-Леффлера:

$$\chi \int_0^t \mathcal{E}_\alpha(-\beta; t-s) ds = \frac{\chi}{\beta} \left[ 1 - E_{1-\alpha}(-\beta t^{1-\alpha}) \right],$$

$$E_\mu(-\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\xi^n}{\Gamma(n\mu + 1)}$$

функция Миттаг-Леффлера порядка  $\mu = 1 - \alpha$ .

В [9] предложен способ определения основных параметров ползучести и релаксации по серии экспериментальных кривых простого последствия, построенных для различных фиксированных моментов времени. Для каждой из зон деформирования -линейности, конгруэнтности и полного влияния фактора времени- получены соответствующие формулы. Была исследована асимптотика  $\mathcal{E}_\alpha$ -функций, сделано обобщение теории на случай объемного последствия. В частности, рассмотрена задача [10] о деформации прямоугольной пластинки с круговым включением под воздействием касательных усилий, равномерно распределенных по всем четырем сторонам, с учетом наследственности (последствия) материала пластинки и включения. Там же решена задача о температурном поле в анизотропном теле с учетом теплового воздействия (наследственности) для симметричного тензора анизотропии. В [13] была обобщена теорема умножения  $\mathcal{E}_\alpha$ -операторов.

В работах [14-18] путем введения наследственных операторов типа Работнова в модель С.А. Амбарцумяна получены решения для краевых задач *разноползучести*. Рассмотрены две задачи для упруго-наследственных сред, разно сопротивляющихся растяжению и сжатию. Показано, в частности, что при решении задачи о деформации стержня под собственным весом принцип Вольтерра не может быть привлечен даже в линейной постановке задачи из-за подвижности раздела областей сжатия и растяжения. Кстати, в [14] были использованы результаты Аннина Б.Д. [19]. Кроме того, была решена задача разноползучести для полой сферы [16], рассмотрен изгиб пластины [18], разно сопротивляющейся растяжению и сжатию.

В монографии «Ползучесть элементов конструкций» Ю.Н. Работнов для наследственного интегрального уравнения релаксации напряжений в виде

$$\sigma = E \left[ e - \int_0^t R(t-\tau) e(\tau) d\tau \right]$$

вводит понятие спектра релаксации. При этом ядро релаксации определяется через преобразование Лапласа от спектра ползучести [19, с. 121]

$$R(t-\tau) = \int_0^\infty \alpha A(\alpha) \exp[-\alpha(t-\tau)] d\alpha,$$

где величина  $1/\alpha$  – время релаксации, а спектр ползучести находится по формуле

$$\alpha A(\alpha) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} R(x) \exp(\alpha x) dx$$

В 1963 г. выходит монографии Дж. Ферри [20], в которой приводятся экспериментальные спектры для семи типичных полимеров и обращается внимание на их асимметричность. Определением вида ядер, дающих асимметричный релаксационный спектр, характерный для реальных полимеров, занимался Т. Д. Шермергор [21-25]. В частности, [24] для описания реологических характеристик упруго-вязкого материала под действием гармонической

деформации  $\varepsilon = \varepsilon_0 e^{i\omega t}$  с циклической частотой  $\omega$ . в качестве ядра получена вырожденная гипергеометрическая функция первого рода,  ${}_1F_1(\alpha, 1, x)$  (функция Куммера). Ядра такого типа приводят к релаксационному спектру, отличающемуся от соответствующей функции распределения ядра Ржаницына — Дэвидсона инверсией времен релаксации и могут быть использованы для описания наследственных свойств полимеров в области перехода из стеклообразного в высокоэластичное состояние. Для дробно-экспоненциальных ядер [25] плотности распределения спектров релаксации и ползучести в логарифмических координатах симметричны и лишь сдвинуты одна относительно другой. Для случая  $\alpha = -1/2$  получены простые асимптотические формулы.

В уже упомянутой монографии Дж.Ферри [20] читаем: «Оба спектра (*\*релаксации и ползучести*) по своей природе являются функциями распределения (*\*ошибочный перевод, должно быть плотностями функции распределения*), хотя они имеют размерность модуля ( $H$ ) и податливости ( $L$ ) в отличие от обычных безразмерных функций распределения. В некоторых рассмотренных линейных вязкоупругих свойствах используются нормированные безразмерные *плотности* функции распределения

$$H = H/G_g, \quad l = L/(J_e - J_g),$$

где  $G_g$  - отношение напряжения к деформации при мгновенной деформации, а  $J_e$  - равновесная податливость (для сшитых полимеров) или податливость при установившемся режиме течения (для линейных полимеров). Хотя эти функции удобны с математической точки зрения (интегралы от них по  $dlnt$  от  $-\infty$  до  $+\infty$  равны единице), применение их при анализе экспериментальных данных затруднительно, так как нормирующие множители либо известны с малой степенью точности, либо вообще не поддаются экспериментальным измерениям.»

Возможность аналитического описания упруго-вязких свойств структурированного материала по их функциям распределения в сочетании с использованием функций Куммера, удовлетворяющих определяющим уравнениям, привлекла внимание Г.А.Ванина [26-30]. Для описания несимметрично распределенных положительных случайных параметров (диаметров круговых или сферических включений в гетерогенных средах, расстояний между их центрами и т.п.) предложены новые функции распределения [27], определены их центральные моменты. Вводится плотность

$$p(x) = Ax^b \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right) sh\left(\frac{ax}{\sigma}\right) \quad (0 \leq x < \infty).$$

Здесь  $a, b$  - безразмерные параметры, устанавливаемые, как и  $\sigma$ , на основе обработки экспериментальных данных,  $A$  - нормирующий множитель, определяемый из условия

$$\int_0^{\infty} p(x) dx = 1, \quad A = \left[ 2^{\frac{b}{2}} \alpha \sigma^{1+b} \Gamma\left(1 + \frac{b}{2}\right) {}_1F_1\left(1 + \frac{b}{2}, \frac{3}{2}, \frac{a^2}{2}\right) \right]^{-1}.$$

В [28] по данным о распределении диаметров микросфер, расстояний между ними, углов между прямыми, проведенными через центры соседних микросфер, были построены гистограммы и плотности распределения. Получена формула для начальных моментов

$$s\text{-го порядка} \quad \langle x \rangle^s = (\sigma\sqrt{2})^s \frac{\Gamma(\frac{b+s}{2} + 1) {}_1F_1(\frac{1-b-s}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{\alpha^2}{2})}{\Gamma(\frac{b}{2} + 1) {}_1F_1(\frac{1-b}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{\alpha^2}{2})}.$$

Показано, что предлагаемые функции распределения точнее описывают эксперимент.

В [29] изучено изменение термоупругих характеристик композитов с ростом величины и числа межфазных трещин, и на основе ядер Ю.Н.Работнова построена теория упругой наследственности пространственных сфероволокнистых материалов.

И в заключение следовало бы вспомнить о Ю.В.Суворовой[31-34], неизменно сопутствовавшей научным поискам Ю.Н.Работнова - от вопросов запаздывания текучести до задач ползучести и накопления повреждений.

### Литература

1. Герасимов А.П. Обобщение линейных законов деформирования и его применение к задачам внутреннего трения. ПММ,1948,т.12,вып 3,1948(доложено в Институте механики АН СССР 29 мая 1947г.), с.529-539.
2. Ишлинский А.Ю. Продольные колебания стержня при наличии линейного закона последействия и релаксации. ПММ,1940,т.4,вып.1,стр.80.
3. Работнов Ю.Н. Равновесие упругой среды с последействием, ПММ, 1948,т.12,вып.1, с.53-62.
4. Rossikhin Y.A., Shitikova M.V. Comparative analysis of viscoelastic models involving fractional derivatives of different orders. Dedicated to the bright memory of Academician Yuriy N. Rabotnov . Fractional calculus and applied analysis,2007, vol.10,N.2,p11-121.
5. Вольтерра В. Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений.—М.: Наука, 1982. 304 с.
6. Звонов Е.Н., Малинин Н.И., Паперник Л.Х., Цейтлин Б.М. Определение характеристик ползучести линейных упруго-наследственных материалов с использованием ЭЦВМ. Механика твердого тела,1968,№ 5, с.76-82
7. Баренблатт Г.И., Борисов Ю.П., Каменецкий С.Г., Крылов А.П. Об определении параметров нефтеносного пласта по данным о восстановлении давления в остановленных скважинах. Изв. АН СССР, ОН, 1957, № 11.
8. Розовский М.И. Изучение напряженного состояния вокруг горизонтальных выработок с учетом последействия в горных породах. Изв. АН СССР, ОН, 1958, № 12,с.66-72.
9. Розовский М.И.Обработка кривых ползучести на основе интегральных уравнений. Журнал технической физики,1959,т.29,вып.12.
10. Розовский М.И. Некоторые свойства специальных операторов, применяемых в теории ползучести,ПММ,1959,т.23,вып.5,с.978
11. Розовский М. И. О некоторых особенностях упруго-наследственных сред. Изв. АН СССР. ОН, Механика и машиностроение, 1961, № 2.
12. Розовский М.И. Об одном классе функций и их приложениях. Ж. вычисл. матем. и физ., 1962,т.2,№2,с.179-185.
13. Розовский М.И. Об одном свойстве степени специального оператора и его приложении к решению динамических задач, сб. "Ползучесть и длительная прочность", Изд-во СО АН СССР, Новосибирск, 1963
14. Круш И.И., Розовский М.И. Вынужденные колебания упруго-наследственных систем. Изв.АН СССР, Механика и машиностроение,1964, №1, 79-82.(ссылка на 18.).

15. Розовский М.И., Долинина Н.Н. Операторы типа Ю.Н.Работнова в теории разноползучести. Механика деформирования тел и конструкций. М.: Машиностроение, 1975, с.420-425.
16. Розовский М.И. Операторный метод исследования деформаций полой сферы при разноползучести // ПММ. 1974. - Т. 38. - Вып. 1. - С. 183 - 186.
17. Розовский М.И. О деформации вязкоупругих тел, обладающих различным сопротивлением растяжению и сжатию // Изв. АН СССР. МТТ. 1975. - N 3. - С. 99 - 103.
18. Долинина Н.Н., Розовский М.И. Изгиб пластины, изготовленной из материала, обладающего различными упруго-наследственными свойствами при растяжении и сжатии // Тр. 9-й Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. Л., 1975. - С. 20 -25.
19. Аннин Б.Д. Асимптотическое разложение экспоненциальной функции дробного порядка. ПММ, 1961, т., вып.4.
20. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. ГРФМЛ. Изд-во «Наука», М., 1966. 752 с.
21. Ферри Дж. Вязко-упругие свойства полимеров. Изд. иностр. лит., 1963. (Пер. с англ. Viscoelastic properties of polymers. NY-London, 1961)
22. Шермергор Т. Д. Расчет функций распределения констант релаксаций по дисперсии действительной части комплексной упругости для упруго-вязких тел. Изв. ВУЗ, Физика, 1961, № 1.
23. Шермергор Т. Д. О симметрии релаксационного спектра. Тр. Новокузнецкого гос. пед. института (Кемеровская обл.) Сер. физ.-мат., 1962, т. 4, стр. 153.
24. Мешков С. И., Пачевская Г. Н., Шермергор Т. Д. К описанию внутреннего трения с помощью дробно-экспоненциальных ядер. ПМТФ, 1966, № 3.
25. Шермергор Т.Д. Реологические характеристики упруго-вязких материалов, обладающих асимметричным релаксационным спектром. 1967 МТТ, №5
26. Листовничий В.Ф., Шермергор Т.Д. Ползучесть упруго-вязких сред с ядром типа вырожденной гипергеометрической функции. МТТ, 1969, № 1, с.136-141.
27. Ванин Г.А. К основам теории композиционных материалов с неупорядоченной структурой. - Прикладная механика, 1983, 19, № 3, с.9-18.
28. Ванин Г.А. Новые функции распределения в механике композиционных сред. Прикладная механика, 1984, т.20, № 5, с.25-31.
29. Ванин Г.А., Стеликов Н.Е. Исследование распределения микросфер в сферопластиках. - Механика композитных материалов, 1985, № 3, с.404-408.
30. Ванин Г.А., Нгуен Динь Дык. Механика композитных материалов, 1996, № 6, с.780-786.
31. Ванин Г.А. Математическое моделирование состояния композиционных материалов. Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 1998, том.10, № 64, с.53-58.
32. Работнов Ю.Н., Суворова Ю.В. Динамика жестко-пластической балки с запаздыванием текучести. МТТ, 1968, № 6.
33. Суворова Ю.В. О применении интегральных преобразований в одномерных волновых задачах наследственной вязкоупругости/ В книге «Механика деформируемых тел и конструкций». М.: Машиностроение, 1975. – С.464-471.
34. Суворова Ю.В. О критерии прочности, основанном на накоплении поврежденности и его приложение к композитам // МТТ. – 1979. - № 4. – С.107-111.
35. Suvorova J.V. The Influence of Time and Temperature on the Reinforced Plastics Strength // In book: "Failure Mechanics of Composites". North Holland. 1985. – P.177-214.



**Паперник**  
Лазарь Хаймович  
(р.1944)



**Шермергор**  
Тимофей Дмитриевич  
(1929-1998)



**РОЗОВСКИЙ**  
Моисей Исаакович  
(1906-1994)



**СУВОРОВА**  
Юлия Васильевна  
(1939-2009)



**ВАНИН**  
Георгий Андреевич  
(1930-2008)

**ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ РАЗОРИЕНТАЦИИ ВОЛОКОН НА ФОРМУ  
РАВНОПРОЧНЫХ КОМПОЗИТНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ**  
*EVALUATION OF THE EFFECT OF FIBER'S MISORIENTATION ON  
SHAPE OF UNIFORM STRESS ELEMENTS*

**И.С.Плитов** – асп.

Институт машиноведения им.А.А.Благонравова РАН  
plitov@yandex.ru

**Abstract.** Using of the curvilinear fiber placement, analogous to nature structures, in composite design can solve a lot of its current problems (like joints of the composites) and can allow to create optimal elements for variety of loading conditions. But design of structures with misoriented fibers is very complex task because of big quantity of variables, describing trajectories of each fiber. Even basic problems, which usually can be solved analytically in case of material homogeneity assumption, usually become solvable only numerically and iteratively in case of curvilinear fiber placement. This text presents results of solving uniform strength beam task taking into account misorientation of fibers, including different models of fiber placement and different strength criteria.

Цель исследований состоит в разработке методологии проектирования композитных элементов, оптимальных по форме и по структуре криволинейного армирования, подобной структуре древесины. Оптимальное проектирование Природой прочных конструкций основано на принципе равнонапряженности волокон [1]. Следует отметить особую роль компьютерного моделирования в познании и реализации биомеханических принципов построения природных материалов-конструкций. Компьютер по заданным критериям может последовательно строить волокнистую структуру и форму детали, по тем же принципам, что и Природа.

В качестве иллюстрации рассмотрена простая модельная задача о балочном элементе равного сопротивления [2]. Выбрана форма постоянной площадью поперечного сечения (рис. 1). Число волокон в каждом сечении должно быть одинаковым, а их траектории – непрерывны. Данные требования основаны на технологии производства композитов, а также на примерах схожих элементов, встречающихся в Природе, реализующих оптимальную конструкцию. Живая Природа сама обеспечивает усиление структуры при возрастании местных напряжений. Композитным дизайнерам функцию природной приспособляемости призвано заменить итерационное компьютерное моделирование. Задаваясь биомеханическими принципами построения структуры, композитчик имеет возможность итерационно построить оптимальную структуру, которая в живой Природе возникает за счет обратной связи, обеспеченной приспособляемостью живого материала.

Существуют несколько методов построения оптимальных композитных структур с криволинейным армированием (метод CAIO [1], метод клеточных автоматов [3]), большинство из которых связано с непосредственным подбором ориентации волокна в каждом конечном элементе. В данной работе применяется другой подход: сначала выбирается модель укладки, т.е. функции, определяющие координаты каждого волокна в зависимости от размеров сечения, после чего итерационным методом определяется форма изделия, обеспечивающая выполнение выбранных критериев равнопрочности.

## 1. Моделирование траекторий волокон, соответствующих форме композитного элемента.

1.1. Первая модель представляет собой равномерное распределение волокон в каждом сечении по высоте и ширине [4]. К примеру, если известны изменения высоты и ширины сечения по длине  $h(x)$  и  $b(x)$ , а также суммарное число волокон  $N_s = N_h \cdot N_b$ , где  $N_h$ ,  $N_b$  – число слоев волокон по высоте и рядов по ширине, соответственно, координаты каждого волокна определяются следующим образом:

$$\begin{cases} y_{i,j}(x) = -\frac{b(x)}{2} + \frac{b(x)}{2 \cdot N_b} + (i-1) \cdot \frac{b(x)}{N_b} \\ z_{i,j}(x) = -\frac{h(x)}{2} + \frac{h(x)}{2 \cdot N_h} + (j-1) \cdot \frac{h(x)}{N_h} \end{cases} \quad (35)$$

где  $i = 1, \dots, N_b, j = 1, \dots, N_h$ .

Пример укладки волокон по первой модели представлен на рис.2.

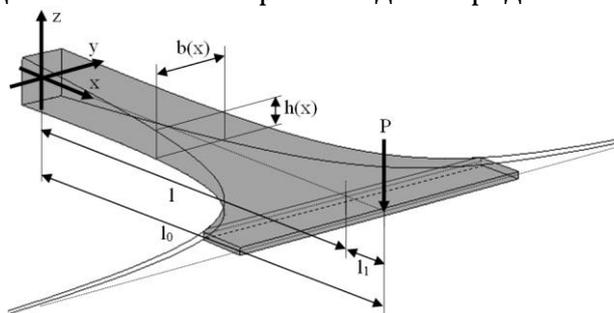


Рис.1 Расчетная схема балки равного сопротивления «констрэ»

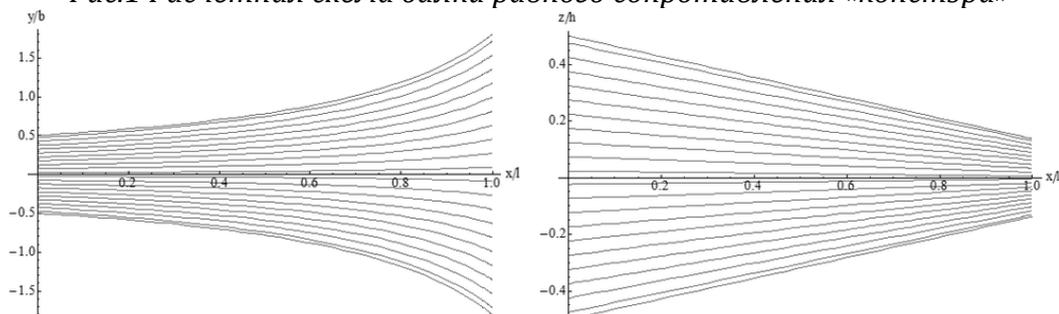


Рис. 2 Укладка волокон по первой модели

К положительным сторонам данной модели можно отнести очевидную простоту ее реализации при программировании, к отрицательным - отсутствие равномерного распределения волокон, что приводит к необходимости создания алгоритма укладки волокон с переплетением, т.е. с изменением значений  $N_h$  и  $N_b$  по длине балки в зависимости от отношения размеров сторон сечения  $h(x)/b(x)$ .

1.2. Вторая модель может быть отнесена к задачам технологической механики. Моделирование волокон цилиндрами с переменной жесткостью для получения равного расстояния между центрами цилиндров было реализовано с учетом возможной технологии производства композитных балок с переменным по длине поперечным сечением – pull-forming (пултрузия с формованием). После прохождения через фильеру заготовка, состоящая из одноосно уложенных волокон, пропитанных полимерной матрицей, попадает в формующее устройство, представляющее собой жесткую форму - с одной стороны - и податливую металлическую ленту - с другой. Лента прижимается к заготовке по всей длине, сжимая ее в заданных местах до заранее определенной высоты сечения. При этом происходит необходимое изменение геометрии с обеспечением равномерного распределения волокон по сечениям.

Процесс обжата композитной заготовки моделировали методом конечных элементов для получения координат центров волокон при изменении размеров сечения.

В корневом сечении балки принимали равномерное распределение волокон. Попытки решения задачи на квадратной сетке укладки волокон по сечению не привели к удовлетворительным результатам, и было решено применить гексагональную модель укладки (рис. 3). Центры волокон соединяли стержневой системой и в центр каждого волокна помещали узел. В зависимости от расстояний между узлами они соединялись друг с другом двумя типами элементов:

$$\begin{aligned} \rho_{ij} &\leq (1 + \varepsilon) \cdot a && \text{тип 1} \\ (1 + \varepsilon) \cdot a < \rho_{ij} &\leq k \cdot a && \text{тип 2} \end{aligned} \quad (4)$$

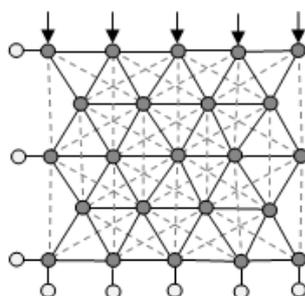


Рис. 3. Пример используемой сетки

где  $\rho_{ij}$  – расстояние между узлами  $i$  и  $j$ ,  $a$  – начальное минимальное расстояние между волокнами,  $\varepsilon=10^{-3}$  – принятый допуск,  $k$  – выбранный коэффициент, характеризующий податливость матрицы в процессе формования.

Тип 1 представляет собой абсолютно жесткий элемент, цель которого - обеспечивать постоянство минимального расстояния между волокнами. Тип 2 - более податливый элемент, обеспечивающий целостность конструкции за счёт влияния матрицы.

К координатам узлов добавлялось случайное начальное отклонение для обеспечения правильной работы алгоритма: узлы должны «перекатываться» друг относительно друга, в нужные моменты теряя, или наоборот, приобретая жесткие связи без существенного сжатия жестких элементов, длины которых определяют минимальное расстояние между волокнами.

На рис.3 представлен пример начальной сетки с изображением различных типов элементов. Из-за симметрии сечения рассматривается лишь его четверть. Применены также симметричные граничные условия: отсутствие вертикальных перемещений узлов на горизонтальной оси, отсутствие горизонтальных перемещений на вертикальной оси. К верхним узлам прикладываются кинематические граничные условия: заданы вертикальные перемещения, соответствующие выбранному шагу.

Задача решалась итерационно. На каждом шаге преобразовывалась матрица координат и, соответственно ей, пересчитывалась матрица жесткости для отслеживания смены типов элементов. В результате решения данной задачи получены координаты центров всех волокон по сечению в зависимости от его размеров  $y_i(h)$ ,  $z_i(h)$ . Однако первоначально полученные траектории волокон не обладают достаточной плавностью, что особенно сильно сказывается при определении углов ориентации волокон, зависящих от производных по координатам. Поэтому перед окончательным использованием в общем алгоритме полученные координаты дополнительно сглаживались полиномами (рис. 4).

Несмотря на неточности на начальном участке, данная модель достаточно хорошо обеспечивает равномерное распределение волокон при существенных изменениях размеров поперечного сечения.

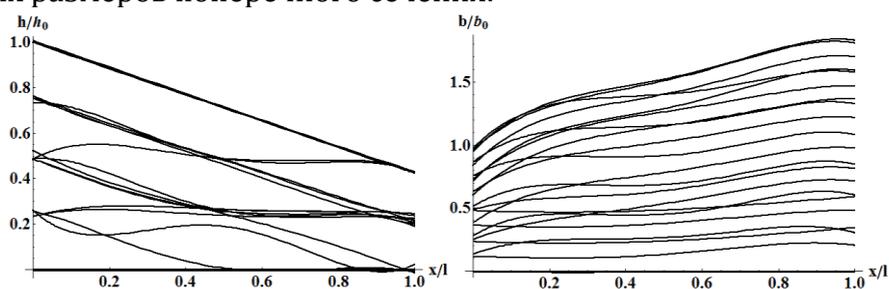


Рис. 4. Траектории волокон по ширине и по высоте для второй модели укладки

Очевидно, что при увеличении числа рассматриваемых волокон, а также при уменьшении шага можно получить структуру переплетающихся траекторий, более точно отражающую расположение волокон в реальных композитных элементах.

## 2. Определение эффективного модуля упругости

Для любой геометрии упругого элемента можно, используя одну из моделей укладки, определить координаты каждого волокна, дифференцируя которые можно получить углы разориентации волокон [4]. При известном расположении волокон необходимо ввести дополнительные гипотезы для определения эффективных характеристик. Для каждого волокна легко найти угол разориентации  $\alpha$  к продольной оси:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{dy^2 + dz^2}}{dx} \quad (5)$$

С учетом того, что  $dy = dx \cdot \operatorname{tg} \alpha_1$  и  $dz = dx \cdot \operatorname{tg} \alpha_2$  (где  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  – углы разориентации волокна в горизонтальной и вертикальной плоскостях, соответственно), получаем зависимость для суммарного угла разориентации волокна

$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha_1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_2} \quad (6)$$

Используя угол разориентации  $\alpha$ , получаем значения упругих характеристик для каждого волокна, расположенного в данной точке под углом  $\alpha$  к направлению продольной оси  $x$ .

При расчете эффективного модуля упругости при изгибе можно считать, что по высоте балки остается справедливой гипотеза плоских сечений, а по ширине балки в каждом слое выполняется условие равенства деформаций, и поэтому эффективный модуль каждого слоя получается простым усреднением (линейное правило смесей) [4]. Примеры рассчитанного эффективного модуля упругости и прогибов балки представлены на рис. 5.

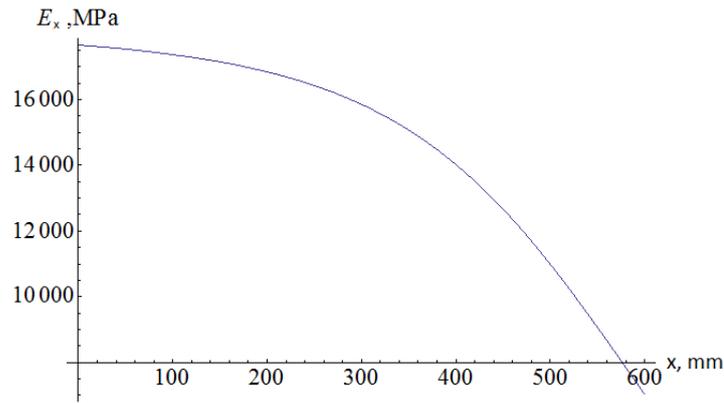


Рис.5. Осредненный модуль упругости

### 3. Расчет напряжений в волокнах и критерии прочности

В качестве первого критерия прочности было выбрано максимальное растягивающее напряжение в волокнах. После определения эффективных упругих характеристик из решения задачи изгиба балки (с принятием гипотезы плоских сечений) находятся зависимости для деформаций

$$\varepsilon(x, z) = \frac{6 \cdot P \cdot (l - x) \cdot z}{E_z(x) \cdot b(x) \cdot h^3(x)} \quad (7)$$

После чего для каждого волокна определяются деформации вдоль направления волокна –  $\varepsilon_i(x) = \varepsilon(z_i(x), x) \cdot \cos^2(\alpha_i)$ , и находятся растягивающие напряжения в каждом волокне –  $\sigma_i(x) = E_V \cdot \varepsilon_i(x)$ . Среди этих, рассчитанных по всей длине балки, напряжений находятся максимальные растягивающие напряжения в волокне –  $\sigma_{\max}(x) = \max(\sigma_i(x))$ . Дальнейший итерационный процесс построения равнопрочной формы основан на обеспечении постоянства максимального напряжения во всех сечениях.

Разрыв волокон, описываемый первым критерием прочности (9), возникает лишь под нагрузкой, направленной почти вдоль волокон. В задачах с разориентированными волокнами необходимо использовать также другой критерий разрушения (10) для матрицы.

Учитывая направленный характер разрушения волокнистых композитов, естественно принять в качестве условия прочности некоторое предельное соотношение между нормальным и касательным напряжениями  $\sigma_n$  и  $\tau_n$ , действующими в плоскости возможного разрушения [5, 6]:

$$\varphi(\sigma_n, \tau_n) = 1 \quad (8)$$

Простейшее предположение о виде функции  $\varphi$  состоит в том, что она линейна. Обозначая  $n_1$  вектор, параллельный волокнам, а  $n_2$  - нормаль к поверхности волокна, запишем два условия:

1) разрыва волокон

$$\sigma_{n1} + m_1 \tau_{n1} = c_1, \quad (9)$$

2) разрушения матрицы или границы раздела вдоль волокон:

$$\sigma_{n2} + m_2 \tau_{n2} = c_2 \quad (10)$$

Здесь  $c_1 = \sigma(0)$  - прочность вдоль волокон,  $c_2 = \sigma(90)$  - прочность при растяжении поперек волокон. Для иллюстрации ограничимся наиболее простым

случаем одноосного растяжения под углом  $\alpha$  к волокнам. При малых углах  $\alpha < \alpha^*$  происходит разрыв волокон, и согласно (9) зависимость прочности имеет вид

$$\sigma(\alpha) = \frac{c_1}{\cos^2 \alpha + m_1 \sin \alpha \cos \alpha} \quad (11)$$

При  $\alpha > \alpha^*$

$$\sigma(\alpha) = \frac{c_2}{\sin^2 \alpha + m_2 \sin \alpha \cos \alpha} \quad (12)$$

Критический угол  $\alpha^*$ , при котором происходит переход от разрыва волокон к разрушению матрицы, определяется из равенства (11) = (12), приводящего к квадратному уравнению, из которого  $\alpha^* \approx \arctg(c_2/(c_1 * m_2))$ .

Получаемая зависимость прочности от угла между приложенной нагрузкой и направлением волокон представлена на рис.6, где приведено также изменение локального модуля упругости и отношение максимальных напряжений к прочности при постоянной деформации.

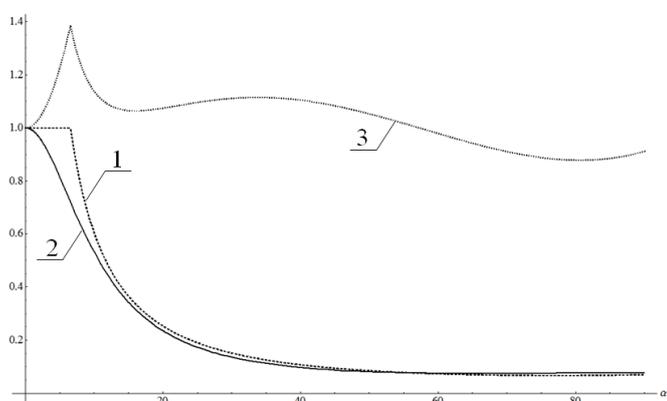


Рис. 6. 1 – Нормированная прочность в зависимости от угла между приложенной нагрузкой и направлением волокон  $\sigma_0(\alpha) = \sigma(\alpha)/\sigma(0)$ ; 2 – изменение нормированного модуля  $E_0(\alpha) = E(\alpha)/E(0)$ ; 3 - критерий равнопрочности  $\sigma_0/E_0 \approx const$ .

#### 4. Итерационный процесс уточнения формы балки и траекторий волокон для обеспечения их равнонапряженности

Ввиду невозможности аналитического определения зависимостей напряжений в балке от её формы задача решалась численно и итерационно.

Первый этап решения - задание исходных данных: свойств волокон и матрицы, диаметра и числа «волокон», размеров корневого сечения.

Выбирается начальное приближение зависимости высоты поперечного сечения от  $x$ :  $h_0(x)$ . Ширина  $b_0(x)$  однозначно определяется из условия постоянства площади поперечного сечения.

По выбранной модели находится укладка всех волокон. В итоге становятся известными координаты каждого волокна  $z_i(x)$ ,  $y_i(x)$ , которые используются для определения угла разориентации волокон  $\alpha$  и для дальнейшей оценки эффективного упругого модуля, который используется при вычислении деформаций по гипотезе плоских сечений. Через деформации рассчитываются напряжения, с помощью которых определяют, так называемую, «функцию изменения».

«Функция изменения»  $f_c(x)$  – безразмерная функция, зависящая от выбранного критерия прочности, используемая для уточнения высоты сечения при следующей итерации:

$$h_1(x) = h_0(x) \cdot f_c(x) \quad (13)$$

Для критерия прочности по максимальному растягивающему напряжению в волокнах «функция изменения» записывается в виде:

$$f_c(x) = \left( \frac{\sigma_{\max}(x)}{\sigma_{\max}(0)} \right)^m, \quad (14)$$

где  $m$  – параметр влияния (обычно меньше 1), служащий для обеспечения плавности изменения высоты сечения между итерациями,  $\sigma_{\max}(x)$  – максимальное растягивающее напряжение в волокнах в сечении с координатой  $x$ ,  $\sigma_{\max}(0)$  – максимальное растягивающее напряжение в волокнах в корневом сечении.

Для критериев прочности (9), (10), учитывающих направленный характер разрушения, «функция изменения» записывается следующим образом:

$$f_c(x) = \left( \frac{\max \left( \frac{\sigma_i(x)}{\sigma_a(\alpha_i(x))} \right) \Big|_i}{\max \left( \frac{\sigma_i(0)}{\sigma_a(\alpha_i(0))} \right) \Big|_i} \right)^m, \quad (15)$$

где  $\sigma_i(x)$  – нормальное напряжение в монослое с номером  $i$ ,  $\sigma_a(\alpha_i(x))$  – допустимое нормальное напряжение при угле разориентации  $\alpha_i(x)$ ,  $\sigma_i(0)$  – нормальное напряжение в корневом сечении  $i$ -го монослоя.

Итерационное решение завершается при обеспечении заданной однородности «функции изменения»:  $A = \max(f_c(z)) - \min(f_c(z)) \leq \varepsilon$ .

После каждой итерации функция изменения используется для принятия решения о завершении или продолжении цикла.

## 5. Эффект оптимизации формы и структуры

Анализ рассмотренного упругого элемента типа «констэры» показывает, что оптимальная разориентация волокон увеличивает податливость (прогиб) балки при данных размерах корневого сечения, а следовательно, при проектировании балки с заданной жесткостью следует изменить размеры корневого сечения, что в свою очередь приведет к уменьшению примерно на 10% максимальных напряжений при заданной нагрузке [2]. Используя линейную аппроксимацию кривой Велера [6]:  $\sigma(N) = \sigma(1)(1 - k \log N)$ , где  $\sigma(N)$  – критическое напряжение для заданного числа циклов  $N$ ,  $\sigma(1)$  – статическая прочность,  $k = 0.1$  – для однонаправленного углепластика. Пусть, для примера, циклическое напряжение  $\sigma(N)$  снизилось за счет оптимизации на 10%, со значения  $0.6 \sigma(1)$  до значения  $0.54 \sigma(1)$ . Это эквивалентно тому, что долговечность должна вырасти с уровня  $N=10^4$  до  $N=10^{4.6}$ , то есть она увеличится примерно в 4 раза.

Полученные результаты показывают необходимость учета разориентации волокон при проектировании изделий из КМ с криволинейной укладкой. Доказательством этого являются существенные различия между формами равнопрочных балок с учетом и без учета влияния разориентации при равных жесткостях и уровнях максимальных напряжений (Рис.6).

## Выводы

Разработанные алгоритмы позволяют построить оптимальную форму балочного элемента и оптимизировать криволинейную структуру армирования, которая может быть реализована с развитием САМ-технологий (computer-aided-manufacturing). Разработка методов проектирования и создания композитных конструкций с криволинейным армированием является перспективной задачей, решение которой может привести как к значительному увеличению эффективности использования композитов, так и к решению проблемы крепления композитных деталей.

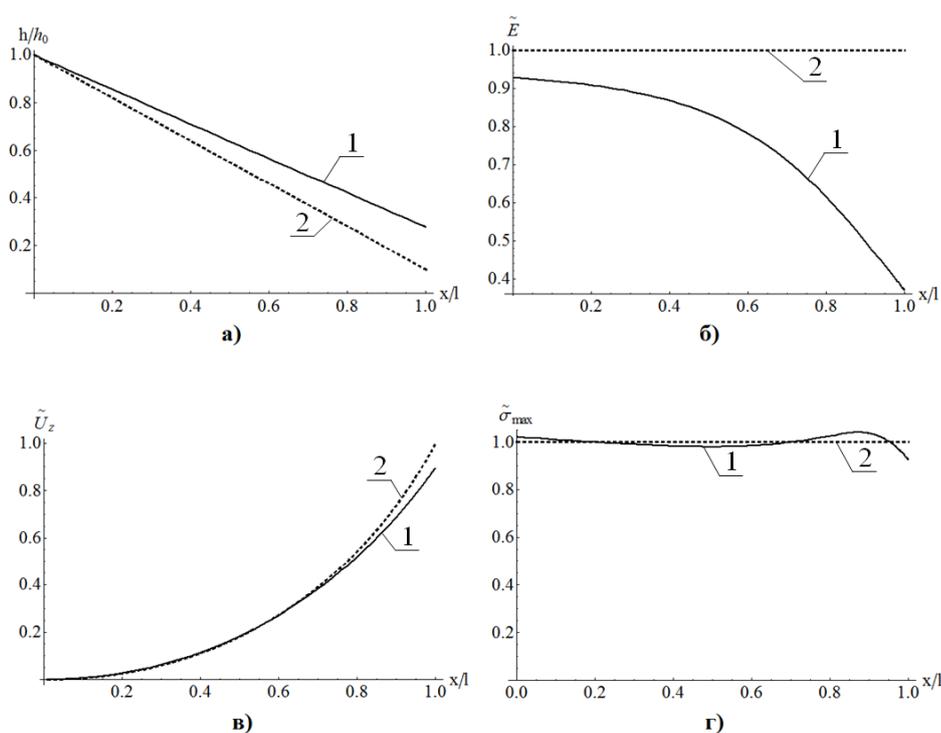


Рис. 6. Нормированные высоты равнопрочных балок (а), эффективные модули упругости (б), прогибы балки (в) и максимальные напряжения (г) при учете(1)/без учета(2) влияния разориентации волокон

## Литература

1. Claus Mattheck, Design of Nature: Learning from Trees, Springer, 1998, 276
2. Полилов А.Н., Татусь Н.А., Шабалин В.В. Особенности проектирования упругих элементов в виде профилированных композитных балок//Проблемы машиностроения и надежности машин, 2011, № 6, с. 34-41.
3. Shahriar Setoodeh, Zafer Gürdal Design of Composite Layers with Curvilinear Fiber Paths Using Cellular Automata, 44th AIAA/ASME/ASCE/AHS Structures, 7-10 April 2003, Norfolk, Virginia.
4. Полилов А.Н., Татусь Н.А., Плитов И.С. Оценка влияния разориентации волокон на жесткость и прочность профилированных композитных элементов// Проблемы машиностроения и надежности машин, 2013, № 5.
5. Полилов А.Н., Татусь Н.А. Критерии прочности полимерных волокнистых композитов, описывающие некоторые экспериментально наблюдаемые эффекты// Проблемы машиностроения и автоматизации, 2008, № 3, с. 103-110.
6. Полилов А.Н., Татусь Н.А. Экспериментальное обоснование критериев прочности волокнистых композитов, проявляющих направленный характер разрушения// «Вестник ПНИПУ. Механика», 2012, № 2, с. 140-166.

**МИНИМИЗАЦИЯ КОЛИЧЕСТВА ИСПЫТАНИЙ  
МЕТАЛЛИЧЕСКИХ ПРОВОДНИКОВ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ  
ИМПУЛЬСНЫХ ТОКОВ НА ОСНОВЕ ПРИМЕНЕНИЯ ТЕОРИИ  
ЭРГОДИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ**  
*MINIMIZATION OF QUANTITY OF TESTS OF METAL CONDUCTORS AT  
EFFECT OF PULSE CURRENTS ON THE BASIS OF APPLICATION THEORY  
ERGODIC PROCESSES*

**Е.А.Правоторова<sup>1</sup>** – к.т.н., в.н.с., **О.Б.Скворцов<sup>1,2</sup>** – к.т.н., с.н.с.

<sup>1</sup>Институт машиноведения им. А. А. Благонравова РАН,

<sup>2</sup> ООО «Диамех 2000»

[pravotorova@bk.ru](mailto:pravotorova@bk.ru)

**Abstract.** Impact impulses of a current on cylindrical metal samples it is connected to imposing of some electromagnetic effects. The experimental estimation of the operational forces most simply can be executed by measurement 3D vibrations. Complex spectral and time functions demand estimations as definition of mean extreme values of accelerations. For obtaining such mean estimations at acyclic effect of impulses it is necessary conformity of processes to criterion ergodic hypothesis.

Воздействие импульсного тока на металлические образцы вызывает механический отклик в виде радиального и осевого движения поверхности образца, которое может фиксироваться датчиками вибрации. Такие испытания позволяют исследовать процессы, связанные с действием пинч-эффекта и скин-эффекта в случае импульсного характера тока [1]. Одним из возможных применений данной методики может быть проведение испытаний элементов обмоток мощных трансформаторов, генераторов и моторов. Условия испытаний приближены к реальным, что позволяет учесть воздействие на образцы многоциклового нагружения при повышенных температурах и в присутствии электрических токов большой плотности. Возбуждение механических колебаний непосредственно в самом проводнике без внешних механических движущихся элементов (стендов задания многоциклового нагружения) позволяет существенно упростить испытания и снизить их стоимость. Возможность проведения испытаний на высокой частоте позволяет выполнить исследования на гигацикловую усталость [2] за сравнительно малый интервал времени. При такой постановке задачи важное значение имеет статистическое обоснование возможности применения длительных испытаний с распространением их результатов на большое количество параллельно работающих в реальном оборудовании однотипных образцов (стержней обмоток упомянутого оборудования).

Предлагается сократить объем испытаний и количество испытательных образцов без потери получаемой информации путем изменения плана эксперимента на основании представления об испытании материалов, как об эргодическом стационарном процессе, для которого допустима замена традиционного осреднения информации по множеству реализаций осреднением информации по времени [4].

Основные вибрационные параметры такие, как ускорение  $a(t)$ , в радиальном  $a_{radial}(t)$  и осевом  $a_{axial}(t)$  направлении в общем случае являются случайными функциями времени, ход изменения которых регистрируется в

процессе испытаний в моменты времени  $t_1, t_2, \dots, t_m$ . Пусть над случайными функциями  $a_{axial}(t)$  и  $a_{radial}(t)$  проведено  $n$  независимых опытов, что соответствует вибрационному испытанию  $n$  образцов. В результате получено  $n$  реализаций случайных функций. Методы математической статистики позволяют найти оценки для характеристик каждой из двух случайных функций: математического ожидания  $m_{axial}(t)$ ,  $m_{radial}(t)$ , дисперсии  $D_{axial}(t)$ ,  $D_{radial}(t)$ , и корреляционной функции  $K_{axial}(t, t')$ ,  $K_{radial}(t, t')$ .

Как показали исследования, с определенного момента времени, для каждого из исследуемых процессов своего, они принимают стационарный характер, то есть имеют вид непрерывных случайных колебаний вокруг некоторого среднего значения, причем ни средняя амплитуда, ни характер этих колебаний не обнаруживают существенных изменений с течением времени.

Эти процессы по своей природе более предсказуемых, чем нестационарные, и описываются в рамках корреляционной теории сравнительно простыми характеристиками, для которых выполняются следующие три условия.

Во-первых, изменение стационарной случайной функции протекает однородно по времени и для стационарной случайной функции математическое ожидание постоянно:  $m_{axial}(t) = m_{axial} = \text{const}$ ,  $m_{radial}(t) = m_{radial} = \text{const}$ .

Во-вторых, соблюдается условие постоянства дисперсии:  $D_{axial}(t) = D_{axial} = \text{const}$ ,  $D_{radial}(t) = D_{radial} = \text{const}$ .

И, наконец, в-третьих, корреляционная функция стационарного случайного процесса зависит не от величины аргументов  $t_1$  и  $t_2$  на оси абсцисс, а только от промежутка  $\tau$  между первым и вторым аргументом:  $\tau = t_2 - t_1$ , т.е.

$$K_{axial}(t, t + \tau) = K_{axial}(\tau) \text{ и } K_{radial}(t, t + \tau) = K_{radial}(\tau).$$

Следовательно, корреляционная функция стационарного случайного процесса есть функция не двух, а всего одного аргумента. Это обстоятельство в ряде случаев сильно упрощает операции над стационарными случайными функциями.

Стационарный процесс называется эргодическим, если его числовые характеристики, полученные усреднением по множеству реализаций, с вероятностью, сколь угодно близкой к единице, равны тем же числовым характеристикам, полученным усреднением по времени из одной достаточно длинной реализации случайного процесса, т.е. для эргодических процессов  $x(t)$  справедливы равенства:

$$\tilde{x}(t) = \bar{x}(t)$$

$$\tilde{x}^2(t) = D_x(t) + \bar{x}^2$$

$$\overline{x(t) \cdot x(t + \tau)} = \bar{x}(t) \cdot \bar{x}(t + \tau)$$

где  $\sim$  символ осреднения по времени,  $\bar{\phantom{x}}$  – символ осреднения по множеству реализаций. Из эквивалентности двух способов усреднения эргодического случайного процесса по множеству и по времени следует, что нет необходимости изучать большую совокупность реализаций, а достаточно одной реализации, наблюдаемой в течение достаточно большого промежутка времени.

На практике мы не имеем возможности исследовать случайный процесс и его корреляционную функцию на бесконечном участке времени; участок значений  $t$ , с которым мы имеем дело, всегда ограничен. Если при этом корреляционная функция стационарного случайного процесса при увеличении  $t$  не убывает, а, начиная с некоторого  $t$ , остается приблизительно постоянной, это обычно есть признак того что процесс не является эргодическим. Стремление же корреляционной функции к нулю при  $t \rightarrow \infty$  говорит в пользу эргодического процесса. Это утверждение основано на эргодической теореме Биркхофа-Хинчина

[5], представляющей не только значительный теоретический интерес, но и находящей применение как в статистической физике, так и в технической практике. Причина этого состоит в том, что для определения таких важных характеристик, какими являются  $M_x(t)$ ,  $D_x(t)$  и  $K(t)$ , требуется многократное осуществление испытаний. Эргодическая теорема Биркхофа-Хинчина показывает, что с вероятностью единица можно при этом ограничиться единственной реализацией процесса  $x(t)$ . Итак, для того, чтобы оценивать характеристики случайного процесса по одной реализации на достаточно большом участке времени  $T$  следует выяснить характер поведения ее корреляционной функции.

При достаточно большом  $T$  математическое ожидание  $m_x$  может быть приблизительно вычислено по формуле:

$$m_x \approx \frac{1}{T} \cdot \int_0^T x(t) \cdot dt \quad (1)$$

Аналогично может быть приближенно найдена корреляционная функция  $K_x(t)$  при любом  $t$ :

$$K_x(\tau) = M \left[ x^o(t) \cdot x^o(t + \tau) \right] \quad (2)$$

где  $x^o(t) = x(t) - m_x$  и  $K_x(\tau) \approx \frac{1}{T - \tau} \cdot \int_0^{T-\tau} x^o(t) \cdot x^o(t + \tau) \cdot dt$

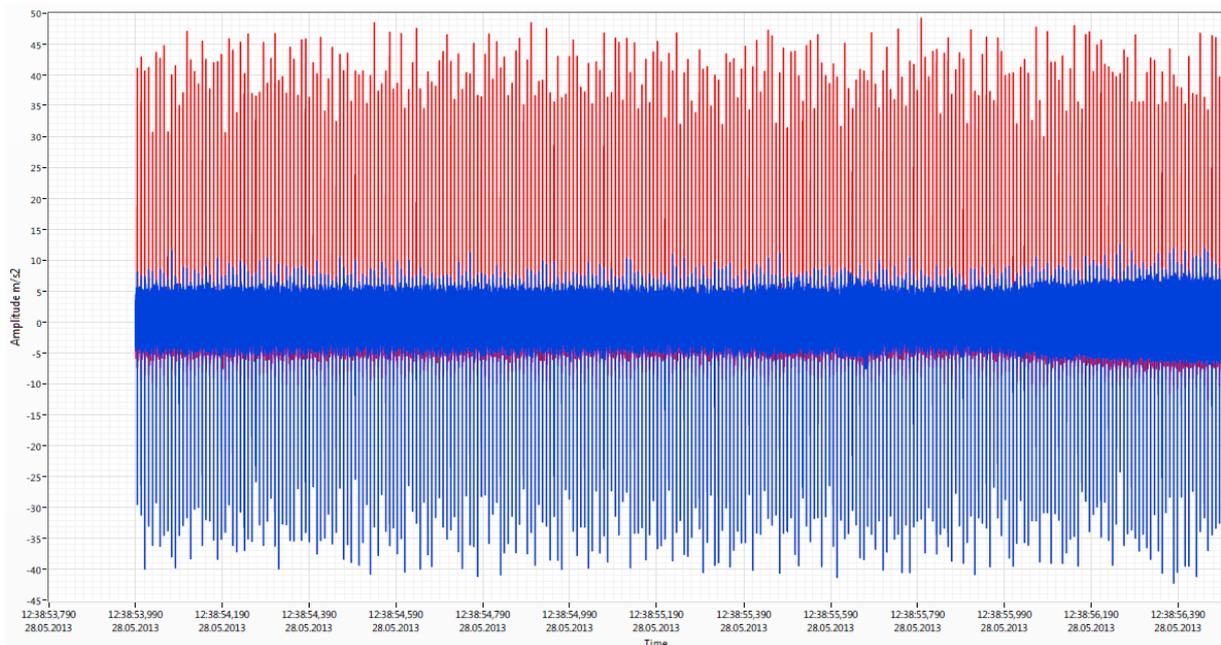
На практике обычно интегралы (1) и (2) заменяют конечными суммами и после ряда преобразований получают окончательно:

$$\tilde{K}_x \left( \frac{p \cdot T}{m} \right) = \frac{1}{m - p} \cdot \sum_{i=1}^{m-p} x^o(t_i) \cdot x^o(t_{i+p}) \quad (3)$$

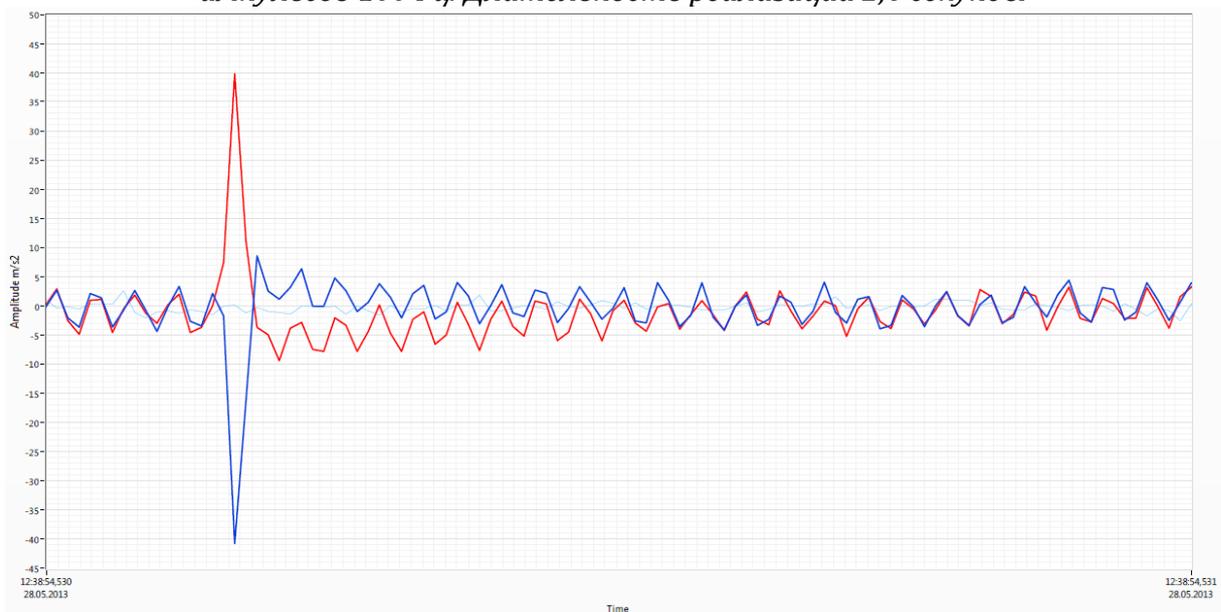
где  $m$  – количество точек  $t_1, t_2, \dots, t_m$ ;  $p$  – текущие значения индекса  $t_p$ ; ( $p=1+m$ )  
Вычисление корреляционной функции по формуле (3) производят для  $p=1, 2, \dots$  последовательно вплоть до таких значений  $p$ , при которых корреляционная функция становится практически равной нулю (в случае эргодического процесса) или приближаться к некоторой *const*, отличной от нуля.

Описанный подход был использован при исследовании вибрации радиальной и осевой вибрации полых и сплошных образцов из алюминия, латуни, меди, титана, стали, серебра и золота при пропускании через них импульсов тока. Ниже в качестве примера, приведены результаты измерений для образца в виде сплошного медного стержня диаметром 4 мм.

На рис.1 показана временная реализация зависимости ускорения в радиальном и осевом направлении для металлического образца при воздействии импульсного тока, а одиночный импульс вибрационного отклика из этой реализации показан на рис.2.

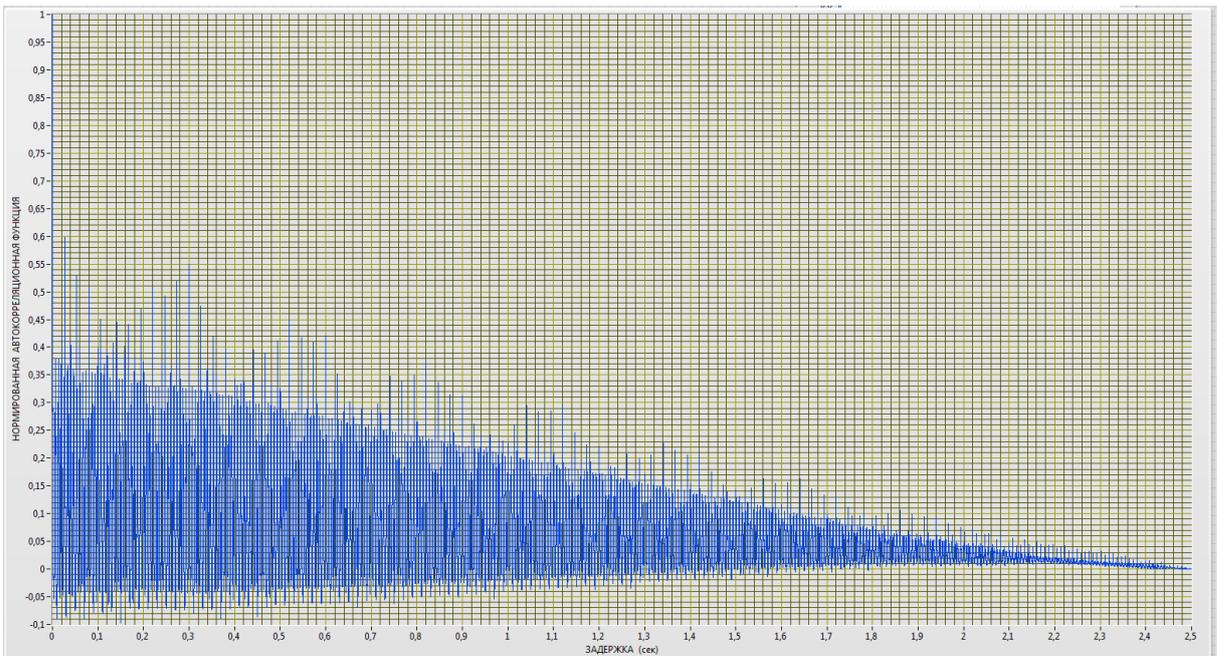


*Рис.1. Сигнал ускорения ( $a_{radial}(t)$  синий - радиальное,  $a_{axial}(t)$  красный - осевое) Медный стержень диаметром 4 мм. Импульс 12 Вольт 160 мкс. Частота импульсов 100 Гц. Длительность реализации 2,6 секунды*

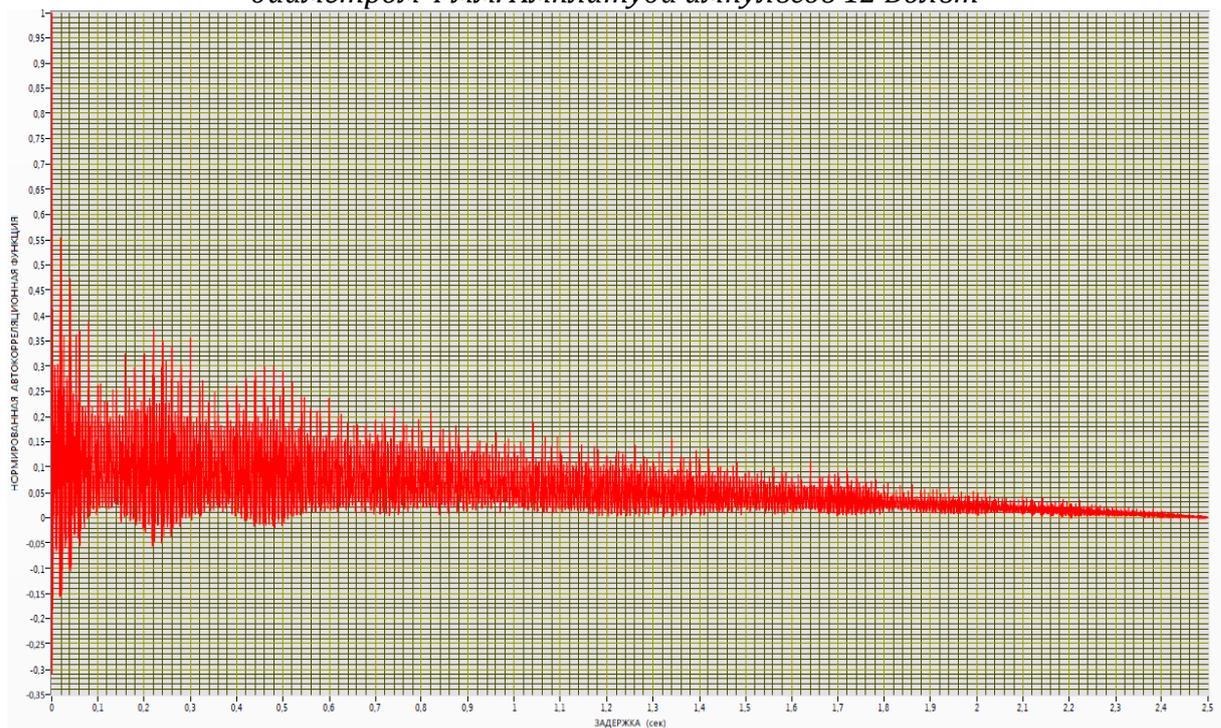


*Рис.2. Сигнал ускорения  $a_{radial}(t)$  синий радиальное,  $a_{axial}(t)$  красный осевое) Медный стержень диаметром 4мм. Импульс 12 Вольт 160 мкс. Подробное представление одного импульса на фоне помех*

На рисунках 3 и 4 в качестве примера приведены зависимости автокорреляционной функции случайного процесса радиального и осевого соответственно ускорения поверхности медных образцов, испытывающих действия импульсного тока.



*Рис.3. Нормированная автокорреляционная функция вибрационного отклика в виде радиального ускорения на воздействие импульсного тока с длительностью импульса 160 мкс. Частота импульсов 100 Гц. Образец – медный стержень диаметром 4 мм. Амплитуда импульсов 12 Вольт*



*Рис.4. Нормированная автокорреляционная функция вибрационного отклика в виде осевого ускорения на воздействие импульсного тока с длительностью импульса 160 мкс. Частота импульсов 100 Гц. Образец – медный стержень диаметром 4 мм. Амплитуда импульсов 12 Вольт*

Увеличение частоты импульсов позволяет обеспечить проведение гигацикловых испытаний за время порядка одной недели или месяца. Связь между количеством циклов, длительностью испытаний и частотой импульсов иллюстрируется таблицей 1, где голубым цветом выделена область гигацикловой усталости [6].

Таблица 1

	1 сутки	1 неделя	1 месяц	1 год	50 лет
10 Гц	$8.64 \times 10^5$	$6.048 \times 10^6$	$2.592 \times 10^7$	$3.154 \times 10^8$	$1.577 \times 10^{10}$
100 Гц	$8.64 \times 10^6$	$6.048 \times 10^7$	$2.592 \times 10^8$	$3.154 \times 10^9$	$1.577 \times 10^{11}$
1 КГц	$8.64 \times 10^7$	$6.048 \times 10^8$	$2.592 \times 10^9$	$3.154 \times 10^{10}$	$1.577 \times 10^{12}$
3 КГц	$2.592 \times 10^8$	$1.814 \times 10^9$	$7.776 \times 10^9$	$9.461 \times 10^{10}$	$4.73 \times 10^{12}$
10 КГц	$8.64 \times 10^8$	$6.048 \times 10^9$	$2.592 \times 10^{10}$	$3.154 \times 10^{11}$	$1.577 \times 10^{13}$

Параметры вибрационного воздействия на образец легко могут перестраиваться изменением настройки задающего генератора, управляющего формирователем импульсов тока.

Анализ представленных данных и результатов их статистической обработки позволяют заключить, что автокорреляционные функции исследуемых процессов при увеличении продолжительности испытаний стремятся к нулю. Отсюда можно заключить, что исследуемые процессы могут быть с достаточной точностью рассмотрены как стационарные и эргодические. Это позволяет без потери информации исключить повторные испытания материалов, заменив их проведением одного репрезентативного испытания необходимой продолжительности. Применение данной методики позволяет реализовать ресурсные испытания материалов за ограниченный интервал времени.

### Литература

1. Троицкий О.А., Сташенко В.И., Правоторова Е.А., Скворцов О.Б. Ускорение поверхностных слоев и вибрация металлического проводника под влиянием пинч-эффекта действия импульсного тока. Тезисы конференции "Наследственная механика деформирования и разрушения твердых тел - научное наследие Ю.Н.Работнова". М., Изд. ИМАШ РАН, 2014, с.106-107.
2. Claude Bathias, Paul Croce Paris. Gigacycle Fatigue in Mechanical Practice. September 13, 2004 by CRC Press - 328 p.
3. Вентцель Е.С., Овчаров Л.А. Теория вероятностей и ее инженерные приложения. М.: Академия, 2003, 480 с.
4. Правоторова Е.А., Буяновский И.А. Метод минимизации количества трибологических испытаний // ТСММ, 2009, № 3, с.15-20.
5. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей .8-е изд., М.; Едиториал УРСС, 2005, 448с.
6. Скворцов О.Б. Выбор параметров контроля вибрации для систем непрерывного мониторинга состояния машин и агрегатов. Научные труды II Международной научной конференции "Фундаментальные исследования и инновационные технологии в машиностроении, ИМАШ РАН, 2012, с.412-417.

# СПОСОБ НАГРУЖЕНИЯ РЕЗИНОПОДОБНЫХ МАТЕРИАЛОВ ДЛЯ ОЦЕНКИ ПРЕДЕЛОВ ЛИНЕЙНОСТИ ИХ МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ПРИ ДЕФОРМИРОВАНИИ

## *A METHOD OF LOADING OF RUBBERY-LIKE MATERIALS FOR ESTIMATION OF LINEARITY LIMITS OF THEIR MECHANICAL PROPERTIES AT DEFORMATION*

Н.Д. Преснов, В.Г. Сазонов - к.т.н.

ФГУП ЦНИИмаш

[Lab55541@tsniimash.ru](mailto:Lab55541@tsniimash.ru)

**Abstract.** It is suggested to load two test specimens simultaneously. Here the test specimens have different sectional areas and lengths; the length is proportional to the sectional area. For example, one test specimen is a sample with section  $S$  and length  $L$ , and another specimen represents two adjacent samples with length  $2xL$ . The test specimens are loaded by similar forces; therefore, in spite of the phenomena of creep and relaxation, at any moment the values of stress for the specimens differ in two times. The linearity limit is estimated through comparison of deformations measured for different specimens. The tables with measurement results are presented.

В определенных условиях некоторые материалы проявляют вязкоупругие свойства. В [1] указано, что линейная теория наследственности хорошо описывает поведение полимерных материалов при умеренных напряжениях, что эта теория пригодна для описания внутреннего трения даже в металлах, когда амплитуды напряжений очень малы.

Область линейности механических свойств материалов характеризуется условиями, когда связь между напряжениями и деформациями, временем и температурой определяется линейными функциональными соотношениями [2].

В [2] сказано следующее. Вязко-упругие свойства данного материала будут линейными при следующих условиях. 1). Если в любых двух опытах в одинаковые (от начала процесса) моменты времени силы различаются множителем  $n$ , то и перемещения будут различаться тем же множителем  $n$ . 2). Если с двумя одинаковыми телами за время  $t$  проведены два опыта деформации двумя различными системами сил, то в третьем опыте с таким же телом за такое же время  $t$  при условии, что действует система сил, равных сумме соответствующих сил первого и второго опытов, перемещения в каждый момент времени будут равны сумме соответствующих перемещений в первых двух опытах.

Учитывая, что рассматриваемым материалам присущи явления ползучести и релаксации, затруднительно обеспечить режимы нагружения образцов, при которых в одинаковые (от начала процесса) моменты времени силы различаются множителем  $n$ .

Предлагается одновременно нагружать два объекта испытания одинаковыми силами. Например, один объект испытаний – это один образец; другой объект испытаний – это два образца, каждый из них имеет то же сечение, что и первый образец, но вдвое длинней его. В итоге (рассматриваются квазистатические режимы нагружения, когда инерционными силами можно пренебречь), в любой момент времени (от начала процесса) напряжение в первом образце будет вдвое больше, чем в двух других образцах. При выдержках при постоянном значении перемещения, из-за явлений релаксации, напряжения в образцах будут падать, но будет сохраняться соотношение между величинами напряжений в разных образцах для каждого момента времени.

Возможны несколько схем нагружения.

Вариант 1 (рис.1). Верхние концевые части объектов испытаний соединены с помощью гибкого тросика, перекинутого через ролики, которые вращаются без трения. Нижние концевые части образцов с помощью гибкого тросика соединены с подвижной легкой, жесткой траверсой, к которой прикладывается нагрузка. К одному ролику прикреплен стрелочный индикатор. По величине угла поворота этого ролика судят о различии величин деформации  $\varepsilon_1(t)$  – первого образца и величины удвоенной деформации  $2 \times \varepsilon_2(t)$  – других (длинных) образцов.

Вариант 2 (рис.2). Верхние концевые части объектов испытаний с помощью гибкого тросика присоединены к неподвижной жесткой траверсе. Нижние концевые части образцов с помощью гибкого тросика соединены с подвижной легкой, жесткой траверсой, к которой прикладывается нагрузка. Для обеспечения возможности равномерного нагружения левой и правой ветвей образцов, центры отверстий, за которые закрепляются элементы, служащие для зацепления нижних концов образцов и для приложения нагрузки должны располагаться на одной прямой. При этом зона приложения нагрузки к этой подвижной траверсе располагается посередине отрезка, соединяющего центры отверстий, служащих для зацепления нижних концов образцов. Для удобства в начальный момент времени (при малой начальной нагрузке) легкую подвижную траверсу следует располагать горизонтально. Следует предусмотреть устройство, позволяющее регулировать длину элементов служащих для прикрепления образцов к нагружаемому устройству. При малых нагрузках эта траверса остается горизонтальной, затем при возрастании нагрузки траверса может отклоняться от первоначального горизонтального положения. Величину деформации образцов вычисляют по результатам замера смещения правого и левого конца подвижной траверсы (по величинам этих смещений определяется и угол отклонения этой траверсы от горизонтального положения). Если исследуемый материал очень податлив (заметно деформируется даже при малых нагрузках), то рассматриваемую систему (исследуемые образцы, элементы, служащие для их закрепления и для крепления к неподвижной и подвижной траверсам, подвижная траверса и т.д.) можно располагать на горизонтальной гладкой поверхности, обеспечивающей свободное (с малыми силами трения) смещение элементов рассматриваемой системы при приложении нагрузки.

Вариант горизонтального расположения рассматриваемой системы возможен и в случае, когда верхние части образцов соединяются с помощью гибкого тросика, перекинутого через ролик. Чтобы уменьшить влияние на точность определения пределов линейности дополнительных факторов, следует уравнивать правую и левую ветви образцов и элементов, служащих для их закрепления в случае вертикального расположения системы.

Испытания показали, что для закрепления концевых частей образцов в виде трубок из резиноподобных материалов (эти образцы по форме похожи на велониппель), вполне подходят зажимы типа «крокодил». Эти зажимы прикрепляются к кускам из прочных, нерастяжимых нитей или к кускам из гибкого нерастяжимого тросика.

Результаты испытаний различных материалов представлены ниже в таблицах. В таблицах указаны следующие величины. Нагрузка – это приложенное к системе усилие; при выдержках при постоянной деформации значение нагрузки заметно уменьшается, в таблицах приведены максимальные, зафиксированные в опыте значения нагрузок для данной деформации. Т.к. имеется две (одинаково нагруженных) «ветви» образцов, то на образец 1 приходится вдвое меньшая нагрузка, чем нагрузка, указанная в таблице. Условное напряжение – это напряжение в образце 1, вычисленное путем деления силы, приходящейся на

образец 1, на значение начальной площади сечения. Значения деформации  $\varepsilon_1$ ,  $2 \times \varepsilon_2$ , вычисленные на основании результатов замеров, а также значения величины  $[\varepsilon_1 - (2 \times \varepsilon_2)] / \varepsilon_1 \times 100$ , %, характеризующей различия между значениями деформаций  $\varepsilon_1$ ,  $2 \times \varepsilon_2$  в рассматриваемом случае.

В некоторых случаях длина рабочей части образца  $L_0$  составляла 70 мм, соответственно для других образцов, которые вдвое длинней, длина была 140 мм; в других случаях  $L_0 = 140$  мм (соответственно  $2 \times L_0 = 280$  мм).

Таблица 1.  
Трубка из резиноподобного материала ( $D = 3$  мм,  $d = 2$  мм,  $S = 3,93$  мм<sup>2</sup>)

Нагрузка, Н	Усл. напряж., МПа	Деформация: $\varepsilon_1$ , %	Деформ.: $2 \times \varepsilon_2$ , %	$[\varepsilon_1 - (2 \times \varepsilon_2)] / \varepsilon_1 \times 100$ , %
0,78	0,099	1,80	1,80	0,00
2,30	0,293	5,26	5,45	-3,61
4,00	0,509	8,12	8,31	-2,34
6,00	0,763	11,80	11,80	0,00
8,50	1,081	19,30	18,56	3,83
10,00	1,272	21,81	20,34	6,74
14,00	1,781	30,24	26,19	13,40

Таблица 2.  
Трубка из резиноподобного материала ( $D = 2$  мм,  $d = 1,6$  мм,  $S = 1,13$  мм<sup>2</sup>)

Нагрузка, Н	Усл. напряж., МПа	Деформация: $\varepsilon_1$ , %	Деформ.: $2 \times \varepsilon_2$ , %	$[\varepsilon_1 - (2 \times \varepsilon_2)] / \varepsilon_1 \times 100$ , %
0,6	0,265	0,86	0,86	0,0
5,0	2,214	7,19	7,38	-2,64
8,0	3,540	11,86	11,28	4,89
11,0	4,867	18,25	16,32	10,57
16,0	7,080	27,26	23,03	15,51

Таблица 3.  
Трубка из резиноподобного материала ( $D = 1,5$  мм,  $d = 1$  мм,  $S = 0,982$  мм<sup>2</sup>)

Нагрузка, Н	Напряжение, МПа	Деформация: $\varepsilon_1$ , %	Деформ.: $2 \times \varepsilon_2$ , %	$[\varepsilon_1 - (2 \times \varepsilon_2)] / \varepsilon_1 \times 100$ , %
0,95	0,484	2,43	2,43	0,0
4,00	2,037	10,38	10,19	1,84
6,30	3,208	19,86	19,28	2,92
9,00	4,582	27,78	25,66	7,63

Таблица 4.  
Трубка из резиноподобного материала ( $D = 3,1$  мм,  $d = 2,5$  мм,  $S = 2,64$  мм<sup>2</sup>)

Нагрузка, Н	Напряжение, МПа	Деформация: $\varepsilon_1$ , %	Деформ.: $2 \times \varepsilon_2$ , %	$[\varepsilon_1 - (2 \times \varepsilon_2)] / \varepsilon_1 \times 100$ , %
10,0	1,894	2,57	2,57	0,00
16,0	3,030	6,86	6,86	0,00
24,0	4,545	12,05	11,66	3,24
27,0	5,114	15,20	14,23	6,38

Таблица 5.

Трубка из резиноподобного материала ( $D = 3,0$  мм,  $d = 2,1$  мм,  $S = 3,605$  мм<sup>2</sup>)

Нагрузка, Н	Напряжение, МПа	Деформация $\varepsilon_1$ , %	Деформация: $2 \times \varepsilon_2$ , %	$[\varepsilon_1 - (2 \times \varepsilon_2)] / \varepsilon_1 \times 100$ , %
3,0	0,416	13,85	13,85	0,0
4,5	0,624	22,02	19,52	11,35
6,6	0,915	30,13	23,71	21,31
7,6	1,054	35,62	29,00	18,58
9,6	1,331	46,95	33,05	29,61

Следует заметить, что для удобства рассмотрен случай, когда другой объект испытаний представляет собой два, рядом расположенных образца, имеющих вдвое большую длину. Но образцов может быть, например, три, тогда они имеют втрое большую длину. В общем случае второй объект испытания имеет другую площадь сечения, а длина его пропорциональна площади сечения.

На рис.1 и 2 показаны схемы размещения и нагружения образцов, а также схемы замера перемещений. Размеры образцов: «ширина» (диаметр), длина на рис.1 и 2 показаны условно.

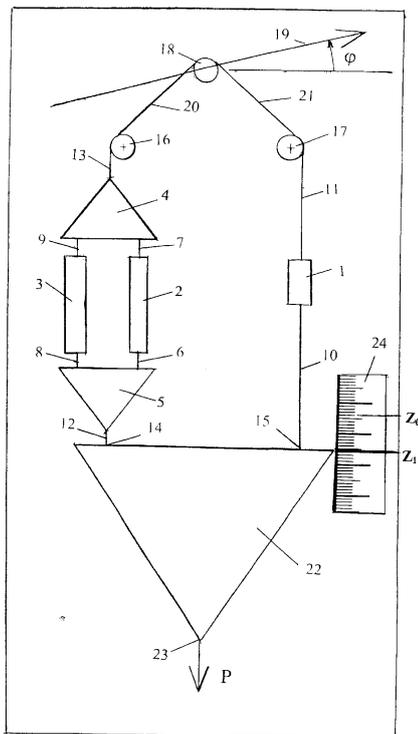


Рис.1 Схема нагружения образцов с использованием роликов

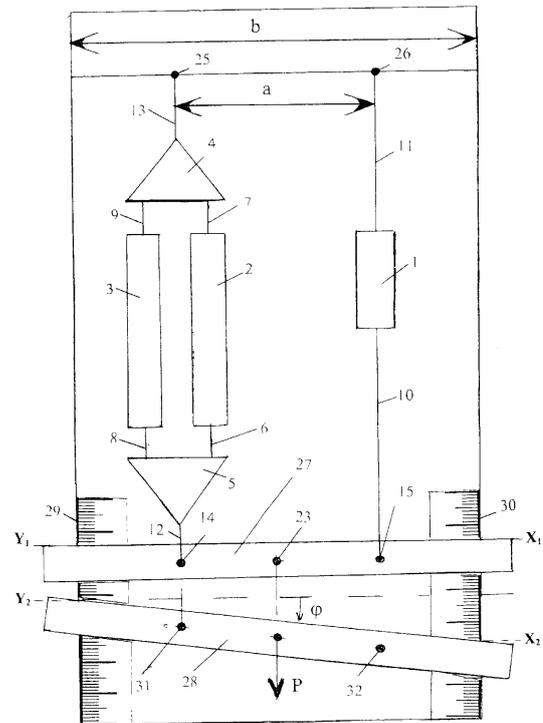


Рис.2 Схема нагружения образцов без использования роликов

На рис.1 и 2 обозначено:

1- образец, имеющий в рабочей части площадь сечения  $S_0$ , а длину  $L_0$ .

2 и 3 – представляют собой второй объект испытаний, например, 2 и 3 одинаковые образцы, площадь сечения каждого из них  $S_0$ , а длина  $2 \times L_0$ , в итоге этот объект испытаний имеет площадь сечения  $2 \times S_0$ , а длину  $2 \times L_0$ .

4 и 5 – жесткие, легкие элементы, к которым с помощью гибких (но жестких на растяжение) элементов 6, 7, 8, 9 крепятся образцы 2 и 3.

- 10, 11, 12, 13 - гибкие (но жесткие на растяжение) элементы (например, куски гибкого, тонкого троса или жесткой на растяжение нити).
- 11, 13, 20, 21 (рис.1) – это участки одного гибкого элемента, перекинутого через ролики 16, 17, 18).
- 16, 17, 18 – ролики, оси вращения которых неподвижно закреплены на жесткой станине, ролики без трения вращаются вокруг своих осей вращения.
- 19 – стрелочный индикатор, закрепленный на ролике 18; поворот ролика 18 вызывает поворот стрелочного индикатора 19.
- 14 – зона приложения нагрузки, передаваемой на образцы 2 и 3.
- 15 – зона приложения нагрузки, передаваемой на образец 1.
- 22 (рис.1) и 27 (рис.2) – подвижная жесткая легкая траверса, служащая для нагружения испытываемых образцов 1, 2 и 3.
- 23 – точка приложения нагрузки  $P$  к траверсе 22 (рис.1) (или 27, рис.2).
- 24 (рис.1) – шкала с делениями, по которым измеряются величины смещения траверсы 22 при приложении нагрузки  $P$ .
- 25, 26 (рис.2) - зоны крепления элементов 11 и 13 к жесткой неподвижной траверсе.
- 27 (рис.2) – исходное (при малой начальной нагрузке) положение подвижной жесткой легкой траверсы.
- 28 (рис.2) – положение подвижной жесткой легкой траверсы после приложения нагрузки  $P$ .
- 29 (рис.2) – шкала с делениями, по которой измеряется величина смещения левой части траверсы 28 при приложении нагрузки  $P$ .
- 30 (рис.2) – шкала с делениями, по которой измеряется величина смещения правой части траверсы 28 при приложении нагрузки  $P$ .

Для обеспечения условия, что на образец 1 в любой момент времени действует та же сила, что и на систему образцов 2 и 3, необходимо, чтобы соблюдалась симметрия в расположении деталей. В частности, симметрия в расположении роликов 16, 17, 18; чтобы при приложении силы  $P$  детали 6, 7, 8, 9, 10, 11 располагались на параллельных прямых (или на прямых, близких к параллельным прямым), чтобы сила  $P$  была направлена вертикально вниз, чтобы в зонах точек 14 и 15 возникали одинаковые силы реакции, направленные по вертикали вверх и т.п.

При необходимости в зоне крепления элемента 10 к траверсе 22 (см. точку 15, рис.1 и 2) могут крепиться дополнительные грузы для компенсации веса деталей 4 и 5 и дополнительного веса образцов 2 и 3 (эти дополнительные грузы на рис. не показаны).

Для обеспечения условия, что на образец 1 в любой момент времени действует та же сила, что и на систему образцов 2 и 3, необходимо, чтобы точки 14, 15, 23 (рис.2) лежали на одной прямой.

Для удобства в зонах точек 25 и 26 следует предусмотреть устройства, позволяющие регулировать длину рабочей части гибких элементов 11 и 13 (эти устройства для регулировки длины на рис.2 не показаны). При необходимости в зоне крепления элемента 10 к траверсе 27 (см. точку 15, рис.2) могут крепиться дополнительные грузы для компенсации веса детали 5 и дополнительного веса образцов 2 и 3 (эти дополнительные грузы на рис.2 не показаны).

Для удобства шкалы 29 и 30 (рис.2) должны быть идентично закреплены, при этом, когда траверса 27 расположена горизонтально (на систему действует малая начальная нагрузка, направленная вертикально вниз), показания шкал 29 и 30 должны быть одинаковыми.

## **Выводы**

1. Предложены способы нагружения образцов из резиноподобных материалов для оценки пределов линейности их механических свойств при деформировании.

2. Проведенные испытания показали, что для всех исследованных материалов оценка предела линейности (по деформациям) выше 15 %, если в качестве критерия отклонения от линейности взять величину расхождения 10 % между значениями  $\varepsilon_1(t)$  и  $2 \times \varepsilon_2(t)$ .

## **Литература**

1. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977, 384с.
2. Огибалов П.М., Тюнеева И.М. Область линейности механических свойств армированных пластиков. Механика полимеров. 1969, № 2, с.366-370.

**АНАЛИЗ ПРОЧНОСТИ И ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК  
СБОРНЫХ КОНСТРУКЦИЙ РОТОРНЫХ СИСТЕМ И ДРУГИХ ИЗДЕЛИЙ  
С ПРИМЕНЕНИЕМ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ И  
КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТЕЛА**  
*ANALYSIS OF STRENGTH AND DYNAMIC CHARACTERISTICS OF ROTARY  
PREFABRICATED SYSTEMS AND OTHER PRODUCTS WITH APPLICATION  
FINITE ELEMENT ANALYSIS AND CONTACT PROBLEMS  
DEFORMABLE BODY*

**А. А. Пыхалов**, - д.т.н., проф., **С.К.Каргапольцев** - д.т.н., проф.  
Иркутский государственный университет путей сообщения  
[pikhalov\\_aa@irgups.ru](mailto:pikhalov_aa@irgups.ru)

**Abstract.** The problem of analysis of stress-strain state (SSS), the thermal conductivity and the dynamic characteristics of the loaded prefabricated structures with the use of the contact problem coupling bodies, realized on the basis of a modified variation energy approach method movement mechanics a deformed body, built on the basis of approximations finite element method (FEM).

The proposed methodology allows the analysis of all types of deformable prefabricated parts and mating conditions in them. Represented by mathematical modeling-parameter built on three interrelated tasks:

1. Determination of contact forces and elastic-plastic SSS for analysis of residual (plastic) deformation parts occurring during the operation of the product;
2. Determination (specification) of the temperature field of the product under the joint solving of contact heat exchange and power supply contact details in the design team;
3. Determination of dynamic characteristics of the assembly when the contact forces (stiffness) interface components during operation of the product.

Рассматривается проблема анализа напряженно-деформированного состояния (НДС), теплопроводности и динамических характеристик нагруженных сборных конструкций с использованием контактной задачи сопряжения тел, реализованной на основе модифицированного вариационно-энергетического подхода метода перемещений механики деформированного тела с применением аппроксимаций метода конечных элементов (МКЭ). Предлагаемая методология позволяет проводить анализ любых типов деформируемых сборных конструкций и условий сопряжения в них деталей, а также изменения этих условий, от нерабочих состояний, когда нагрузка определяется только предварительными контактными силами (затяжка, посадка с натягом или зазором и др.), до изменения этих сил под воздействием внешней рабочей нагрузки и температуры. Представленное математическое моделирование построено на решении трёх взаимно связанных задач:

1. Определение контактных сил и упругопластического НДС для анализа остаточных деформаций, возникающих в деталях сборного изделия в процессе его работы;
2. Определение (уточнение) поля температур изделия при совместном решении задач контактного теплообмена и силового контакта сопрягаемы деталей при их работе;

3. Определение динамических характеристик сборной конструкции изделия при изменении в нем контактных сил (жесткости) сопряжения деталей в процессе работы.

**Физика явления**, определяющая актуальность разработки и использования контактной задачи механики деформируемого тела обусловлена тем, что сборная конструкция изделия, в отличие от её монолитного аналога, имеет более сложный концептуальный характер свойства жесткости. Это свойство состоит здесь из двух компонент: конструкционной жесткости отдельных деталей и жесткости контактной [1], определяемой условиями сопряжения между стыками деталей (натяг, зазор, переходная посадка). Проблема заключается в том, что контактная жесткость под воздействием внешней нагрузки изменяется. Соответственно, изменяется общая величина жесткости сборной конструкции и картина напряженно-деформированного состояния (НДС) в ней. Если конструкция работает в условиях теплообмена (теплонапряженности), то, с изменением силового контакта изменяется температурное сопротивление в стыках деталей и, соответственно, могут появиться локальные зоны перегрева материала деталей. Также, если сборная конструкция находится в условиях движения, в особенности периодического, то изменяются её динамические характеристики как деформируемого тела и возникает риск появления резонанса. Например, для сборных роторных систем изменяется спектр критических частот вращения выше первой или второй гармоник. Получение достаточно точной оценки характеристик представленного комплекса явлений определяет собой одну из важных и сложных задач анализа работоспособности и долговечности современных высоконагруженных машин.

Данная проблема может быть преодолена с применением компьютерного моделирования на основе метода конечных элементов (МКЭ) и решения контактной задачи механики твердого деформируемого тела [2, 3, 4]. В этом случае в сборной конструкции, наряду со сложной геометрией, свойствами материала и внешним воздействием, моделируются условия контактного сопряжения в стыках деталей и изменение этих условий при работе конструкции.

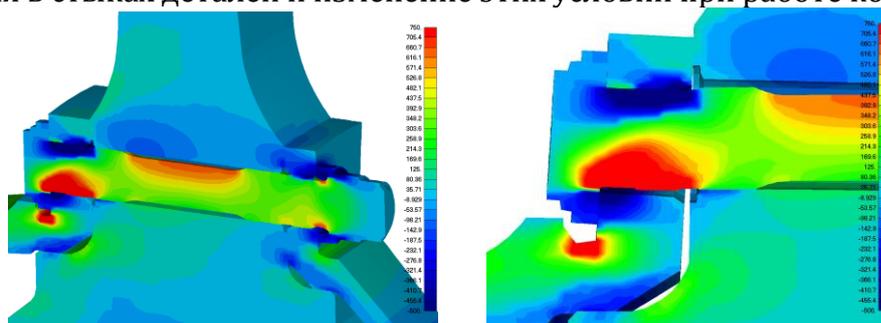


Рис.1 Поле напряжений в узле сборки ротора в поле центробежных сил

С внесением в математическое решение методом конечных элементов (МКЭ) контактной задачи, в ней обозначается необходимость определения четырех факторов:

- контактных сил, вызванных условиями сопряжения деталей [5];
- поля напряжений в деталях под действием внешних и контактных сил и, соответственно, образованием в них дополнительных зон пластических деформаций [5];
- поля температур в условиях контактного теплообмена, определяемого уровнем контактных сил (условий) сопряжения между стыками деталей [6];

- динамических характеристик сборной конструкции как деформированного тела, обусловленных изменением жесткости (податливости) соединения в ней деталей [7].

Реализация представленных решений проводится на примере анализа сборной конструкции ротора турбины (рис.1) и компрессора авиационного газотурбинного двигателя.

**Решение контактной задачи** на основе метода конечных элементов (МКЭ) осуществляется с использованием определенной модификации вариационно-энергетического подхода метода перемещений теории упругости. Модификация связана с учетом в уравнении баланса энергий деформируемой системы первой производной выражения для потенциальной энергии контактного взаимодействия деталей по перемещению, определяющей собой нагрузку от контактных сил. Формирование этого вектора в МКЭ сопровождается модификацией глобальной матрицы жесткости и глобального вектора-столбца сил, построенной с применением метода "штрафа" или фредгольмова решения второго рода. Итерационный процесс решения нелинейной задачи организован относительно минимизации величины невязки (неравенства) вектора контактных перемещений рассматриваемой деформируемой системы.

При анализе НДС одной (монокристаллической) детали в построении и минимизации выражения функционала полной потенциальной энергии деформируемой системы -  $\Pi$ , относительно вектора перемещений, участвуют две составляющие: работа внешних сил -  $W$  и внутренняя энергия сил сопротивления тела -  $A$ . В случае сборной конструкции в выражение для последней входит дополнительно энергия сил контактного взаимодействия между деталями, зависящая от величины "невязки" (неравенства) вектора перемещений на сопрягаемых поверхностях. Таким образом, величина  $A$  для сборной конструкции представляется в виде двух составляющих: - внутренней энергии деформируемых твердых тел отдельных деталей -  $A_g$ ; и энергии контактного взаимодействия деталей -  $A_k$ . Благодаря последней составляющей внутренней энергии сопротивления, сборная конструкция представляется как некоторая единая совокупность деформируемых тел, способная к совместному восприятию внешней нагрузки. То есть, для сборной конструкции имеем выражение вида:

$$A = A_g + A_k = \sum_{i=1}^n \lambda_{gi} + \sum_{j=1}^k \lambda_{kj} \quad (1)$$

где:  $\lambda_{gi}$  внутренняя энергия сопротивления каждого из тел:

$$\lambda_{gi} = \frac{1}{2} \int_{V_i} \{ \varepsilon \}^T [D] \{ \varepsilon \} dV \quad (2)$$

$i = 1, n$ ;  $n$  - число тел в сборной конструкции;  $V_i$  - объем каждого из тел;

$\lambda_{kj}$  - потенциальная энергия контактного взаимодействия на каждой из пар сопрягаемых поверхностей:

$$\lambda_{kj} = \int_{S_j} \{ f_j \}^T \{ p_{nj} \} dS + \int_{S_j} \{ f_j \}^T \{ p_{\tau j} \} dS; \quad (3)$$

$j = 1, k$ ;  $k$  - число пар сопрягаемых поверхностей;  $S_j$  - площадь каждой пары сопрягаемых поверхностей;  $\{ f_j \}$  - вектор-столбец кусочно-непрерывной функции, аппроксимирующей поле невязок перемещений на каждой из пар сопрягаемых поверхностей:

$$\{f_j\} = [N_g] \{U_j\}; \quad (4)$$

$[N_g]$  - матрица обобщенных функций формы МКЭ, используемых на поверхностях (гранях) сопряжений конечных элементов;  $\{p_{nj}\}$  и  $\{p_{\tau j}\}$  - векторы-столбцы величин нормального и касательного контактных давлений на сопрягаемых поверхностях.

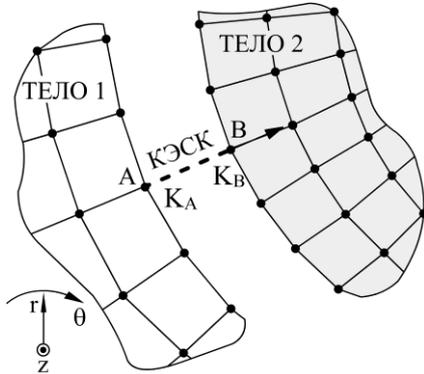


Рис. 2. Контакт двух тел

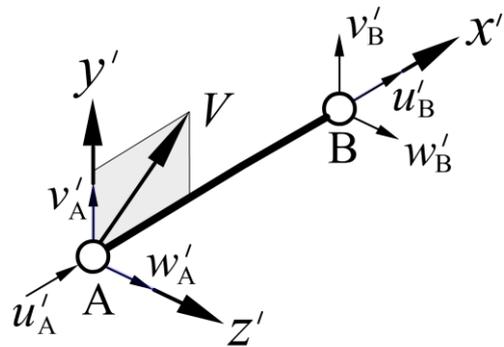


Рис. 3. Контактный элемент сопряжения конструкции (КЭСК)

Представленный формулами (3) и (4) подход к аппроксимации сил контактного сопряжения конструкций предполагает использование в качестве области их определения - грани конечных элементов, моделирующих контактные поверхности конструкции. Он в полной мере отражает физику явления [2, 3]. Однако, для свойства универсальности моделирования контактной задачи, он имеет ряд ограничений, главным из которых является неоправданная сложность алгоритма (методики) перехода, в условиях сопряжения, от состояния натяга (касания), до состояния зазора, и обратно; и другие.

В настоящей работе, для аппроксимации контактных сил и перемещений, предлагается другой подход, который, по терминологии МКЭ, допустимо обозначить как - "узел в узел". Графически он представлен на рис. 2, где линия, соединяющая два узла А и В, принадлежащие соответственно сопрягаемым телам 1 и 2, образует специальный тип конечного элемента, названный: *контактным элементом сопряжения конструкций (КЭСК)*.

Принципиальная схема КЭСК представлена на рис. 3 и построена с использованием локальной системы декартовых координат  $(x', y', z')$ . За начало координат её выбран, например, узел А. Векторы  $u'_A, v'_A, w'_A$  (рис. 3) - являются компонентами узловых перемещений в локальной системе координат.

Для реализации представленного контактного конечного элемента используется известный в МКЭ [4] принцип аппроксимации внешней распределенной нагрузки, приводящий к замене её эквивалентными узловыми силами.

То есть, для моделирования величины внутренней "контактной" энергии -  $A_k$  и, соответственно, контактных сил, с применением КЭСК, используется аналогия с выражением в МКЭ для эквивалентных узловых сил от распределенной внешней нагрузки или с выражением для работы внешних сосредоточенных сил, что позволяет записать соотношение вида:

$$A_k = \{\delta_k\}^T \{F_k\}, \quad (5)$$

где:  $\{\delta_k\}$  - обобщенный вектор невязки поля перемещений между всеми сопрягаемыми поверхностями в сборной конструкции;  $\{F_k\}$  - обобщенный вектор-столбец контактных узловых сил.

Для каждой пары контактирующих оппозитных узлов КЭСК, например для узлов А и В (рис. 2, 3), имеем обобщенный вектор невязки перемещений и контактных сил в виде:

$$\{\delta_K\} = \begin{Bmatrix} u_K \\ v_K \\ w_K \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u'_B - u'_A + u_0 \\ v'_B - v'_A + v_0 \\ w'_B - w'_A + w_0 \end{Bmatrix}, \quad \{F_K\} = \begin{Bmatrix} F_n \\ F_\tau^y \\ F_\tau^z \end{Bmatrix} = \tilde{K}' \{\delta_K\} = \begin{bmatrix} K_n & 0 & 0 \\ 0 & K_\tau^y & 0 \\ 0 & 0 & K_\tau^z \end{bmatrix} \{\delta_K\}, \quad (6)$$

где:  $u_0, v_0, w_0$  - начальные раскрытия контактного элемента;  $K_n, K_\tau$  - величины нормальной и поперечной (касательной) жесткости КЭСК.

Длина КЭСК роли не играет, и, принципиально, может быть равна нулю. Это доказано в работе [4], на примере “жестких вставок”. Тем не менее, для преобразования основных зависимостей контактного элемента в локальной системе координат к глобальной (декартовой, цилиндрической или полярной) системе координат, небольшим значением его длины необходимо задаться. На практике длину КЭСК можно выбрать в пределах одного - двух порядков малости относительно значения допуска на точность изготовления сопрягаемых поверхностей деталей.

Преобразование значений перемещения и других параметров локальной системы координат КЭСК к глобальной осуществляется на основании матрицы направляющих косинусов [4] для узлов А и В.

При построении глобальной системы уравнений равновесия для сборной конструкции ротора, матрица жесткости  $[K]$  будет иметь симметричную диагонально-блочную структуру, где каждый блок содержит в себе характеристику жесткости деформируемого тела или детали входящей в сборную конструкцию изделия.

Для моделирования контактного взаимодействия деформируемых тел, блоки матрицы  $[K]$  соединяются между собой по определенной схеме в соответствии с топологической информацией о глобальных номерах узлов КЭСК. Эти узлы одновременно принадлежат и конечным элементам моделей деталей сборной конструкции на сопрягаемых поверхностях. Дополнительно, к модификации глобальной матрицы жесткости, относительно тех же номеров узлов контактных элементов, осуществляется соответствующее модифицирование глобального вектора-столбца сил  $\{F\}$ , рассматриваемой глобальной системы алгебраических уравнений. Модифицирование проводится с учетом невязок перемещений КЭСК, возникающих вследствие контактного взаимодействия деталей в сборной конструкции. Общая схема модификации глобальной матрицы жесткости и глобального вектора-столбца имеет вид:

$$[K] + [K_K(\delta)] = \begin{bmatrix} \dots & \dots & & & \\ \dots & +\tilde{K} & & -\tilde{K} & \\ & & \dots & \dots & \dots \\ & & -\tilde{K} & \dots & +\tilde{K} & \dots \\ & & & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}, \quad \{F\} + \{F_K(\delta)\} = \begin{Bmatrix} \dots \\ \pm \tilde{F} \\ \dots \\ \mp \tilde{F} \\ \dots \end{Bmatrix}, \quad (7)$$

где:  $\tilde{K}$  - жесткость КЭСК;  $\tilde{F}$  - вектор узловой силы в КЭСК. Многоточиями в выражении (7) обозначены члены блочно-диагональной матрицы  $[K]$  и составляющие вектора внешних сил  $\{F\}$ .

Знаки “плюс” и “минус”, представленные в выражении (7) для жесткости и сил контактного конечного элемента, означают аддитивность (противоположность направлений) векторов контактных сил в КЭСК.

Энергетически члены системы уравнений (7), модифицирующие матрицу  $[K]$  и вектор-столбец внешних сил  $\{F\}$ , при решении контактной задачи, не нарушают систему уравнений равновесия рассматриваемой деформируемой системы. Это доказывается, прежде всего, знаками "+" и "-". Поэтому их допустимо определить как величины (функции) штрафной жесткости. Цель использования этих функций - получение в деформируемых телах сборной конструкции величины энергии их контактного взаимодействия, а также ее изменения под воздействием работы внешних сил. Достижение этой цели осуществляется при выполнении двух условий [3]:

- обеспечения граничного "непроникновения" тел друг в друга в сборной конструкции, то есть равенства нормальных составляющих вектора перемещений для пар узлов, образующих КЭСК;
- обеспечения между его узлами равенства величин эквивалентных узловых сил от контактного давления.

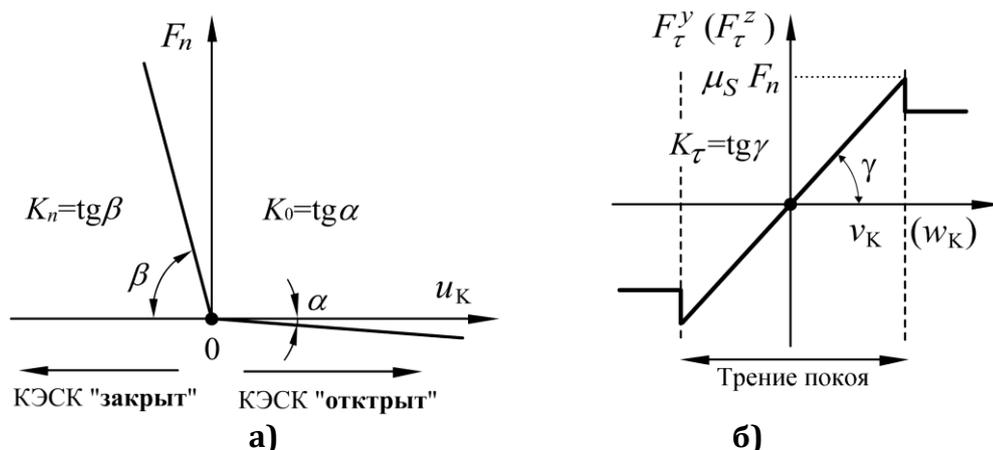


Рис. 4. Работа КЭСК в локальной системе координат: а) - на сжатие в направлении  $x'$  (рис. 3); б) - на сдвиг в направлениях  $y'$  и  $z'$  (рис. 3)

Для реализации механизма выполнения этих условий, в представленном типе контактного КЭ, введен дополнительный параметр, который называется "состоянием" КЭСК. Физическая сущность этого параметра определяется двумя типами условий сопряжения контактных поверхностей: "зазором" и (или) "натягом" (касанием), которые аппроксимируются, соответственно, двумя ветвями билинейной функции, представленной на рис. 4а, и определяющей эти состояния:

1. Контактный элемент "открыт", что соответствует неравенству  $u_k > 0$ , а выражения для контактной жесткости и вектора сил в узлах КЭСК имеют вид

$$\tilde{K}' = \begin{bmatrix} K_0 & 0 & 0 \\ 0 & K_0 & 0 \\ 0 & 0 & K_0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{F}' = \begin{Bmatrix} F'_x \\ F'_y \\ F'_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (8)$$

где:  $K_0$  - некоторая малая, по сравнению с жесткостью детали, величина жесткости, необходимая и достаточная для положительного определения глобальной матрицы жесткости деформируемой сборной конструкции.

2. Контактный элемент "закрыт", осуществляется трение скольжения; что соответствует неравенствам  $u_k \leq 0$ ;  $\sqrt{(F'_y)^2 + (F'_z)^2} \leq F'_n \sqrt{(\mu'_s)^2 + (\mu'_s)^2}$ . Тогда, контактная жесткость и силы в узлах КЭСК

$$\tilde{K}' = \begin{bmatrix} K_n & 0 & 0 \\ 0 & K_\tau^y & 0 \\ 0 & 0 & K_\tau^z \end{bmatrix} \quad \tilde{F}' = \begin{Bmatrix} F'_x \\ F'_y \\ F'_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_0 K_n \\ v_0 K_\tau^y \\ w_0 K_\tau^z \end{Bmatrix} \quad (9)$$

где:  $K_\tau^y$  и  $K_\tau^z$  - величины штрафной (большой) жесткости в координатных направлениях  $y'$  и  $z'$  соответственно;  $\mu_s$  - коэффициент трения покоя.

Величина  $K_n$  подбирается [5] примерно на 2-3 порядка больше жесткости детали на контактной поверхности;  $K_\tau^y$  и  $K_\tau^z$  - коэффициенты трения, подбираемые по диаграмме, представленной на рис. 4б. Начальное раскрытие  $u_0$ ,  $v_0$  и  $w_0$  - задаются в исходной информации для каждого КЭСК и определяется относительно условий предварительного сопряжения в сборной конструкции. Знак "+" для величины  $u_0$  означает посадку с зазором, знак "-" - посадку с натягом.

При работе деформируемой сборной конструкции, как в ее исходном ее состоянии, когда действуют только внутренние контактные силы условий сопряжения, так и при дополнительном воздействии в ней внешних рабочих нагрузок, состояние КЭСК может изменяться, например: от состояния "открыт" до состояния "закрыт" и обратно.

Итерационный процесс решения нелинейной задачи организован на основе анализа глобального вектора перемещений относительно минимизации величины невязки (неравенства) перемещений во всех КЭСК. Процесс итераций заканчиваются, если для всех контактных элементов, входящих в сборную конструкцию, выполняется условие "непроникновения" деформируемых тел друг в друга, где для каждого из них оно отвечает своему состоянию "открыт" (зазор) или "закрыт" (натяг). Выполнение условия равенства эквивалентных узловых контактных сил, возникающих в случае состояния КЭСК "закрыт" (натяг), выполняется для вектора  $\tilde{F}'$  на основе выражений (8) и (9).

Состояние контактного элемента, при котором величина невязки перемещения в нем равна нулю (касание), определяется из условия бесконечно малого приближения к этому состоянию и заменяется в КЭСК, для устойчивости решения, небольшой величиной отрицательной невязки (или натяга) порядком малости, равным обратной величине  $K_n$ .

Определение упругопластического поведения [5] материала по экспериментальной кривой деформирования осуществляется с использованием критерия пластичности Мизеса и теории упрочнения Хилла для изотропных материалов деталей. Для учета истории нагружения используется, обобщенная Биргером И.А., теория пластического течения Прандтля-Рейса, где уравнения связи между напряжениями и деформациями записываются в приращениях. При работе алгоритма внешняя нагрузка и нагрузка от сопряжения деталей конструкции прикладываются порциями (приращениями), и в рамках каждого приращения выполняется проверка, как условий возникновения пластических деформаций, так и условий контакта (натяг-зазор). После проверки условий сходимости для одного приращения выполняется переход к следующему.

Решение глобальных систем алгебраических уравнений МКЭ осуществляется прямым методом Холецкого, адаптированным для работы с разреженными матрицами.

Решение задачи теплопроводности МКЭ для сборной конструкции [7] построено на основе использования кусочно-линейной функции для аппроксимации зависимости контактного температурного сопротивления от величины контактного давления в стыке, где определение параметра

контактного давления используется из решения "силовой" контактной задачи НДС сборной конструкции.

На рис. 5 представлено поле температур в узле сборки ротора турбины авиационного газотурбинного двигателя (ГТД). Результаты, в частности, показывают, что в области стыка деталей имеет место дополнительное температурное сопротивление, проявляющее себя в виде определенного скачка непрерывности поля температур в конструкции изделия.

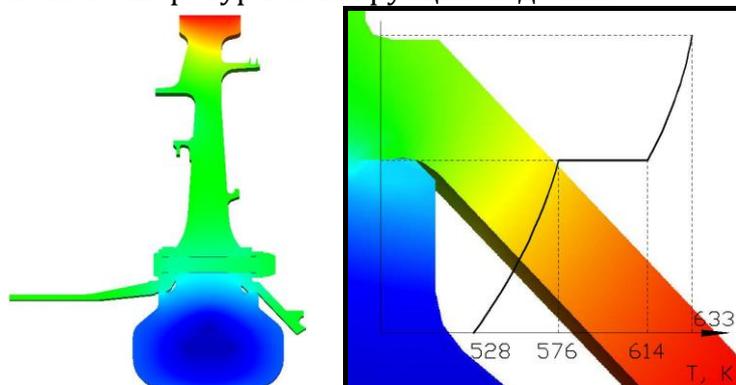


Рис.5 Поле температур в узле сборки ротора

Определение динамических характеристик сборной конструкции, на примере ротора газотурбинного двигателя, осуществляется на основе решения уравнения динамики её движения (вынужденных колебаний). Интегрирование по времени осуществляется прямым численным методом Ньюмарка, где на каждом временном шаге виброускорение считается постоянным и проводится решение контактной задачи НДС.

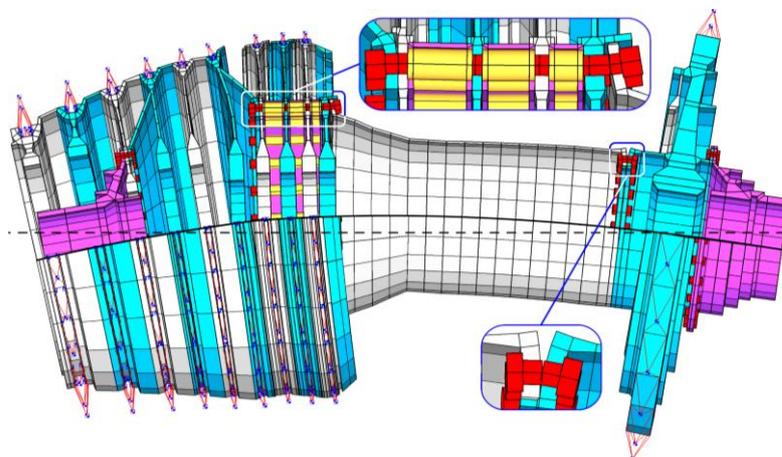


Рис.6 Третья изгибная форма колебаний собранного ротора

Результаты определения динамических характеристик сборной конструкции, представленные на примере ротора авиационного ГТД (рис. 6, 7).

На рис. 6 представлена (третья по порядку и первая) изгибная форма колебаний собранного ротора, где поле перемещений приведено в определенном масштабе относительно размеров ротора. На рис. 7 представлена общая амплитудно-частотная характеристика по максимальной величине динамической силы на опорах ротора. Также представлен рабочий диапазон ротора ( $n_{M.G.} - n_{max}$ ). Сплошной линией показаны графики характеристик собранного ротора, пунктирной - его монолитного аналога. Большая по амплитуде величина силы имеет место на передней опоре, меньшая по задней опоре из-за массовых

характеристик ротора. Результаты также показывают, что для сборного ротора, в отличие от монолитного аналога,  $n_{3кр}$  существенно сдвинуто в сторону рабочего диапазона ротора. Кроме того, общий уровень колебаний в рабочем диапазоне выше. Теоретические расчеты имеют хорошее совпадение с результатами натуральных гонок ротора.

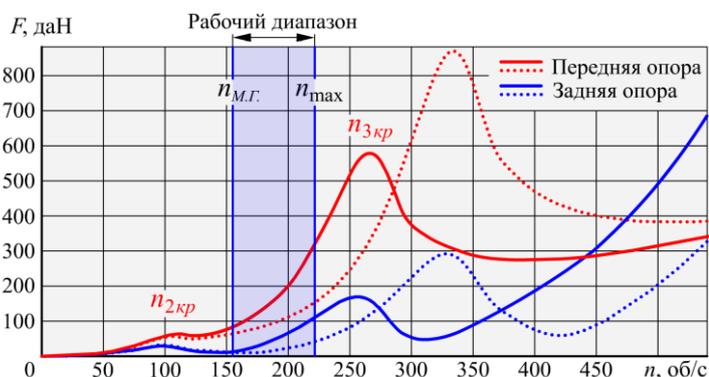


Рис.6 Амплитудно- частотная характеристика по силе динамического воздействия на опорах (передней и задней) вынужденных колебаний сборного ротора

Таким образом, решение представленной комплексной задачи позволяет учитывать влияние остаточных (пластических) деформаций, возникающих в процессе работы изделия, на условия сопряжения его деталей и на изменение его динамических характеристик. Соответственно, уровень надежности и долговечности сборной конструкции, при определенных конструктивных решениях и уровне внешнего силового и температурного воздействия, можно оценить на ранних этапах проектирования, с высокой степенью достоверности.

### Литература

1. Рыжов Э.В. Контактная жесткость деталей машин. -М.: Машиностроение. - 1966. -196 с.
2. Штаерман И.Я. Контактная задача теории упругости. -М.-Л.: Гостехиздат. - 1949. -211 с.
3. Галин Л. А. Контактные задачи теории упругости и вязкоупругости. - М.: Наука. -1980. - 304 с.
4. Пыхалов А. А., Милов А. Е. Контактная задача статического и динамического анализа сборных роторов турбомашин. - Иркутск: ИрГТУ. - 192 с. - 2007.
5. Пыхалов А.А., Высотский А.В. Расчет сборных роторов турбомашин с применением неголономных контактных связей и метода конечных элементов//Компрессорная техника и пневматика. -2003. - № 8. - С. 25-33.
6. Пыхалов А. А., Милов А. Е. Математическое моделирование динамического поведения сборных роторов турбомашин//Компрессорная техника и пневматика.-2006.-№ 3.-С.16-23.
7. Пыхалов А.А., Кудрявцев А.А. Анализ контактной теплонапряженности сборных конструкций//Современные технологии. Системный анализ. Моделирование. -Иркутск: ИрГУПС. № 1(15). С.37-43. -2010.

**НАСЛЕДСТВЕННО-УПРУГИЕ СВОЙСТВА КОСОУГОЛЬНО  
АРМИРОВАННОГО УГЛЕПЛАСТИКА**  
*HEREDITARY-ELASTIC PROPERTIES OF ANGLE PLY CARBON FIBER  
REINFORCED PLASTICS*

А.Н. Русланцев<sup>1</sup> – магистрант, А.М. Думанский<sup>2</sup> – д.ф.-м.н., Л.П. Таирова<sup>1</sup> - к.т.н.

<sup>1</sup>МГТУ им. Н.Э. Баумана, [andreiruslantsev@gmail.com](mailto:andreiruslantsev@gmail.com)

<sup>2</sup>Институт машиноведения им.А.А.Благонравова РАН

**Abstract.** Model of creep of carbon fibre reinforced plastics based on classical laminate theory and elements of hereditary solid mechanics are proposed. It is assumed that time-dependent properties of ply are defined by shear in plane of the layer. Tests of  $[\pm 20]$  carbon fiber reinforced plastics are made. Time-dependent properties under shear in plane of the layer are described using Abel's operator. Satisfactory agreement between experimental and calculated data is shown.

### **Введение**

Углепластики получили широкое распространение в авиационной и ракетно-космической технике благодаря своим уникальным физико-механическим свойствам. Они обладают высокими удельными характеристиками, и поэтому очевидна актуальность разработки расчетно-экспериментальных методов оценки влияния факторов внешней среды и нагрузок на характер сопротивления деформированию и разрушению, в том числе моделей для оценки ползучести и релаксации.

Следует отметить, что большинство подобных исследований показывает, что временные свойства углепластиков в значительной степени определяются свойствами полимерной матрицы и связи волокна с матрицей [1-4, 6]. В [1] показано, что ползучесть незначительно проявляется при растяжении вдоль волокон и наиболее заметно проявляется при растяжении образцов со схемой армирования  $[\pm 45]$ . В работе [2] утверждается, что ползучесть углепластика подобна ползучести полимерного материала, и в ряде случаев для описания ползучести можно использовать соотношения теории полимеров, например экспоненциальную функцию.

#### **1. Описание модели**

Работа [4] посвящена анализу временных свойств слоистых углепластиков и установлению взаимосвязи определяющих соотношений наследственного типа слоистых углепластиков, в частности, анализу ползучести и релаксации образцов косоугольно армированного углепластика КМУ-4Л. Экспериментально изучались реологические свойства при растяжении образцов с укладкой  $[\pm 40]$ ,  $[\pm 50]$ . Эти свойства определяются в основном реологией свойств при сдвиге в плоскости слоя. Испытания образцов с укладкой  $[\pm 40]$  при переменных во времени нагрузках позволили установить характер временных зависимости слоя при сдвиге [4]. Оказалось, что эта зависимость может быть представлена в виде определяющего соотношения наследственного типа с ядром Абеля [5]:

$$\gamma_{12} = \frac{1}{G_{12}^0} (1 + kI_{\alpha}^*) \tau_{12}, \quad (1)$$

где  $I_\alpha^* \cdot \tau_{12} = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)} \int_0^t (t-\xi)^\alpha \tau_{12}(\xi) d\xi$ ,  $-1 < \alpha < 0$  - параметр сингулярности ядра.

Используя выражение для резольвенты, получаем выражение для напряжений, вычисляемых по известной истории деформирования [5]

$$\tau_{12} = G_{12}^0 (1 - k \mathcal{E}_\alpha^*(-k)) \gamma_{12}, \quad (2)$$

где  $\mathcal{E}_\alpha^*(-k)$  - дробно-экспоненциальная функция Работнова, представляющая собой резольвенту оператора Абеля [5]. Функция записывается как сумма ряда

$$[5]: \quad \mathcal{E}_\alpha(\beta, t) = t^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^n t^{n(1+\alpha)}}{\Gamma[(n+1)(1+\alpha)]} \quad (3)$$

Запишем систему определяющих соотношений для слоя в следующем виде:

$$\begin{cases} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{cases} = \begin{bmatrix} \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{\nu_{21}E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ \frac{\nu_{12}E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12}^0(1-k\mathcal{E}_\alpha^*(-k)) \end{bmatrix} \begin{cases} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{cases}$$

Тогда в матричной форме эта система может быть записана следующим образом

$$\{\bar{\sigma}_{12}\} = [G_{12}^0 - G^0 k \mathcal{E}_\alpha^*(-k)] \{\bar{\varepsilon}_{12}\}, \quad (4)$$

где  $\{\bar{\sigma}_{12}\}$ ,  $\{\bar{\varepsilon}_{12}\}$  - столбцы напряжений и деформаций слоя,  $[G^0] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ .

Далее переходя к матрице жесткости пакета и воспользовавшись соотношениями теории слоистых пластин, получаем выражение для матрицы жесткости пакета:

$$[G_{xy}] = \sum_i [T_i] [G_{12}^0] [T_i]^T \bar{h}_i = [G_{xy}^0] - [\tilde{G}] R^*, \quad (5)$$

где  $R^* = k \mathcal{E}_\alpha^*(-k)$ ,  $[G_{xy}^0] = \sum_i [T_i] [G_{12}^0] [T_i]^T \bar{h}_i$  - матрица компонент мгновенной

упругости пакета,  $[\tilde{G}] = \sum_i [T_i] [G^0] [T_i]^T \bar{h}_i$ ,

$$[T_i] = \begin{bmatrix} \cos^2(\varphi_i) & \sin^2(\varphi_i) & -2\sin(\varphi_i)\cos(\varphi_i) \\ \sin^2(\varphi_i) & \cos^2(\varphi_i) & 2\sin(\varphi_i)\cos(\varphi_i) \\ \sin(\varphi_i)\cos(\varphi_i) & -\sin(\varphi_i)\cos(\varphi_i) & \cos^2(\varphi_i) - \sin^2(\varphi_i) \end{bmatrix} - \text{матрица поворота } i\text{-го}$$

слоя,  $\bar{h}_i = \frac{h_i}{\sum_j h_j}$  - относительная толщина  $i$ -го слоя.

Обращая матрицу жесткости, получаем матрицу податливости пакета:

$$\begin{aligned} [S_{xy}] &= [G_{xy}]^{-1} = [G_{12}^0 - G^0 R^*]^{-1} = \\ &= [G_{xy}^0] ([I] - [S_{xy}^0] [\tilde{G}] R^*)^{-1} = ([I] - [S_{xy}^0] [\tilde{G}] R^*)^{-1} [S_{xy}^0] \end{aligned} \quad (6)$$

где  $[S_{xy}^0] = [G_{xy}^0]^{-1}$  - матрица податливости пакета без учета временных свойств.

Пусть  $[A] = [S_{xy}^0] [\tilde{G}]$ . Разложим выражение  $([I] - [S_{xy}^0] [\tilde{G}] R^*)^{-1}$  в ряд

$$([I] - [A]R^*)^{-1} = [I] + [A]R^* + [A]^2 R^{*2} + \dots \quad (7)$$

Проведя диагонализацию матрицы  $[A] = [Q][D][Q]^{-1}$ , где  $[D] = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ , получим:

$$[I] + [A]R^* + [A]^2 R^{*2} + \dots = [Q]([I] + [D]R^* + [D]^2 R^{*2} + \dots)[Q]^{-1} = [Q] \text{diag}(1 + \lambda_i R^* + \lambda_i^2 R^{*2} + \dots) [Q]^{-1} \quad (8)$$

Поскольку  $R^* = R^*(\mu)$ , используя свойство обращения резольвентного оператора выражение (8) можно записать следующим образом:

$$[Q] \text{diag}(1 + \lambda_i R^* + \lambda_i^2 R^{*2} + \dots) [Q]^{-1} = [Q] \text{diag}(1 + \lambda_i R^*(\mu - \lambda_i)) [Q]^{-1} \quad (9)$$

Окончательно матрицу податливости запишем в виде:

$$[S_{xy}] = [Q] \text{diag}(1 + \lambda_i k \varepsilon_\alpha^*(\mu - \lambda_i)) [Q]^{-1} [S_{xy}^0] \quad (10)$$

## 2. Описание эксперимента

Для проверки корректности использования разработанного метода были проведены испытания на образцах из углепластика КМУ-4Л с укладкой  $[\pm 20]$ . Экспериментальные данные получены на испытательной машине Instron. Регистрация показаний тензодатчиков осуществлялась при помощи тензометрической станции СИИТ-3. Были проведены испытания при квазистатическом нагружении образцов: несколько циклов нагружения с разгрузкой и последующим разрушением. Затем были проведены испытания образцов на ползучесть и релаксацию. При квазистатическом нагружении для первых трех циклов максимальное напряжение составляло 250 МПа, четвертый цикл нагружения производился до разрушения (рис. 1). При испытаниях на ползучесть образец нагружался до 300 МПа и выдерживался при этой нагрузке в течение 2 часов, при этом периодически регистрировались продольные и поперечные деформации образца, измеряемые при помощи тензометрических датчиков. При испытании на релаксацию был задан уровень продольной деформации, равный 0,37%, и проведена выдержка при этой деформации в течение 3 часов с записью изменения нагрузки по времени (рис. 2).

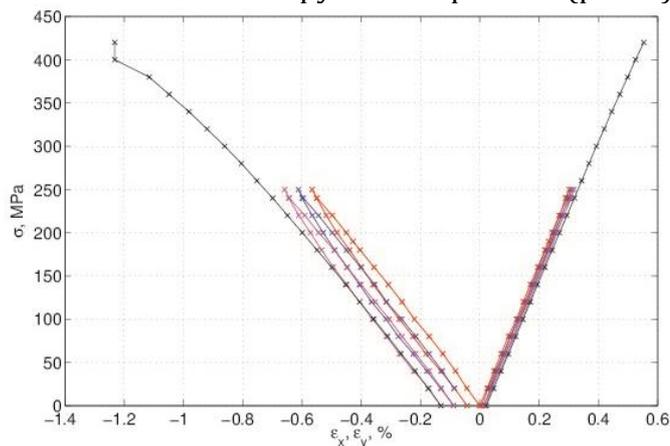


Рис. 1. Кривые деформирования углепластика КМУ-4Л со схемой армирования  $[\pm 20]_2$  при квазистатическом нагружении. При сжатии в поперечном направлении наблюдаются гистерезис и накопление необратимых деформаций

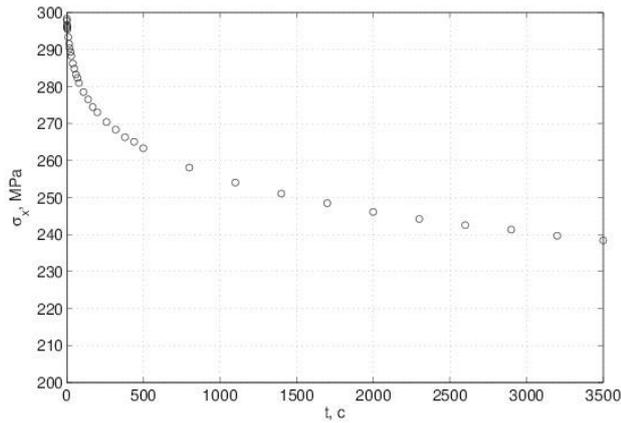


Рис. 2. Кривая релаксации углепластика КМУ-4Л со схемой армирования  $[\pm 20^\circ]_2$

При  $\tau_{12} = const$ , выражение (1) можно преобразовать к следующему виду:

$$\gamma_{12} = \frac{\tau_{12}}{G_{12}^0} \left( 1 + \frac{k}{\Gamma(2+\alpha)} t^{1+\alpha} \right)$$

В этом случае компонента матрицы жесткости слоя  $g_{66}$  будет иметь следующий вид

$$g_{66} = \frac{g_{66}^0}{\left( 1 + \frac{k}{\Gamma(2+\alpha)} t^{1+\alpha} \right)}$$

Далее, применяя формулу (5), получим матрицу жесткости пакета. Матрица податливости получается обращением матрицы жесткости.

Определяющие соотношения для пакета запишем в виде

$$\{\vec{\varepsilon}_{xy}\} = [S_{xy}] \{\vec{\sigma}_{xy}\},$$

где  $[S_{xy}]$  – матрица податливости, полученная в (10).

Соответствие расчетных и экспериментальных кривых ползучести углепластика с укладкой  $[\pm 20]$  приведено на рис. 3.

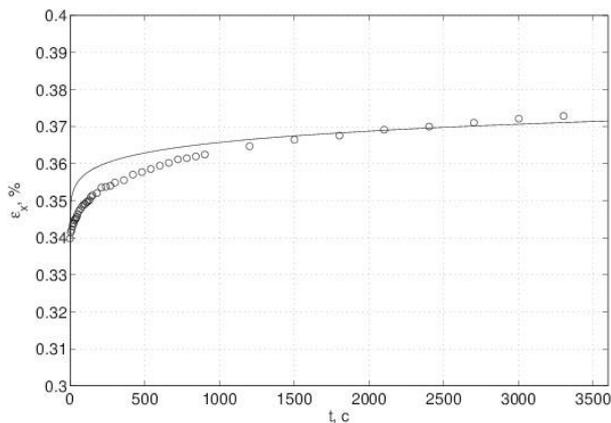


Рис. 3. Сравнение расчетной и экспериментальной кривой ползучести углепластика КМУ-4Л со схемой армирования  $[\pm 20^\circ]_2$ .  $\sigma = 300$  МПа. Кругами показана экспериментальная зависимость, линией – расчетная

## **Выводы**

Предложена модель, основанная на соотношениях теории слоистых пластин и наследственной механики, позволяющая прогнозировать ползучесть косоугольно армированного углепластика.

Показано удовлетворительное согласие между расчетными и экспериментальными данными

## **Литература**

1. Sturjeon J.B., Butt R.I., Larke L.W. Creep of carbon fibre reinforced plastics // London: Royal Aircraft Establishment, 1976
2. Guedes R.M., Vaz M.A. Comparison of creep behavior of UD and woven CFRP in bending // Mechanics of composite materials and structures, V.8, 2001 – PP. 119-134
3. Creep in vacuum of woven Sylramic-iBN melt-infiltrated composites. Morcher G.N., John R., Zawada L., Brewer D., Ojard G., Calomino A. // Composite science and technology 2011, V71 – PP. 52-59
4. Dumansky A.M., Tairova L.P. The prediction of viscoelastic properties of layered composites on example of cross ply carbon reinforced plastics // World Congress on Engineering 2007, V.II. - London, UK 2-4 July, 2007. – PP. 1346-1351.
5. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел // М.: Изд-во «Наука», 1977. – 384 с.
6. Dumansky A.M., Tairova L.P. Time-dependent behavior of carbon fibre reinforced laminates // Proceedings of the Second International Conference on Advanced composite materials and technologies for aerospace applications, June 11-13, 2012, Wrexham, North Wales, United Kingdom. – PP. 75-79.

# ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ АППРОКСИМАЦИИ РЯДАМИ ЭКСПОНЕНТ ФУНКЦИЙ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ЯВЛЕНИЙ ПОЛЗУЧЕСТИ И РЕЛАКСАЦИИ

## ERROR ESTIMATION OF THE APPROXIMATION OF FUNCTIONS USED FOR DESCRIBING THE CREEP AND RELAXATION PHENOMENA BY SERIES OF EXPONENTS

В.Г. Сазонов – к.т.н.

ФГУП ЦНИИмаш

[Lab55541@tsniimash.ru](mailto:Lab55541@tsniimash.ru)

**Abstract.** Basing on computations, the data were obtained for characterizing an error of approximation of functions used for describing the creep and relaxation phenomena by series of exponents and also errors of approximation of derivatives of these functions by series found through differentiation of the approximating series. The tables are presented with relative errors obtained for various numbers of exponents and also errors, which characterize the accuracy of estimation of the dynamic modulus components.

Keywords: creep, relaxation, series of exponents, error of approximation

В определенных условиях многие материалы проявляют вязкоупругие свойства. В [1] указано, что линейная теория наследственности хорошо описывает поведение полимерных материалов при умеренных напряжениях, что эта теория пригодна для описания внутреннего трения даже в металлах, когда амплитуды напряжений очень малы. Для описания характерных особенностей деформирования этих материалов (ползучесть, релаксация и др.) при малых деформациях часто используются соотношения линейной теории вязкоупругости [1, 2]:

$$S_{ij}(t) = \int_0^t R(t-\tau) d\mathcal{E}_{ij}(\tau), \quad \mathcal{E}_{ij}(t) = \int_0^t \Pi(t-\tau) dS_{ij}(\tau), \quad \sigma = K \times \Theta. \quad (1)$$

Здесь  $S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma$  – девиаторные компоненты тензора напряжений  $\sigma_{ij}$ ;

$\mathcal{E}_{ij} = \varepsilon_{ij} - \delta_{ij} (\Theta/3)$  – девиаторные компоненты тензора деформаций  $\varepsilon_{ij}$ ;

$\Theta = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$  – объемная деформация;  $\sigma = (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})/3$  – среднее напряжение.

Для малосжимаемых материалов ( $\Theta \approx 0$ ) при одноосном нагружении образцов получим  $S_{11} = 2/3\sigma_{11}$ ;  $\varepsilon_{11} = \mathcal{E}_{11}$ . Подставляя эти соотношения в (1), получим выражения, связывающие величины  $\sigma_{11}$  и  $\varepsilon_{11}$ .

Ядра релаксации  $R(t)$  и ползучести  $\Pi(t)$  часто представляют математическими выражениями, например,

$$R(t) = A \times t^{-\alpha}; \quad \Pi(t) = B \times t^{\alpha}; \quad (2)$$

$$R(t) = A \times (t + \varepsilon_4)^{-\alpha} \times [t / (1 + \varepsilon_5 \times t)]^{-\rho} \times \{1 - k \times \text{Lg}[t / (1 + \varepsilon_6 \times t)]\} \text{ и т.д.}$$

В статье предполагается, что на основе анализа экспериментальных данных подобраны математические выражения типа (2) или другие и исследуется вопрос оценки погрешности аппроксимации рядами экспонент этих математических выражений.

Для описания поведения вязкоупругих материалов при вибрационных нагружениях часто используется понятие комплексного динамического модуля:  $G^*(\omega) = G'(\omega) + iG''(\omega)$ . Величины  $R(t)$ ,  $\Pi(t)$ ,  $G'(\omega)$ ,  $G''(\omega)$  взаимосвязаны, известны точные соотношения между ними вида [3, 4]:

$$1 = \Pi(0) \times R(t) + \int_0^t R(t-\tau) \frac{d\Pi(\tau)}{d\tau} d\tau, \quad (3)$$

$$G'(\omega) = R_* + \omega \int_0^{\infty} R_{**}(\eta) \sin(\omega\eta) d\eta, \quad (4)$$

$$G''(\omega) = \omega \int_0^{\infty} R_{**}(\eta) \cos(\omega\eta) d\eta, \quad (5)$$

(здесь  $R(t) = R_* + R_{**}(t)$ ,  $R_{**}(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ ). Если ядро  $R(t)$  представлено рядом экспонент (6), то в (4)-(5) интегрирование можно провести аналитически:

$$R(t) = R_0 + \sum_{k=1}^N R_k e^{-r_k t}, \quad (6)$$

$$G'(\omega) = R_0 + \sum_{i=1}^N R_i \frac{\omega^2}{r_i^2 + \omega^2}, \quad (7)$$

$$G''(\omega) = \sum_{k=1}^N R_k \frac{r_k \omega}{r_k^2 + \omega^2}. \quad (8)$$

Проведенный анализ показал, что если ядро ползучести  $\Pi(t)$  представлено рядом экспонент (см. (9)):

$$\Pi(t) = \Pi_0 - \sum_{k=1}^N \Pi_k e^{-p_k t}, \quad \text{то} \quad (9)$$

$$G'(\omega) = \left\{ \left( \Pi_0 - \sum_{k=1}^N \Pi_k \frac{\omega^2}{p_k^2 + \omega^2} \right) \left[ 1 + \left( \frac{\sum_{k=1}^N \Pi_k \frac{\omega \times p_k}{p_k^2 + \omega^2}}{\Pi_0 - \sum_{k=1}^N \Pi_k \frac{\omega^2}{p_k^2 + \omega^2}} \right)^2 \right] \right\}^{-1}, \quad (10)$$

$$G''(\omega) = \frac{\sum_{k=1}^N \Pi_k \frac{\omega \times p_k}{p_k^2 + \omega^2}}{\left( \Pi_0 - \sum_{k=1}^N \Pi_k \frac{\omega^2}{p_k^2 + \omega^2} \right)^2 + \left( \sum_{k=1}^N \Pi_k \frac{\omega \times p_k}{p_k^2 + \omega^2} \right)^2}, \quad (11)$$

$$\Pi_0 - \sum_{k=1}^N \Pi_k \frac{\omega^2}{p_k^2 + \omega^2} = \frac{1}{G' \left[ 1 + \left( \frac{G''}{G'} \right)^2 \right]} = \frac{G'}{(G')^2 + (G'')^2}. \quad (12)$$

Подстановка (10) в левую часть равенства (7) дает возможность записи системы уравнений для определения параметров ядра  $R(t)$  по ядру  $\Pi(t)$ ; а подстановка (7) и (8) в правую часть равенства (12) дает возможность записи системы уравнений для определения параметров ядра  $\Pi(t)$  по известному ядру  $R(t)$ . В результате получаем способ приближенного решения интегрального уравнения (3). Практика расчетов показала, что удобно параметры  $r_k$  ( $p_k$ , см. (6), (9)) задавать заранее в виде геометрической прогрессии:

$$r_k = r_1 \times \beta^{(k-1)}, \quad p_k = p_1 \times \beta^{(k-1)}, \quad (\beta > 1, \text{ например, } \beta = 2, 1 \leq k \leq N). \quad (13)$$

А величины  $R_k$  (или  $\Pi_k$ ) вычисляются из условий совпадения аппроксимируемой функции и ряда экспонент в определенных точках.

В общем случае ряд экспонент должен иметь бесконечное число членов ряда, т.к. при больших  $t$   $\lg(t) \rightarrow +\infty$ , при малых  $t$   $\lg(t) \rightarrow -\infty$ . При практических расчетах мы вынуждены рассматривать ограниченное число членов ряда (6) (или (9)). Таким образом, оценка погрешности аппроксимации рядом экспонент

функций вида (2) и т.п. может быть разделена на две задачи: какой рассматривать интервал значений  $\lg(t)$  и сколько использовать членов ряда (или сколько «в среднем» должно приходиться экспонент на один порядок времени).

Аналитические оценки можно получить на основе анализа представленных ниже соотношений. При малых значениях  $x$

$$e^{-x} \approx 1 - x. \quad (14)$$

$$e^{-10} \approx 4,55 \times 10^{-5}; e^{-100} \approx 3,72 \times 10^{-44}.$$

Таким образом, если при исследованиях стремиться, чтобы относительная погрешность была порядка  $10^{-8}$  ( $10^{-6}$  %) следует рассматривать и те члены ряда, у которых  $x$  меньше  $10^{-8}$  (см. (14)). Т.е. следует расширить рассматриваемый интервал значений  $\lg(t)$  на 8 (или более) порядков в сторону больших значений  $\lg(t)$  и на 2 порядка в сторону малых (т.е. отрицательных) значений  $\lg(t)$ . В [5] для обеспечения высокой точности аппроксимации на интервале

$$\lg(t_{\min}) \leq \lg(t) \leq \lg(t_{\max}) \quad (15)$$

рекомендовано рассматривать более широкий интервал времени, например,

$$\lg(t_{\min}) - 4 \leq \lg(t) \leq \lg(t_{\max}) + 10 \quad (16)$$

(функция  $R(t)$  (или  $\Pi(t)$ ) должна иметь плавное аналитическое продолжение за пределами (15)).

Удобно задавать  $\lg(t_{\min})$  и  $\lg(t_{\max})$  целыми числами. Значения  $r_1$  и  $N$  (количество экспонент, см. (6), (9)) можно назначить из следующих соотношений:

$$r_1 = 0,7 \times 10^{-[\lg(t_{\max}) + 10]}; r_N \times 10^{[\lg(t_{\min}) - 4]} > 0,7.$$

В [6] отмечено, что большое значение имеет подробный анализ простых моделей, описывающих основные особенности рассматриваемого явления. В качестве такой простой модели в данном случае предлагается рассмотреть указанную ниже модель.

Проведенные автором испытания образцов полиуретана на ползучесть показали, что наблюдается линейная зависимость модуля ползучести от логарифма времени  $\lg(t)$ , причем эта зависимость наблюдается на довольно широком интервале значений  $\lg(t)$  ( $1 \leq \lg(t) \leq 7$  (t – сек.)) [7].

В [8] указано, что качественно кривая релаксации похожа на обращенную кривую ползучести и часто полезно считать их сходными. Учитывая это, рассмотрим соотношения:

$$R(t) = R(1) \times [1 - Z \times \lg(t)], \quad (R(t) - \text{МПа}, t - \text{сек}). \quad (17)$$

$$\Pi(t) = \frac{1}{R(1) \times [1 - Z \times \lg(t)]}, \quad (18)$$

$$\Pi(t) = \Pi(1) \times [1 + Z \times \lg(t)]. \quad (19)$$

Проведенные автором испытания образцов полиуретана показали, что у полиуретанов разной твердости  $R(1)$  имеет разные значения, а коэффициент  $Z$  характеризуется одним и тем же числом:  $Z = 0,04242$ . Если аппроксимировать соотношением (17) (при  $Z = 0,04242$ ) диаграммы, приведенные в [9, 10, 11], то получается близкое совпадение с экспериментальными кривыми (следует отметить, что экспериментальная диаграмма, приведенная в [9], заканчивается при  $\lg(t) \approx 7$ ). Получено, что для полиуретана твердостью около 97 ед. IRHD  $R(1) = 55$  МПа [7].

Для иллюстрации примеров расчета формально продлим функции (17), (18), (19) как в сторону больших значений  $\lg(t)$ , так и в сторону малых (т.е. отрицательных) значений  $\lg(t)$ . Проведенный анализ показал, что функции вида (19) с высокой точностью могут быть аппроксимированы рядом экспонент (см.

(9)), у которого все параметры  $P_k$  ( $1 \leq k \leq N$ ) равны между собой (аналогично для ядра (17) параметры  $R_k$  равны между собой).

Таким образом, задав параметры  $r_k$  ( $r_k$ ) в виде (13) и записав условия совпадения функции (19) и ряда (9) (или (17) и (6)) для двух значений времени  $t_1$  и  $t_2 \neq t_1$ , мы получим систему двух линейных уравнений относительно неизвестных  $P_0$  и  $P_1$  ( $R_0$  и  $R_1$ ). В [12] указано, что часто для наглядности следует представлять результаты в виде графиков, поэтому часть результатов будет представлена в виде таблиц, а часть в виде графиков. При неудачном выборе моментов времени  $t_1$  и  $t_2 \neq t_1$  мы можем получить ряд экспонент (9), который точно совпадает с функцией (19) при  $t = t_1$  и  $t = t_2$ , но который имеет заметную погрешность на краях интервала  $\lg(t_{\min}) \leq \lg(t) \leq \lg(t_{\max})$  (см. рис.1).

Удобно задать  $t_2 = t_1 \times \beta^k$  ( $k$  – целое, положительное число;  $\lg(t_{\min}) < \lg(t_1) < \lg(t_2) < \lg(t_{\max})$ ). И, меняя значения  $t_1$ , добиться, чтобы график погрешности примерно одинаково отклонялся вверх и вниз от нулевой отметки (см. рис.2).

Рассмотрим функцию

$$P(t) = 1/55 \times [1 + 0.04242 \times \lg(t)], \quad (20)$$

эта функция может быть представлена рядом (9), у которого все параметры  $P_k$  равны между собой.

Было принято решение рассматривать такой интервал значений  $\lg(t)$  и соответственно выбирать количество экспонент, чтобы при  $\beta = 2$  (см. (13)) обеспечивалась высокая точность аппроксимации на интервале

$$-10 \leq \lg(t) \leq 15 \text{ (t в секундах)}. \quad (21)$$

В таблице 1 для функции (20) приведены значения относительной погрешности аппроксимации самой функции рядом экспонент, а также погрешности аппроксимации производных по времени рядами, полученными путем дифференцирования ряда (9).

Параметр  $p_1$  (см. (13)) принят равным

$$p_1 = 0,7 \times 10^{-21}; \quad (22)$$

параметры  $r_k$  вычисляются по соотношению (13). В таблице 1 указаны следующие величины: параметр  $\beta$  (см. (13)), число экспонент  $N$ , относительные погрешности аппроксимации (в %) самой функции  $P(t)$  и ее производных:  $\Delta P$ ,  $\Delta P'$ ,  $\Delta P''$ ,  $\Delta P'''$  и значения вычисленных величин  $P_0$ ,  $P_1$ , ( $P_k = P_1$ ,  $1 \leq k \leq N$ ). Расчеты показали, что при аппроксимации функции (17) при  $R(1) = 55$ ,  $Z = 0,04242$  наблюдаются значения погрешностей, близкие к указанным в таблице 1.

Таблица 1. Погрешность аппроксимации при различных значениях параметра  $\beta$ . (Погрешность для  $P(t) = 1/55 \times [1 + 0.04242 \times \lg(t)]$ .)

Параметр $\beta$	1,5 (*)	2	3	5	10	100
Число экспонент, $N$	190	110	70	50	34	17
$\Delta P$ , %	$\pm 1,2 \times 10^{-10}$	$\pm 3,2 \times 10^{-6}$	$\pm 1,0 \times 10^{-3}$	$\pm 0,018$	$\pm 0,15$	$\pm 1,6$
$\Delta P'$ , %	$\pm 5,8 \times 10^{-8}$	$\pm 1,0 \times 10^{-3}$	$\pm 0,15$	$\pm 2,2$	$\pm 12$	$\pm 75$
$\Delta P''$ , %	$\pm 8,3 \times 10^{-7}$	$\pm 0,01$	$\pm 1,0$	$\pm 9,0$	$\pm 33$	$\pm 150$
$\Delta P'''$ , %	$\pm 6,5 \times 10^{-6}$	$\pm 0,043$	$\pm 2,8$	$\pm 19$	$\pm 56$	$\pm 210$
$P_0$	0,0343725804 400450	0,034420 76135	0,034488 65964	0,034574 22965	0,034689 17539	0,035066 92416
$ P_1 $	1,3581438562 0763× ×10 <sup>-4</sup>	2,321762 257× ×10 <sup>-4</sup>	3,679906 113× ×10 <sup>-4</sup>	5,390965 015× ×10 <sup>-4</sup>	7,712727 272× ×10 <sup>-4</sup>	1,542545 454× ×10 <sup>-3</sup>

В табл.2 приведены значения погрешностей, полученные при аппроксимации функции

$$P(t) = 1/55 \times t^{0.17}.$$

Таблица 2. Погрешность аппроксимации при различных значениях параметра  $\beta$ . (Погрешность для функции  $P(t) = 1/55 \times t^{0.17}$ .)

Параметр $\beta$	1,5 (*)	2	3	5	10	100
Число экспонент, N	251	148	94	64	45	23
$\Delta P, \%$	$\pm 1 \times 10^{-9}$	$+2 \times 10^{-5}$ 0	$+ 5 \times 10^{-3}$ $- 2 \times 10^{-3}$	$\pm 0,08$	+ 1,8 -0,2	$\pm 8$
$\Delta P', \%$	$\pm 5 \times 10^{-8}$	$\pm 0,6 \times 10^{-3}$	$\pm 0,1$	$\pm 1,5$	$\pm 14$	$\pm 60$
$\Delta P'', \%$	$\pm 2 \times 10^{-6}$	$\pm 7 \times 10^{-3}$	$\pm 0,7$	$\pm 8,0$	$\pm 35$	+ 150 -100
$\Delta P''', \%$	$\pm 5 \times 10^{-6}$	$\pm 0,04$	$\pm 2,5$	$\pm 18$	$\pm 70$	+ 200 -100
$\Delta[\text{tg}(\delta)], \%$	$\pm 1,5 \times 10^{-9}$	$\pm 2,6 \times 10^{-4}$	$\pm 0,05$	$\pm 0,9$	$\pm 5,7$	+70 -35
$\Delta G'', \%$		$\pm 2,7 \times 10^{-4}$	$\pm 0,05$	$\pm 0,9$	$\pm 5,6$	+34 -72

(\*) – Погрешность для более узкого интервала значений  $\lg(t)$ , чем указано в (21).

Анализ данных, приведенных в [13], показал, что в случае (2)  $\text{tg}(\delta) = G''(\omega)/G'(\omega)$  не зависит от частоты  $\omega$  и  $\text{tg}(\delta) = \text{tg}(\pi/2 \times \alpha)$ , это соотношение можно использовать для оценки погрешности аппроксимации. Эти погрешности для функции  $P(t) = 1/55 \times t^{0.17}$  для разных значений параметра  $\beta$  представлены в табл.2 (см.  $\Delta[\text{tg}(\delta)]$ ).

В результате расчетов было получено, что если  $R(t) = R(1) \times [1 - Z \times \lg(t)]$ , то  $G'' \approx \text{const} \approx 1,591613252$ ; (23)

и выполняется условие  $G'' / [R(1) \times Z] \approx 0,6821881840$ . (Погрешность расчетов  $G''$  при  $Z = 0,04242$  приведена в последней строке таблицы 2).

Из последних двух строк таблицы 2 следует, что в рассмотренных случаях погрешности расчета  $\text{tg}(\delta)$  и  $G''(\omega)$  при одинаковых значениях  $\beta$  практически совпадают (случай при  $\beta = 100$  требует уточнения).

Проверочные расчеты показали следующее. Если при  $\beta = 2$  учитывать только 8 значащих цифр вычисленных чисел  $P_0$  и  $P_1$  (остальные цифры заменять нулями), то погрешность аппроксимации функции  $P(t)$  возрастает примерно в три раза, по сравнению с данными, приведенными в таблице 1 для  $\beta = 2$ . Если учитывать только 9 значащих цифр, то погрешность аппроксимации незначительно меняется, если учитывать 10 значащих цифр, то погрешность аппроксимации практически не меняется. Поэтому было принято решение в таблице 1 для  $\beta \geq 2$  указывать первые 10 значащих цифр вычисленных чисел  $P_0$  и  $P_1$ . Для  $\beta = 1,5$  указано 16 значащих цифр.

На рисунках 2 и 3 показаны графики погрешности аппроксимации функции  $R(t) = 55 \times [1 - 0,04242 \times \lg(t)]$  (см. (17)) при  $\beta = 2$ . Данные рис.3 показывают, что вне интервала (21) погрешность заметно возрастает.

На рис.4 для функции (20) показаны расчетные диаграммы зависимости величины  $G''(\omega)$  ( $\omega = 2\pi f$ ,  $f$  – Гц), полученные по (11) при  $\beta = 100, 10, 2$ . График, осциллирующий с большой амплитудой, получен при  $\beta = 100$ , с малой амплитудой получен при  $\beta = 10$ , гладкая кривая получена при  $\beta = 2$ ; при значениях  $\lg(f) > 10$  все

три графика стремятся к нулевому значению, - это говорит о том, что для расчета величины  $G''$  при  $f > 10^{10}$  Гц следует аппроксимировать рассматриваемую функцию при малых временах ( $\lg(t) < -10$ ).

На рисунке 5 показан график погрешности аппроксимации функции (20) при  $\beta = 2$ .

Как выше было сказано, в [8] указано, что качественно кривая релаксации похожа на обращенную кривую ползучести и часто полезно считать их сходными. Учитывая это, были получены расчетные значения  $G''(\omega)$  ( $\omega = 2 \times \pi \times f$ ) для функции  $\Pi(t) = 1/\{55 \times [1 - 0.04242 \times \lg(t)]\}$  при  $\beta = 2$ . Результаты этих расчетов показаны на рис.6. Из рис.6 следует, что почти выполняется условие  $G'' \approx \text{const}$ , но, все-таки, с увеличением  $\lg(f)$  величина  $G''$  несколько уменьшается и при этом (в рассматриваемом диапазоне частот) величина  $G''$  несколько превышает значение, указанное в (23).

Среди изданий последних лет, в которых есть рекомендации по вопросам аппроксимации рядами экспонент кривых ползучести и релаксации, следует отметить [14]. В [15] для конкретных марок полимеров указаны численные значения характерных параметров аппроксимирующих выражений.

В [16] указано, что аппроксимирующий ряд экспонент не определяется однозначно (в частности, в (13) можно по-другому назначить величину  $p_1$  (см. (22))).

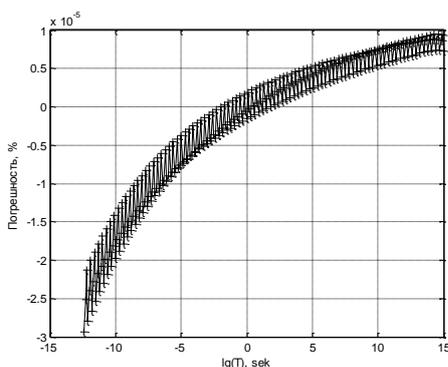


Рис.1. Погрешность аппроксимации функции  $\Pi(t) = 1/55 \times [1 + 0,04242 \times \lg(t)]$  (см. (20) при  $\beta = 2$ , при неудачном выборе моментов времени  $t_1$  и  $t_2$

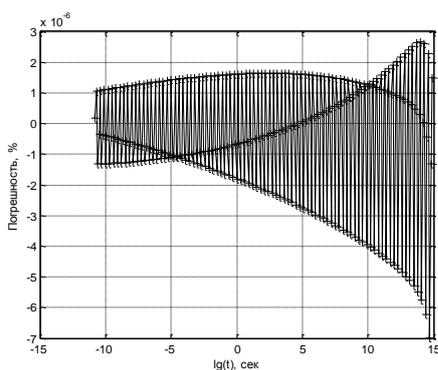


Рис. 2. Погрешность аппроксимации функции  $R(t) = 55 \times [1 - 0,04242 \times \lg(t)]$  (см. (17)) при  $\beta = 2$

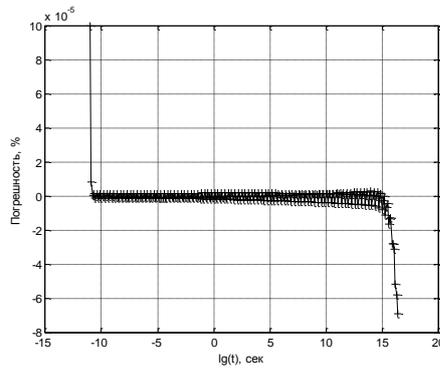


Рис. 3. Погрешность аппроксимации функции  $R(t) = 55 \times [1 - 0,04242 \times \lg(t)]$  (см. (17)) при  $\beta = 2$

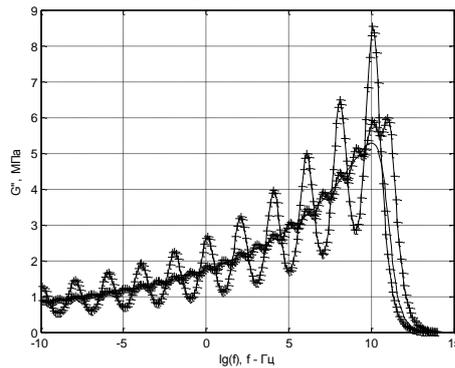


Рис. 4. Расчетные диаграммы величины  $G''(\omega)$  ( $\omega = 2\pi f, f - \text{Гц}$ ), полученные по (11) при  $\beta = 100, 10, 2$  для функции  $\Pi(t) = 1/55 \times [1 + 0.04242 \times \lg(t)]$  (см. (20))

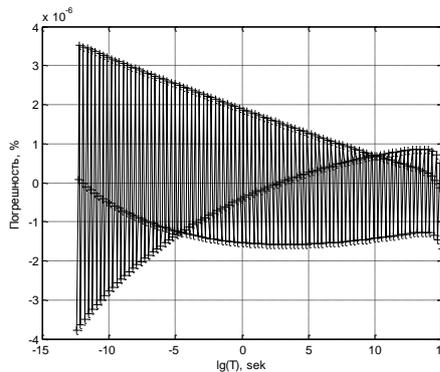


Рис. 5. Погрешность аппроксимации функции  $\Pi(t) = 1/55 \times [(1 + 0,04242 \times \lg(t))]$  (см.(20)).

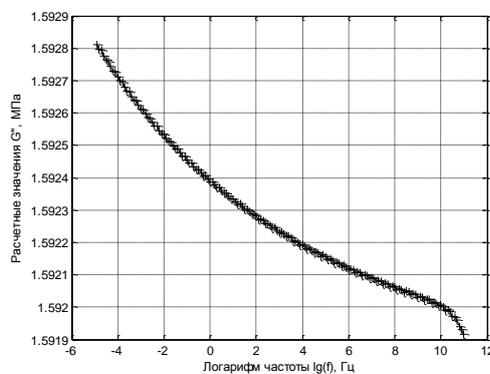


Рис. 6. Расчетные значения  $G''$  для функции  $\Pi(t) = 1/\{55 \times [1 - 0.04242 \times \lg(t)]\}$ .  
Выводы

1. Проведенные расчеты показали, что погрешность аппроксимации существенно зависит от выбранного количества экспонент, выбор требуемого количества экспонент необходимо связывать с решаемой задачей.

2. Если подходить к вопросу использования рядов экспонент, как к разработке удобного математического приема, обеспечивающего высокую точность расчетов, то следует рассматривать большое число экспонент и широкий интервал значений  $\lg(t)$ .

### **Литература**

1. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977, 384с.
2. Ильюшин А.А., Победря Б.Е. Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970, 280с.
3. Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости. М.: Мир, 1974, 338с.
4. Москвитин В.В. Сопrotивление вязкоупругих материалов. М.: Наука, 1972, 327с.
5. Сазонов В.Г. Оценка жесткостных характеристик полиуретана при различных условиях нагружения. Вестник машиностроения, 2009, № 6. С.37-43.
6. Годунов С.К., Рябенский В.С. Разностные схемы (введение в теорию). 2-ое изд., перераб. и доп. М.: Наука, 1977, 440с.
7. Сазонов В.Г. Особенности деформирования полиуретана при нестандартных условиях нагружения. Полиуретановые технологии. 2009, № 3(22). С.30-34.
8. Основы конструирования изделий из пластмасс. Под ред. Э. Бэра. Пер. с англ. М.: Машиностроение, 1969, 272с.
9. Даштиев И.З. Ползучесть, релаксация и диссипативные свойства полиуретановых эластомеров. Полиуретановые технологии. 2005г., № 1, с.7-9.
10. Дмитриенко Ю.И. Нелинейная механика сплошной среды. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009, 624с.
11. Дмитриенко Ю.И. Механика сплошной среды: учеб. пособие в 4 т. Т.4: Основы механики твердых сред. М.: Изд-во МГТУ им.Н.Э. Баумана, 2013, 623с.
12. Матюшкин И.В. Моделирование и визуализация средствами MATLAB физики наноструктур. М.: Техносфера, 2011, 188с.
13. Калнинь В.М., Балодис А.А., Адавич П.Н. Исследование вопроса о применимости модели гистерезисного трения для оценки степени неупругости полимерных материалов. Сообщение 1. Механика полимеров, 1978, № 1, с.147-153
14. Малкин А.Я., Исаев А.И. Реология. Концепции, методы, приложения. Авторизованный перевод с англ. СПб.: ЦОП «Профессия», 2010, 560с.
15. Макушкин А.П. Полимеры в узлах трения и уплотнениях при низких температурах. М.: Машиностроение, 1993, 288с.
16. Ферри Дж. Вязкоупругие свойства полимеров. Пер. с англ. под ред. В.Е. Гуля. М.: Изд-во иностр. лит., 1963, 536с.

# УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАВАЮЩЕГО ПОКРОВА МОРСКОГО ЛЬДА ПРИ ДЛИТЕЛЬНОМ ОДНООСНОМ СЖАТИИ

## STABILITY OF FLOATING ICE SHEETS UNDER LONG-TERM UNIAXIAL COMPRESSION

А.Н.Сахаров – к.ф.-м.н., А.В.Марченко – д.ф.-м.н., Е.Б.Карулин – к.ф.-м.н.,  
П.В.Чистяков – к.ф.-м.н

МГУ им. М.В.Ломоносова, Университетский центр на Свальбарде,  
Крыловский государственный научный центр, НИИ механики МГУ  
[asakh@rambler.ru](mailto:asakh@rambler.ru), [Aleksey.Marchenko@unis.no](mailto:Aleksey.Marchenko@unis.no)

**Abstract.** The phenomena of instability of floating ice cover under long-term compression is discussed. The compression effect takes place during infinite ice cover piling on the bank, drilling rig platforms or bridge pylon. Creep constitutive equation as a power function form is used to describe the rheological properties of ice sheet.

Key words: creep buckling of floating ice cover, long-term loading

**Введение.** При расчете льдоустойчивых сооружений, устанавливаемых на арктическом шельфе - дамба, причал, опора платформы и проч., и прогнозе их надежности, одним из основных вопросов является оценка ледовых нагрузок. Оценка этих нагрузок существенно зависит от выбора модели или сценария взаимодействия сооружения с ледовым покровом. Один из возможных случаев воздействия заключается в навале льда на сооружение, а оценка этого воздействия может быть получена при рассмотрении задачи устойчивости равновесия ледового слоя при сжатии /1, 2/. Действительно, возможная потеря устойчивости равновесия сжатого слоя приводит к образованию волн изгиба, последующему разделению слоя на блоки и, как следствие, к ограничению нагрузки на сооружение. Следовательно, с позиций расчетной практики, постановка такой механической задачи не только не лишена смысла, но может быть весьма полезна для установления верхней оценки ледовой нагрузки.

Исследования и натурные наблюдения потери устойчивости плавающего ледового покрова при навале на береговую линию (см. фото.1 и 2) позволяют сделать следующие предположения:

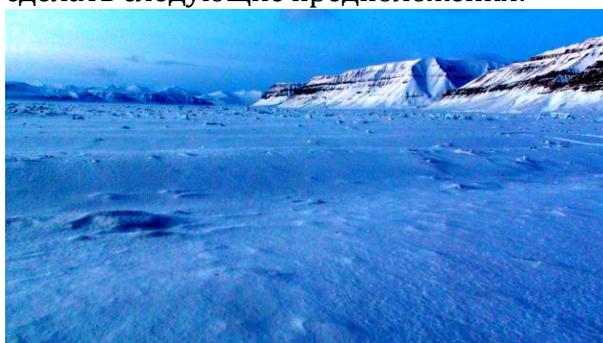


Фото.1 Волны на поверхности льда



Фото.2 Система складок при навале на берег

- Потеря устойчивости плоской формы ледового покрова происходит в результате длительного сжатия;
- Форма выпучивания при потере устойчивости, возникающая в результате развития возмущений – периодическая система складок (волн) на поверхности ледового покрова;

- Развитие возмущений происходит в течение длительного времени.

Следовательно, можно предположить, что в этом явлении существенную роль играют реологические свойства морского льда. Однако прежде имеет смысл рассмотреть задачу упругой устойчивости для плавающей пластинки.

Устойчивость ледового покрова при навале на берег

Рассмотрим задачу устойчивости сжатия плавающего ледового покрова толщины  $h$ , при навале на берег с прямой береговой линией. Ледовый покров будем моделировать пластиной, находящейся в плосконапряженном состоянии, а материал слоя – несжимаемым.

Также будем предполагать, что в исходном состоянии пластинка находится под действием усилий  $T_{ij}^0 = h\sigma_{ij}(x)$ .

Уравнение равновесия для пластины при выпучивании под действием усилий  $T_{ij}$  и изменения поперечной нагрузки /3/ в результате действия архимедовых сил  $\delta q = -\rho g \delta w$  будет

$$\delta M_{ij,ij} + (T_{ij}^0 \delta w_{,i})_{,j} + \delta q = 0 \quad (1)$$

Рассмотрим уравнение равновесия при упругой потере устойчивости в условиях однородного напряженного состояния пластинки  $T_{ij}^0 = h\sigma_{ij}^0$

$$L_0(\delta w) = \Delta \Delta(\delta w) + \frac{h}{D} \sigma_{ij}^0 \Delta(\delta w) + \frac{\rho g}{D} \delta w = 0, \quad (2)$$

где  $L_0$  и  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  – операторы,  $D = \frac{Gh^3}{3}$  – изгибная жесткость упругой пластинки.

В случае одноосного сжатия  $\sigma_{11}^0 = \sigma^0 \neq 0$  и формы возмущений  $w = w(x_1)$  имеем уравнение

$$\frac{\partial^4(\delta w)}{\partial x^4} + \lambda^2 \frac{\partial^2(\delta w)}{\partial x^2} + \mu^2 \delta w = 0, \quad \text{где } \lambda^2 = \frac{3\sigma^0}{Gh^2}, \quad \mu^2 = \frac{\rho g}{D} \quad (3)$$

характеристическое уравнение имеет вид

$$s^4 + \lambda^2 s^2 + \mu^2 = 0, \quad (4)$$

Корни уравнения (4) при условии  $\lambda^2 \leq 2\mu$  представим в виде

$$s^2 = -\frac{\lambda^2}{2} \pm i \sqrt{\mu^2 - \frac{\lambda^4}{4}} = \mu(\cos \alpha_0 \pm i \sin \alpha_0), \quad \text{где } \cos \alpha_0 = -\frac{\lambda^2}{2\mu}; \text{ ; или}$$

$$s_{1..4} = \sqrt{\mu}(\cos(\alpha_0/2 + \pi k/2) \pm i \sin(\alpha_0/2 + \pi k/2)), \quad k=0,1$$

а общее решение уравнения (3) имеет вид

$$\delta w = C_1 ch \eta x \cos \xi x + C_2 ch \eta x \sin \xi x + C_3 sh \eta x \cos \xi x + C_4 sh \eta x \sin \xi x \quad (5)$$

где  $\eta = \sqrt{\mu} \cos(\alpha_0/2)$ ,  $\xi = \sqrt{\mu} \sin(\alpha_0/2)$ .

Предполагая, что по границе  $x = 0$  пластинка шарнирно оперта

$$\delta w = \delta w'' = 0, \quad (6)$$

решение (3)  $\delta w = Ce^{-\eta x} \sin \xi x$  при  $x \geq 0$  определяет возмущение с длиной волны

$$\text{равной } l = \frac{2\pi}{\sqrt{\mu} \sin(\alpha_0/2)}.$$

Построим решение уравнения (3) для возмущений при условии  $\lambda^2 > 2\mu$ .

Корни характеристического уравнения (4) в этом случае мнимые

$$s_{1,2} = \pm im; m = \sqrt{\frac{\lambda^2}{2} + \sqrt{\frac{\lambda^4}{4} - \mu^2}}; s_{3,4} = \pm in; n = \sqrt{\frac{\lambda^2}{2} - \sqrt{\frac{\lambda^4}{4} - \mu^2}}$$

Общее решение уравнения (3) имеет вид

$$\delta w = C_1 \cos mx + C_2 \sin mx + C_3 \cos nx + C_4 \sin nx,$$

Возмущение представимо в виде суперпозиции двух волн  $l_1 = \frac{\pi}{m}$  и  $l_2 = \frac{\pi}{n}$ .

На рис. 1 представлен график зависимости длины волны возмущений для морского толщине льда 0,55 м ( $G = \frac{E}{3} = 0,33 \text{ Гпа}$ ,  $\rho g = 10^4 \text{ Нм}^{-3}$ ), при увеличивающемся значении сжимающих напряжений от малых до  $\sigma_{\text{нв}} = 2,0 \text{ Мпа}$  и показывающий смену режима возмущений с одноволнового на двухволновой при переходе через критическое значение  $\sigma^0 = 1,48 \text{ Мпа}$ .

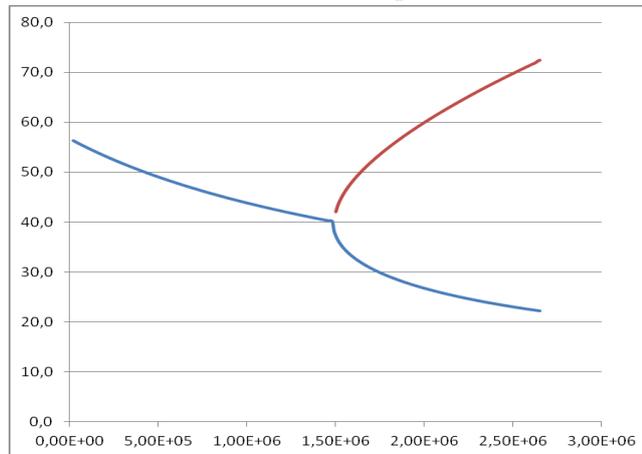


Рис.1. График зависимости длины волны возмущений  $L$  от действующего напряжения  $\sigma^0$ . при толщине ледового покрова  $h=0.55$ , м

Для анализа устойчивости рассмотрим динамическую задачу о поведении возмущений слоя, учитывая только инерционные силы, возникающие при движении в пластинке, без учета волновых процессов в воде. Решение динамического уравнения изгиба

$$\Delta \Delta(\delta w) + \frac{h}{D} \sigma_{ij}^o \Delta(\delta w) + \frac{\rho g}{D} \delta w + \frac{\rho h}{D} \delta \ddot{w} = 0, \quad (7)$$

представляется в виде  $\delta w = C e^{i\alpha x} w(x)$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$s^4 + \lambda^2 s^2 + \mu^2 - \tilde{\omega}^2 = 0, \text{ где } \tilde{\omega}^2 = \frac{\rho h \omega^2}{D} \quad (8)$$

В случае, когда  $\omega$ - действительное число, решение уравнения (7) соответствует гармоническим колебаниям, т.е. устойчивости решения по Ляпунову, когда  $\omega$ - мнимое – экспоненциальному уходу от положения равновесия, т.е. неустойчивости.

Воспользовавшись традиционным подходом, заключающемся в динамическом анализе устойчивости равновесия, отметим, что по мере увеличения усилия  $T_{ij}^0 = h \sigma_{ij}^0$  в пластинке толщиной  $h$  изображающая точка на графике  $L_*(\sigma^0)$  будет вначале двигаться по кривой соответствующей одноволновому режиму, т.е. находится справа от точки ветвления. Гармонические возмущения смещают изображающую точку вправо от равновесного положения, уменьшая длину волны, экспоненциально растущие возмущения – смещают точку

влево по графику, увеличивая длину волны. В двухволновой области ситуация имеет место с точностью до наоборот. Таким образом, когда положение изображающей точки совпадает с точкой ветвления режимов возникает ситуация критическая в том смысле, что гармонические колебания не могут быть реализованы, т.е. условие  $\lambda^2 = 2\mu$  отвечает неустойчивости равновесия. Подставляя физические параметры, в окончательном виде получим

$$\sigma_* = \frac{2\sqrt{\rho g D}}{h} = \sqrt{\frac{4\rho g h G}{3}} \quad (11)$$

Таким образом, исследование задачи о возмущенном равновесии упругой пластинки на винклеровском основании, позволяет сделать два вывода:

- существуют два режима возмущений – аperiодический и периодический, являющийся суперпозицией двух волн;
- точка ветвления режимов отвечает неустойчивости равновесия пластинки, когда при динамическом возмущении не существует гармонических колебаний пластинки.

#### Реологическая модель морского льда

Исследованиям физических и механических свойств морского льда при длительных силовых воздействиях посвящено большое число работ /4-6/. Не останавливаясь на обзоре этих работ, приведем два основных соотношения для реологических моделей, описывающие ползучесть льда:

- закон установившейся ползучести в условиях пренебрежения упругой деформацией (квазивязкая среда)

$$\dot{\rho} = \dot{\varepsilon} = B\sigma^n; \quad (12)$$

-закон ползучести Нортона-Бэйля /6/

$$\rho = \varepsilon_c = B\sigma^n t^m, m < 1 \quad (13)$$

Отметим, что указанные соотношения известны и используются при исследовании ползучести конструкционных материалов, так например, последнее соотношение соответствует уравнению состояния со степенным упрочнением /7/. Приведенные соотношения (12) и (13) следует рассматривать как конкретизацию известных реологических соотношений применительно к свойствам морского льда и способам учета в реологических моделях таких важных для морского льда параметров, как соленость, температура, плотность. В этом случае можно считать оправданным применение уравнения состояния в обычном виде /7/:

$$\dot{\rho} = \varphi(\sigma, \rho) \quad (14)$$

#### Малые отклонения от основного состояния

При рассмотрении задач устойчивости в малом, рассматривают малые отклонения и используют линеаризованные уравнения, описывающие малые отклонения от основного состояния, т.е. при  $\left| \frac{\delta\sigma}{\sigma} \ll 1 \right|; \left| \frac{\delta\rho}{\rho} \ll 1 \right|$  в линейном приближении в условиях одноосной ползучести следует

$$\frac{\partial \delta\rho}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} \delta\sigma + \frac{\partial \varphi}{\partial \rho} \delta\rho \quad (15)$$

где коэффициенты при вариациях  $\delta\sigma, \delta\rho$  представляют известные функции времени и параметров основного процесса. С учетом выражения для полной деформации

$$\varepsilon = \rho + \frac{\sigma}{E}$$

из (15) получим

$$\delta\dot{\sigma} + K\delta\sigma = E(\delta\dot{\varepsilon} + M\delta\varepsilon) \quad (16)$$

где  $K = E \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} - \frac{\partial \varphi}{\partial p}$ ;  $M = -\frac{\partial \varphi}{\partial p}$

Таким образом, материал, подверженный ползучести при малых отклонениях от исходного состояния, ведет себя как упруго-вязкое тело Кельвина /7/.

В связи с этим обстоятельством можно утверждать, что быстрые изменения напряженного состояния при возмущениях будут описываться упругими соотношениями с модулем упругости  $E$ , а медленные длительным модулем  $E_d$ .

$$E_d = \frac{-\frac{\partial \varphi}{\partial p}}{\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} - \frac{\partial \varphi}{E \cdot \partial p}} \quad (17)$$

#### Устойчивость равновесия слоя

Рассмотрим устойчивость плавающего ледового покрова в условиях длительного нагружения под действием постоянных усилий  $T_{ij}(\bar{x}, t) = T_{ij}^0 = h\sigma_{ij}^0$ ;  $i, j = x, y$ . Вначале рассмотрим квазивязкое течение без учета упругих деформаций. Особенностью задач устойчивости медленных вязких течений является отсутствие эффекта стабилизации положения частиц за счет упругих свойств материала.

#### А. Модель квазивязкой среды

Рассмотрим в качестве реологического соотношения –закон установившейся ползучести (12) без учета упругих деформаций:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\lambda} s_{ij} = \frac{3}{2} B \sigma_u^{n-1} s_{ij} \quad (18)$$

где  $\sigma_u = \left(\frac{3}{2} s_{ij} s_{ij}\right)^{\frac{1}{2}}$  - интенсивность напряжений.

Выполним линейризацию определяющего соотношения в окрестности невозмущенного напряженного состояния

$$\delta\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{3}{2} B ((n-1)\sigma_u^{n-2} s_{ij} \delta\sigma_0 + \sigma_u^{n-1} \delta s_{ij}) \quad (19)$$

Рассматривая при выпучивании пластинки класс возмущений при котором выполняется условие соосности тензоров  $\delta s_{ij} = \frac{\delta\sigma_u}{\sigma_u} s_{ij}$ , соотношение (19) примет вид

$$\delta\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{3}{2} B n \sigma_u^{n-1} \delta s_{ij}$$

Для компонент  $\delta\dot{\varepsilon}_{ij}$  в силу гипотезы прямых нормалей имеем  $\delta\dot{\varepsilon}_{ij} = \delta\dot{w}_{,ij} z$ , а соотношения, связывающие статические и кинематические параметры

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \delta\dot{\varepsilon}_{ij} z dz = I \delta\dot{w}_{,ij} = \frac{3}{2} B n \sigma_u^{n-1} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \delta s_{ij} z dz ; \text{ где } I = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 dz \quad (20)$$

С учетом выражений для изгибающего момента

$$\delta M_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \delta \sigma_{ij} z dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\delta s_{ij} + \delta s_{kk} \delta_{ij}) z dz$$

в случае одноосного сжатия  $\sigma_{11}^0 = \sigma^0 = \sigma_u \neq 0$  и формы возмущений  $\delta w = \delta w(t, x)$  имеем уравнение равновесия (2) в виде

$$\frac{\partial^4}{\partial x^4} \frac{\partial \delta w}{\partial t} + \lambda^2 \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} + \mu^2 \delta w = 0, \quad (21)$$

$$\text{где } \lambda^2 = \frac{h \sigma^0}{D} = \frac{9 B n (\sigma^0)^n}{h^2}, \mu^2 = \frac{\rho g}{D}; D = \frac{h^3}{9 B n (\sigma^0)^{n-1}}$$

### Устойчивость

Для определения условий устойчивости представим решение в виде  $\delta w = C e^{\nu t} f(x); \nu > 0$ . Подставляя в уравнение (21), получим

$$\nu \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + \lambda^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \mu^2 f = 0 \quad (22)$$

Решение уравнения (22) зависит от дискриминанта характеристического уравнения.

$$\text{А) Случай } \frac{\lambda^4}{4\mu^2} < \nu.$$

Корни характеристического уравнения представим в виде

$$s^2 = -\frac{\lambda^2}{2\nu} \pm i \sqrt{\tilde{\mu}^2 - \frac{\lambda^4}{4\nu^2}} = \tilde{\mu} (\cos \alpha \pm i \sin \alpha),$$

$$\text{где } \tilde{\mu} = \frac{\mu}{\sqrt{\nu}}, \cos \alpha = -\frac{\lambda^2}{2\mu\sqrt{\nu}};$$

Аналогично случаю упругости общее решение уравнения (22) при условии шарнирного опирания (6) имеет вид затухающей при  $x \rightarrow -\infty$  синусоиды с волновым числом  $\xi$

$$f = C_1 ch \eta x \sin \xi x + C_2 sh \eta x \cos \xi x$$

$$\text{где } \eta = \sqrt{\tilde{\mu}} \cos(\alpha/2), \xi = \sqrt{\tilde{\mu}} \sin(\alpha/2).$$

откуда следует:  $\eta^2 + \xi^2 = \tilde{\mu} = \frac{\mu}{\sqrt{\nu}} < \left(\frac{\sqrt{2}\mu}{\lambda}\right)^2$ , т.е. длина волны возмущения

ограничена снизу

$$L(\xi) = \frac{2\pi}{\xi} \geq L_* = \frac{2\pi}{\xi_*}, \text{ где } \xi_* = \frac{\sqrt{2}\mu}{\lambda} \quad (23)$$

$$\text{Б) Случай } \frac{\lambda^4}{4\mu^2} > \nu.$$

Рассматриваемый случай отвечает ограничению скорости роста возмущений сверху.

Корни характеристического уравнения представим в виде

$$s_{1,2} = \pm im; m = \sqrt{\frac{\lambda^2}{2\nu} + \sqrt{\frac{\lambda^4}{4\nu^2} - \tilde{\mu}^2}} \quad s_{3,4} = \pm ik; k = \sqrt{\frac{\lambda^2}{2\nu} - \sqrt{\frac{\lambda^4}{4\nu^2} - \tilde{\mu}^2}} \quad (24)$$

Возмущение представляет суперпозицию двух синусоид и при краевом условии (6) имеет вид  $f = C_1 \sin mx + C_2 \sin kx$ .

Рассматривая выражения (24) как задание функции параметра  $\nu$  от волновых чисел  $m, k$ , найдем экстремумы  $\nu(m)$  и  $\nu(k)$

$$\nu(m) = \frac{\lambda^2 m^2 - \mu^2}{m^4} \text{ при } m^2 \geq \frac{\lambda^2}{2\nu} \text{ определена при } m \geq \xi_*; \quad (25)$$

$$\text{и } \nu(k) = \frac{\lambda^2 k^2 - \mu^2}{k^4} \text{ при } k^2 \leq \frac{\lambda^2}{2\nu} \text{ определена при } k \leq \xi_*; \quad (26)$$

необходимое условие  $\frac{\lambda^4}{4\mu^2} > \nu$  выполняется при этом тождественно.

Найдем максимум функции  $\nu(n)$  от волновых чисел  $m, k$ , но с разными областями определения. Скорость роста возмущений стремится к экстремуму  $\nu_* = \frac{\lambda^4}{4\mu^2}$  при волновом числе  $\xi_* = \frac{\sqrt{2}\mu}{\lambda}$ , но не достигается, так как при  $\xi_*$  дискриминант бигармонического уравнения становится равным нулю и появляются кратные корни.

Из сравнения результатов исследования решений в обоих случаях, можно сделать следующий вывод - при использовании квазивязкой среды в качестве модели льда, равновесие плавающего слоя является неустойчивым при любых значениях параметров напряженного состояния, можно лишь говорить о сравнительной скорости роста возмущений. Как и в упругом случае существуют два типа возмущений - периодические - суперпозиция двух синусоид и аperiodическое возмущение с длиной волны  $L > L_* = \frac{2\pi}{\xi_*} = \frac{\sqrt{2}\pi\lambda}{\mu}$  - синусоида, затухающая при  $x \rightarrow -\infty$ . Периодические возмущения имеют экстремум скорости роста при стремлении длины волны к  $L_*$ , возмущения второго типа экстремума не имеют - чем длиннее волна возмущения, тем выше скорость роста амплитуды.

### Б. Модель вязкоупругой среды

Устойчивость деформирования вязкоупругих материалов зависит от уровня и длительности напряжений, действующих в конструкции или системе. При высоком уровне напряжений (эйлерово значение нагрузки) потеря устойчивости происходит по упругой форме за короткие промежутки времени - «мгновенно» в масштабе времени длительного нагружения. Однако в условиях ползучести продолжающийся рост прогибов и увеличение изгибающих моментов при выпучивании приводит к меньшему значению напряжений, чем при упругой потере устойчивости.

Рассмотрим в качестве реологического соотношения для льда - упруго-вязкое тело Кельвина, как одну из наиболее общих реологических моделей [7], к которой сводится описание деформации тела, подверженного ползучести при малых отклонениях от исходного состояния.

Определяющее соотношение для изотропного материала при малых отклонениях запишем в виде

$$\delta \dot{s}_{ij} + K \delta s_{ij} = 2G(\delta \dot{\varepsilon}_{ij} + M \delta \varepsilon_{ij}), \quad \frac{G_t}{G} = \frac{M}{K} < 1 \quad (24)$$

где  $G_t$  - длительный модуль.

Для компонент  $\delta \dot{\varepsilon}_{ij}$  имеем  $\delta \dot{\varepsilon}_{ij} = \delta \dot{w}_{,ij} z$ , а соотношения, связывающие статические и кинематические параметры представим в виде аналогично (20):

$$2GI(\delta\dot{w}_{,ij} + M\delta w_{,ij}) = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \delta\ddot{s}_{ij} z dz + K \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \delta s_{ij} z dz$$

Для случая одноосного сжатия  $\sigma_{11}^0 = \sigma^0 \neq 0$  и формы возмущений  $\delta w = \delta w(t, x)$  уравнение равновесия (2) примут вид:

$$\frac{\partial^4}{\partial x^4} (\frac{\partial \delta w}{\partial t} + Mw) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \lambda^2 (\frac{\partial \delta w}{\partial t} + K\delta w) + \mu^2 (\frac{\partial \delta w}{\partial t} + K\delta w) = 0, \quad (25)$$

где  $\lambda^2 = \frac{h\sigma^0}{D}$ ,  $\mu^2 = \frac{\rho g}{D}$ ;  $D = \frac{Gh^3}{3}$

Представим решение уравнения в виде  $\delta w = Ce^{\nu t} f(x)$ ;  $\nu > 0$  и подставим в уравнение (25)

$$(\nu + M) \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + \lambda^2 (\nu + K) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \mu^2 (\nu + K) f = 0$$

Исследование биквадратного характеристического уравнения

$$s^4 + \zeta^2 s^2 + \zeta \mu^2 = 0, \quad (26)$$

где  $\zeta = \frac{\nu + K}{\nu + M} > 1$  проводится аналогично предыдущему.

Критическое условие соответствует точка ветвления режимов для возмущений – аperiодический с затухающей при  $x \rightarrow -\infty$  синусоидой и периодический, являющийся суперпозицией двух волн. Точке ветвления отвечает обращение в ноль дискриминанта характеристического уравнения  $\zeta^4 = 4\mu^2$  или

$$\frac{\nu + K}{\nu + M} = \frac{4\mu^2}{\lambda^4} \quad (27)$$

При  $\nu \rightarrow \infty$  критическое условие соответствует упругой потере устойчивости  $\lambda^2 = 2\mu$ , при  $\nu \rightarrow 0$  получаем критическое условие с длительным модулем.

$$\frac{G}{G_t} = \frac{4\mu^2}{\lambda^4} \quad (28)$$

По критерию Работнова-Шестерикова /8, 9/ в случае постоянства напряжений особой точке процесса ползучести соответствует условие, когда, по крайней мере, на малом интервале времени амплитуда медленного возмущенного движения обнаруживает экспоненциальный рост.

## Выводы

Исследование задачи устойчивости для плавающего полубесконечного слоя льда при длительном действии сжимающих усилий сводится к анализу медленного возмущенного движения, приводящего к выпучиванию – образованию складок.

Необходимо отметить, что задачи устойчивости равновесия для деформируемых систем и конструкций и определение равновесных форм возмущенного состояния, в математическом плане сводятся к поиску собственных функций и спектру (обычно дискретному) оператора линеаризованной краевой задачи. Минимальное собственное значение оператора обычно отвечает наименьшей критической нагрузке. На этом свойстве построены все известные способы приближенного решения задачи устойчивости – метод Ритца, вариационный метод Тимошенко и прочее.

Однако исследованная задача обладает иными качественными особенностями. Задача об устойчивости равновесия плавающего полубесконечного слоя при возмущениях исходного однородного состояния сжатия обладает особенностью – существует точка ветвления в пространстве состояний, разделяющая режимы возмущений – аperiodический с затухающей при  $x \rightarrow -\infty$  синусоидой и периодический, являющийся суперпозицией двух волн. Критическое условие определяется при выделении точки ветвления, причем подобный подход справедлив для разных моделей среды – упругое тело, квазивязкий материал, упруго-вязкое тело Кельвина, моделирующих механическое поведение морского льда.

### **Литература**

1. T.J.O. Sanderson, Ice mechanics: risks to offshore structures // Graham and Trotman, 1988, 253 pp.
2. Greve, R., Blatter, H., Dynamics of Ice Sheets and Glaciers. Springer, Berlin Heidelberg.
3. Ключников В.Д. Лекции по устойчивости деформируемых систем. // М.: Изд-во Моск. ун-та, 1986. — 224 с.
4. Hayhurst, D.R., 1972. Creep-rapture under multy-axial states of stress. Journal of Mechanics of Physics and Solids 20(6), 381-390.
5. Glen, J.W., 1955. The creep of polycrystalline ice. Proceedings of The Royal Society Of London Series A-Mathematical And Phisical Sciences 228 (1175), 519-538.
6. K. van Steenis, F.E. Hicks, T.M Hrudey, and S. Beltaos. Modelling creep deformation in floating ice // Can. J. Civ. Eng. 30: 28–41 (2003).
7. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. //М. Наука, 1966, 654с.
8. Работнов Ю.Н., Шестериков С.А. Устойчивость стержней и пластинок в условиях ползучести //Прикл. матем. и механика, 1957, т. XXI, вып. 3, с. 406-412.
9. Куршин Л.М. О постановках задачи устойчивости в условиях ползучести. Проблемы теории пластичности и ползучести //М. Мир, 1979, в.18, с.246-302.

**ВЛИЯНИЕ СВЧ – ИЗЛУЧЕНИЯ РАЗЛИЧНОЙ НАПРАВЛЕННОСТИ  
КОМПОНЕНТЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ НА ПЛАСТИЧЕСКУЮ  
ДЕФОРМАЦИЮ РАСТЯЖЕНИЕМ И РЕЛАКСАЦИЮ НАПРЯЖЕНИЙ  
НЕРЖАВЕЮЩЕЙ СТАЛИ**

INFLUENCE OF MICROWAVE RADIATION OF DIFFERENT ORIENTATION  
COMPONENTS OF THE ELECTRIC FIELD ON THE PLASTIC DEFORMATION  
AND STRESS RELAXATION STRETCHING STAINLESS STEEL

**В.И. Сташенко** – к.ф.- м.н., **О.А.Троицкий** – д.т.н., проф.

Институт машиноведения им. А.А. Благонравова РАН

[vis20-11@rambler.ru](mailto:vis20-11@rambler.ru), [otroitsky@rambler.ru](mailto:otroitsky@rambler.ru)

**Abstract.** First discovered the effect of microwave radiation on the process of plastic deformation of the metal in two productions of experience - with active stretching deformatsiobraztsov ascending values EPE peaks caused by single pulses of current work directed towards the weakening of the sample as well as in experiments with the relaxation of mechanical stresses in the loaded samples at stops active stretching and orientations of the electric field E as part of the electromagnetic field of microwave radiation to the longitudinal axis of deformed samples or cross

Для изучения влияния СВЧ-излучения на механические свойства металла в условиях пластической деформации и одновременном действии импульсным током, был выбран микроволновый диапазон, применяемый в СВЧ печах[1,2]. Передачу электромагнитного излучения (ЭМ) этого вида от источника СВЧ-излучения в виде магнетрона к деформируемому образцу осуществлялась с помощью волновода прямоугольного сечения. ЭМ энергия излучается магнетроном с помощью антенна в виде электрического штыря в волновод. Прямоугольный волновод с одной стороны закорочен металлической стенкой, расположенной на расстоянии примерно в четверть длины волны  $\lambda$ . Размеры штыря и расстояние до короткозамкнутой стенки являются ключевыми при согласовании волновода с магнетроном. Если структура поля в волноводе не нарушается, то электрическое поле E будет распределяться в волноводе по синусоиде. Штырь магнетрона излучает электромагнитные волны (ЭМВ) во всех направлениях: прямые ЭМВ в направлении нагрузки (деформируемого образца) и обратные ЭМВ в противоположном направлении, т.е. к глухой стенке волновода. Последние после зеркального отражения от глухой стенки должны изменить свою фазу на  $180^0$ . Поскольку на движение ЭМВ к стенке и обратно уйдет половина периода, их фаза, сделав полный оборот на  $360^0$ , будет такой же, как у прямых ЭМВ. Поэтому ЭМВ обоих видов сложатся, и они с удвоенной мощностью устремятся к нагрузке. Это в идеальном случае. Длина антенны в волноводе должна быть несколько ниже этого значения, поскольку электрическая емкость, образованная верхней крышкой волновода и торцом антенны, увеличивает эффективную длину последней (рис.1).

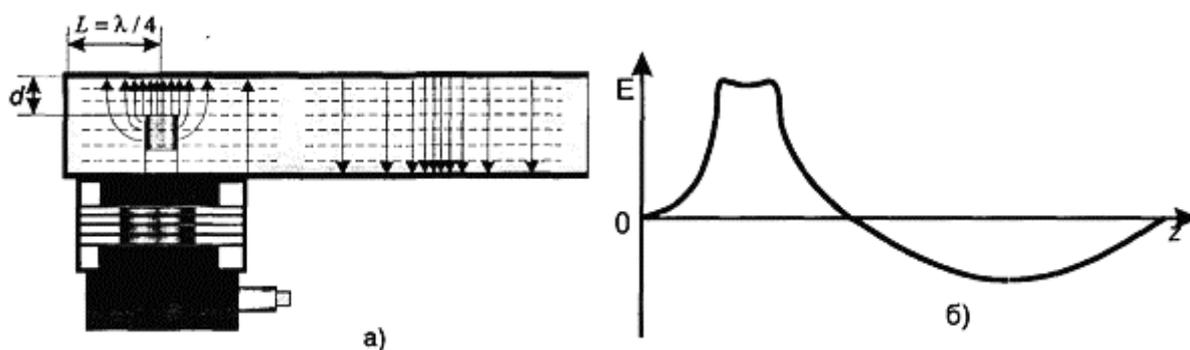


Рис.1 Подключение магнетрона к волноводу (а) и распределение напряженности электрического поля по длине  $Z$  волновода (б)

По длине волны можно подобрать размеры сторон  $a$  и  $b$ . На практике используются волны типа  $H_{10}$  [2]. Распределение электрического и магнитного полей происходит вдоль широкой стороны волновода  $a$ . Равенство нулю второго индекса в обозначении волны говорит о том, что вдоль меньшей стороны волновода  $b$  поле не меняется. Размер  $b$  для волны типа  $H_{10}$  не влияет ни на структуру поля в волноводе, ни на длину распространения волны (рис.1). Для стандартных волноводов выполняется соотношение  $b/a < 0,5$ . Длина волновода от одной глухой стенки до другой определялась: расстоянием от штыря до оси образца (кратное  $\lambda$ ) +  $\lambda/2$ . На основе этих данных был спроектирован и изготовлен короб волновода с окнами для размещения испытуемого образца (рис.2). В опытах применялось дистанционное управление магнетроном излучения. Ориентацию вектора поля  $E$  меняли путем поворота короба волновода относительно деформируемого образца на  $90^\circ$ . Температуру образцов измеряли термопарой во время действия СВЧ - излучения и импульсов тока. Она не превышала  $60^\circ - 80^\circ \text{ C}$ .

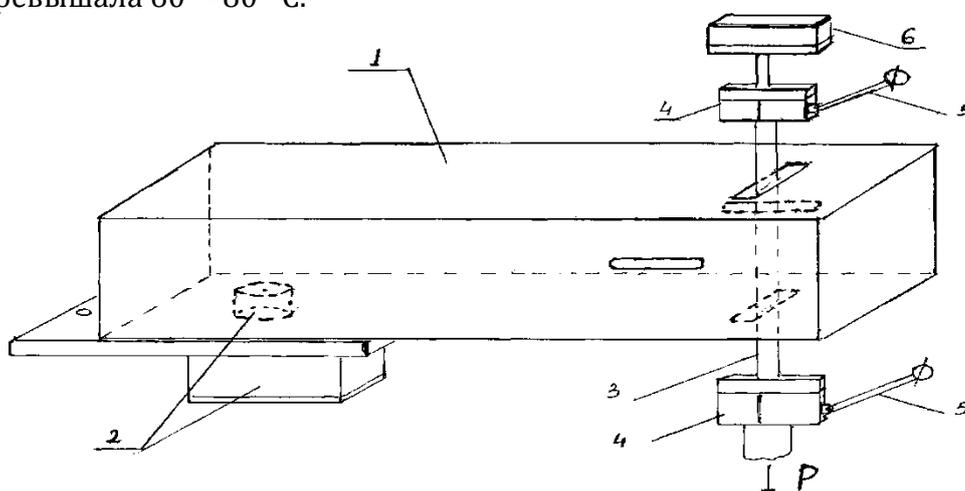
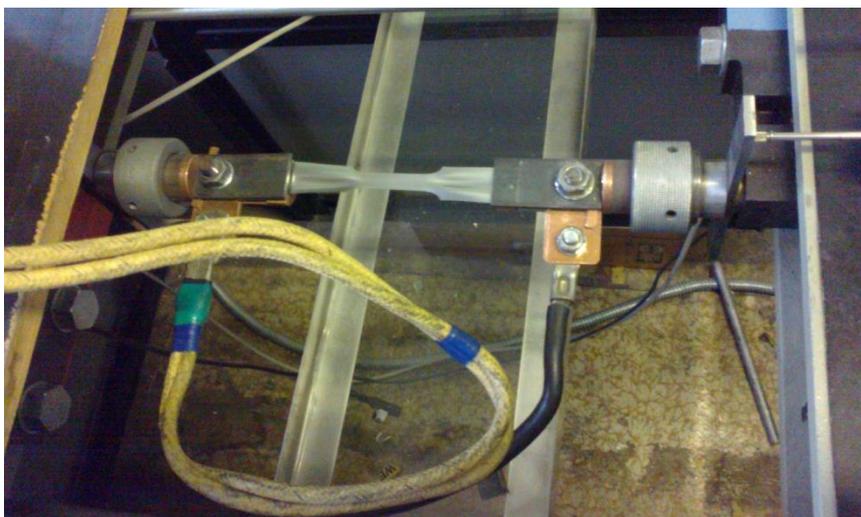


Рис.2 Схема короба волновода (1) с магнетроном (2) для подведения СВЧ - излучения к деформируемому образцу (3), находящегося в захватах (4) с токоподводом (5) и датчиком измерения усилий (6)

На фотографиях (рис.3, 4) представлен вид горизонтальной разрывной машины ИР 5047-50-10 и оснасти, в ходе исследований влияния СВЧ-излучения и импульсного тока на процесс деформации металла.

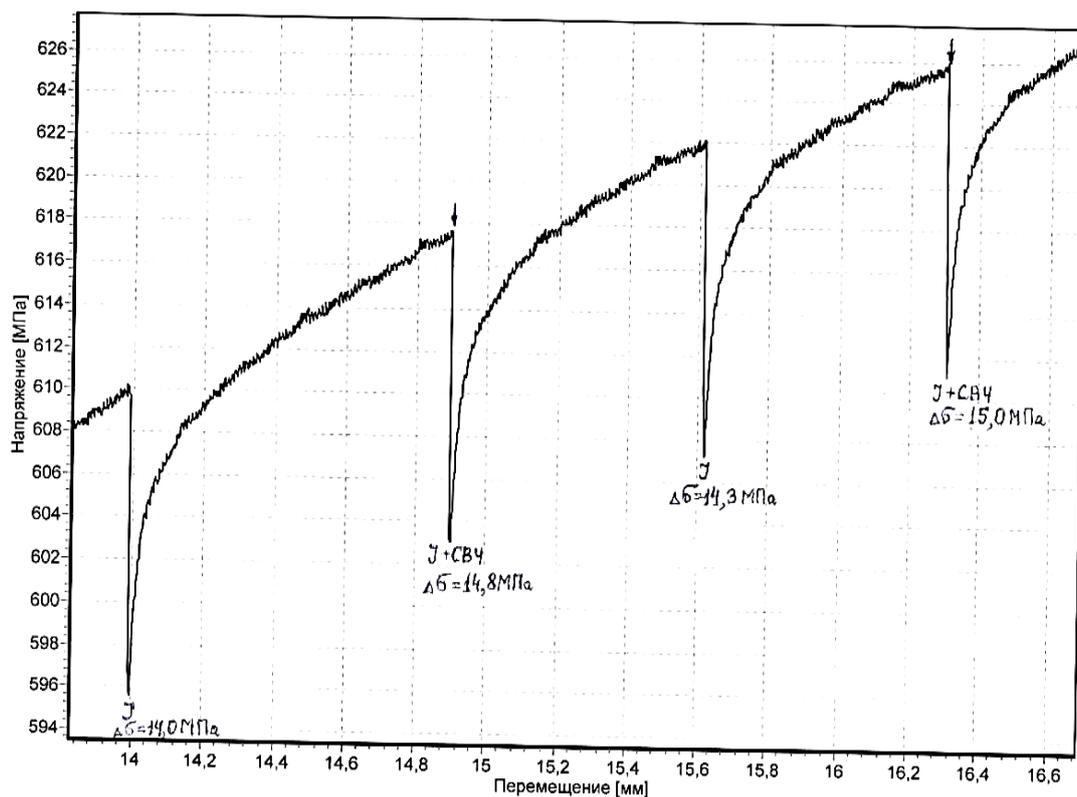


*Рис.3 Испытуемый образец-лопаточка из нержавеющей стали 12ХН10Т толщиной 0,2 мм с длиной рабочей части 28 мм в изолированных зажимах горизонтальной испытательной машины на последней стадии растяжения перед разрывом при одновременном действии импульсами тока*



*Рис. 4 Испытуемый образец находится внутри волновода, магнетрон в низу. ЭМ поле  $E$  направлено поперек оси образца. Через токоподводы подводится импульсный ток*

Влияние СВЧ- излучения на пластическую деформацию металла изучалось в двух постановках опыта: 1) при активной деформации с разной постоянной скоростью; 2) при релаксации напряжений. На рис. 5 даны скачки деформации разупрочнения при действии импульса тока  $J$  и  $J + СВЧ$ . в условиях активной деформации.



Амплитудная значение напряженности наведенного СВЧ поля  $E_{\text{мв}}$  области образца составляла 300 В/м для продольного и 150 В/м для поперечного направления вектора  $E$ . Расстояние между захватами составило 100 мм. Длина рабочей части 28 мм, ширина 12 мм. Толщина образца 0,2 мм.

Во время активной деформации в поле СВЧ-излучения подавались одиночные импульсы тока. Пики деформируемых образцов в СВЧ-поле чередовались с пиками ток + СВЧ. Для того, чтобы установить разницу в величине пиков на деформационной кривой, пики выделялись и увеличивались (рис.5). Поперечная ориентация поля  $E$ .

Видно, что электропластическое [3] действие импульсного тока на пластическую деформацию нержавеющей стали усиливается в присутствии СВЧ-излучения. Небольшое тепловое действие тока и СВЧ не вызывало скачков деформации металла в сторону разупрочнения. Увеличение пиков ЭПЭ при СВЧ-излучении указывает на действие излучения на активную деформацию металла.

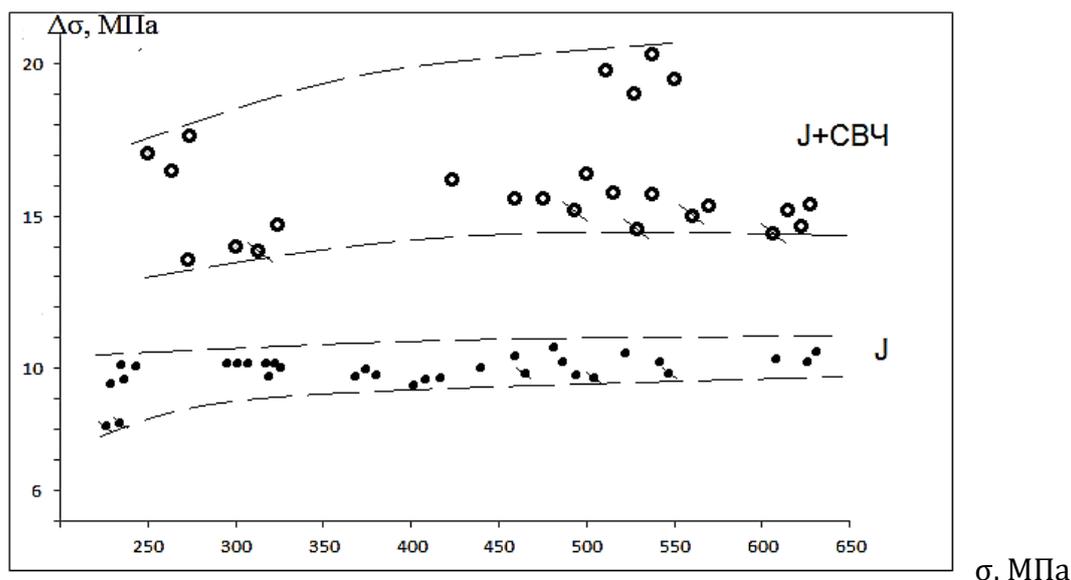


Рис.6 Зависимость пиков разупрочнения возникших под действием импульсов тока  $J$ , а также тока  $J$  и СВЧ – излучения от величины напряжения  $\sigma$  в условиях активного деформирования. Данные получены от пяти образцов

Внизу рисунка 6 приведены данные измерений пиков разупрочнения, полученные от пяти образцов при действии импульсов тока высокой плотности  $J$  порядка  $1000 \text{ A/mm}^2$ . Верхние данные для тех же образцов (в границах пунктирных линий) при одновременном воздействии импульсов тока  $J$  и СВЧ – излучения. Ориентация электрического поля  $E$  – продольная.

2. при релаксации механических напряжений, при кратковременных остановках растяжения образцов с паузами по 3 мин без разгрузки, производилась регистрация влияния отдельного импульсного тока, а затем СВЧ – излучения и тока. Было проведено по 3-4 серии измерений релаксации механических напряжений на одном и том же образце. Возобновление растяжения перед каждой новой серией измерений релаксации напряжений начиналось с более высокой нагрузки, вплоть до разрушения образца. Каждая серия измерений начиналась сразу после остановки растяжения по достижению уровня нагрузки на 50-100 Н больше прежнего. Каждая серия измерений состояли из четырех пауз релаксации: а) без какого либо воздействия; б) с воздействием СВЧ – излучением при разной ориентации вектора  $E$ ; в) с воздействием импульсами тока; г) с совместным действием СВЧ – излучения и импульсов тока.

На одном образце проводить по 12 – 16 измерений. По достижению нагрузки в 1400 - 1500 Н образец, как правило, разрушался в шейке. В каждом измерении релаксации напряжений остановка привода машины сопровождалась резким падением нагрузки за счет разрядки внутренних напряжений и некоторого удлинения образца. В таблице 1 приведены падения нагрузки в первые 2-3 секунды после остановки активной деформации. Видно, что без какого-либо воздействия начальная релаксация не превышает 3-5%. При действии СВЧ- излучения и импульсов тока соответственно 4-5% и 6-7%. При совместном действии (с учетом вычета теплового действия) эффект достигает значений 12-13%, т.е. почти аддитивен. Поперечная ориентация поля  $E$ .

Таблица 1.

Величина падения нагрузок при остановках привода машины в начале пауз  
релаксации напряжений в различных постанковках опыта

№ пп	Виды воздействий	1-я серия измерений		2-я серия измерений		3-я серия измерений	
		$\Delta F$ от $F_0$ , Н	%	$\Delta F$ от $F_0$ , Н	%	$\Delta F$ от $F_0$ , Н	%
1	Без какого-либо воздействия	25 от 700	3,5	56 от 1000	5,6	66 от 1250	5,3
2	СВЧ-излучение	32 от 800	4,0	66 от 1050	6,2	80 от 1300	6,1
3	Импульсы тока	60 от 900	6,6	83 от 1100	7,5	104 от 1350	7,6
4	Совместное действие тока и СВЧ-излучения	110 от 950	12,0	160 от 1200	13,3	170 от 1400	12,4

В таблице 2 приведены падения нагрузки за 3-х минутную паузу релаксации на 8%, а при действии СВЧ- излучении и тока на 7,5 – 12,3% и 10-13% соответственно. Во всех случаях рост падения нагрузок происходит с увеличением уровня приложенных напряжений по номерам серий измерений. При этом совместное действие тока и СВЧ- излучения дает релаксацию в пределах 14,6 – 22,5%.

Таблица 2

Величина падения нагрузок при остановках привода машины за полную паузу  
релаксации напряжений в течение 3 мин в различных постанковках опыта

№ пп	Виды воздействий	1-я серия измерений		2-я серия измерений		3-я серия измерений	
		$\Delta F$ от $F_0$ , Н	%	$\Delta F$ от $F_0$ , Н	%	$\Delta F$ от $F_0$ , Н	%
1	Без какого-либо воздействия	45 от 700	6,4	77 от 1000	7,7	100 от 1250	8,0
2	СВЧ-излучение, поперечное поле E	60 от 800	7,5	120 от 1050	11,4	160 от 1300	12,3
3	Импульсы тока	85 от 850	10,0	120 от 1000	12,0	180 от 1350	13,3
4	Совместное действие тока и СВЧ-излучения	140 от 950	14,6	210 от 1200	17,5	315 от 1400	22,5

Видно, что электропластическое действие импульсного тока на пластическую деформацию [3,4] нержавеющей стали усиливается в присутствии СВЧ- излучения. СВЧ- излучение и импульсы тока создавали нагрев образцов не более чем на 80<sup>0</sup>С. Снижение нагрузки за счет нагрева образца вычиталась из эффекта воздействия. Была изучена скоростная зависимость обнаруженного эффекта. Эффект действия СВЧ- излучения усиливается с ростом скорости деформации, что можно связать с возрастанием числа незавершенных сдвигов и подвижных дислокаций, под влияние СВЧ- облучения, способствуя их разрядке. В опытах было установлено ранее наблюдавшееся явление исчезновения магнитных свойств у нержавеющей стали при электропластической деформации [5] за счет подавления аустенитно-мартенситного превращения. В результате обычной деформации шейка образцов становится магнитной из-за выпадения

перенапряжений альфа-фазы или мартенсита деформации, обладающего магнитными свойствами. Это явление впервые зафиксированное при действии СВЧ - излучения на деформируемый металл.

В таблице 3 приведены результаты падения нагрузок на образце, на который в процессе релаксации напряжений действовало поле вектора  $E$  продольно относительно оси испытываемого образца. Эффект совместного действия достигал 30%.

Таблица 3

Величина падения нагрузок на образце при остановках привода испытательной машины за полную паузу релаксации напряжений в течение 3 мин в различных постановах опыта

№ пп	Виды воздействи й	1-я серия измерений		2-я серия измерений		3-я серия измерений		4-я серия измерений	
		$\Delta F$ от $F_0, H$	%	$\Delta F$ от $F_0,$ $H$	%	$\Delta F$ от $F_0,$ $H$	%	$\Delta F$ от $F_0, H$	%
1	Без какого-либо воздействия	45 от 700	6,4	70 от 900	7,7	85 от 1000	8,1	110 от 1250	8,8
2	СВЧ-излучение поле $E$ продольно	90 от 850	10,5	110 от 850	11,6	130 от 1150	11,3	160 от 1300	12,3
3	Импульсы тока	95 от 900	10,6	120 от 1000	10,9	170 от 1200	14,1	210 от 1350	17,5
4	Совместное действие тока и СВЧ-излучения	170 от 950	18,0	250 от 1050	23,8	360 от 1250	29,8	420 от 1400	30,0

### Выводы

Впервые экспериментально обнаружено влияние СВЧ - излучения на процесс пластической деформации металла в двух постановах опыта, как при активной деформации образцов растяжением, так и в опытах по релаксации механических напряжений в нагруженных образцах при ориентациях вектора напряженности электрического поля  $E$  СВЧ- излучения продольно оси деформируемых образцов и поперечно. При продольной ориентации вектора  $E$  СВЧ - излучения и суммарном действии тока эффект разупрочнения металла возрастал примерно на 8% (с 22% до 30%). Тепловые эффекты действия тока и СВЧ - излучения корректно вычитывались из величин общего снижения деформирующих усилий и релаксации напряжений, а величина пинч-эффекта действия тока на плоских тонких (0,2 мм) образцах в проведенных опытах в этой части проекта была слабо выражена.

Установлено, что эффект действия СВЧ - излучения усиливается с ростом скорости деформации. Было подтверждено ранее наблюдавшееся явление исчезновения магнитных свойств у нержавеющей стали в результате электропластической деформации за счет подавления аустенитно-мартенситного превращения. В результате обычной деформации шейки образцов становится магнитной из-за выпадения перенапряженной альфа-фазы или мартенсита деформации (оцк - решетка), обладающего магнитными свойствами. Тогда как у образцов, деформированных с током, шейки оставались, как и

«хвосты» в обоих случаях, немагнитными в силу преобладания в них гамма - фазы или аустенита ( гцк- решетка). Наибольший эффект действия СВЧ - излучения на пластическую деформацию нержавеющей стали 12ХН10Т составил до 10-12% разупрочнения. Совместное действие тока и СВЧ - излучения повышает эффект разупрочнения металла до 30%, что свидетельствует о наличии нового механизма разупрочнения, возможно, спинового разупрочнения металла [6].

### **Литература**

1. СВЧ-полупроводниковые приборы и их применение. – М., 1972.
2. Сапунов Г.С. Ремонт микроволновых печей. – Изд-во Салон-пресс, 2003. – 272
3. Троицкий О.А. Электромеханический эффект в металлах // Письма в ЖЭТФ, т. 2, № 10, 1969, с.18–22.
4. Рощупкин А.М., Батаронов И.Л. Об эффекте электрон-фононного увлечения дефектов в кристаллах // Изв. РАН. Серия Физическая. 2004, т.68, № 7, с.998-1007.
5. Баранов Ю.В., Троицкий О.А., Аврамов Ю.С., Шляпин А.Д. Физические основы электроимпульсной и электропластической обработок и новые материалы (монография), М.: Изд-во МГИУ, 2001, 843с.
6. Molotskii M., Fleurov V. Magnetic effects in electroplasticity of metals // Physical Review B. – 1991. – Vol. 52. – № 22. – P. 311 – 317.

**УСТОЙЧИВОСТЬ ТРЁХСЛОЙНЫХ КОМПОЗИТНЫХ ОБОЛОЧЕК:  
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ, ГРАНИЦЫ ИХ ПРИМЕНИМОСТИ,  
РАСЧЁТНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ И ОСОБЕННОСТИ СОПРОТИВЛЕНИЯ**  
STABILITY OF SANDWICH SHELLS: MATHEMATICAL MODELS, THEIR  
LIMITS OF APPLICABILITY, CALCULATED DEPENDENCES AND  
RESISTANCE FEATURES

**С.Н. Сухинин** – д.т.н., профессор  
Центральный НИИ машиностроения  
[Ssukhinin@yandex.ru](mailto:Ssukhinin@yandex.ru)

**Abstract.** Stability of composite cylindrical sandwich shells with multilayered anisotropic carrier layers under axial compression is studied. Three generalized shell stiffness, which assign the type of the mathematical model, critical loads, limits of applicability of the mathematical model and the condition of efficiency of sandwich shell, are established. Generalized shell stiffness of sandwich shell are:  $T_{10}^{*c}$  – critical force in the shell with constant normal with axisymmetric wave formation;  $T_{10}^{nc}$  – critical force in the sandwich shell with resistance of carrier layers only;  $K_1$  – critical force of shear buckling (transverse shear stiffness in the axial direction of the three-layer pack).

Also the condition of the effectiveness of three-layered construction is established. This condition is inequality:

$$K_1 \gg T_{10}^{nc}$$

and it means, that the core has to increase significantly the value of the critical load.

Рассматривается устойчивость трёхслойных композитных цилиндрических оболочек с анизотропными несущими слоями при действии осевого сжатия (рис. 1).



*Рис. 1. Потеря устойчивости трёхслойной оболочки с пенопластовым наполнителем при осевом сжатии*

Анализ структуры трёхслойных оболочек с композитными анизотропными многослойными несущими слоями и наполнителем (рис. 2) показал, что в

реальных n-слойных композитных конструкциях число габаритно-жесткостных параметров может достигать десятков и даже сотен единиц.

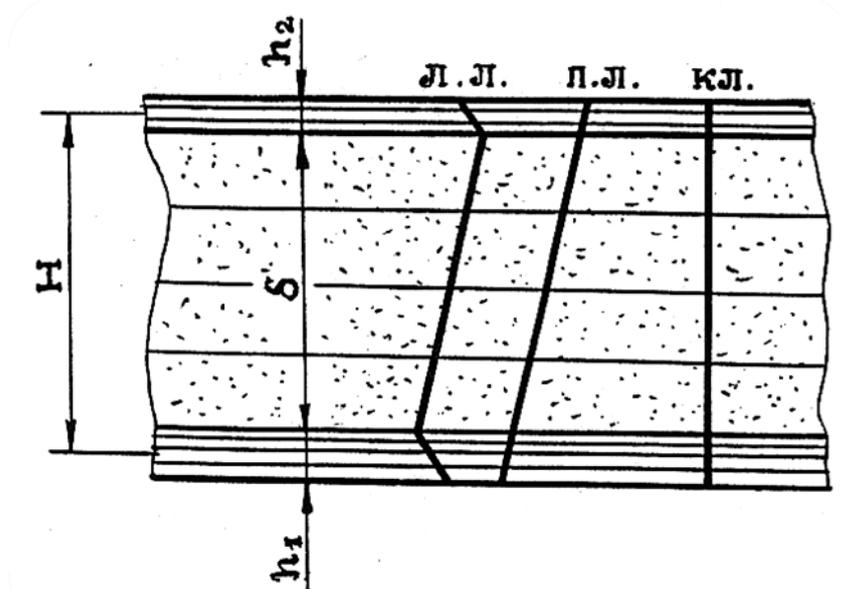


Рис. 2. Положение нормали после деформирования для различных математических моделей

Свойства упругости k-го слоя ( $k=1,2,\dots,n$ ) определяются восемью независимыми характеристиками:

$$E_1^{(k)}, E_2^{(k)}, G_{12}^{(k)}, \nu_1^{(k)}, G_{13}^{(k)}, G_{23}^{(k)}, h^{(k)}, \varphi^{(k)} \quad (1)$$

Здесь  $E_1^{(k)}, E_2^{(k)}, G_{12}^{(k)}, \nu_1^{(k)}$  – характеристики упругости k-го слоя;  $G_{13}^{(k)}, G_{23}^{(k)}$  – модули поперечного сдвига;  $h^{(k)}, \varphi^{(k)}$  – толщина и угол намотки k-го слоя. Таким образом, число габаритно-жесткостных характеристик достигает  $8n$ . Это обстоятельство (большое число жесткостных параметров) чрезвычайно затрудняет выбор математических моделей, определение границ применимости моделей и построение обозримых расчётных формул.

В настоящее время наибольшее распространение при исследовании устойчивости трёхслойных оболочек получили следующие математические модели (рис. 2):

- классическая модель неизменной нормали (Кирхгоф-Ляв);
- модель прямой линии (В.И. Королёв [3]);
- наиболее общая модель ломаной линии (Э.И. Григолюк [2]).

К модели неизменной нормали применимы те же закономерности, что имеют место в классических тонкостенных анизотропных оболочках. Разрешающее уравнение имеет 8-й порядок. В оболочках сопротивляющихся по модели прямой линии нормаль после деформации перестаёт быть нормалью к деформированной поверхности, но остаётся прямой линией. При этом изгибными жесткостями несущих слоёв пренебрегается. Разрешающее уравнение для таких оболочек имеет 10-й порядок. В общем случае модели ломаной линии учитываются изгибные жесткости несущих слоёв, нормаль после деформации становится ломаной линией (зигзагообразной – в зарубежной терминологии) (рис. 2). При этом разрешающее уравнение имеет 12-й порядок.

Во всех рассмотренных моделях заполнитель недеформируем по нормали, что характерно для общей формы потери устойчивости рис 3а).

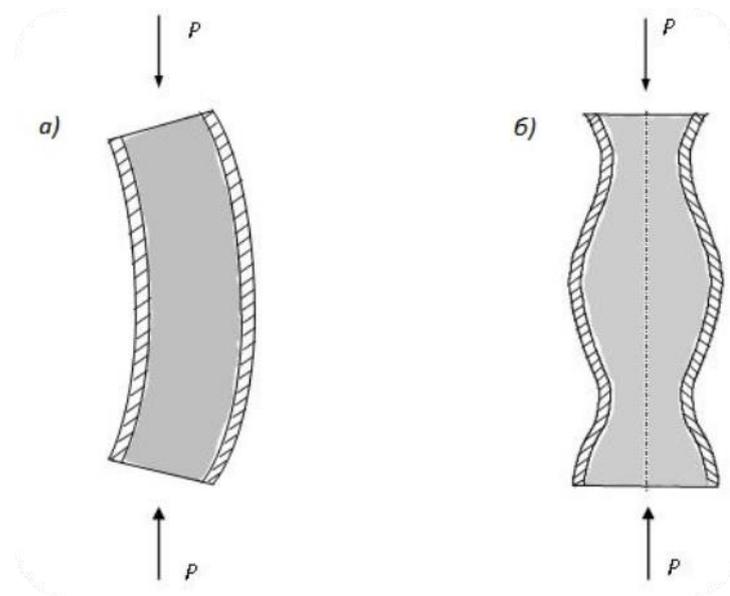


Рис. 3. Характерные формы потери устойчивости трёхслойных конструкций

В том случае, когда поверхность приведения остаётся неизменной, а лишь сморщиваются несущие слои (рис. 3б) говорят о местной форме потери устойчивости. В этом случае критическую нагрузку потери устойчивости можно найти, рассматривая несущие слои как оболочки на упругом основании Пастернака-Власова [1]. В данной работе рассматривается общая потеря устойчивости трёхслойных оболочек при осевом сжатии.

Разрешающее дифференциальное уравнение 12-го порядка для анализа устойчивости трёхслойных оболочек с композитными несущими и заполнителем можно представить в виде [1]:

$$(D_1^{\text{hc}} + D_1^* \Omega_{xy}) \nabla_1^4 w + \frac{\bar{B}_2}{R_2^2} \frac{\nabla_R^4}{\nabla_2^4} w = qw; \quad (2)$$

$$\Omega_{xy} = \frac{1 - \left( \bar{\omega}_{2k} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \bar{\omega}_{1k} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \nabla_2^4}{\nabla_c^4};$$

$$q = T_1^0 \frac{\partial^2}{\partial x^2}; \quad \nabla_c^4 = 1 - (\bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_{2k}) \frac{\partial^2}{\partial x^2} - (\bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_{1k}) \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \bar{\omega}_1 \bar{\omega}_{2k} \nabla_2^4;$$

Здесь  $\nabla_1^4, \nabla_2^4, \nabla_R^4$  – классические дифференциальные операторы для ортотропных оболочек вращения [1];  $\nabla_c^4$  – оператор, определяющий влияние поперечных сдвигов;  $D_1^{\text{hc}}, D_1^*, B_2$  – изгибные жёсткости несущих слоёв трёхслойной оболочки ( $D_1 = D_1^{\text{hc}} + D_1^*$ ) и жёсткость трёхслойной оболочки на растяжение-сжатие;  $\omega_1, \omega_2, \bar{\omega}_{1k}, \bar{\omega}_{2k}$  – характеристики податливости трёхслойной оболочки на поперечные сдвиги;  $T_1^0$  – сжимающее усилие.

Для случая шарнирного опирания цилиндрических оболочек можно получить следующее соотношение для расчёта критического усилия:

$$T_1 = [D_1^{\text{hc}} + D_1^* \Omega(\lambda, \psi)] \frac{\lambda^2 F_1(\psi)}{R^2} + \frac{B_2(1 - \nu_1 \nu_2)}{\lambda^2 F_2(\psi)} \quad (3)$$

$$\lambda = \frac{m\pi R}{l}; \quad \psi = \frac{n}{\lambda}; \quad 0 \leq \Omega(\lambda, \psi) \leq 1$$

$D_1^{\text{hc}} + D_1^* \Omega(\lambda, \psi) = D^{\text{эфф}} = D - (1 - \Omega) D^*$  - эффективная изгибная жёсткость.

$F_1(\varphi), F_2(\varphi)$  - образы операторов  $\nabla_1^4, \nabla_2^4$ ;

$m, n, R, l$  – число полуволн в осевом направлении, волн по кольцу, радиус и длина.

Критическое усилие  $T_1^{кр}$  определяется минимализацией выражения (3) по параметрам  $\lambda$  и  $\psi$  волнообразования. С помощью асимптотического анализа выражения (3) можно установить три обобщённых жёсткости, которые определяют необходимую для расчёта критического усилия математическую модель, погрешность её применения, границы, в которых можно применять модель, компактные формулы для расчёта критических нагрузок в трёхслойных оболочках с многослойными анизотропными несущими слоями. Эти обобщённые жёсткости таковы:

1.  $T_{10}^ж$  – критическое усилие в трёхслойной оболочке с неизменной нормалью при осесимметричном волнообразовании – обобщённая жёсткость трёхслойной оболочки:

$$T_{10}^ж = \frac{2}{R} \sqrt{B_2 D_1 (1 - \nu_1 \nu_2)} \quad (4)$$

$B_2, D_1$  – жёсткости на растяжение-сжатие и изгиб трёхслойной оболочки.

2.  $T_{10}^{нс}$  – критическое усилие в трёхслойной оболочке с отдельно сопротивляющимися несущими слоями (т.е. без заполнителя) – обобщённая жёсткость несущих слоёв:

$$T_{10}^{нс} = \frac{2}{R} \sqrt{B_2 D_1^{нс} (1 - \nu_1 \nu_2)} \quad (5)$$

3.  $K_1$  – критическая нагрузка при так называемой сдвиговой форме потери устойчивости трёхслойных оболочек – обобщённая жёсткость трёхслойной оболочки на поперечный сдвиг. В случае лёгких заполнителей:

$$K_1 = G_{13} \frac{H^2}{h} \quad (6)$$

Критические усилия в композитной трёхслойной цилиндрической оболочке при осевом сжатии (асимптотические формулы):

1. Классическая модель неизменной нормали ( $\omega_1 \lambda^2 F_2 = 0$ )

$$T_1^{кр} = T^ж = k_{орт} T_{10}^ж = k_{орт} \frac{2}{R} \sqrt{B_2 (1 - \nu_1 \nu_2) D_1}; \quad (7)$$

2. Модель прямой линии ( $\omega_1 \lambda^2 F_2 \ll 1$ )

$$T_1^{кр} = k_{орт} T_{10}^ж \left( 1 - \frac{k_{орт} T_{10}^ж}{4K_1} k_n \right); \quad (8)$$

3. Модель ломаной линии ( $\omega_1 \lambda^2 F_2 \gg 1$ )

$$T_1^{кр} = (1 - a_n) \bar{T}_{10}^{нс} + K_1 \approx K_1; \quad \bar{T}_{10}^{нс} = T_{10}^{нс} \sqrt{1 - b^2}; \quad b = \frac{2K_1}{T_{10}^ж}; \quad (9)$$

Здесь  $a_n, k_{орт}, k_n$  – известные безразмерные параметры анизотропии ( $k_{орт} \leq 1; k_n \leq 1; a_n \leq 1$ ).

Из приведённых формул следуют границы применимости математических моделей для расчётов на устойчивость при осевом сжатии трёхслойных композитных оболочек и погрешности  $\Delta$  приводимых формул.

1. Классическая модель применима, если выполнено условие

$$\frac{T_{10}^ж}{4K_1} \ll 1 \quad (10)$$

Погрешность применения этой модели неизменной нормали составляет

$$\Delta_{\text{кл}} = \frac{T_2^{\text{ж}}}{4K_1} \quad (11)$$

2. Модель прямой линии применима, если выполняется условие

$$K_1 \geq \frac{1}{2} T_{10}^{\text{ж}}, (K_1 \gg T_{10}^{\text{нс}}) \quad (12)$$

Погрешность применения этой модели составляет

$$\Delta_{\text{пл}} \leq \frac{T_{10}^{\text{нс}}}{K_1} \quad (13)$$

3. Модель ломаной линии применима, если несущие слои сопротивляются совместно, т.е. до тех пор, пока критическое усилие  $T_1^{\text{кр}}$  при потере устойчивости по общей форме превзойдёт критическое усилие  $T_{1\text{м}}^{\text{кр}}$  при местной форме (рис. 3):

$$T_1^{\text{кр}} > T_{1\text{м}}^{\text{кр}} \quad (14)$$

Заполнитель в трёхслойной конструкции должен вносить существенный вклад в величину критического усилия, иначе трёхслойная конструкция не выигрывает в сравнении с двумя склеенными несущими слоями. Таким образом, условием эффективности трёхслойных конструкций является выполнение соотношения:

$$K_1 \gg T_{10}^{\text{нс}} \quad (15)$$

Условие (15) совпадает с условием (12), определяющим возможность применения модели прямой линии. Именно поэтому модель прямой линии чаще всего применяется в технических практических расчётах.

Тем не менее, встречаются трёхслойные конструкции со слабыми, например, пенопластовыми заполнителями, которые наряду с силовыми функциями выполняют функции теплоизоляции. Такие конструкции не удовлетворяют условию (12) и возникает необходимость использовать модель ломаной линии.

Сравним расчётные данные, полученные на основе асимптотических формул (8) и (9) с точным результатом минимизаций по параметрам волнообразования  $\lambda$  и  $\psi$  выражения (3). На рисунке 4 представлен график изменения безразмерной критической нагрузки  $T_1^{\text{кр}} / T_1^{\text{ж}}$  в зависимости от

изменения безразмерной жёсткости трёхслойной оболочки на поперечный сдвиг. Как видно из графика, асимптотические формулы (8) и (9) хорошо приближают результат точкой минимизации.

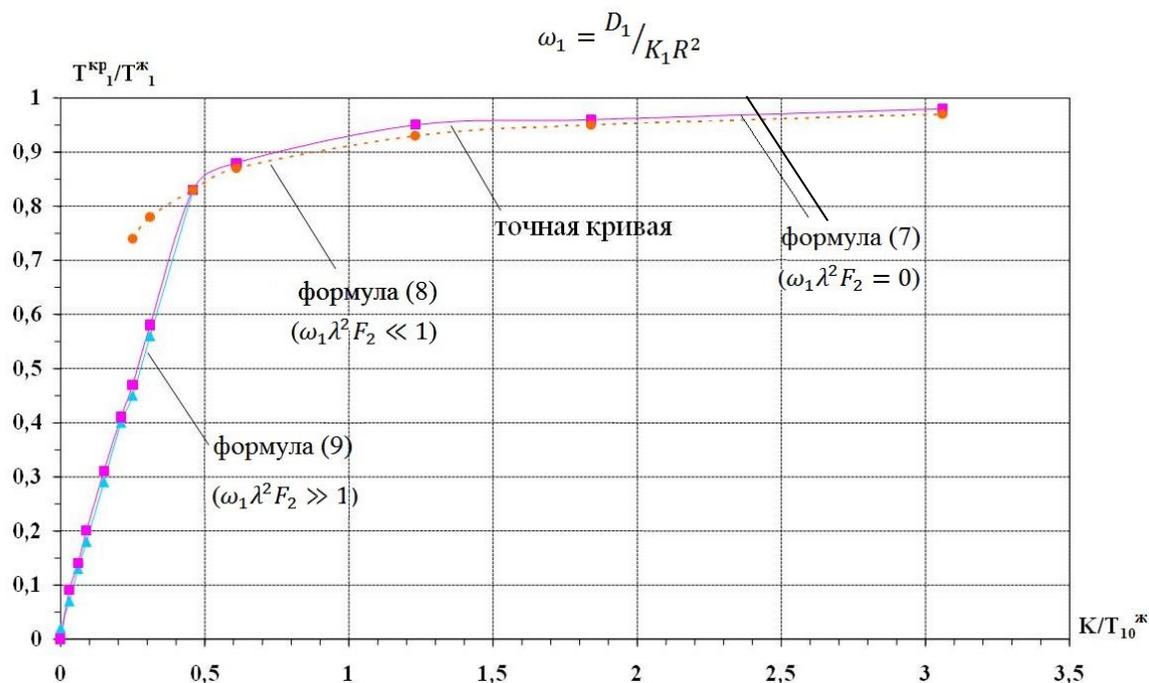


Рис. 4. Зависимость безразмерного критического усилия при осевом сжатии трёхслойной цилиндрической оболочки от безразмерной жёсткости на поперечный сдвиг

Отметим характерное значение  $\frac{K_1}{T_{10}^k} = \frac{1}{2}$ . В этой точке кривая делает крутой «излом». Если до этой точки график представлял собой практически прямую линию, и критическое усилие быстро возрастало с ростом жёсткости оболочки, то после этой точки критическая сила слабо зависит от сдвиговой жёсткости и медленно приближается к классической критической нагрузке  $T_1^k$ : уже после  $K_1 / T_1^k = 3$  разница порядка 1%.

Эта граница  $K_1 / T_{10}^k = \frac{1}{2}$  служит также границей и для применения

математических моделей: до этой точки «работает» модель ломаной линии (податливость на сдвиг велика), после – модель прямой линии и модель классическая (податливость на сдвиг мала).

Представленные здесь результаты позволяют обобщить решение [4] Ю.Н. Работнова на многослойные композитные оболочки.

Как известно, теоретические и экспериментальные значения критических усилий при осевом сжатии цилиндрических оболочек могут существенно различаться. Для назначения и обоснования поправочных эмпирических коэффициентов необходимо провести комплекс экспериментальных исследований на физических моделях. По причине большого многообразия жесткостных параметров трёхслойных композитных оболочек проектирование и изготовление физических моделей требует постановки и решения специальной задачи. Такая задача была нами решена путём сопоставления обобщённых жесткостей натурной конструкции и физической модели. В результате сформулированы требования к проектированию и изготовлению трёхслойных композитных моделей, адекватно отражающих сопротивление натурального изделия [5]. Нам известны результаты около 20 испытаний трёхслойных оболочек на осевое сжатие. Анализ показал сравнительно хорошее согласование теории и эксперимента.

Вместе с тем испытанные модели не моделируют реальные трёхслойные конструкции: так, если в реальных несущих трёхслойных конструкциях выполнено условие  $K_1 \gg T_{10}^{nc}$ , то в испытанных моделях обобщённая жесткость заполнителя заметно меньше обобщённой жёсткости несущих слоёв. Таким образом, результаты испытаний подтверждают работоспособность принятых математических моделей, но полученные поправочные эмпирические коэффициенты нельзя напрямую применить к анализу устойчивости реальных трёхслойных конструкций. С этой целью требуется провести целенаправленный экспериментально-теоретический комплекс испытаний.

### **Литература**

1. Сухинин С.Н. Прикладные задачи устойчивости многослойных композитных оболочек. – М. Физматлит, 2010 – 248с.
2. Григолюк Э.И. Уравнения трёхслойных оболочек с легким заполнителем// М.: Изв. АН СССР, ОТН, 1957, № 1, с. 77-84.
3. Королев В.И. Слоистые анизотропные пластинки и оболочки из армированных пластмасс. М.: Машиностроение, 1965, 272с.
4. Работнов Ю.Н. Изгиб цилиндрической оболочки сосредоточенной силой. ДАН СССР, т. 52, № 4, 1946 г.
5. Сухинин С.Н. Математическое и физическое моделирование в задачах устойчивости трёхслойных композитных оболочек. Вестник НГТУ им. Н.И. Лобачевского, № 4, ч. 5, 2011 г.

# КОМПОЗИТНЫЕ ПРОФИЛИРОВАННЫЕ БАЛКИ. ЭТЮД ОБ ОДНОЙ ТРЕТИ *COMPOSITE PROFILE BEAM. ETUDE ABOUT THIRD*

**Н.А.Татусь** – к.т.н., **А.Н.Полилов** – д.т.н., проф.  
Институт машиноведения им.А.А.Благонравова РАН  
[nikalet@mail.ru](mailto:nikalet@mail.ru)

**Abstract.** Application of fibrous reinforcement plastics (FRP) appears most effectively in those elements where besides weight reduction it is possible to solve a basic constructive problem: to increase bearing ability, wear resistance, durability, survivability, to lower quantity of details and units, to simplify technology. Fine example of successful use of advantages of FRP is composite leaf springs. In the report, on the elementary instance of a cantilevered beam it is shown futures of composite elements design with the account of fibres disorientation effect.

## **Введение**

На сегодняшний день композиты, еще относительно недавно считавшиеся «материалами будущего», уже прочно вошли в нашу жизнь. Если взглянуть на современное развитие любой отрасли, то не сложно заметить, что активное внедрение этих перспективных материалов приносит свои положительные и весьма значимые результаты. Можно с уверенностью сказать, что для некоторых областей применения композиционные материалы стали уже вполне традиционными. Автомобилестроение, как динамично развивающаяся отрасль, не является исключением, и в каждой новой серии автомобилей, сходящей с конвейера, все больше и больше элементов, выполненных из композитов с различными типами матриц. В дальнейшем под композиционными материалами (КМ) будут подразумеваться только полимерные волокнистые композиты или армированные пластики. К сожалению, на сегодняшний день эти материалы используются массово в основном только при изготовлении деталей интерьера и экстерьера автомобилей, хотя их уникальные свойства вполне целесообразно было бы использовать и в элементах, подверженных значительным нагрузкам.

Преимущества КМ могут быть особенно заметны в конструкциях, где наиболее полно используются свойства армирующих волокон. Поэтому наибольший эффект может быть достигнут на тех изделиях, в которых можно применять почти однонаправленное армирование. На основании этого весьма предпочтительно использование волокнистых композитов в упругих элементах, применительно к автомобилям - в первую очередь в листовых рессорах.

## **Снижение массы рессоры**

Простота в изготовлении и техническом обслуживании, а также благоприятное распределение сил по раме или кузову и возможность обеспечить прогрессивность характеристики упругости подвески определили широкое распространение многолистовых рессор. Но, помимо преимуществ, имеются и существенные недостатки: большая масса пакета листов и межлистовое трение, способствующее износу. Наиболее рациональным решением данных проблем является переход от многолистовых к малолистовым рессорам. Высокий коэффициент использования материала, который будет иметь место в этом случае, подразумевает снижение веса изделия при неизменной прочности.

Определим возможные способы уменьшения количества листов. Пусть имеется рессора длиной  $l$ , состоящая из  $n$  листов шириной  $b$ . Для простоты примем, что все листы имеют одинаковую толщину, равную  $h$ . Если приложить в центре нагрузку  $P$ , то прогиб рессоры будет равен  $V = K_V Pl^3 / 48EJ_0$ . Принимая, что момент инерции и момент сопротивления изгибу в среднем сечении рессоры соответственно равны  $J_0 = nbh^3 / 12$  и  $W_0 = nbh^2 / 6$ , путем несложных математических преобразований получим из соотношений для жесткости рессоры и максимальных напряжений:

$$c = \frac{P}{V}, \sigma = \frac{Pl}{4W_0},$$

выражение для требуемого числа листов:

$$n = \frac{54E^2 P^3}{bc^2 K_V^2 l^3 [\sigma]^3}. \quad (1)$$

Согласно полученному выражению уменьшение числа листов в пакете возможно при изменении многих параметров. Но почти все из них, за исключением двух, являются исходными данными технического задания на проектирование и должны оставаться неизменными. Таким образом, задача перехода к малолистовым рессорам решается с помощью повышения коэффициента формы  $K_V$  и/или применения КМ. Профилирование листов, которое подразумевает первый способ, позволяет более эффективно использовать материал с приближением формы рессоры к форме равнопрочной балки. Использование композитов также дает положительный результат. Сравнивая отношения  $E^2 / [\sigma]^3$  для стали и стеклопластика можно определить, что для композитного аналога потребуется в 2-3 раза меньше листов. А учитывая тот факт, что плотность стали в 4 раза больше, снижение массы рессоры в конечном итоге будет весьма значительным. Стоит также отметить, что согласно выражению (1) подвеска с композитными рессорами будет более мягкой, а, следовательно, повысится комфорт езды и проходимость автомобиля по бездорожью.

Рассмотрим подробнее особенности профилирования на примере упругой балки. Для простоты представим расчетную схему в виде консоли, нагруженной на свободном конце сосредоточенной силой (рис. 1).

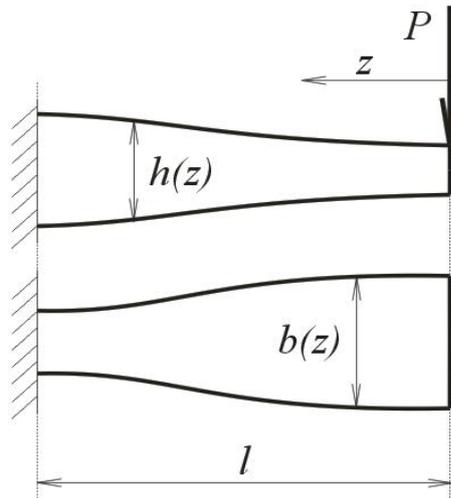


Рис. 1. Расчетная схема однолистовой профилированной рессоры

Очевидно, что оптимальным решением для данного случая будет равнопрочная балка. Зададимся таким законом, определяющим многообразие равнопрочных форм, который в частном случае давал бы и прямоугольную балку, как эталонный вариант для последующего анализа. Наиболее простым решением будут степенные зависимости для высоты и ширины балки вида:

$$b(z) = b_0 \left( \frac{z}{l} \right)^\alpha, h(z) = h_0 \left( \frac{z}{l} \right)^\beta, \quad (2)$$

где  $b_0$  и  $h_0$  – ширина и высота балки в корневом сечении;  
 $\alpha$  и  $\beta$  – параметры формы балки;  
 $l$  – длина балки.

Из условия равнопрочности ( $\sigma(z) = \sigma_{\max} = const$ ):

$$\frac{6Pz}{b(z)h^2(z)} = \frac{6Pl}{b_0h_0^2}$$

следует, что

$$\alpha + 2\beta = 1. \quad (3)$$

Принимая один из параметров формы равным нулю, т.е. постоянство ширины или высоты сечений по длине балки, получаем две, наиболее распространенные, балки равного сопротивления изгибу – треугольную и параболическую (рис. 2, а и б). Для КМ перерезывание волокон, которое неизбежно при получении данных профилей, является нежелательным, поэтому введем дополнительное условие – постоянство площади поперечного сечения, подразумевающее неизменное объемное содержание армирующих волокон на всей длине балки:  $F(z) = b(z) \cdot h(z) = const$  или

$$\alpha + \beta = 0. \quad (4)$$

Из решения системы уравнений (3)-(4) вытекает еще одна равнопрочная форма:

$$\alpha = -1, \beta = 1 \quad (5)$$

- констэра (от. англ. «constant area» - постоянная площадь, рис. 2, в).

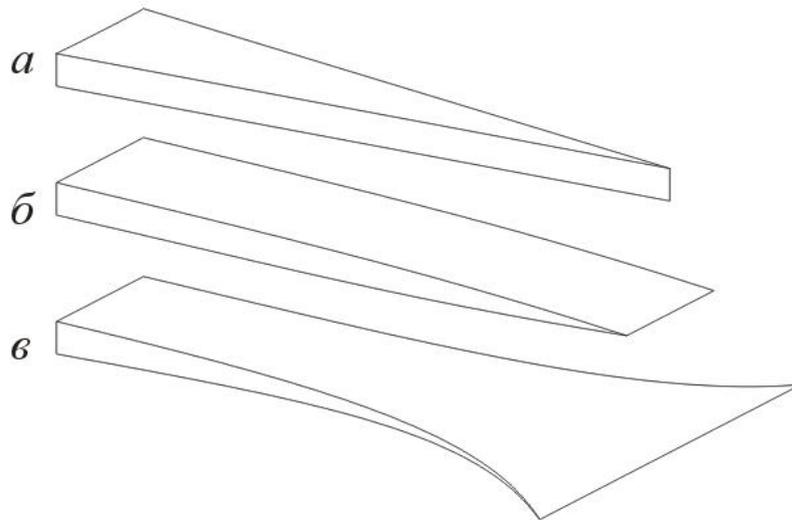


Рис. 2. Равнопрочные формы: а - треугольная, б - параболическая, в - констэра

Теперь, используя принятый ранее закон изменения формы балки, получим соотношения: 1) для максимального прогиба

$$V = \int_0^l \frac{Pz^2 dz}{EJ} = \int_0^l \frac{12Pz^2 dz}{Eb(z)h^3(z)} = V_0 K_V,$$

где  $V_0 = \frac{4Pl^3}{Eb_0h_0^3}$  - прогиб прямоугольной балки с размерами  $b_0 \times h_0$  в корневом сечении,

$$K_V = \frac{3}{3 - \alpha - 3\beta} \quad (6)$$

$K_V$  - коэффициент формы по прогибу, равный отношению прогиба профилированной балки к прогибу прямоугольной балки с одинаковыми размерами в корневом сечении;

и 2) для массы равнопрочной балки

$$Q = \int_0^l \rho b(z)h(z) dz = \int_0^l \rho b_0 h_0 \left(\frac{z}{l}\right)^{\alpha+\beta} dz = Q_0 K_M,$$

где  $Q_0 = \rho b_0 h_0 l$  - масса прямоугольной балки;

$$K_M = \frac{1}{1 + \alpha + \beta} \quad (7)$$

$K_M$  - коэффициент формы по массе, равный отношению массы профилированной балки к массе прямоугольной балки.

Сравнивая различные балки, удовлетворяющие заданным условиям по максимально допустимым напряжениям, можно на начальном этапе проектирования рессоры определиться с наиболее подходящим профилем листов в соответствии с имеющимися приоритетами (снижение веса, улучшение упругих характеристик). В табл. 1 приведены значения полученных коэффициентов для

трех рассмотренных выше типов балок. Этих данных вполне достаточно, чтобы отметить следующую закономерность: при одинаковой прочности более податливая рессора будет иметь больший вес. Поиск компромиссного решения в этой ситуации и есть одна из главных задач инженера-конструктора.

Таблица 1  
Параметры и коэффициенты формы балок

	Форма балки			
	Прямоугольная	Треугольная	Параболическая	Констэра
$\alpha$	0	1	0	-1
$\beta$	0	0	1/2	1
$K_V$	1	3/2	2	3
$K_M$	1	1/2	2/3	1

Дальнейшее изучение равнопрочных балок привело к более удивительной закономерности. В отношении рессор, или любых других упругих элементов, прочность является не единственным определяющим фактором формы и размеров проектируемого изделия. Требуется также обеспечить определенную упругую характеристику конструкции. В связи с чем, необходимо совместно рассматривать условия прочности и жесткости. В таком случае последовательность операций, аналогичная той, что применялась для определения требуемого количества листов (с учетом принятых зависимостей, определяющих форму балки), приводит к следующему соотношению для массы балки:

$$M = \frac{9\rho P^2 EK_M}{C[\sigma]^2 K_V},$$

где  $\rho$  – плотность материала балки.

Полученный коэффициент снижения массы  $K = K_M / K_V$  на основании (6)

и (7) можно записать в виде: 
$$K = \frac{3 - \alpha - 3\beta}{3(1 + \alpha + \beta)}.$$

С учетом (3) получим, что

$$K = \frac{3 - (1 - 2\beta) - 3\beta}{3(1 + (1 - 2\beta) + \beta)} = \frac{1}{3} = const, \quad (8)$$

т.е. при одинаковых условиях по прочности и жесткости равнопрочная балка в три раза легче прямоугольной. Независимость, в конечном счете, коэффициента  $K$  от  $\alpha$  и  $\beta$  говорит о том, что последнее утверждение справедливо для равнопрочных балок любой формы. Троекратное снижение веса - это наилучший предельный случай! Большого снижения веса достигнуть нельзя. Можно подтвердить общность этого утверждения и на балках с другими формами сплошного сечения, в том числе и для трехслойных панелей [2].

Все вышесказанное справедливо лишь для «идеальных» балок. В действительности же необходимо учитывать различные механизмы потери

несущей способности и влияние крепления. Но, тем не менее, очевидно, что профиль для более легкой рессоры следует искать в классе равнопрочных балок.

### **Литература**

1. Алфутов Н.А. и др. Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1984. 264 с.
2. Полилов А.Н., Татусь Н.А., Шабалин В.В. Особенности проектирования упругих элементов в виде профилированных композитных балок//Проблемы машиностроения и надежности машин, 2011, № 6, с. 34-41.
3. Полилов А.Н., Татусь Н.А., Плитов И.С. Оценка влияния разориентации волокон на жесткость и прочность профилированных композитных элементов// Проблемы машиностроения и надежности машин, 2013, № 5.
4. Полилов А.Н., Татусь Н.А. Критерии прочности полимерных волокнистых композитов, описывающие некоторые экспериментально наблюдаемые эффекты// Проблемы машиностроения и автоматизации, 2008, № 3, с. 103-110.
5. Полилов А.Н., Татусь Н.А. Экспериментальное обоснование критериев прочности волокнистых композитов, проявляющих направленный характер разрушения// "Вестник ПНИПУ. Механика", 2012, № 2, с. 140-166.

# ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДЛИТЕЛЬНОЙ ПРОЧНОСТИ И ПОЛЗУЧЕСТИ ВЫСОКОЭЛАСТИЧЕСКИХ ПОЛИМЕРНЫХ АДГЕЗИВОВ В КОНСТРУКЦИЯХ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ

## EXPERIMENTAL INVESTIGATION OF LONG-TERM STRENGTH AND CREEP RUBBERY POLYMER ADHESIVE IN AEROSPACE VEHICLE STRUCTURES

А.В.Терехин<sup>1,2</sup> – асп., В.И.Неповинных<sup>2</sup> – к.т.н., А.М.Думанский<sup>1</sup> – д.ф.-м.н.

<sup>1</sup> Институт машиноведения им.А.А.Благонравова РАН

[alduman@rambler.ru](mailto:alduman@rambler.ru)

<sup>2</sup> ГНЦ РФ ОАО «ОНПП «Технология»

[info@technologiya.ru](mailto:info@technologiya.ru)

**Abstract.** The problem of secure joint of ceramic or fiberglass radome with metal airframe is one of the complex and important objectives in aircraft structures. The paper presents the experimental setup for investigation of long-term strength and creep of elastomeric adhesives. Basic schema of the experimental setup and principles of the operation are presented. Creep and long term testing of adhesive-bonded joints are carried out. Creep and long term curves of adhesive-bonded joints under different level of stresses and temperatures are made.

Проблема соединения керамической или стеклопластиковой оболочки головного антенного обтекателя с металлическим корпусом летательного аппарата (ЛА) является одной из самых сложных и ответственных при их конструировании и производстве [1]. Хрупкость керамики практически не допускает использования традиционных методов крепления (болтового, резьбового и др.) в связи, с чем в настоящее время для соединения оболочки с металлическим шпангоутом широко используют адгезионный способ соединения, при этом в качестве адгезива применяется высокоэластические полимерные (эластомерные) клеи-герметики. Ряд уникальных структурных и механических свойств эластомерных герметиков, а именно, способность к большим обратимым деформациям при сравнительно небольших значениях модуля упругости в достаточно широком температурном диапазоне позволяет успешно использовать их в высоконагруженных узлах соединений ЛА.

Механические свойства герметиков типа ВИКСИНТ получаемых на основе низкомолекулярных каучуков известны. Наиболее ценной особенностью силиконовых материалов является стабильность свойств рабочих характеристик при длительной эксплуатации в условиях резких перепадов температур, повышенных вибраций, тропического климата, УФ-облучения, а также стойкость к тепловому старению. Кремнийорганические герметики типа ВИКСИНТ обладают отличной стойкостью к тепловому старению в широком диапазоне температур: от -60 до +300°С. Под воздействием радиации происходит структурирование полисилоксанов, что приводит к увеличению твердости и прочности и уменьшению относительного удлинения кремнийорганического герметика. Герметики типа ВИКСИНТ проявляют ярко выраженные реологические свойства, которые в значительной степени определяют несущую способность системы оболочка-шпангоут конструкции головного антенного обтекателя ЛА. Напряжения, возникающие в керамическом головном обтекателе из-за разности в ТКЛР с металлическим шпангоутом, могут приводить к разрушению оболочки при недостаточной их компенсации в слое герметика. В связи с вышесказанным исследование реологических свойств герметика в

условиях теплосилового нагружения представляют важную научно-техническую задачу.

В настоящее время прочность клеевых соединений (КС) на основе эластомерных клеев-герметиков определяют по результатам испытаний на сдвиговую прочность  $T_{сд}$  на разрывных машинах. При этом испытываемый образец подвергается воздействию сдвигового усилия с заданной скоростью деформации (около 1,5 мм/мин). Подобная схема испытаний не учитывает вязкоупругие свойства характерные эластомерам, которые зачастую и определяют механизмы его поведения и разрушения при эксплуатации. Комплекс релаксационных свойств, которыми обладает вязкоупругое тело, приводит к изменению его механических свойств во времени и к зависимости прочности эластомера не только от внешних воздействующих факторов (нагрузки и температуры), но также и от продолжительности этих воздействий [2,3]. Особенно сильно эта зависимость проявляется при температурах близких к предельным для эластомеров и, в то же время, характерным для эксплуатационных температур конструкций ЛА.

В эксплуатационных условиях продолжительного теплосилового воздействия на конструкцию головного антенного обтекателя ЛА и его клеевое соединение, эластомер фактически работает в условиях сдвиговой ползучести.

Для исследования длительной прочности и ползучести эластомерных адгезивов разработана и создана экспериментальная установка, позволяющая проводить натурные испытания клеевых соединений на основе эластомерных клеев-герметиков на стандартных образцах. Общая схема экспериментальной установки представлена на рисунке 1.

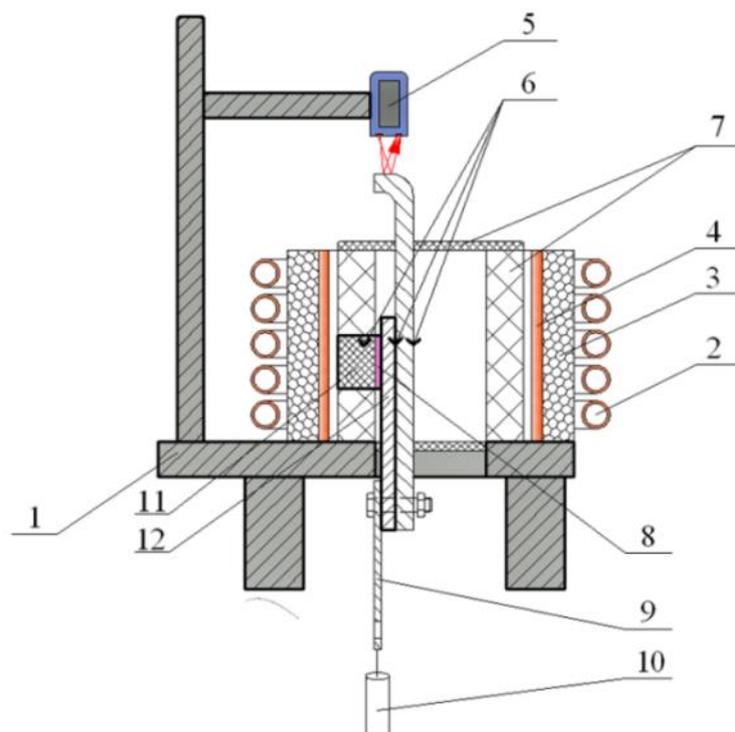


Рис. 1. Общая схема экспериментальной установки: 1 – опора, 2 – индуктор, 3 – футеровка индуктора, 4 – нагревательный элемент, 5 – триангуляционные лазерные датчики перемещения (2 шт.), 6 – терморпары, 7 – керамический и асбестовый теплоизоляторы, 8 – испытуемый образец, 9 – пластина, 10 – груз, 11 – керамическая призма (ОТМ357), 12 – металлическая пластина (32НКД)

Нагрев испытуемого образца (8) осуществляется с помощью расположенного на опоре (1) индукционного нагревателя (2) через промежуточный нагревательный элемент (4). Образец теплоизолирован по внутренней образующей нагревательного элемента с помощью с помощью керамического цилиндра (7), имеющего окно с расположения в нем призмы (11) и крепления образца (8). Нагрев образца таким способом позволяет имитировать тепловое нагружение КС в процессе эксплуатации ЛА. Измерение температуры осуществляется с помощью термопар (6), расположенных в тонкой прорези керамической призмы (11), на поверхности керамической пластины (12), а также во внутреннем объеме установки. Образец нагревается до заданной температуры и выдерживается в течение 5 минут, после чего к клеевому соединению прикладывается статическая сдвиговая нагрузка путем подвешивания груза (10) к тонкой пластине (9), закрепленной на металлической пластине (12) образца (8). Толщина пластины (9) выбирается таким образом, чтобы плоскость сдвиговой нагрузки лежала в плоскости сечения клевого слоя в середине его толщины. В процессе нагружения измеряется и фиксируется с частотой 18 мс величина сдвиговой деформации с помощью двух, дублирующих друг друга, триангуляционных лазерных датчиков перемещения (5), погрешность изменения составляет  $\pm 5$  мкм.

На созданной экспериментальной установке проведены исследования клеевых соединений на основе высокоэластического кремнийорганического клея-герметика Висксинт У-2-28НТ, используемого в производстве головных антенных обтекателей. В отвержденном состоянии Висксинт У-2-28НТ представляет собой резиноподобный материал розового цвета и является наполненным сетчатым полидиметилсилоксаном (ПДМС), содержащим свободные гидроксильные группы.

Проведены испытания до разрушения 120-ти стандартных образцов-спутников путем воздействия статической сдвиговой нагрузки  $\sigma_{12}$ , значения которой лежат в диапазоне  $\sigma_{12} = (0,3 \div 0,5) \cdot \tau_{сд}$  (где  $\tau_{сд}$  – кратковременная сдвиговая прочность). Испытания проводились при следующих значениях температуры: 300, 310, 320, 330 °С. Данные значения температуры соответствуют эксплуатационным для КС в конструкции ЛА. Стандартный образец-спутник представляет собой КС материалов, идентичных материалам конструкции. В нашем случае это КС призмы из беспористой стеклокерамики ОТМ 357 и металлической пластиной из сплава 32НҚД, соединенное клеем-герметиком ВИКСИНТ У-2-28НТ (рис.2). Площадь клевого соединения 3 см<sup>2</sup>.

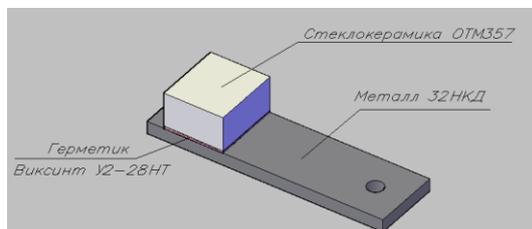


Рис. 2. Схема стандартного образца-спутника

В результате проведенных исследований получены экспериментальные зависимости долговечности  $\tau$  клея-герметика ВИКСИНТ У-2-28НТ от величины сдвигового напряжения  $\sigma_{12}$  для разных температур, которая в полулогарифмической системе координат  $\lg \tau - \sigma_{12}$  представлена на рисунке 3. При обработке экспериментальных данных для построения зависимостей

использовались данные только когезионного разрушенных КС, адгезионно разрушенные образцы не учитывались.

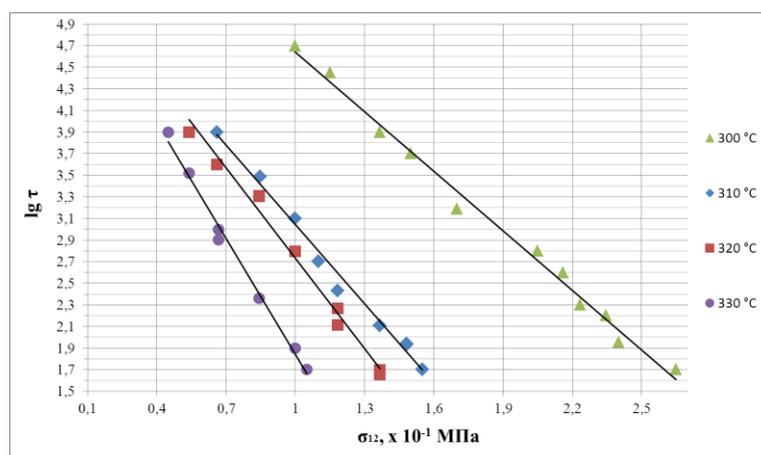


Рис. 3. Зависимость долговечности герметика ВИКСИНТ У-2-28НТ от величины сдвигового напряжения

Из рисунка 3 видно, что логарифм долговечности ( $\tau$ ) линейно зависит от сдвиговой нагрузки ( $\sigma_{12}$ ), что согласуется с результатами других исследований длительной прочности высокоэластических материалов и клеевых соединений на их основе [4].

Полученные зависимости длительной прочности позволяют прогнозировать предельное состояние КС по заданным параметрам теплосилового воздействия путем экстраполяции прямых длительной прочности [5].

На созданной экспериментальной установке также получены кривые ползучести до разрушения клея-герметика ВИКСИНТ У-2-28НТ при разных уровнях нагрузки и температуры. Деформация сдвига  $\gamma$  герметика в КС при этом рассчитывалась по формуле (1) в соответствии со схемой деформации простого сдвига, которая приведена на рис. 4.

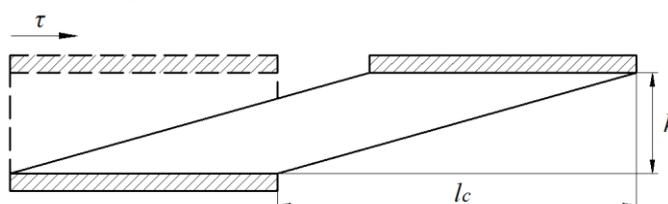


Рис. 4. Схема простого сдвига КС

При этом

$$\gamma = \frac{l_c}{h}, \quad (1)$$

На рис. 4 приведены экспериментальные кривые ползучести для различных уровней сдвигового напряжения при температуре испытаний 300 °С.

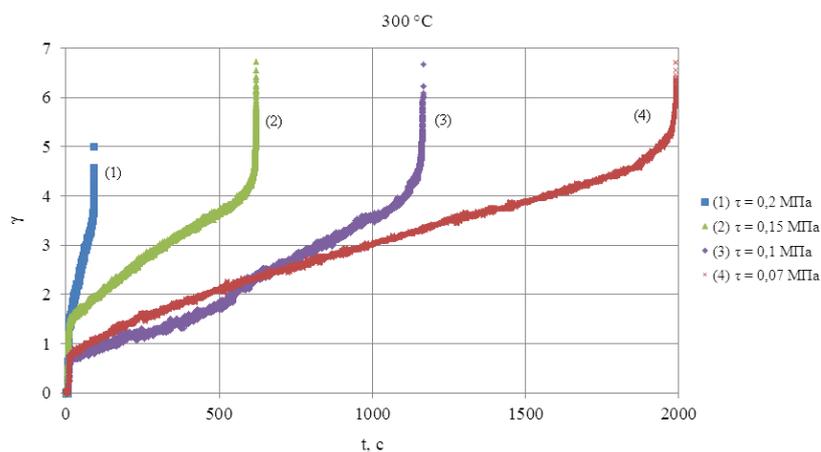


Рис. 4. Экспериментальные кривые ползучести клея-герметика ВКСИНТ У-2-28НТ (температура испытаний  $T=300^{\circ}\text{C}$ )

В результате проведенных работ была разработана и создана экспериментальная установка для исследований длительной прочности и ползучести высокоэластических полимерных адгезивов в конструкциях летательных аппаратов. Установка позволяет воспроизводить режимы теплосилового воздействия на КС максимально приближенной к эксплуатационному и определять при этом длительную прочность КС и характер его деформирования вплоть до разрушения.

На созданной установке проведены исследования эластомерного клея-герметика ВКСИНТ У-2-28НТ, широко используемого при производстве конструкций головных антенных обтекателей. Получены экспериментальные данные его длительной прочности в эксплуатационном диапазоне температур ( $300\div 330$ ) °C, позволяющие прогнозировать прочность клеевых соединений на его основе. Также получены экспериментальные кривые сдвиговой ползучести, которые могут быть использованы для проверки аналитических зависимостей и построения математических моделей, описывающих поведение эластомерного герметика в процессе теплосилового воздействия.

### Литература

1. Ромашин А.Г., Гайдачук В.Е., Карпов Я.С., Русин М.Ю. Радиопрозрачные обтекатели летательных аппаратов. Проектирование, конструкционные материалы, технология производства, испытания. – Учебн. пособие. – Харьков: Нац. аэрокосм. ун-т «Харьк. авиац. ин-т», 2003. – 239 с.
2. Ферри Дж. Вязкоупругие свойства полимеров. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1963. – 536 с.
3. Аскадский А.А. Деформация полимеров. – М.: Химия, 1973. – 448 с.
4. Кочнев А.М., Заикин А.Е., Галибеев С.С., Архиреев В.П. Физикохимия полимеров. – Казань: Изд-во «Фэн», 2003. – 512 с.
5. Фрейдин А.С., Турусов Р.А. Свойства и расчет адгезионных соединений. – М.: Химия, 1990. – 256 с.

# СПИНОВОЕ РАЗУПРОЧНЕНИЕ МЕТАЛЛА КАК ВОЗМОЖНАЯ ПРИЧИНА УСИЛЕНИЯ ЭЛЕКТРОПЛАСТИЧЕСКОГО ЭФФЕКТА В ПОЛЕ СВЧ – ИЗЛУЧЕНИЯ

О.А.Троицкий

Институт машиноведения им А.А.Благонравова РАН

[oaTroitsky@rambler.ru](mailto:oaTroitsky@rambler.ru)

Нами продолжены детальные исследования электропластического эффекта (ЭПЭ) в металлах [1,2] с учетом того, что к настоящему времени выявлен ряд механизмов действия электромагнитных полей (ЭМП) на деформацию твердых тел. Установлено существование более десятка различных электрических, магнитных и электронных явлений [3]. Существенным в этом ряду оказался электропластический эффект (ЭПЭ) действия импульсного тока, который как кооперативное явление собрал в себе по мнению [3] не менее 6 различных физических явлений. Механизмы этих явлений большей частью до конца не выяснены. Тем не менее они объясняют на полуколичественном и качественном уровне огромный массив экспериментальных данных, касающихся влияния ЭМП на деформацию твердого тела. Это касается не только процессов пластичности и прочности твердых тел, релаксации напряжений, ползучести и внутреннего трения, но и движения отдельных дислокаций и их скоплений, депиннинга дислокаций от точек закрепления, т.е. процессов на микроуровне. ЭПЭ, обладающий свойством полярности [4,], включает в себя три основных явления электропластической деформации металла (ЭПДМ):

- действие «электронного ветра» [1,3,4];
- действие пинч-эффект [5,6];
- возможное спиновое разупрочнение металла [7-9].

*В настоящей работе мы коснемся лишь последнего явления. Как видно из представленной на Рис.1 диаграммы деформации растяжением тонких (200 мкм) образцов нержавеющей стали, величина пиков ЭПЭ несколько возрастает в поле СВЧ-излучения, что может быть связано со спиновым разупрочнением металла (СРМ), для реализации которого требуется выполнение следующих условий:*

- магнитные поля (МП), а именно собственное магнитное поле импульсного тока, участвующего через пинч-эффект в создании пиков ЭПЭ (скачков резкого разупрочнения деформируемого металла в момент прохождения импульсов тока, и электромагнитная компонента СВЧ-излучения, должны быть скрещены;
- должно быть обеспечено наличие в образцах термодинамически неравновесных процессов, в частности, генерации свежих дислокаций, что обеспечивается активной деформацией образцов при их растяжения с постоянной скоростью или в прерывистом режиме с чередованием растяжения с паузами релаксации напряжений без снятия нагрузки;
- должен быть обеспечен термодинамический выигрыш между начальным и конечным состоянием системы, что может быть достигнуто путем испытания образцов в прерывистом режиме, когда активная деформация периодически сменяется указанной релаксацией напряжений;
- время распада  $\tau_r$  реакционной пары дислокация - парамагнитная примесь из триплетного Т - состояния должно быть меньше

времени  $\tau_{T-S}$  обратного перехода пар в синглетное  $S$  – состояние, т.е.

$\tau_T < \tau_{T-S}$ , чтобы ситуация не вернулась к исходному состоянию и эффект совместного действия магнитных полей не свелся к нулю.

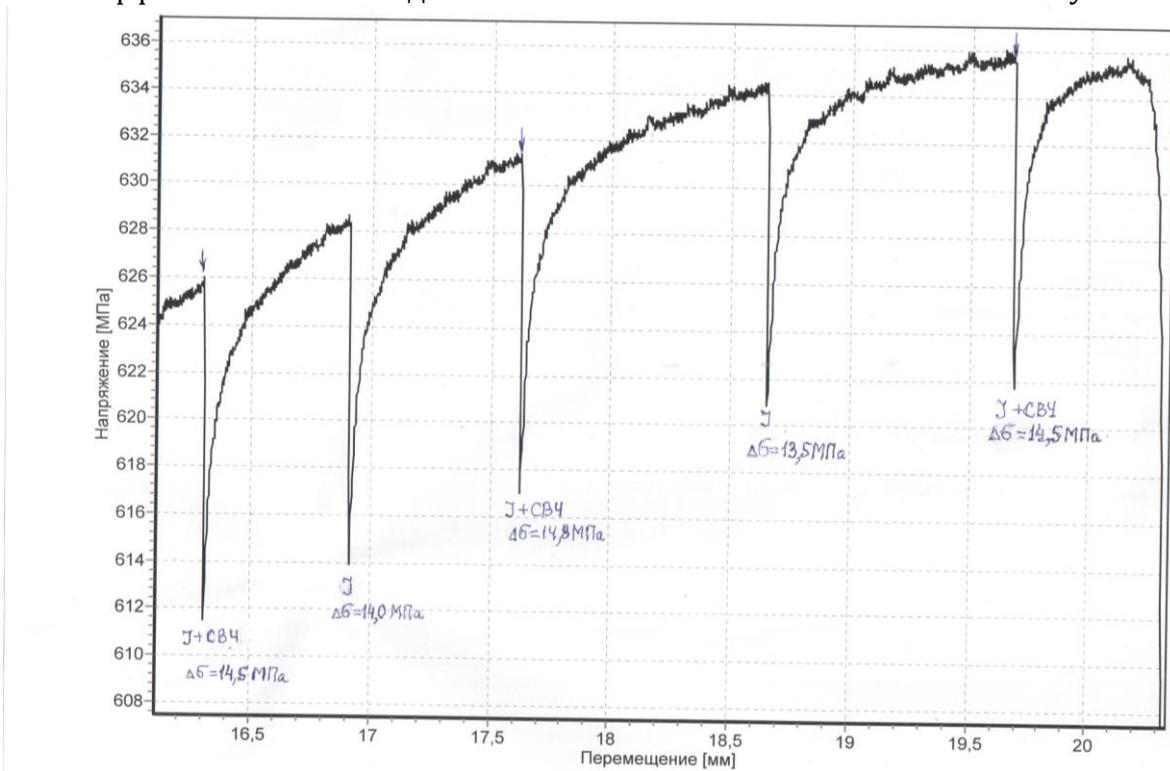


Рис. 1 Характерная диаграмма деформации растяжением нержавеющей стали с пиками ЭПЭ при одновременном СВЧ- излучении (1,3 и 5 пик) и без него (2 и 4)

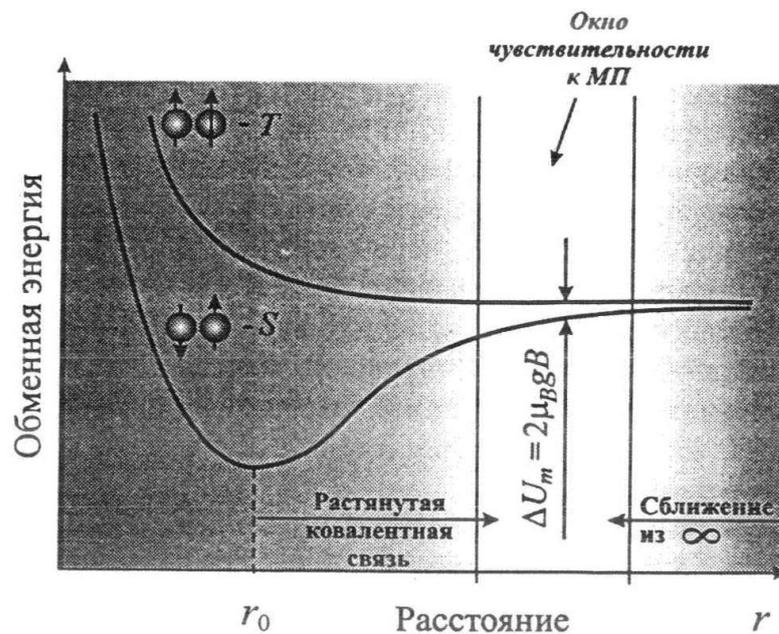


Рис.2 Схема спиновой конверсии во внешнем магнитном поле.

Реализация механизма влияния МП на спиновые степени свободы внутри деформируемого твердого тела, включая металл, протекает путем спиновой конверсии (СК), схематически показанной на Рис 2. Изначально существуют синглетное  $S$  – состояние с  $\Sigma S_i = 0$  и триплетное  $T$  – состояние с  $\Sigma T_i = 1$

реакционных пар (РП) дислокация - парамагнитная примесь (ПП) в реакционной ячейке со спинами  $S = + - \frac{1}{2}$ , с чем связано торможение дислокаций. Разница в величине обменной энергии  $U_T$  и  $U_S$ , т.е.  $(U_T - U_S)$  на расстояниях  $r_0$  порядка межатомного, например, для ковалентной связи составляет примерно 1 эВ. Под влиянием МП величиной  $B = 1$  Тл состояние РП не может изменяться, поскольку структурному элементу передается энергия не более  $\mu_B g B = 10^{-4}$  эВ. Здесь  $g$  - фактор, который может иметь значение до 2 и более при развитых процессах СК. На больших расстояниях  $r > r_0$  разница в величине обменных энергий исчезает и МП уже не может оказать существенное влияние на структурные перестройки в твердом теле. Тем не менее в указанном на рисунке окне чувствительности к МП может реализоваться спиновое разупрочнение металла (СРМ).

### Литература

1. О.А.Троицкий, Письма ЖЭТФ, т.10, 18-22, 1969, Электромеханический эффект в металлах.
2. О.А.Троицкий, Ю.В.Баранов, Ю.С. Аврамов, А.Д. Шляпин Физические основы и технологии обработки современных металлов, том 1 и том 2, Изд-во РХД, Ижевск  
- Москва, 590 стр и 467 стр.
3. А.Я. Багаутдинов, В.Г. Громов, Ю.И. Головин, О.А.Троицкий и др Структура и свойства перспективных металлических материалов, г Томск, 2007 г, Изд-во НТЛ, 575.
4. Л.Б.Зуев, В.Е.Громов, И.Ф.Курилова и др ДАН СССР, 1978, т 239, №1, с 84
5. Троицкий О.А., Пластическая деформация металла, вызванная пинч-эффектом, Изв. АН СССР, сер. Физическая, № 6, 1977, С. 118 - 122,
6. Спицын В.И., Троицкий О.А. Моделирование теплового и пинч-эффекта импульсного тока на пластическую деформацию металла, ДАН СССР, № 5, 1975, С. 1070 - 1073.
7. М. Molotskii, V. Fleurov, J Phys. Chem., В, 2000, 104, 3812 - 3816
8. М. Molotskii, Philosophical Magazine, 2003, v 83, № 12, 1421.
9. М. Молоцкий, ФТТ, 1991, т 33, № 10, с 3112.

# ПРЕДЕЛ РАССЕЙВАНИЯ ЭНЕРГИИ В КОНЧИКЕ ТРЕЩИНЫ В КОМПОЗИТАХ ИЗ ХРУПКИХ КОМПОНЕНТ СО СЛАБЫМ ИНТЕРФЕЙСОМ

## *CRACK TIP ENERGY DISSIPATION LIMIT IN BRITTLE/BRITTLE FIBER/MATRIX COMPOSITES WITH WEAK INTERFACE*

К.А.Хвостунков<sup>1</sup> – к.ф.-м.н., А.Б.Недбайло<sup>2</sup> - асп.

<sup>1</sup>Мех-мат МГУ им.М.В.Ломоносова,

<sup>2</sup>Институт машиноведения им.А.А.Благонравова РАН

[khvostunkov@gmail.com](mailto:khvostunkov@gmail.com)

**Abstract.** Fibrous composites based on oxide matrices and oxide fibers are promising materials for use at high temperatures, of the order of 1000 °C and higher. Composites made of brittle components cannot absorb the energy of fracture because they have not any large plastic areas at the crack tip. The prospects for using existing mechanisms such as fiber–matrix interface fracture, delamination, and pull-out must be assessed from the standpoint of energy dissipation.

We consider the effect of an increase in the steady-state rate of sample creep depending on the number of loading–unloading and heating–cooling cycles. We introduce a model for the continuity degradation of the fiber–matrix interface area. We obtain the dependence of the limit pull-out work on the fiber coverage continuity.

Волокнистые композиты из оксидной матрицы и оксидных волокон являются перспективными материалами, предназначенными для работы в условиях высоких температур порядка 1000°C и выше. Необходимо оценить возможность использования в плане рассеивания энергии таких существующих механизмов как разрушение области контакта волокно-матрица (интерфейса), отслаивание и вытягивание.

Вопросами обрыва и последующего вытягивания волокон при прохождении магистральной трещины в волокнистом композите занимались многие авторы, например, Kelly A., Aveston J., Cooper G., Street K.N., Budiansky B., Hutchinson J.W., Evans A.G., Curtin W.A., Gao Y-C., Mai Y-W., Cotterell B., Marshall D.B., McMeeking R. M., Wei Y., Mileiko S.T., Sih G. В данном проекте дается оценка предельной величины рассеивания энергии при вытаскивании волокна в зависимости от сплошности и деградации зоны контакта волокно-матрица. Показано, что максимум величины работы вытягивания волокна является постоянным для различного уровня распределения поврежденности волокон.

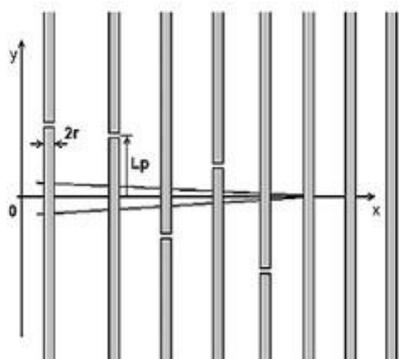
Подбирая различные составы покрытия волокна и режимы создания волокнистого композита, мы можем добиваться различной средней длины обрыва волокна в матрице при прохождении магистральной трещины.

При отсутствии покрытия в условиях идеальной адгезии волокна и матрицы, при сплошном прочном покрытии, при малом разбросе прочностных характеристик самих волокон мы получаем гладкую поверхность магистральной трещины. Практически все волокна обрываются в плоскости магистральной трещины. Соответственно никаких энергетических затрат на вытягивание не происходит. Также величина работы по вытягиванию волокна стремится к нулю, когда покрытие волокна полностью повреждено, имеет нулевую сплошность.

В условиях, когда волокно имеет достаточное распределение слабых звеньев, а сплошность и прочность покрытия волокна не идеальны, мы можем получать существенное отклонение места обрыва волокна от плоскости магистральной трещины и наблюдать его отслаивание от матрицы и

последующее вытягивание с расходом энергии на разрушение покрытия и преодоление сил трения при вытягивании

### Критерий разрушения.



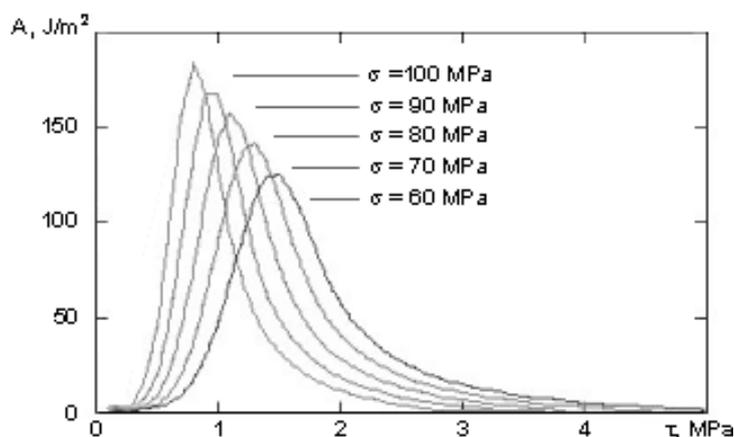
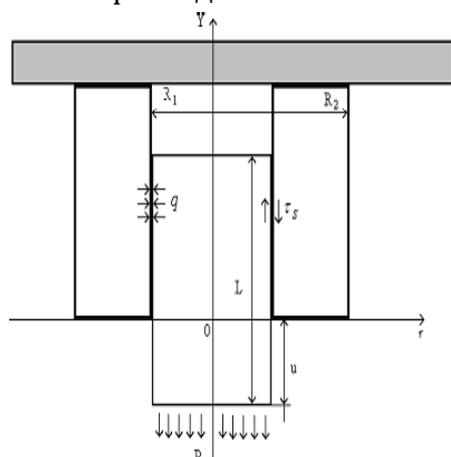
В качестве модели рассмотрим однонаправленный волокнистый композит в условиях одноосного растяжения. Нагрузка прикладывается на бесконечности в направлении укладки волокон (вдоль оси  $y$ ). Магистральная трещина длиной  $c$  расположена ортогонально оси волокон (вдоль оси  $x$ ). Композит состоит из хрупких компонент, например, оксидные волокно и матрица. Упругая энергия при продвижении трещины расходуется не только на создание новой поверхности (удельная плотность поверхностной энергии  $\gamma$ ), но и на работу по вытягиванию оборванных волокон и отслоение волокон от матрицы (удельная плотность работы вытягивания волокна и энергия разрушения зоны контакта волокно-матрица  $\gamma_p$ )

В этом случае в качестве критерия разрушения можно рассмотреть критерий квазихрупкого разрушения  $\sigma_{th} = \sqrt{\frac{E(\gamma + \gamma_p)}{\lambda c}}$ , полученный на основе критерия Гриффитса. (Здесь  $\sigma_{th}$  - предел прочности при указанной схеме нагружения,  $E$  - модуль Юнга вдоль оси  $y$ .) Только в нашем случае  $\gamma_p$  замещает собой слагаемое, характеризующее затраты энергии на создание пластической зоны.

Наша задача – определить максимально возможный уровень  $\gamma_p$  и те условия, при которых он достигается. Фактически – это поиск такого сочетания свойств хрупких компонент матрицы, покрытия волокна (интерфейса) и самого волокна, чтобы композит как система вела себя нехрупким образом при росте магистральной трещины.

### Зависимость работы вытягивания от покрытия волокна.

Рассмотрим одиночное волокно, заделанное в упругую матрицу на длину  $L$ .



Рассмотрим график зависимости работы вытягивания волокна от величины касательного напряжения  $\tau$  в зоне проскальзывания при

вытягивающих нагрузках  $\pi^2 \sigma$ , полагая, что оно характеризуется уровнем сплошности зоны контакта волокно-матрица  $\tau = \tau(\alpha)$ , где  $\alpha$  - есть отношение площади сплошного материала в зоне контакта ко всей площади контакта волокна с матрицей. Иными словами  $\alpha = 1 - \psi$ , где  $\psi$  есть функция поврежденности интерфейса. Явно выраженный максимум функции позволяет искать оптимальные свойства покрытия волокна, обеспечивающие высокий уровень затрат энергии при его вытягивании [1]. При анализе работы мы учитываем, что на волокно действует не произвольная нагрузка, а необходимая для вытягивания оборванного конца в поле сил касательных напряжений на его поверхности.

При переходе от одиночного волокна к процессу раскрытия трещины важным (наряду с  $\tau(\alpha)$ ) параметром, определяющим удельную плотность работы вытягивания волокна,  $L$  будет означать среднюю длину вытягиваемого волокна.

#### Три этапа обрыва волокна.



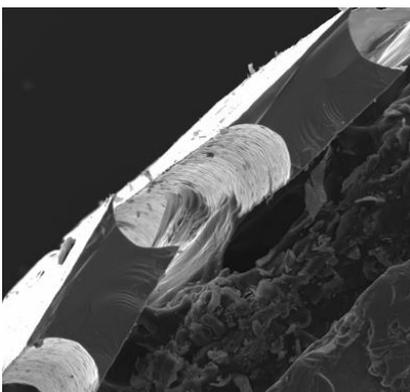
В данной модели мы при подсчете средней длины вытягиваемого волокна учитываем три этапа его обрыва.

**Первый** этап волокно проходит при нагружении матрицы. Теоретически бесконечное волокно обрывается до длин, соответствующих классической задаче об одиночном волокне в нагруженной матрице.

**Второй** этап проходит при приближении к волокну конечной длины поля напряжений магистральной трещины. Как видно на рисунке – волокна обрываются в зоне перед кончиком

трещины.

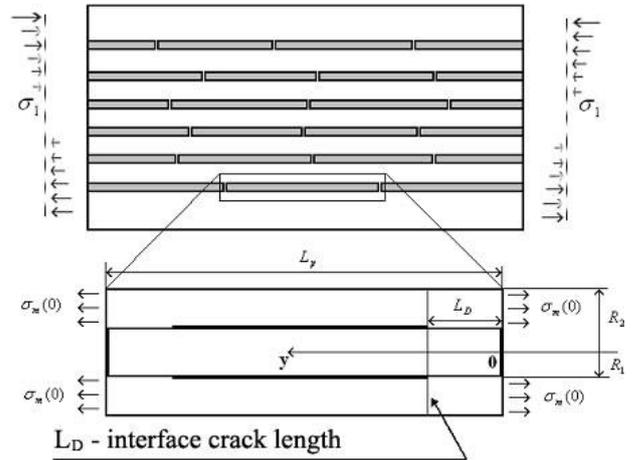
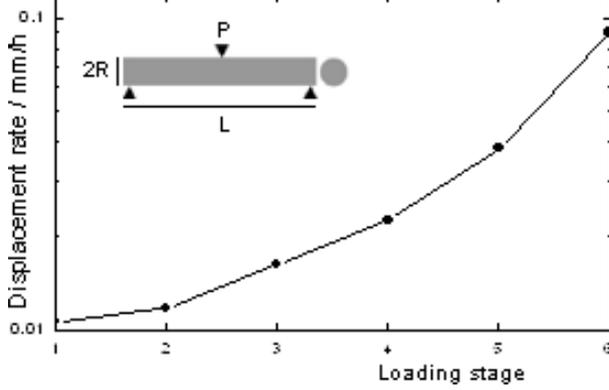
**Третий** этап – волокно дополнительно рвется при раскрытии трещины, так как не всякое предварительно оборванное при подходе трещины волокно может быть вытащено в поле сил касательных напряжений в зоне контакта волокно-матрица.



Фактором, который необходимо учесть в расчетах, является нестандартная форма поперечного сечения образца. Такая двояко-вогнутая форма обуславливается технологией получения современных оксидных волокон. На рисунке представлены волокна, полученные в Лаборатории армированных систем ИФТТ РАН г.Черноголовка.

В среднем периметр поперечного сечения такого волокна вдвое превышает длину окружности классической формы.

## Деградация интерфейса.



Рассмотрим случай деградации интерфейса, а именно, уменьшение сплошности зоны контакта волокно-матрица, вследствие периодического нагрева и нагружения.

В результате недавно проведенных экспериментов показано [2], что скорость установившейся ползучести образца при трехточечном изгибе в результате шести циклов по нагрузке-разгрузке и нагреву-охлаждению возросла на порядок в случае неидеального покрытия волокна, имеющего существенную поврежденность интерфейса. В случае сплошного интерфейса подобного изменения установившейся скорости ползучести не наблюдалось. На основании этих экспериментов и модели установившейся ползучести, учитывающей уровень поврежденности интерфейса был сделан вывод [2] о зависимости роста поврежденности покрытия волокна от ее начального уровня.

Рассмотрим режим установившейся ползучести в рамках определяющего соотношения [3]:

$$\sigma = \sigma_m \left\{ \alpha_0^{\frac{m}{n}} \Phi \left( \frac{\dot{\epsilon}}{\eta_m} \right)^{\frac{1}{n}} V_f + \left( \frac{\dot{\epsilon}}{\eta_m} \right)^{\frac{1}{m}} V_m \right\}, \text{ где}$$

$$\Phi = \left( \frac{2}{3} \right)^{\frac{1}{m}} \left( \frac{m}{2m+1} \right) \left[ \left( \frac{2\sqrt{3}}{\pi} \right)^{-\frac{1}{2}} - 1 \right]^{-\frac{1}{m}} \left[ \left( \frac{\sigma_o^{(f)}}{\sigma_m} \right)^\beta \left( \frac{l_o}{d} \right) \right]^{\frac{m+1}{n}}$$

Положим, что и установившаяся скорость прогиба образца и установившаяся скорость ползучести удовлетворяют одному и тому же виду зависимости  $\dot{u}(N) = K(N)\dot{u}_0$ ,  $\dot{\epsilon}(N) = K(N)\dot{\epsilon}_0$ , где  $K(N)$  определяются из эксперимента на трехточечный изгиб.

Тогда уровень сплошности покрытия можно определить из условия равенства нагрузок на каждом шаге:

$$\alpha_0^{\frac{m}{n}} \Psi \left( \frac{\dot{\epsilon}_0}{\eta_m} \right)^{\frac{1}{n}} V_f + \left( \frac{\dot{\epsilon}_0}{\eta_m} \right)^{\frac{1}{m}} V_m = \alpha^{\frac{m}{n}}(N) \Psi \left( \frac{K(N)\dot{\epsilon}_0}{\eta_m} \right)^{\frac{1}{n}} V_f + \left( \frac{K(N)\dot{\epsilon}_0}{\eta_m} \right)^{\frac{1}{m}} V_m,$$

$$\text{откуда } \alpha(N) = \left[ \left[ \alpha_0^{\frac{m}{n}} + \left( \frac{\dot{\epsilon}_0}{\eta_m} \right)^{\left( \frac{1}{m} - \frac{1}{n} \right)} \left( 1 - (K(N))^{\frac{1}{m}} \right) \frac{V_m}{V_f} \frac{1}{\Psi} \right] (K(N))^{-\frac{1}{n}} \right]^{\frac{n}{m}}$$

$$A = \alpha^2 \frac{C_3 2V_f (1 - e^{-\alpha^2 K_0 u_a})}{RK_0}, \quad K_0 = (E_m l_{0i} \mu_0) \left[ R \left( \frac{E_m}{E_f} + 1 + 2 \frac{V_f}{V_m} \right) \right]^{-1}, \text{ где}$$

### Работа вытягивания волокна в условиях износа его покрытия.

Введем в рассмотрение процесс износа (истирания) в зоне контакта волокно-матрица как одного из процессов деградации интерфейса [4].

Работа по вытягиванию оборванного волокна с учетом распределений Вейбулла прочности пучка волокон:  $A(x) = \int_0^{u_a} F(u) du$ .

Если мы не будем учитывать истирание покрытия, то подынтегральное выражение в зависимости для работы вытягивания будет иметь классический вид:  $F(u) = \tau 2\pi R(L-u)$ . При учете эффекта истирания

$$F(u) = \tau 2\pi R(L-u)e^{-Ku}, \quad K = \frac{E_m l_i \mu / R}{\frac{E_m}{E_f} + 1 + 2 \frac{V_f}{V_m}}, \quad l_i -$$

коэффициент истирания интерфейса,  $\mu$  - коэффициент трения Кулона,  $u_a$  - величина раскрытия трещины,  $u$  - перемещение волокна,  $\tau$  - касательное напряжение в зоне проскальзывания,  $E_m$  - Модуль Юнга матрицы,  $E_f$  модуль юнга волокна,  $V_f$  и  $V_m$  объемные доли волокна и матрицы, соответственно.

В предположении, что и средняя длина обрыва  $L$  и касательное напряжение при скольжении  $\tau$  зависят коэффициента сплошности покрытия  $\alpha$ , получаем:

$$A(\alpha) = \tau(\alpha)(C_1 + C_2 L(\alpha)), \quad C_1 = \frac{2V_f}{RK^2} [Ke^{-Ku_a} u_a + (e^{-Ku_a} - 1)], \quad C_2 = \frac{2V_f}{RK} [1 - e^{-Ku_a}]$$

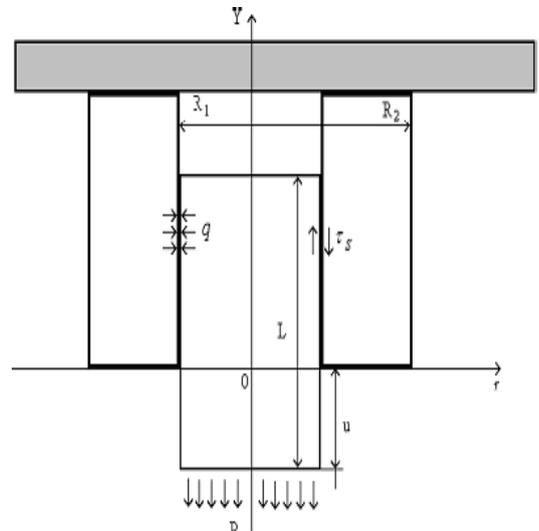
Тогда из условия максимума работы вытягивания при некоем оптимальном уровне сплошности  $\alpha_1$  покрытия, удовлетворяющему условию

$$\frac{dA(\alpha)}{d\alpha} = \tau'(\alpha)(C_1 + C_2 L(\alpha)) + \tau(\alpha)C_2 L'(\alpha) = 0, \quad \text{находим: } A(\alpha_1) = C_2 C_3$$

### Выводы

При любом разбросе прочностных свойств пучка волокон, выбирая оптимальную сплошность покрытия волокна для достижения максимума энергозатрат при его вытягивании матрицы, мы получаем один и ту же величину работы вытягивания.

Константа  $C_3$  задается соотношением  $C_3 = \tau \left( L + \frac{C_1}{C_2} \right)$ , где касательные напряжения и среднюю величину волокна придется определять в эксперименте и делать соответствующие оценки.



## Литература

1. Хвостунков К.А. Шпенёв А.Г. Повышение энергии разрушения композита из хрупких компонентов за счёт свойств поверхности раздела волокно/матрица Проблемы машиностроения и надёжности машин. 2008, №2, 41-45.
2. S.T.Mileiko, V.M.Kiiko & K.A.Khvostunkov. Creep of composites with a porous fiber/matrix interface under variable loading. // Theoretical and Applied Fracture Mechanics. Elsevier. 2006, 45, 1, 41-45.
3. S. T. Mileiko, "Steady state creep of a composite with short fibres," J. Mater. Sci., 5, 254-261 (1970).
4. K.A.Khvostunkov, A.G.Shpenev. Fatigue fracture model for weak fiber/matrix interface composite within three point bending test // Key Engineering Materials, Volume 465, p161-164, 2011.

# КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ И ТЕОРЕТИКО-ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ИНДИКАТОРЫ ПРИМЕНИМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ СООТНОШЕНИЙ ВЯЗКОУПРУГОСТИ

## QUALITATIVE ANALYSIS AND EXPERIMENTAL INDICATORS OF APPLICABILITY FOR LINEAR VISCOELASTICITY THEORY

А.В. Хохлов

Институт механики МГУ имени М.В. Ломоносова

[andrey-khokhlov@ya.ru](mailto:andrey-khokhlov@ya.ru)

**Abstract.** One-dimensional linear integral constitutive equation of viscoelasticity with an arbitrary creep function is studied analytically. The distinctive features of theoretic curves (creep, relaxation, creep recovery curves, stress-strain diagrams at constant rates et al.) are highlighted that can indicate applicability or non-applicability of the linear theory being compared with the corresponding properties of material test curves. The minimal set of general restrictions that should be imposed on a creep and relaxation functions to provide an adequate description of typical test curves of viscoelastic materials and basic rheological phenomena is formulated.

Технология качественного анализа нелинейных определяющих соотношений (ОС) для вязкоупругопластических материалов, разработанная ранее автором в серии работ [1-4], прилагается к линейному интегральному уравнению вязкоупругости с произвольной функцией релаксации (ползучести) для изотермических процессов.

При минимальных априорных математических ограничениях на материальную функцию (функцию релаксации или ползучести) выведены в общем виде уравнения семейств теоретических кривых одномерной линейной модели (кривых деформирования при постоянных скоростях деформации или нагружения, релаксации, ползучести, обратной ползучести, релаксации и ползучести с начальной стадией нагружения и т.п.); аналитически изучены их качественные свойства в зависимости от свойств материальной функции [4-6].

На основе сопоставления этих свойств с общими качественными свойствами типичных экспериментальных кривых широкого класса вязкоупругопластических материалов (с целевым списком термомеханических эффектов и классов материалов, подлежащих моделированию) выведены минимальные необходимые феноменологические ограничения на функции релаксации и ползучести, обеспечивающие адекватное описание экспериментальных кривых. Выявлены те эффекты, которые линейные ОС принципиально не могут описать ни при какой функции ползучести (ФП) и те, которые могут быть описаны при определённых дополнительных ограничениях, наложенных на ФП (например: затухание памяти, эффект Кольрауша, сходимость кривых деформирования к кривой мгновенного деформирования, независимость мгновенного и длительного модулей от скорости деформирования и др.).

В частности, доказано, что теоретические диаграммы деформирования при постоянных скоростях нагружения или деформирования всегда монотонны и выпуклы вверх, а при стремлении скорости нагружения к бесконечности их семейство всегда сходится к предельной прямой (мгновенной диаграмме деформирования), получены условия существования у них наклонных асимптот. Также доказано, что адекватное описание обратной ползучести (восстановления) возможно лишь в случае выпуклости вверх ФП; это ограничение означает, что

уравнения линейной вязкоупругости не способны моделировать материалы, экспериментальная кривая ползучести которых включает стадию ускоряющейся ползучести.

Выражен через функцию релаксации (ФР) показатель скоростной чувствительности линейной модели, исследована его зависимость от деформации и скорости деформации, показано, что он представим в виде функции одной переменной [4]. Введено понятие кривой скоростной чувствительности, найдены критерии монотонности и наличия максимума (играющего важную роль в описании феноменологии сверхпластичности), построен интегральный оператор, восстанавливающий ФР по заданной кривой скоростной чувствительности. Детально изучены свойства семейств теоретических диаграмм деформирования и произведения ФР и ФП для всех (регулярных и сингулярных) трёх- и четырёхзвенных структурных реологических моделей и моделей с неограниченными степенными ФР; обнаружены свойства произведения ФР и ФП, сильно отличающиеся от тех, которые принято считать универсальными.

На основе анализа общих свойств семейств теоретических кривых линейных ОС вязкоупругости с произвольной ФР выявлен набор их характерных свойств (атрибутивных признаков), наличие которых следует установить у экспериментальных кривых деформирования при постоянных скоростях нагружения и деформирования, кривых релаксации с учётом начальной стадии деформирования и кривых ползучести при ступенчатом нагружении, прежде чем пытаться моделировать поведение конкретных (классов) материалов в рамках линейной теории. Эти признаки могут служить индикаторами адекватности линейной теории вязкоупругости, удобными для экспериментальной проверки, они позволяют точнее и в более явной форме указать границу области её применимости. Этот список индикаторов содержит более десятка признаков, которые можно проверять по разным экспериментальным кривым. Если хотя бы одно из указанных свойств-индикаторов не выполняется для какой-то экспериментальной кривой (в рамках погрешности эксперимента и потенциальных расчётов), то комплексная адекватность линейных ОС под вопросом (хотя, быть может, отдельные аспекты поведения материала они всё же описывает удовлетворительно, и это может удовлетворить невзыскательного пользователя). Если достоверно установлено нарушение нескольких (или одного первостепенного), то линейные ОС принципиально не применимы к описанию поведения (всего комплекса присущих ему механических свойств) данного материала в рассматриваемых условиях.

В статье приняты сокращения: КП – кривая ползучести (ТКП – теоретическая, ЭКП – экспериментальная); КР – кривая релаксации; ДД – диаграмма деформирования (ТДД, ЭДД); СН – скорость нагружения;  $y(0) := y(0+)$  – предел справа.

## 1. Определяющие соотношения линейной вязкоупругости

Будем рассматривать изотермические одномерные процессы, характеризуемые в данной точке тела напряжением  $\sigma(t)$  и деформацией  $\varepsilon(t)$ ,  $t > 0$ . Они связаны линейными интегральными операторами, инвариантными относительно сдвигов по времени (для описания структурно-стабильных вязкоупругих материалов):

$$\sigma(t) = \int_0^t R(t-\tau) d\varepsilon(\tau), \quad \varepsilon(t) = \int_0^t \Pi(t-\tau) d\sigma(\tau), \quad t \geq 0 \quad (1.11)$$

Операторами вида (1.11) задаются и трёхмерные ОС вязкоупругости в изотропном случае: тогда (1.11) связывают вторые инварианты и компоненты девиаторов тензоров напряжений и деформаций с одинаковыми индексами, а также – их первые инварианты, но уже с другими ядрами  $R_\nu(x)$  и  $\Pi_\nu(x)$ . ФР  $R(x)$  и ФП  $\Pi(x)$ ,  $x \geq 0$  предполагаются непрерывными и положительными функциями с ограниченной вариацией на любом отрезке. Они должны удовлетворять априорным математическим ограничениям, гарантирующим существование интегралов, необходимую гладкость образов (в зависимости от гладкости входных процессов), непрерывность операторов в рассматриваемых нормированных пространствах, сходимость ряда для резольвенты и т.п. А также – дополнительным ограничениям, обеспечивающим выполнение общих принципов механики и термодинамики и сходство качественных свойств теоретических кривых модели и типичных кривых (деформирования, релаксации, ступенчатой ползучести и т.д.), наблюдаемых при испытаниях материалов, поведение которых хотелось бы описывать с помощью ОС (1.11). Ниже на ФП и ФР будут наложены дополнительные ограничения, обеспечивающие феноменологическую адекватность ОС.

Операторы (1.11) взаимно обратны ( $\mathbf{RP} = \mathbf{I} = \mathbf{PR}$ ), и потому их ядра связаны зависимостями  $\mathbf{RP} = 1 = \mathbf{PR}$ ,  $t > 0$ , т.е. (в предположении, что  $R(0+) < \infty$ )

$$\int_0^t \dot{R}(t-\tau)\Pi(\tau) d\tau + R(0)\Pi(t) = 1, \quad \int_0^t \dot{\Pi}(t-\tau)R(\tau) d\tau + \Pi(0)R(t) = 1, \quad t > 0$$

(1.12)

Эти уравнения эквивалентны, так как операторы с разностными ядрами коммутируют. Зная ФР, можно найти ФП из интегрального уравнения (1.12), и наоборот. Поэтому одномерное ОС (1.11) содержит одну МФ, а изотропное трёхмерное – две МФ. При  $R(0) \neq 0$  и  $\Pi(0) \neq 0$  (1.12) – уравнения Вольтерра *второго* рода с ограниченными ядрами, и потому они однозначно разрешимы в классе суммируемых функций (даже в  $L_2[0, b]$ ).

Операторы (1.11), в частности, определены на множестве кусочно непрерывных и кусочно гладких функций. В точках разрыва напряжения  $t_i$  скачки  $\varepsilon(t)$  и  $\sigma(t)$  пропорциональны:  $\hat{\varepsilon}(t_i) = \hat{\sigma}(t_i)\Pi(0)$ . На множестве непрерывных (и кусочно гладких) при  $t \geq 0$  функций операторы (1.11) действуют по формуле:

$$\sigma(t) = \int_0^t R(t-\tau)\dot{\varepsilon}(\tau) d\tau + \varepsilon(0)R(t), \quad \varepsilon(t) = \int_0^t \Pi(t-\tau)\dot{\sigma}(\tau) d\tau + \sigma(0)\Pi(t),$$

(1.13)

Интегрированием по частям ОС (1.13) преобразуются к виду:

$$\sigma(t) = R(0)\varepsilon(t) + \int_0^t \dot{R}(t-\tau)\varepsilon(\tau) d\tau, \quad \varepsilon(t) = \Pi(0)\sigma(t) + \int_0^t \dot{\Pi}(t-\tau)\sigma(\tau) d\tau, \quad t \geq 0$$

(1.14)

При  $\Pi(0) \neq 0$  второе соотношение (1.14) с заданной  $\varepsilon(t)$  – уравнения Вольтерра *второго* рода для  $\sigma(t)$ , построение его резольвенты даёт обратный оператор, заданный первой формулой (1.14). Ограничение  $R(0) \neq 0$  обязательно. Нарушение условия  $\Pi(0) \neq 0$  приводит к уравнению Вольтерра *первого* рода для ФР, наличие сингулярности или разрыва *второго* рода у  $R(x)$  в т.  $x=0$ , неограниченности оператора  $\mathbf{R}$  и т.п. [5,6].

Переходя в (1.12) к пределам  $t \rightarrow 0+$  и  $t \rightarrow +\infty$ , получим:  $\Pi(0)R(0)=1$ ,  $\Pi(\infty)R(\infty)=1$ .

Это следует из существования конечных  $R(0+)$ ,  $\Pi_\infty$  и интегрируемости  $\dot{R}(t)$  на отрезках.

В виде (1.11) представимы и все реологические модели, собранные из линейно упругих и вязких элементов посредством последовательных и параллельных соединений (они задаются двумя дифференциальными операторами с постоянными коэффициентами:  $\mathbf{P}\sigma = \mathbf{Q}\varepsilon$ ). Для них ФП будут линейными комбинациями линейных функций и экспонент с отрицательными показателями, а ФР – суммами констант, экспонент и  $\delta$ -функции, т.е. ФР могут иметь сингулярность. Если вязкий элемент (с  $R(t) = \eta\delta(t)$ ) или любая модель с сингулярностью включены параллельно к произвольной модели (тогда ФР складываются), то  $\delta$ -слагаемое будет в ФР. Например, ФР модели Фойхта –  $R(t) = \eta\delta(t) + E h(t)$ .

### Четырёхпараметрическое семейство ФП

$$\Pi(t) = \alpha t + \beta + \gamma e^{-\lambda t}, \quad \lambda > 0, \alpha, \beta \geq 0, \gamma \geq -\beta \quad (1.15)$$

порождает все регулярные четырёхзвенные модели и все трёхзвенные модели. При  $\gamma \in (-\beta, 0)$  – модель «стандартного тела» (т.е. последовательное соединение моделей Максвелла и Фойхта:  $\Pi(t) = \Pi_M + \Pi_F$ ,  $\alpha = \eta_M^{-1}$ ,  $\beta = E_M^{-1} + E_F^{-1}$ ,  $\lambda = E_F / \eta_F$ ,  $\gamma = -E_F^{-1}$ ), в частности, при  $\alpha = 0$  – трёхзвенные модели Кельвина (последовательное соединение модели Фойхта с упругим элементом) и Пойтинга-Томсона (параллельное соединение модели Максвелла с упругим элементом). Для двух последних ФП (1.15) имеет горизонтальную асимптоту:  $\Pi(\infty) = \beta$ . Поскольку  $\Pi(0) = \beta + \gamma$ , то ФП (1.15) порождает *сингулярные* модели тогда и только тогда, когда  $\gamma = -\beta$ ; при  $\alpha = 0$  это модель Фойхта, если  $\alpha > 0$ , то получаются (все) сингулярные трёхзвенные модели (с двумя демпферами), а при  $\lambda = 0$  или  $\beta = 0$  – модель ньютоновской жидкости. При  $\gamma = 0$  (1.15) превращается в модель Максвелла. Случай  $\gamma > 0$ , как показано ниже, приводит к возрастанию кривой обратной ползучести и потому должен быть исключён наложением ограничений на ФП.

Хотя модель Пойтинга-Томсона «формально не получается из стандартного тела» предельным переходом [15], можно заметить, что её описывает ОС (1.11) с точно такой же трёхпараметрической ФП ((1.15) с  $\alpha = 0$ ), что и модель Кельвина (которая «получается» при  $\eta_M \rightarrow \infty$ ). Несмотря на разное элементное строение, эти трёхзвенные модели математически эквивалентны. Эквивалентны друг другу и две сингулярные трёхзвенные модели с одной пружиной. Эквивалентность двух пар трёхзвенных моделей порождает два ветвящихся дерева эквивалентных многозвенных моделей, разных по строению [5].

## 2. О сопоставлении теоретических и экспериментальных кривых

Список типичных свойств экспериментальных кривых (ползучести, релаксации, деформирования и т.п.) структурно стабильных однородных материалов приведён в [2,5]. Из него вытекают необходимые ограничения на материальные функции и параметры ОС, обеспечивающие наличие тех же свойств у теоретических кривых (ТК).

Сопоставляя теоретические кривые с экспериментальными (ЭК), будем, прежде всего, иметь в виду испытание на чистый сдвиг: тогда в (1.11)  $\sigma := \sigma_{12} = s_{12}$ ,  $\varepsilon := \varepsilon_{12} = e_{12}$ ,  $R := R_S$  и  $\Pi := \Pi_S$  – сдвиговые функции релаксации и ползучести. Применяя ОС (1.11) к описанию опытов на одноосное растяжение-сжатие и полагая  $\sigma := \sigma_{11}$ ,  $\varepsilon := \varepsilon_{11}$ , нужно иметь в виду, что ФП в (1.11) будет зависеть как от сдвиговой, так и от объёмной ФП:  $\Pi := \Pi_1 = (6\Pi_S + \Pi_V)/9$ . Поперечные деформации  $\varepsilon := |\varepsilon_{22}|$  связаны с  $\sigma := \sigma_{11}$  посредством ФП  $\Pi_2 = (3\Pi_S - \Pi_V)/9$ . Измеряя  $\varepsilon_{11}(t)$  и  $|\varepsilon_{22}(t)|$  в испытаниях на ползучесть при  $\sigma_{11} = \bar{\sigma} h(t)$ , можно найти  $\Pi_1(t)$  и  $\Pi_2(t)$ , а затем найти  $\Pi_S = \Pi_1 + \Pi_2$ ,  $\Pi_V = 3\Pi_1 - 6\Pi_2$ , т.е. идентифицировать трёхмерные ОС. Возможно и прямое сопоставление ТК с ЭК растяжения-сжатия: если даже нет «единой кривой», всё же *качественные* свойства ЭК при испытаниях на сдвиг и одноосное растяжение, как правило, одинаковы.

### 3. Семейства кривых релаксации и ползучести линейных ОС

Семейства теоретических КП и КР получаются подстановкой в ОС (1.11) процессов  $\sigma(t) = \bar{\sigma} h(t)$  и  $\varepsilon(t) = \bar{\varepsilon} h(t)$  с произвольными значениями  $\bar{\sigma}$  и  $\bar{\varepsilon}$ :

$$\varepsilon(t) = \bar{\sigma} \Pi(t), \quad \sigma(t) = \bar{\varepsilon} R(t) \quad (1.16)$$

ТКП (1.16) линейно зависят от уровня напряжений, а ТКР – от уровня деформации (эти свойства вытекают только из однородности интегральных операторов), поэтому изохронные ТКП всегда линейны по  $\sigma$ :  $\varepsilon = k\sigma$ , где  $k := \Pi(t)$ . При  $t \rightarrow 0$  семейство изохронных ТКП сходится к прямой  $\varepsilon = \sigma \Pi(0)$  (ибо  $\Pi(t)$  непрерывна), т.е. к прямой  $\sigma = R(0)\varepsilon$ , если  $\Pi(0) \neq 0$  (тогда  $\Pi(0)R(0) = 1$ ). В [5] показано, что эта прямая – диаграмма мгновенного деформирования, т.е. к ней сходится семейство ТДД  $\sigma(\varepsilon, a)$  при постоянных скоростях деформирования  $a$ , когда  $a \rightarrow \infty$  (кроме того, доказано, что эта прямая – общая касательная всех ТДД в т.  $\varepsilon = 0$  для любого  $a$ ). Если  $\Pi(0) = 0$ , то  $R(0) = \infty$ , и семейства изохронных ТКП и ТДД сходятся к вертикальной прямой  $\varepsilon = 0$ .

Время релаксации находится по ТКР (1.16) из условия  $\sigma(0)/\sigma(T) = e$ :  $T = \rho(R(0)/e)$ , где  $\rho := R^{-1}$ . Таким образом, время релаксации регулярных моделей (1.11) (с  $\Pi(0) \neq 0$ ) не зависит от уровня деформации и является убывающей функцией параметра  $R(0) := E$ .

Перечисленные свойства ТКР, ТКП и ТДД намечают границы адекватности линейных ОС (1.11). Их наличие у ЭКР, ЭКП и ЭДД материала следует считать первыми необходимыми признаками линейности его поведения при обсуждении применимости к его моделированию ОС (1.11) (остальные признаки выявлены в [4,5]). Подчеркнём, что из одной линейности изохронных ЭКП ещё не следует адекватность линейной модели (надо проверить ещё и аддитивность).

### 4. Об ограничениях на материальные функции определяющего соотношения (1.11)

Как ни странно, вопрос о точной формулировке полного списка минимальных базовых ограничений на материальные функции ОС (1.11) и об их истоках и следствиях как-то фрагментируется и обходится в большинстве монографий и статей по вязкоупругости и механике полимеров. Недостаточно полно он освещён и в [7-17] (см. обзор в [5]).

В силу (1.16), графики МФ  $R(t)$  и  $\Pi(t)$  полностью определяют очертание всех КР и КП. Из сравнения ТКР (1.16) с типичными ЭКР следуют минимальные необходимые ограничения на  $R(x)$ ,  $x \geq 0$  в (1.11):  $R(x)$  положительна и дифференцируема,  $R'(x)$  отрицательна и возрастает при  $x > 0$  (т.е.  $R(x)$  убывает и выпукла вниз).

Из убывания и положительности ФР следует существование предела  $R(+\infty) = \inf R(x) \geq 0$ , т.е. наличие горизонтальной асимптоты у  $R(x)$  и у всех ТКР (1.16). Если  $R(x)$  ограничена в правой окрестности нуля, то существует и  $R(0+) = \sup R(x) < \infty$ .

Отказ от ограниченности  $R(x)$  в правой окрестности т.  $x=0$  нуля (и тем самым – от условия ограниченности вариации на  $[0, t]$ ) и использование  $R(x)$  с интегрируемой особенностью или сингулярностью типа  $\delta$ -функции, локализованной в нуле, возможен, но приводит к сингулярности интегральных уравнений (1.11)-(1.14) и кривых релаксации, отвечающих процессам деформирования  $\varepsilon(t) = \bar{\varepsilon} h(t)$ , к «нехорошим» (качественно иным) свойствам семейств ТДД, к бесконечности касательного модуля («модуля упругости», модуля сдвига и т.п.) в нуле, бесконечности скорости распространения волн, неограниченности оператора  $\mathbf{R}$ , наличию скачков  $\sigma(t)$  в точках излома  $\varepsilon(t)$  (из (1.13) следует, что  $\hat{\sigma}(t_*) = \eta \hat{\varepsilon}(t_*)$ , если в ФР присутствует слагаемое  $\eta \delta(t)$ ) или бесконечности  $\dot{\sigma}(t)$  в этих точках (когда ФР не ограничена, но не сингулярна) и т.д. [5]

Экспериментальные КП куда более разнообразны по форме и типичных форм ЭКП существует несколько [9,17]: КП со всеми тремя стадиями, КП с постоянной скоростью ползучести или только с убывающей (выпуклые вверх) или с возрастающей. Поэтому универсальными требованиями к ФП можно считать только положительность, возрастание и дифференцируемость  $\Pi(t)$  при  $t \geq 0$  (помимо неявных ограничений, вытекающих из (1.12) и требований к  $R(t)$ ). Ограничения на интервалы выпуклости ФП, казалось бы, можно варьировать в зависимости от свойств ЭКП классов материалов. Однако следует проверить, не приводят ли они к недопустимым следствиям для других кривых модели. Оказывается нарушение условия  $\ddot{\Pi}(t) \leq 0$  в некоторой точке влечёт наличие участка возрастания на кривой обратной ползучести и должно быть запрещено.

## 5. Кривые обратной ползучести (упругого последдействия) и ограничение на ФП

Ступеньку  $\sigma(t) = \bar{\sigma}[h(t) - h(t-T)]$ , где  $\bar{\sigma} > 0$ ,  $T > 0$ ,  $h(t)$  – функция Хевисайда, оператор (1.11) переводит в процесс  $\varepsilon(t) = \bar{\sigma}[\Pi(t)h(t) - \Pi(t-T)h(t-T)]$ ,  $t \geq 0$ . В момент  $t=T$   $\varepsilon(t)$  имеет скачок  $\hat{\varepsilon}(T) = -\bar{\sigma}\Pi(0)$ , и далее деформация меняется по закону:

$$\varepsilon(t) = \bar{\sigma} S(t;T), \quad t > T, \quad \text{где } S(t;T) := \Pi(t) - \Pi(t-T) \quad (1.17)$$

Для модели Максвелла  $\Pi(t) = \alpha t + \beta$ , и потому (1.17) имеет вид:  $\varepsilon(t) = \bar{\sigma} \alpha T \equiv const$  при  $t > T$ , т.е. вся накопленная деформация ползучести оказывается необратимой. Для ФП (1.15) формула (1.17) даёт:  $\varepsilon(t) = \bar{\sigma}[\alpha T - c e^{-\lambda t}]$ , где  $c := \gamma(e^{\lambda T} - 1)$ . У моделей Кельвина-Пойтинга и Фойхта  $\alpha = 0$ , и потому  $S(t) = |\gamma|(e^{\lambda T} - 1)e^{-\lambda t}$ , и  $\varepsilon(t) \rightarrow 0$ . При  $\gamma > 0$  будет  $c > 0$ , т.е.  $\varepsilon(t)$  возрастает после нырка под предельный уровень.

Для всех стабильных материалов после снятия нагрузки (при  $t > T$ ) характерно постепенное уменьшение (релаксация) деформации до некоторого уровня (нулевого для сетчатых полимеров в высокоэластичном состоянии); это явление называется упругим восстановлением, возвратом, последствием, обратной ползучестью [9,17].

Из требования (нестроого) убывания теоретических кривых обратной ползучести (1.17) (с любым  $T$ ) следует невозрастание  $\dot{\Pi}(t)$  (т.е. выпуклость вверх  $\Pi(t)$ ). [5,6]. Поэтому для на ФП в линейных ОС (1.11) следует накладывать ограничение:  $\Pi(t)$  не имеет участков выпуклости вниз. В силу (1.16) из этого следует, что линейные ОС вязкоупругости не могут описывать стадию ускоряющейся ползучести.

Следовательно, скорость (обычной) ползучести  $\dot{\varepsilon}(t) = \bar{\sigma} \dot{\Pi}(t)$  убывает на луче  $t > 0$  и имеет предел  $v_\infty = \bar{\sigma} v \geq 0$ . Тогда и  $\Pi(t)/t \rightarrow v$  при  $t \rightarrow \infty$ , т.е.  $\Pi(t) = vt + o(t)$ , если  $v > 0$ . Значит, при больших  $t$  ТКП ОС (1.11) либо выходят на режим установившейся ползучести со скоростью  $\bar{\sigma} v > 0$ , либо обладают свойствами  $\dot{\varepsilon}(t) \rightarrow 0$  и  $\varepsilon(t) = o(t)$ .

Т.к. кривая обратной ползучести (1.17) убывает и положительна (ограничена снизу), она имеет предел  $\varepsilon_\infty \geq 0$  при  $t \rightarrow \infty$ , причём  $\varepsilon_\infty = \bar{\sigma} s$  (остаточная деформация), где  $s := \lim_{t \rightarrow \infty} S(t; T) \geq 0$ . Легко доказать, что  $s = vT$ , где  $v := \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\Pi}(t)$ . Если  $s > 0$ , то память модели (точнее, память оператора  $\Pi$ ) не затухает, ибо след, оставленный прямоугольным импульсом нагрузки, не стирается никогда. (Можно доказать, что обратный оператор  $\mathbf{R}$ , порождённый убывающей ФР, напротив, всегда обладает свойством затухания памяти.)

Для моделей (1.15)  $s = \alpha T$ , т.е.  $s > 0$  при  $\alpha > 0$ . Если ФП ограничена (например, (1.15) с  $\alpha = 0$  или модель Работнова), то  $s \equiv 0$  и  $\varepsilon(t) \rightarrow 0$ . Может быть  $s = 0$  и для неограниченной ФП, например, для  $\Pi(t) = \alpha t^\omega + \beta$ ,  $\omega \in (0; 1)$ ,  $\alpha, \beta > 0$  будет  $v = 0$ .

На рис. 1 приведены кривые обратной ползучести для моделей семейства (1.15) с  $\lambda = 0.1$ : «стандартного тела» (две чёрные кривые:  $\gamma = -0.5$ ,  $\alpha = 0.1$  и  $\alpha = 0.02$ ), Максвелла (синяя;  $\gamma = 0$ ,  $\alpha = 0.1$ ), Кельвина (голубая;  $\alpha = 0$ ,  $\gamma = -0.5$ ), Фойхта (красная;  $\beta = -\gamma = 1.5$ ). На КП модели Фойхта нет скачка деформации в момент скачка напряжения, ибо у неё  $\Pi(0) = 0$ . Этим же свойством обладает модель со степенной ФП (красный пунктир), но у неё правая касательная в точках  $t = 0$  и  $t = T$  вертикальна. Розовый пунктир – КП для выпуклой вниз ФП при  $\gamma > 0$  (недопустимой, т.к. КП возрастает и при  $t > T$ ).

$\varepsilon / \bar{\sigma}$

$\sigma(\varepsilon, b)$

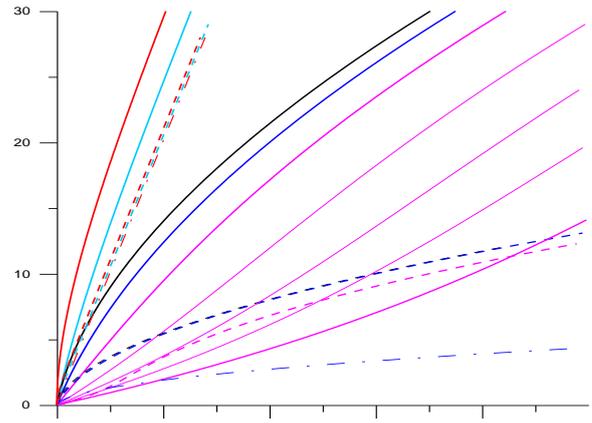
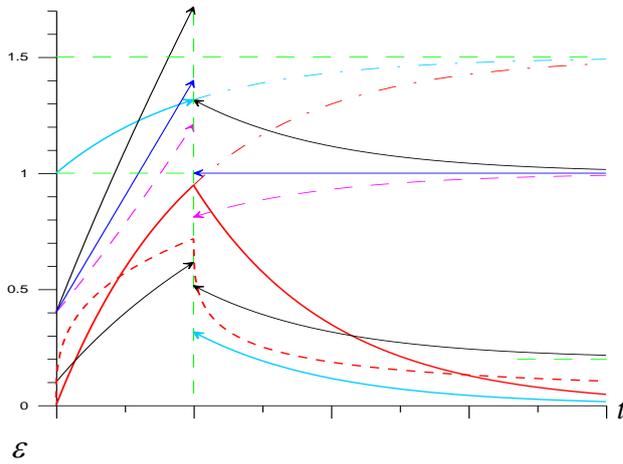


Рис.1. Кривые обратной ползучести моделей (1.15)      Рис.2. Диаграммы деформирования моделей (1.15)

### 6. Свойства диаграмм деформирования при постоянных скоростях нагружения

Уравнение ТДД с постоянной СН получается подстановкой в ОС (1.11) процесса  $\sigma = bt$ :

$$\varepsilon(\sigma, b) = \int_0^{\sigma/b} \Pi(x/b) dx, \text{ или } \varepsilon(\sigma, b) = \Theta(\sigma/b) \sigma, \text{ где } \Theta(t) := t^{-1} \int_0^t \Pi(\tau) d\tau, t > 0 \quad (2.1)$$

Осреднение ФП  $\Theta(t)$  - возрастающая непрерывно дифференцируемая функция при  $t > 0$ , причём  $\Theta(t) < \Pi(t)$ , ибо  $\Pi(t)$  возрастает;  $\Theta(0+) = \Pi(0+)$ ,  $\Theta(+\infty) = \Pi(+\infty)$ ,  $\dot{\Theta}(0+) = \dot{\Pi}(0+)/2$ .

$\varepsilon'_\sigma(\sigma, b) = \Pi(\sigma/b)$ , а касательный модуль  $\sigma'_\varepsilon(\varepsilon, b) = \varepsilon'_\sigma(\sigma, b)^{-1} = \Pi(\sigma/b)^{-1}$ .  $\sigma'_\varepsilon(\varepsilon, b) > 0$ , следовательно, ТДД  $\sigma = \sigma(\varepsilon, b)$  возрастает по  $\varepsilon$ . Так как ФП возрастает, то  $\varepsilon'_\sigma(\sigma, b)$  возрастает по  $\sigma$  и убывает по  $b$ , а  $\sigma'_\varepsilon(\varepsilon, b)$  убывает по  $\varepsilon$  и возрастает по  $b$ . Поэтому для любого  $b > 0$  ТДД  $\varepsilon(\sigma, b)$  выпуклы вниз, а ТДД  $\sigma(\varepsilon, b)$  всегда выпуклы вверх (рис. 2).

Нарушение выпуклости ТДД при постоянных СН  $b > 0$  может быть вызвано, только наличием участка убывания у ФП  $\Pi(t)$ , т.е. наличием участка убывания деформации на всех ТКП (1.16), что никогда не наблюдается на ЭКП в испытаниях материалов.

Семейство ТДД (2.1) убывает по  $b$ , поскольку  $\Theta(\sigma/b)$  убывает с ростом СН  $b$  (ведь  $\dot{\Theta}(t) > 0$ ), а семейство ТДД в форме  $\sigma = \sigma(\varepsilon, b)$  возрастает по  $b$  (выше СН - выше ТДД).

ТДД (2.1) зависит от СН, но начальный «модуль упругости» (модуль сдвига, объёмный модуль и т.п. - в зависимости от физического смысла  $\sigma$  и  $\varepsilon$ ) не зависит от скорости нагружения:  $E := \sigma'_\varepsilon(0, b) = \Pi(0)^{-1}$  (для ФП с  $\Pi(0) = 0$  будет  $E = \infty$ ). Любая ТДД (2.1) лежит «выше» (по оси  $\varepsilon$ ) прямой  $\varepsilon = \Pi(0)\sigma$ , так как  $\Theta(t) > \Theta(0+) = \Pi(0)$ . Соответственно, все ТДД в форме  $\sigma = \sigma(\varepsilon, b)$  лежат ниже (по оси  $\sigma$ ) этой прямой.

При СН  $b \rightarrow +\infty$  семейство ТДД  $\varepsilon(\sigma, b)$  сходится (убывая) к прямой  $\varepsilon = \sigma/E$  равномерно на любом отрезке оси  $\sigma$ : в силу монотонности,

$\sup_{[0,S]} |\varepsilon - \sigma / E| = \sup_{[0,S]} \sigma |\Theta(\sigma / b) - \Pi(0)| = s |\Theta(s / b) - \Pi(0)| \rightarrow 0$  при  $b \rightarrow \infty$ , ибо  $\Theta(0+) = \Pi(0)$ . Поэтому  $\sigma = E\varepsilon$  - теоретическая кривая мгновенного деформирования линейных ОС (напомним, что к ней сходится и семейство изохронных ТКП).

Так как для любой фиксированной СН функция  $\sigma'_\varepsilon(\varepsilon, b)$  убывает по  $\varepsilon$  и ограничена снизу, то существует предел  $E_\infty(b)$  при  $\varepsilon \rightarrow \infty$ . Если  $\Pi(t)$  ограничена, то  $E_\infty = 1/\Pi_\infty = R_\infty$ ; если же ФП не ограничена, то  $E_\infty = 0$ . Таким образом, длительный модуль  $E_\infty$  не зависит от СН  $b$ . Секущий модуль  $E_s := \sigma / \varepsilon = \Theta(\sigma / b)^{-1}$  также стремится к  $E_\infty$  при  $\varepsilon \rightarrow \infty$ , поскольку  $\Theta(+\infty) = \Pi(+\infty)$ . ТДД при постоянных СН имеют асимптоты тогда и только тогда, когда  $\Pi(t)$  ограничена и сходится интеграл  $\int_0^{+\infty} [\Pi_\infty - \Pi(\tau)] d\tau := Y > 0$ . Уравнение асимптот:  $\varepsilon = \Pi_\infty \sigma - bY$ , или  $\sigma = E_\infty \varepsilon + E_\infty bY$ . Их угловые коэффициенты не зависят от СН  $b$ . Из наличия у ТДД наклонной асимптоты  $\sigma = E_\infty \varepsilon + bE_\infty Y$  следует, что, когда СН  $b \rightarrow 0$ , семейство ТДД сходится (сверху) к прямой  $\sigma = E_\infty \varepsilon$ , т.е. к ТДД упругой модели. Сходимость равномерна на луче  $\varepsilon \geq 0$ , так как  $\sigma(\varepsilon, b)$  стремится к асимптоте снизу, и потому  $|\sigma(\varepsilon, b) - E_\infty \varepsilon| \leq bE_\infty Y$ .

Для моделей с ФП (1.15) ТДД (2.1):  $\varepsilon(\sigma, b) = 0.5\alpha b^{-1} \sigma^2 + \beta \sigma + \gamma \lambda^{-1} b (1 - e^{-\lambda \sigma / b})$ ,  $\sigma > 0$ .

Для модели «стандартного тела»  $\alpha \neq 0$  и  $-\beta < \gamma < 0$ ,  $\Pi(t)$  не ограничена, и ТДД не имеют асимптот. При  $\alpha = 0$  и  $-\beta < \gamma < 0$  (модели Кельвина-Пойтинга)  $\Pi(t)$  ограничена,  $Y = -\gamma / \lambda$ , и ТДД имеет асимптоту  $\varepsilon = \beta \sigma + \gamma \lambda^{-1} b$  при  $\sigma \rightarrow \infty$ . Поскольку  $\Pi(0) = \beta + \gamma$ , то (1.15) порождает сингулярные модели тогда и только тогда, когда  $\gamma = -\beta$ . При  $\alpha > 0$  (1.15) порождает все сингулярные трёхзвенные модели. У них модуль Юнга  $\sigma'_\varepsilon(0+, b) = \infty$  (т.к.  $\Pi(0) = 0$ ). Случай  $\gamma > 0$  приводит к нарушению условия выпуклости вверх ФП.

На рис.2 приведены ТДД при СН  $b=1$  для всех перечисленных моделей (1.15) (при  $\lambda=0.1$ ,  $\gamma=-0.5$ ): ТДД модели Фойхта (с  $\alpha=0$ ,  $\beta=0.5$ ) - красным, Кельвина-Пойтинга (с  $\alpha=0$ ,  $\beta=1$ ) - голубым, «стандартного тела» (с  $\alpha=0.1$ ,  $\beta=1$ ) - чёрным, модели Максвелла (с  $\gamma=0$ ,  $\alpha=0.1$ ,  $\beta=1$ ) - синим. Последняя служит водоразделом между допустимыми и недопустимыми ФП семейства (1.15) с  $\gamma > 0$  (розовые ТДД:  $\gamma=1; 3; 5; 7; 10$ ). Модели перечислены в порядке увеличения податливости. Пунктиром - ТДД тех же моделей для меньшей СН  $b=0.1$ . Штрих-пунктиром - для  $b=0.01$ . Хорошо видно, насколько модели с  $\alpha=0$  (с ограниченной ФП) менее чувствительны к СН: красные и голубые ТДД при  $b=0.1$  и  $b=0.01$  уже сливаются друг с другом (и ТДД предельной упругой модели) и довольно мало отличаются от ТДД при  $b=1$ .

## 7. О свойствах произведения функций ползучести и релаксации.

Можно доказать, что из (1.12) для монотонных ФР и ФП следует, что  $\Pi(t)R(t) < 1$  при  $t > 0$ , а равенство возможно только для идеально упругой среды (с  $R(t) = const$ ) [5].

Переходя в (1.12) к пределам  $t \rightarrow 0+$  и  $t \rightarrow +\infty$ , получим:  $\Pi(0)R(0) = 1$ ,  $\Pi_\infty R_\infty = 1$ .

Это верно, если  $R(0+)$ ,  $\Pi_\infty$  конечны. При  $R_\infty = 0$  будет  $\Pi_\infty = \infty$ , но неверно, что функция  $\Psi(t) := \Pi(t)R(t)$  всегда стремится к единице при  $t \rightarrow +\infty$  и  $t \rightarrow 0+$  (как утверждается, например, в [15, с.149]; неверно и то, что функция  $\Psi(t)$  всегда имеет один максимум [15] или минимум [17]. Например, для модели Максвелла  $\Psi(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +\infty$  и монотонно убывает (красная кривая на рис. 3,б), а для модели Фойхта (пунктир на рис. 3,а) – возрастает, причём  $\Psi(t) \rightarrow 1$  при  $t \rightarrow +\infty$  и  $\Psi(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow 0+$ . Для ньютоновской жидкости  $\Psi(t) \equiv 0$  при  $t > 0$ , для упругой среды  $\Psi(t) \equiv 1$ , для моделей с неограниченной ФР  $R(t) = At^{-\alpha}$ ,  $\alpha \in (0;1)$ , будет  $\Psi(t) \equiv C$ , где постоянная  $C$  зависит от МП  $\alpha$  и  $C(\alpha) \in (0;1)$  [5]. Для сингулярных трёхзвенных моделей (с двумя демпферами)  $\Psi(t) \rightarrow 0$  как при  $t \rightarrow 0+$ , так и при  $t \rightarrow +\infty$  (синие кривые), и может быть сколь угодно близка к нулевой функции [5] (хотя распространено представление о том, что  $\Psi(t)$  всегда мало отклоняется от единицы). Насколько разнообразны по очертаниям могут быть графики  $\Psi(t)$  даже только трёхзвенных моделей с ФП (1.15) показывает рис. 3. У четырёхзвенных регулярных и сингулярных моделей графики  $\Psi(t)$  могут быть такими же, как и у моделей Максвелла и Фойхта, либо могут иметь два экстремума [5].

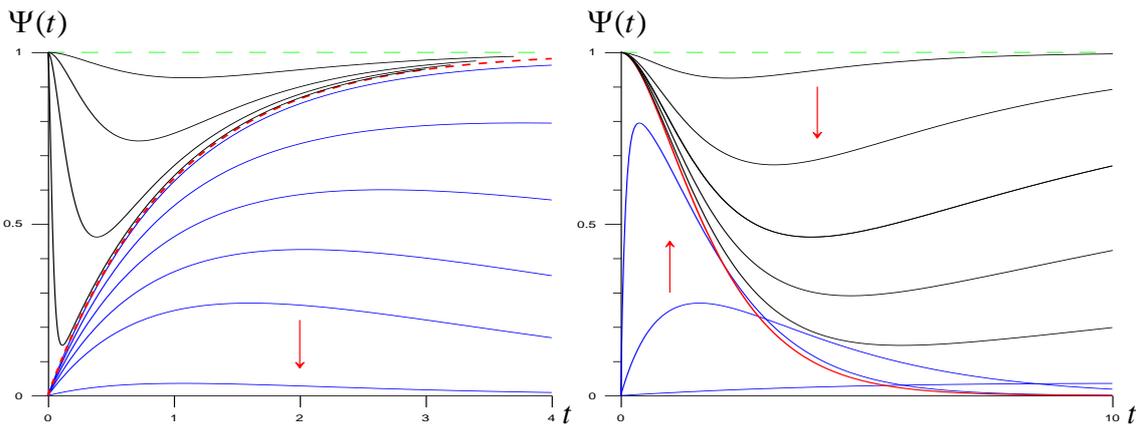


Рис. 3. а - Сходимость графиков  $\Psi(t)$  регулярных моделей Кельвина-Пойтинга (при  $\gamma/\beta \rightarrow 1$ ) и сингулярных трёхзвенных моделей (при  $\alpha/\beta \rightarrow 0$  и фиксированном  $\lambda$ ) к графику  $\Psi_F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$  модели Фойхта.

б - Сходимость графиков  $\Psi(t)$  моделей Кельвина-Пойтинга (с  $\gamma = \beta - 1$ ,  $\lambda = \beta^{-1}$  при  $\beta \rightarrow \infty$ ) и сингулярных трёхзвенных моделей (при  $\lambda \rightarrow \infty$ ) к графику  $\Psi_M(t)$  модели Максвелла (красным цветом)

### Заключение

Исследовано линейное определяющее соотношение вязкоупругости с произвольной функцией ползучести, изучены общие качественные свойства семейств теоретических кривых релаксации, ползучести, обратной ползучести, деформирования с постоянной скоростью, их зависимость от свойств функций ползучести и релаксации. Установлены характерные особенности поведения теоретических кривых, которые могут служить индикаторами применимости линейных уравнений вязкоупругости, легко проверяемыми экспериментально. Подобный качественный анализ теоретических кривых модели – важная стадия аттестации любого ОС (выявления арсенала его возможностей и области

адекватности), разработки способов идентификации, верификации и численной реализации, создания своеобразного технического паспорта-руководства модели. Он позволяет точнее очертить круг реологических явлений, которые ОС может адекватно описывать, и, в частности, – прояснить и скорректировать ряд представлений, бытующих в научной и учебной литературе по вязкоупругости.

### **Литература**

1. Хохлов А.В. Определяющее соотношение для реологических процессов: свойства теоретических кривых ползучести и моделирование затухания памяти // Известия РАН. МТТ. 2007. № 2. С. 147-166.
2. Хохлов А.В. Определяющее соотношение для реологических процессов с известной историей нагружения. Кривые ползучести и длительной прочности // Изв. РАН. МТТ. 2008. № 2. С. 140-160.
3. Хохлов А.В. Критерии разрушения при ползучести, учитывающие историю деформирования, и моделирование длительной прочности // Изв. РАН. МТТ. 2009. № 4. С.121-135.
4. Хохлов А.В. Нелинейные модели вязкоупругости типа Максвелла. Особенности их поведения, скоростная чувствительность и возможность использования для описания ползучести и сверхпластичности материалов. Отчёт о НИР № 5193. НИИ механики МГУ им. Ломоносова. 2013. № госрегистрации 01 20 1152141. 108 с.
5. Хохлов А.В. Качественный анализ линейных определяющих соотношений вязкоупругости. Свойства теоретических кривых деформирования, функций ползучести и релаксации и их произведения. Отчёт о НИР № 5218. НИИ механики МГУ им. Ломоносова. 2013. № госрегистрации 01 20 1152141. 93 с.
6. Хохлов А.В. Кривые обратной ползучести в рамках линейной вязкоупругости и необходимые ограничения на функцию ползучести // Проблемы прочности и пластичности. 2014. Вып. 76. С. 77-87.
7. Ильюшин А.А., Победря Б.Е. Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970. 280 с.
8. Быков Д.Л., Ильюшин А.А., Огибалов П.М., Победря Б.Е. Некоторые основные проблемы теории термо-вязко-упругости // Механика полимеров. 1971. № 1. С.41-58.
9. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
10. Бленд Д.Р. Теория линейной вязкоупругости. М.: Мир, 1965. 200 с.
11. Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости. М.: Мир, 1974. 338 с.
12. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твёрдых тел. М.: Наука, 1977. 384 с.
13. Колтунов М.А., Майборода В.П., Зубчанинов В.Г. Прочностные расчёты изделий из полимерных материалов. М.: Машиностроение, 1983. 239 с.
14. Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988. 712 с.
15. Георгиевский Д.В., Климов Д.М., Победря Б.Е. Особенности поведения вязкоупругих моделей // Изв. РАН. МТТ. 2004. №1. С. 119-157.
16. Ильясов М.Х. Нестационарные вязкоупругие волны. Баку, 2011. 330 с.
17. Бугаков И.И. Ползучесть полимерных материалов. М.: Наука, 1973. 287 с.

Работа выполнена при поддержке гранта  
РФФИ № 12-08-01227-а

# MOLECULAR DYNAMIC SIMULATIONS OF NICKEL NANOWIRES AT VARIOUS TEMPERATURES

M.M. Aish<sup>1,2</sup>, M. D. Starostenkov<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*I. I. Polzunov Altai State Technical University, Barnaul, Russia,*

<sup>2</sup>*Physics department, Faculty of science, Menoufia university, Egypt*

*e-mail: [mohamedeash2@yahoo.com](mailto:mohamedeash2@yahoo.com)*

**Abstract** – The mechanical properties of Nickel nanowires have been studied at various temperatures using molecular dynamics simulations. Molecular Dynamics (MD) simulations have been carried out on pure Nickel (Ni) crystal with face-centered cubic (FCC) lattice upon application of uniaxial tension at nanolevel with a speed of 20 m/s. The deformation corresponds to the direction <001>. To the calculated block of crystal - free boundary conditions are applied in the directions <100>, <010>. Morse potential was employed to carry out three dimensional molecular dynamics simulations. MD simulation used to investigate the effect of temperature of Ni nanowire on the nature of deformation and fracture. Temperature effect on the extension property of metal nanowire is discussed in detail. The mechanical strengths and the mechanical strain of the nanowires decrease linearly with the increasing temperature. The feature of deformation energy can be divided into four regions: quasi-elastic, plastic, flow and failure. Experiments have shown that when the temperature increases the first stage of deformation was narrowed, and the second stage was widened. The results showed that breaking position depended on temperature. The simulation results at nanoscale play an important role on the mechanical behaviors of nanostructures.

## Computer Simulation Model

The object of investigation is taken alloy Ni. Alloy structure is presented in the form of a face-centered cubic cell. In this paper for calculating the dynamics of the atomic structure of the molecular dynamics method using paired Morse potential function [1-4].

Morse pair potential is written as:

$$\varphi_{KL}(r) = D_{KL}\beta_{KL}e^{-\alpha_{KL}r} \left[ \beta_{KL}e^{-\alpha_{KL}r} - 2 \right] \quad (1)$$

Where  $\alpha_{KL}$ ,  $\beta_{KL}$ ,  $D_{KL}$  - parameters defining the interaction of pairs of atoms of type K and L;

r - the distance between the atoms.

The potential energy of a system of N atoms is represented as:

$$E = \frac{1}{2} \sum_{i=1, i \neq j}^N \sum_{j=1}^N \varphi_{KL}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) \quad (2)$$

Where  $\mathbf{r}_i$  - radius vectors of i-th atom.

When considering a closed system, the force acting on the i-th atom, will be:

$$\mathbf{F}_i = - \sum_{i=1, i \neq j}^N \sum_{j=1}^N \frac{d\varphi_{KL}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|)}{d(r_i - r_j)} \quad (3)$$

Mathematical model of the molecular dynamics method [5] describes a system of ordinary differential equations of motion of Newton. The equation of motion in the classical form is represented by:

$$m_i \frac{dv_i}{dt} = F_i \frac{dr_i}{dt} = v_i, i = 1, 2, \dots, N \quad (4)$$

Where  $m_i$  and  $v_i$  - mass and velocity of  $i$ -th atom - time.

To solve the system of ordinary differential equations by numerical Euler method with half-step. Temperature of the atoms in a perfect crystal, calculated using the formula:

$$T = \frac{2k}{3Nk_b} = \frac{1}{3Nk_b} \sum_I^N m_i v_i^2 \quad (5)$$

Where  $k_b$ , Boltzmann constant and  $K$ , is the total Kinetic energy.

Computer simulation using Morse potential is employed to carry out three dimensional molecular dynamics simulations of the mechanical properties of Nickel nanowire. We studied the extension properties of Nickel nanowires at various temperatures from 0 K to 1700 K, which is adjusted every  $10^{-13}$  seconds. The estimated size of the crystal unit was for various experiments of 1728 atoms (6 atoms along the edges and 96 atoms in height), 2916 atoms (9 atoms along the edges and 72 atoms in height) and 3456 atoms (12 atoms along the edges at the bottom and 48 - in height).

The dependence of mechanical properties on simulation temperature has also been studied [6,7]. The yield strength decreases with increasing temperature. Low yield strength at high temperature is because of the fact that the thermal fluctuations overcoming the energy barrier for dislocation nucleation.

In the study the following parameters were monitored: the stored strain energy, the diffusion coefficients of the components in the directions, the overall diffusion coefficient, the kinetic and potential energy of the crystal.

### Results and discussion, Temperature effect

The mechanical property at various temperatures With MD simulations, the uniaxial tension of the nickel nanowires are studied at various temperatures from 0 to 1700 K. Figure 2 gives the stress–strain relationships of the 6x6x96 nanowires subjected to uniaxial tension at temperatures 300 K. The strain was defined as:

$$\varepsilon = \frac{l-l_0}{l_0} \quad (7)$$

where  $l$  was the stretching length and  $l_0$  was the length just after relaxation.

The stress in the tensile direction was calculated as:

$$\sigma = \frac{1}{NV} \sum_i^N F_i r_i \quad (8)$$

Where  $V_i$  refers to volume of atom  $i$ .

With the increasing initial strain, stress increases linearly at various temperatures. This process corresponds to the elastic deformation of the nanowire. With the increasing strain, stress decrease as shown in the stress–strain response of the nanowire, indicating the beginning of the plastic deformation of the nanowire. the stress–strain curves are smooth at low temperatures, whereas, some “minipeaks” exhibit at high temperatures.

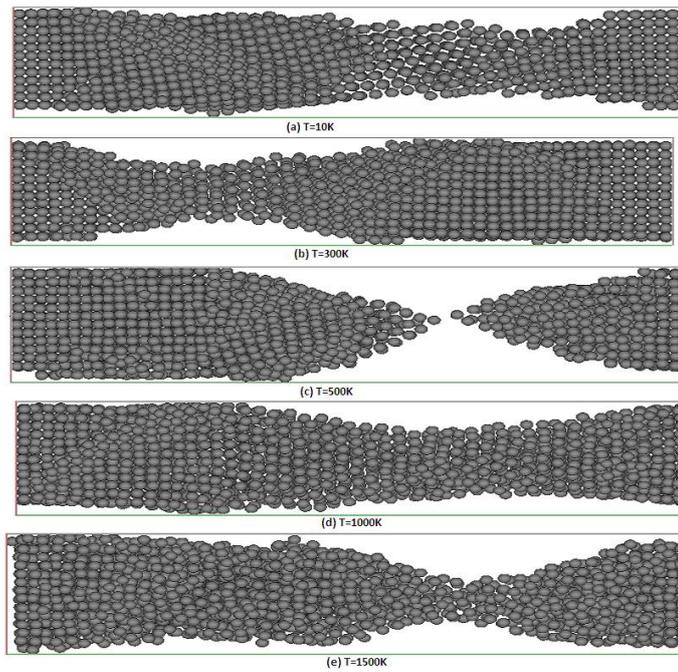


Fig. 1. Atomic configurations of 12x12x36 nanowire Nickel under extension loading at time 175 ps at various temperatures (a)  $T=10\text{ K}$ , plastic deformation occur (b)  $T=300\text{ K}$ , plastic deformation occur (c)  $T=500\text{ K}$ , break-up occur (d)  $T=1000\text{ K}$ , plastic deformation occur (e)  $T=1500\text{ K}$ , plastic deformation occur

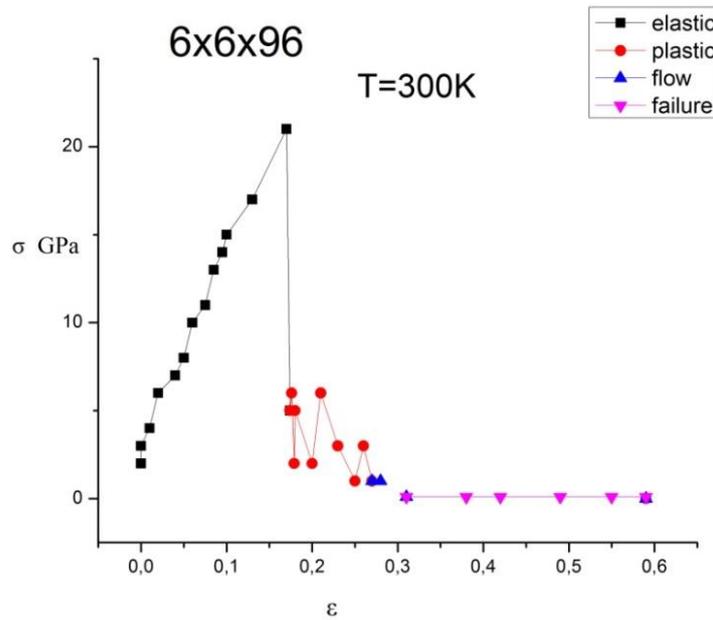


Fig. 2. The stress-strain relationships of the 6x6x96 nanowires subjected to uniaxial tension at temperatures 300 K

Table.1.  
Results of MD simulation of uniaxial tensile loading with  
12x12x28 Nickel nanowire. Number of atoms=3456.

Temperature	Ultimate strength (GPa)	kinetic energy of the system, eV	Strain at max. stress
0	31	1	0.1
100	25	45	1.25
200	23	90	1.2
300	22	134	1.229
500	19	225	0.91
800	15	260	0.625
1000	14	325	0.479
1200	12	540	0.416
1500	<b>11</b>	690	0.208
1700	10	760	0.2

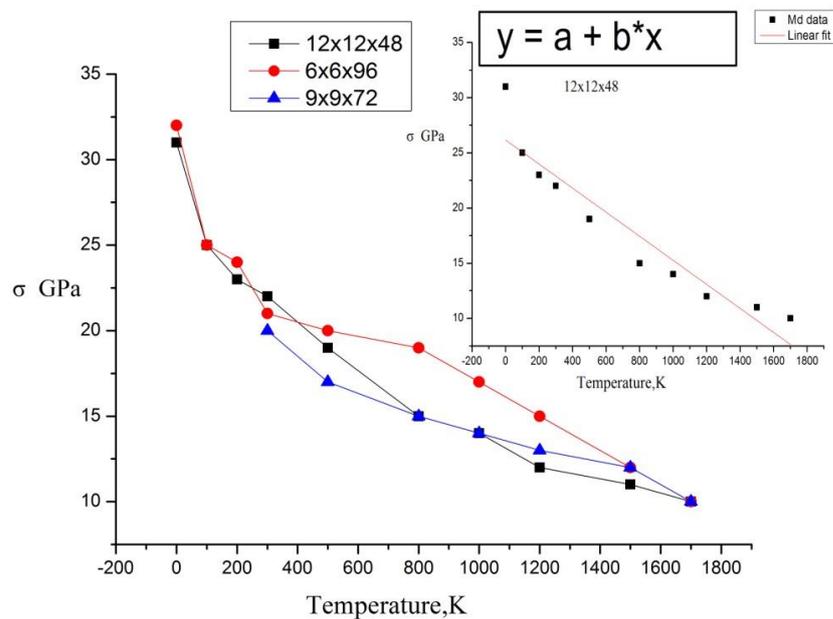


Fig. 3. The curves of stress with temperatures.

It is observed that the first yield stress decreases as the temperature increases (Fig. 3). When the plastic deformation of the nanowire begins, the drop of the first yield stress also decreases. In order to clearly study these characters, in Fig. 4, we show the average statistical results of the first yield strain ( $\epsilon$ ), the first yield stress ( $\sigma$ ) at various temperatures. The average result is from 300 samples at each temperature, and temperatures from 0 to 1700 K. As shown in Fig. 4, the first yield strain ( $\epsilon$ ) decreases when the temperature increases. From 0 to 1700 K, an abrupt decrease is identified and the first yield strains are 1.25 (100 K) and 0.2 (1700 K) with Ni alloy 12x12x48, 1.6 (10 K) and 0.07 (1700 K) with Ni alloy 9x9x72 and 1.46 (100 K) and 0.052 (1700 K) with Ni alloy 6x6x96. The bigger strain at low temperature indicates that the nanowire maintains its elastic deformation for long time. Whereas, the smaller strain at high temperature illustrates that the plastic deformation begins quickly. Deformation of the nanowire is in a fast stage of the atomic damage process at high temperature.

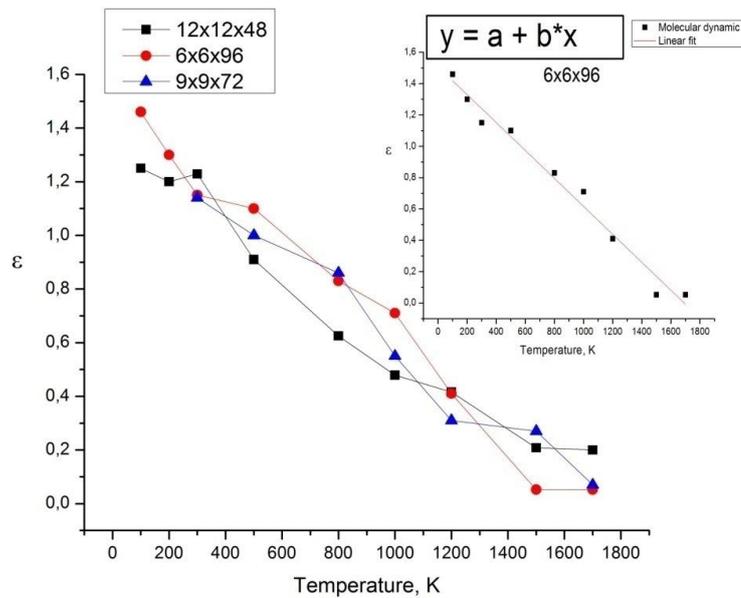


Fig. 4. The curves of strain with temperatures

### Conclusion

The new concept of using nanowires as building blocks for logic and memory circuits makes it very necessary to fully understand the mechanical behaviors of these nanowires. Molecular dynamics simulations have been carried out to investigate the mechanical behaviors of Nickel nanowire. The effect of temperature on mechanical properties was investigated by MD simulations. The stress-strain relation of nanowire is obtained. The temperature effect on the extension properties is discussed in detail. Temperature exhibited a great effect on the mechanical properties of nanowires. Study on the mechanical properties of metal nanowires can give us more fundamental understanding of nanoscale machines from atomistic motions. The deformations of the nanowires were observed at low, middle, and high temperatures, respectively. The investigation on the configuration, stress, elasticity, yielding and deformation will contribute to the design, manufacture and manipulation of nano-devices. This study of mechanical properties of metal nanowires will be helpful to the design, manufacture and manipulation of nano-devices.

### REFERENCES

1. Gorlov NV Computer modeling of planar defects in ordered alloys of A3B and A3B (C), PhD thesis / NV Gorlov. - Tomsk 1987.
2. H. Rafii-Tabar, Phys. Rep.325, 239 (2000).
3. Calculation of the Morse potential for solid gold, Kozlov E.V., Popov L.E., Starostenkov M.D. Russian Physics Journal. 1972. T. 15. № 3. C. 395.
4. L. A. Girifalco and V. G. Weizer, Phys. Rev., 114, 667 (1959).
5. Poletaev GM Atomic mechanisms of diffusion in metallic systems with fcc lattice, D.Sc. thesis. / GM Poletaev. - Barnaul 2006.
6. A.M. Iskandarov, Y. Umeno, S.V. Dmitriev, Temperature effect on graphene strength, Письма о материалах т.1 (2011) 143-146.
7. P. Hirel,\* S. Brochard, L. Pizzagalli and P. Beauchamp, Effects of temperature and surface step on the incipient plasticity in strained aluminium studied by atomistic simulations. Scripta Materialia 57 (2007) 1141-1144

# СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

<b>Ломакин В.Е., Полилов А.Н.</b> К 100-летию со дня рождения академика Ю.Н.Работнова. Наследственность в науке и в жизни	<b>4</b>
<b>Алексеева С.И., Викторова И.В., Фроня М.А.</b> Развитие наследственной модели работнова и анализ деформационных характеристик композитов	<b>11</b>
<b>Аннин Б.Д.</b> Об одном классе определяющих соотношений линейной анизотропной наследственной теории упругости	<b>18</b>
<b>Банщикова И.А., Горев Б.В.</b> Кручение пластин с пониженной сопротивляемостью деформациям ползучести в направлении толщины	<b>23</b>
<b>Боган Ю.А.</b> Осредненные соотношения для микронеоднородной слоистой среды при нестандартных условиях контакта слоев	<b>29</b>
<b>Буренин А.А., Мурашкин Е.В.</b> Математическая теория больших упругоползучепластических деформаций	<b>32</b>
<b>Долотов А.М.</b> Контактная задача вдавливания конуса в торец короткой цилиндрической оболочки	<b>39</b>
<b>Зезин Ю.П.</b> Исследование релаксационных свойств эластомерных композитов	<b>47</b>
<b>Зуев В.В., Шмелева А.Г.</b> Некоторые динамические задачи для сред с разупрочнением	<b>53</b>
<b>Ковалев В.А., Радаев Ю.Н.</b> Ротационно-инвариантные лагранжианы континуумов с рассеянным полем микроповреждений	<b>57</b>
<b>Ковалев В.А., Мурашкин Е.В., Радаев Ю.Н.</b> Комплексные постоянные распространения плоских термоупругих волн в континуумах с микроструктурой	<b>65</b>
<b>Кокуров А.М., Плугатарь Т.П., Малахов А.В., Одинцев И.Н.</b> Экспериментальное исследование биокомпозитов с различными структурами армирования	<b>73</b>
<b>Коробейников С.Н., Ларичкин А.Ю., Любашевская И.В., Торшенов Н.Г., Чунихина Е.В.</b> Выпучивание сжатых круговых цилиндрических оболочек из циркониевого сплава в условиях ползучести	<b>78</b>

<b>Локощенко А.М.</b> Некоторые проблемы ползучести и длительной прочности металлов	<b>86</b>
<b>Ломакин Е.В., Федулов Б.Н.</b> Сжатие пластины с круговым вырезом из слоистого композита с учетом упругих нелинейных сдвиговых свойств	<b>94</b>
<b>Маховская Ю.Ю.</b> Влияние адгезии на силу трения при скольжении вязкоупругих тел	<b>100</b>
<b>Мурзаханов Г.Х., Хроматов В.Е., Щугорев В.Н.</b> Научное и учебное наследие Ю.Н. Работнова в МЭИ	<b>107</b>
<b>Новоженова О.Г.</b> Воспоминания о функционалах Вольтерра, дробно-экспоненциальной функции Работнова, Миттаг-Леффлера и вырожденной гипергеометрической функциях, а также краткий обзор соответствующих работ	<b>113</b>
<b>Плитов И.С.</b> Оценка влияния разориентации волокон на форму равнопрочных композитных элементов	<b>119</b>
<b>Правоторова Е.А., Скворцов О.Б.</b> Минимизация количества испытаний металлических проводников при воздействии импульсных токов на основе применения теории эргодических процессов	<b>127</b>
<b>Преснов Н.Д., Сазонов В.Г.</b> Способ нагружения резиноподобных материалов для оценки пределов линейности их механических свойств при деформировании	<b>133</b>
<b>Пыхалов А.А., Каргапольцев С.К.</b> Анализ прочности и динамических характеристик сборных конструкций роторных систем и других изделий с применением метода конечных элементов и контактной задачи деформируемого тела	<b>139</b>
<b>Русланцев А.Н., Думанский А.М., Таирова Л.П.</b> Наследственно-упругие свойства косоугольно армированного углепластика	<b>148</b>
<b>Сазонов В.Г.</b> Оценка погрешности аппроксимации рядами экспонент функций, используемых для описания явлений ползучести и релаксации	<b>153</b>
<b>Сахаров А.Н., Карулин Е.Б., Марченко А.В., Чистяков П.В.</b> Устойчивость плавающего покрова морского льда при длительном одноосном сжатии	<b>161</b>
<b>Сташенко В.И., Троицкий О.А.</b> Влияние СВЧ- излучения различной направленности компоненты поля на пластическую деформацию растяжением и релаксацию напряжений стали	<b>170</b>

<b>Сухинин С.Н.</b> Устойчивость трёхслойных композитных оболочек: математические модели, границы их применимости, расчётные зависимости и особенности сопротивления	<b>178</b>
<b>Татусь Н.А., Полилов А.Н.</b> Профилированные композитные балки. Этюд об одной трети	<b>185</b>
<b>Терехин А.В., Думанский А.М., Неповинных В.И.</b> Экспериментальное исследование длительной прочности и ползучести высокоэластических полимерных адгезивов в конструкциях летательных аппаратов	<b>191</b>
<b>Троицкий О.А.</b> Спиновое разупрочнение металла как возможная причина усиления электропластического эффекта в металле в поле СВЧ-излучения	<b>196</b>
<b>Хвостунков К.А., Недбайло А.Б.</b> Предел рассеивания энергии в кончике трещины в композитах из хрупких компонентов со слабой границей раздела	<b>199</b>
<b>Хохлов А.В.</b> Качественный анализ и теоретико-экспериментальные индикаторы применимости линейных определяющих соотношений вязкоупругости	<b>205</b>
<b>Aish M.M., Starostenkov M. D.</b> Молекулярно-динамического моделирование поведения нановолокон никеля при различных температурах	<b>216</b>
<b>СОДЕРЖАНИЕ</b>	<b>221</b>

**«Наследственная механика деформирования  
и разрушения твердых тел  
- научное наследие Ю.Н.Работнова»**

**Труды конференции**

**Ответственный редактор      Татусь Н.А.**

*“Примечание.  
Редактор за орфографику  
афторов отвесственности ни-несёт!”*



Книжная типография  
БУКИ ВЕДИ

<b>Название книги</b>	<b>«Наследственная механика деформирования и разрушения твердых тел - научное наследие Ю.Н.Работнова»</b>
<b>Автор</b>	<b>Коллектив авторов</b>
<b>ISBN</b>	<b>978-5-4253-0727-9</b>
<b>УДК</b>	<b>531</b>
<b>ББК</b>	<b>22.251</b>
<b>Авторский знак</b>	<b>Н-31</b>
<b>ИД</b>	<b>000 «Ваш полиграфический партнер»</b>
<b>Адрес ИД</b>	<b>127238, Москва, Ильменский пр, д. 1, стр. 6</b>

Книжная типография  
БУКИ ВЕДИ  
Тел: +7 (495) 926 63 96  
e-mail: [info@bukivedi.com](mailto:info@bukivedi.com)  
[www.bukivedi.com](http://www.bukivedi.com)