

Исследование явлений тепло- и влагопереноса во время фазовых переходов  
жидкость - твердое тело в многослойных объектах

*О.В. Лебедев, О.Н. Будадин, М.Н. Слитков, В.Г. Авраменко, Д.В. Киржанов*

*Технологический институт энергетических исследований, диагностики и неразрушающего  
контроля "ВЕМО", Россия, г.Москва, 113162 Люсиновская ул., д.62,*

*E-mail: [oleg@shg.ru](mailto:oleg@shg.ru), [budadin@tsinet.ru](mailto:budadin@tsinet.ru).*

Рассмотрена задача Стефана о перемещении границы плоскости промерзания в многослойных объектах. Для решения данной задачи на практике при расчете текущей координаты фронта промерзания в многослойных наружных ограждающих конструкциях, температуры поверхностей которых изменяются во времени, использованы численные методы при интегрировании уравнения теплопроводности и влагопереноса. При интегрировании уравнения Стефана процесс фазового перехода учитывается с помощью резкого скачка удельной теплоемкости материала в окрестности температуры фазового перехода. Приведены примеры численных расчетов зависимости положения плоскости промерзания в многослойных конструкциях от времени. В статье предложен алгоритм определения текущей координаты точки росы в многослойных объектах.

## **1. Введение**

Задача исследования условий формирования и динамики фазового перехода жидкость – твердое тело имеет широкое практическое применение, так как она непосредственно связана с вопросами запасания тепловой энергии, контролирования температуры и влажности, долговечности и прочности исследуемых систем. К тому же, энергия, накапливаемая во время плавления,

может быть выделена во время процесса затвердевания, что ведет к широкому спектру различных энергетических задач. Возможные прикладные применения охватывают многочисленный круг технологий, к примеру, сталелитейная промышленность, промерзание почвы, системы теплового контроля космических аппаратов и наземных промышленных и гражданских объектов. Решение данной задачи находит практическое применение в строительной индустрии, где остро стоит проблема определения текущего положения фронта промерзания в наружных ограждающих конструкциях зданий и строительных сооружений. Положение фронта промерзания непосредственно связано с долговечностью ограждающих конструкций. Действительно, в зоне перемещения фронта промерзания создаются крайне неблагоприятные условия эксплуатации материала ограждающих конструкций вследствие возможного чередования замерзания и оттаивания, которое может постепенно привести к снижению прочности, а, в конечном счете, и к разрушению конструкции.

Для беспримесных материалов фазовый переход возникает при фиксированной температуре, что выражается в четкой границе между жидкой и твердой фазой, например, при замерзании воды или быстром затвердевании металлов. В противоположность этому в мультикомпонентных веществах фазовый переход происходит не при фиксированной температуре, а в некотором температурном диапазоне. В этом случае твердая и жидкая фазы отделены друг от друга, так называемой, переходной областью, которая характеризуется вкраплениями твердотельных субстанций в жидкости. Данные процессы характерны для затвердевания воска или полимеров, оттаивания продуктов и т.д.

Теоретический анализ процессов, происходящих при фазовых переходах подразумевает совместное решение уравнения теплопроводности для твердой фазы, уравнений, выражающих законы сохранения массы, момента, энергии для жидкой фазы, сцепленные граничными условиями на границе жидкость-твердое тело. Даже если пренебречь естественной конвекцией, то во время

процесса фазового перехода в одномерном приближении граница между двумя фазами постоянно перемещается и ее текущая позиция *a priori* неизвестна. Одномерное приближение не всегда адекватно описывает процесс тепло-влажнопереноса. Решение данной задачи в двух- или трехмерном случае приводит к существенному усложнению расчетов. Из-за вышеуказанных проблем существует лишь ограниченное число аналитических решений для частично упрощенных случаев, поэтому, на практике часто применяются численные методы.

Математическая модель процессов замерзания жидкости в пористых материалах была впервые представлена в 1950-е годы Лыковым, рассматривающим совместно явления тепло- и влажнопереноса <sup>[1]</sup>. По-видимому, Брансье был первым, кто изучал систему, подверженную воздействию периодически чередующихся процессов плавления и таяния <sup>[2]</sup>. В рамках модели одномерной проводимости им были рассмотрены проблемы запасания скрытой теплоты фазового перехода и для прямоугольных пластин, и для полого цилиндра. Бардон <sup>[3]</sup> впервые представил результаты по экспериментальному изучению процессов теплопередачи в объектах прямоугольной формы при периодических изменениях температуры на их границах. Хасан <sup>[4]</sup> с помощью численных методов теоретически рассчитал и экспериментально исследовал процесс плавления и затвердевания (влаги внутри) плоской прямоугольной пластины, периодически изменяя температуру вблизи точки фазового перехода на границах пластины. Это исследование было продолжено Веллером <sup>[5]</sup>, который стал учитывать движение жидкости. Гасеми и Молки <sup>[6]</sup> развили данный анализ, исследовав численно процесс плавления и затвердевания стали при периодических изменениях температуры на границах вблизи точки фазового перехода. В этой работе был рассмотрен процесс теплопередачи в двухфазовой переходной области вблизи границы жидкость - твердое тело, где фазовый переход происходил не при фиксированной температуре, а в некотором интервале температур. В работе <sup>[7]</sup> численно и

экспериментально исследовался процесс оттаивания/затвердевания с граничными условиями, изменяющимися во времени по синусоидальному закону.

## 2. Общая формулировка задачи.

Сформулируем задачу о перемещении границы раздела фаз как задачу Стефана, в которой изменение агрегатного состояния происходит при определенной температуре  $T_k$ . То есть существует четкая изотермическая граница, разделяющая области твердой и жидкой фазы. В дальнейшем параметры затвердевшей области будем помечать индексом “1”, а параметры незатвердевшей области – индексом “2”.

Формулировка задачи Стефана для жидкой фазы вблизи точки фазового перехода в одномерном приближении на интервале  $x \in [0;1]$  выглядит следующим образом <sup>[13, 20]</sup>:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} + x \frac{dx_k(t)}{dt} \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} = x_k^2(t) \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} & x \in [0;1] \\ x_k(t) \frac{dx_k(t)}{dt} = - Ste \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} & (x = x_k) \end{cases}$$

(1)

где  $T(x,t)$  – распределение температуры,

$x_k$  – координата границы фазового перехода,

$Ste$  – число Стефана,  $Ste = C_2 \Delta T_{ref} / L_v$

$C_2$  – теплоемкость жидкой фазы,

$L_v$  - скрытая теплота фазового перехода,

$\Delta T_{ref}$  – “референсная” температура <sup>[8]</sup>).

Изменение агрегатного состояния объекта в общем случае имеет два следствия, влияющие на тепловой режим внутри объекта: во-первых, при перемещении границы затвердевания выделяется скрытая теплота фазового

перехода, а во-вторых, изменяются теплофизические характеристики материала. В этом случае необходимо решать уравнение теплопроводности как в затвердевшей, так и в незатвердевшей области и помимо граничных условий на поверхности тела:

$$\begin{aligned} x_k &= 0 \quad \text{при } t \leq 0, \\ T &= f(t) \quad \text{при } x = 0, t > 0, \\ T &= 0 \quad \text{при } x = 1, t > 0, \end{aligned} \quad (2)$$

дополнительно задавать два условия на границе затвердевания:

1) уравнение теплового баланса:

$$\lambda_1 \frac{\partial T}{\partial x}(x = x_k - 0) - \lambda_2 \frac{\partial T}{\partial x}(x = x_k + 0) = L_v \frac{dx_k}{dt}; \quad (3)$$

2) условия равенства температур:

$$T_1(x = x_k - 0) = T_2(x = x_k + 0) = T_k. \quad (4)$$

Первый член уравнения (3) выражает плотность теплового потока  $S_1$ , который отводится от границы раздела фаз через затвердевшую область; второй член – плотность теплового потока  $S_2$ , поступающего к границе раздела фаз из незатвердевшей области.

Правая часть уравнения (3) представляет собой плотность теплового потока, возникающего благодаря выделению скрытой теплоты фазового перехода. При затвердевании значение объемной теплоты фазового перехода выражается формулой:

$$L_v = w r \rho, \quad (5)$$

где  $w$  - массовая доля влаги в материале;

$r$  - теплота фазового перехода единицы массы жидкости материала;

$\rho$  - плотность влажного материала.

### 3. Аналитическое решение задачи о перемещении границы промерзания

Точное аналитическое решение задачи Стефана возможно только для ограниченного набора форм тел и граничных условий. Поскольку на практике приходится исследовать многослойные объекты, имеющие разнородные по теплофизическим характеристикам слои, а температура объекта и коэффициент теплоотдачи на его поверхностях изменяются во времени, то о точном аналитическом решении говорить затруднительно.

Для упрощения решения данной задачи без существенного снижения достоверности получаемых результатов введем допущение о квазистационарности температурного режима в затвердевшей области. Действительно, процесс затвердевания идет довольно медленно, поэтому температура в объекте хотя и изменяется, но ее пространственное распределение в каждый момент времени можно принять соответствующим установившемуся состоянию. В задачу о фазовых превращениях можно существенно упростить, если заранее задаться распределением температуры в затвердевшей и незатвердевшей части объекта. Благодаря этому решение задачи сводится к определению координаты границы затвердевания с помощью уравнения теплового баланса. При этом заданное пространственное распределение температуры следует выбирать по возможности ближе к пространственному распределению температуры в многослойном объекте на практике.

Так как теплоемкость исследуемого объекта не равна нулю, то по мере продвижения границы затвердевания энтальпия объекта изменяется. Тепловой поток, связанный с изменением энтальпии затвердевшего тела, может быть учтен, если вместо объемной теплоты фазового перехода использовать в расчетах ее эффективное значение:

$$L_{v \text{эфф}} = L_v + c_l \rho_l (T_k - T_n) / 2, \quad (6)$$

где  $T_n$  - температура на внешней поверхности тела.

Анализ точных аналитических решений задачи Стефана, проведенный в [9] показывает, что приближенные решения, основанные на замене

неустановившегося режима в затвердевшей зоне квазиустановившимся режимом с поправкой (6) соответствуют первым, наиболее весомым членам ряда, которым описывается распределение температуры в объекте в точном аналитическом решении текущее.

В качестве примера использования данного приближения рассмотрим задачу о движении границы промерзания в полубесконечном объекте, на поверхности которого задана постоянная температура  $T_n$ , которая ниже температуры фазового перехода  $T_k$ . На границе фазового перехода плотность теплового потока, поступающего из незатвердевшей области, изменяется по закону  $S_2 = S_0 / \sqrt{t}$  [9], где  $S_0$  - начальная плотность теплового потока на границе раздела фаз.

Тогда уравнение теплового баланса на границе затвердевания имеет следующий вид:

$$\lambda_1 \frac{T_k - T_n}{x_k} - \frac{S_0}{\sqrt{t}} = L_{v \rightarrow \phi \phi} \frac{dx_k}{dt} .$$

(7)

Для определения величины теплового потока, подводимого из незатвердевшей области, можно воспользоваться решением задачи нестационарной теплопроводности в полубесконечном объекте, температура поверхности которого в начальный момент времени  $t = 0$  изменяется скачком от начального значения  $T_0$  до конечного значения  $T_k$ . Плотность теплового потока, протекающего через поверхность объекта в момент времени  $t$ , определяется следующим выражением [9]:

$$q = \frac{\lambda_2 (T_k - T_0)}{\sqrt{\pi a_2}} \frac{1}{\sqrt{t}} , \quad (8)$$

где  $a_2 = \frac{\lambda_2}{c_2 \rho_2}$  - коэффициент температуропроводности незатвердевшей зоны;

$\lambda_2, c_2, \rho_2$  - коэффициент теплопроводности, удельная теплоемкость и плотность незатвердевшей зоны;

Сравнивая второй член уравнения (7) с правой частью (8), легко заметить, что  $S_0 = -\frac{\lambda_2(T_k - T_0)}{\sqrt{\pi a_2}}$  (смена знака указывает на то, что тепло поступает к границе раздела фаз из незатвердевшей области).

Решения дифференциальное уравнения (7) относительно  $x_k$ , получаем следующее выражение для текущей во времени границы затвердевания:

$$x_k = \beta \frac{S_0 \sqrt{t}}{L_{v \rightarrow \phi \phi}},$$

(9)

$$\text{где параметр } \beta = -1 + \sqrt{1 + \frac{2L_{v \rightarrow \phi \phi} \lambda_1 (T_k - T_n)}{S_0^2}}.$$

(10)

В качестве примеров, иллюстрирующих выведенные соотношения, рассмотрим наружные ограждающие конструкции - 2 влажные стены из кирпича и пенополистирола, имеющие следующие теплофизические характеристики:

Кирпичная стена: теплопроводность  $\lambda = 0,81$  Вт/м К, теплоемкость  $c = 880$  Дж/кг К, плотность  $\rho = 1800$  кг/м<sup>3</sup>, начальное содержание влаги в веществе  $w = 0,02$ ;

Стена из пенополистирола:  $\lambda = 0,052$  Вт/м К,  $c = 1340$  Дж/кг К,  $\rho = 100$  кг/м<sup>3</sup>,  $w = 0,10$ .

Предположим, что теплофизические характеристики фрагмента стены с замерзшей влагой и незамерзшей влагой примерно равны (поэтому, индексы «1» и «2» опущены). Температура на поверхности стены принимается равной  $T_n = -20^\circ\text{C}$ , начальная температура -  $T_0 = 20^\circ\text{C}$ , а температура замерзания влаги -  $T_k = 0^\circ\text{C}$ . Процесс промерзания рассмотрен в течение 24 часов. Результаты расчетов представлены на рис.1 и рис.2 на кривой 0 (кривые «1» и «2» будут обсуждаться далее). Из построенных зависимостей следует, что к исходу 24 часа глубина промерзания кирпичной стены составляет 210 мм, а глубина

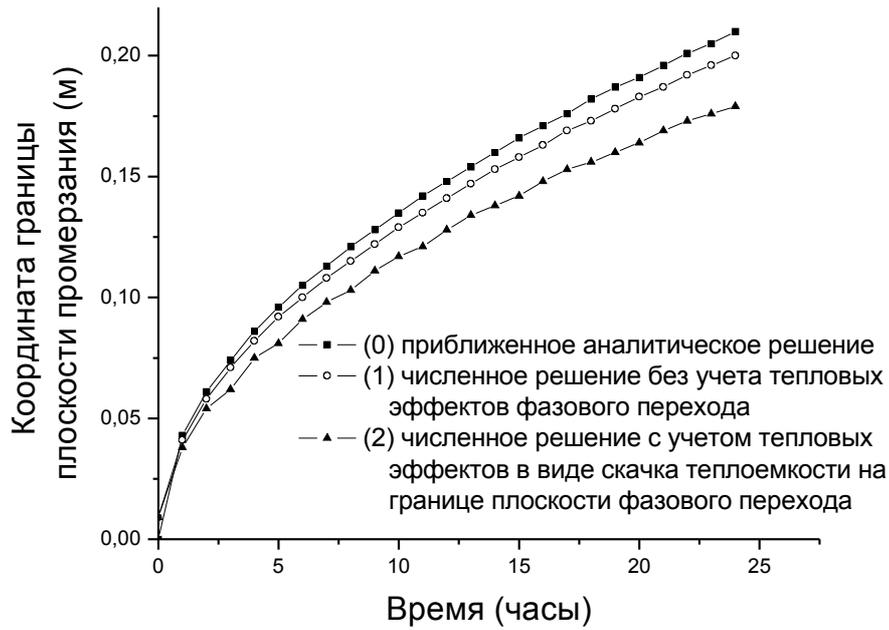


Рис.1. Зависимость положения плоскости промерзания от времени в кирпичной стене

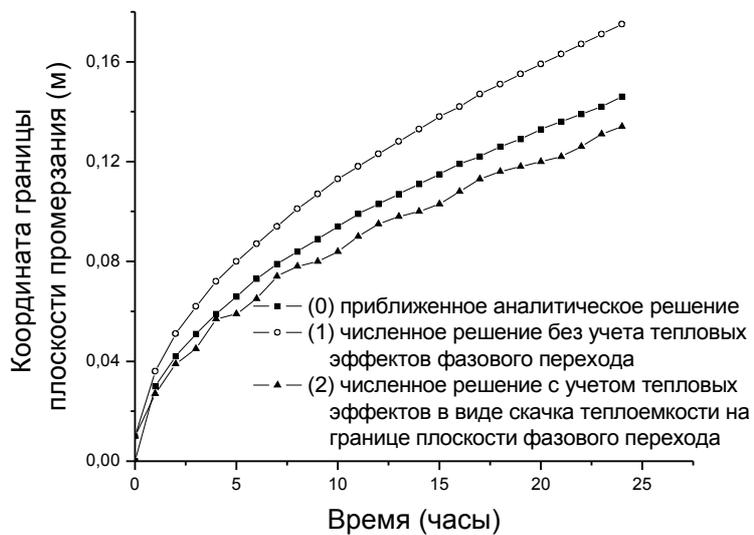


Рис.2. Зависимость положения плоскости промерзания от времени в стене из пенополистирола.

#### 4. Численное решение задачи о перемещении границы промерзания

Таким образом, из-за трудности получения аналитического решения задачи с подвижной границей при явлениях тепло- и влагопереноса с фазовым переходом, часто используются различные численные методы решения <sup>[10]</sup>. При численном решении задачи с граничными условиями, зависящими от времени, очень важно выбрать правильный шаг интегрирования по пространству и времени.

Численное решение задачи Стефана с граничными условиями первого или второго рода, периодически изменяющимися во времени или зависящими от времени по линейному или экспоненциальному закону рассмотрены в <sup>[11, 12, 13]</sup>. Решение задачи Стефана с граничными условиями, периодически зависящими от времени, особенно важно для практического применения строительной индустрии, где температура окружающей среды периодически меняется в течение суток, и промышленности, где производственный процесс также может быть циклическим.

Определение координаты и скорости перемещающейся границы плоскости промерзания и температурного распределения внутри исследуемого объекта важно для прикладных целей. Сравнение различных численных методов решения задачи Стефана при вычислении координаты границы плоскости промерзания было сделано Фюрзеландом <sup>[12]</sup>.

Есть два основных подхода к численному решению задачи Стефана. Первый подход (front-tracking method) основан на непрерывном отслеживании положения границы плоскости промерзания. К примеру, метод интегрального теплового баланса <sup>[14]</sup> явно отслеживает перемещение со временем изотерм (граница фазового перехода является одной из них). Другие методы

основаны на точном численном интегрировании задачи Стефана с использованием переменной пространственной и временной сетки. Рассчитав пространственное распределение температуры в объекте в различные моменты времени, можно отследить изменение положения границы фазового перехода <sup>[15]</sup>. Однако эти методы плохо подходят для многомерных задач из-за сложностей построения оптимального алгоритма вычисления и большого времени “машинного счета”.

В рамках альтернативного подхода задача Стефана решается в малой переходной области вблизи границы фазового перехода. Вне этой области, распределение температуры рассчитывается с помощью решения уравнения теплопроводности. Например, в методе перемещения изотерм в качестве независимой переменной используется температура <sup>[16]</sup>. В методе энтальпии независимой переменной является энтальпия<sup>[17,18]</sup>. Существуют также методы, в которых задача Стефана решается в системе координат, где позиция плоскости промерзания остается неизменной с течением времени, однако все эти методы сопряжены с рядом дополнительных трудностей<sup>[19, 20, 21]</sup>.

Для интегрирования задачи Стефана использовались разные численные методы, включая метод конечных элементов, метод конечных разностей и различные интегральные методы. Задача Стефана с различными граничными и начальными условиями численно решена для объектов разной формы <sup>[19,22,23,24]</sup>. Решения, основанные на методе конечных разностей, о которых упоминается в литературе, используют одномерное приближение. Для решения задачи Стефана также использовался метод интегрального уравнения (Мэнниг и Озисик<sup>[11]</sup>) и метод “узлового интеграла” (Ризваном-Уддином <sup>[13, 20]</sup> ). Всем перечисленным методам свойственны определенные достоинства и недостатки, поэтому выбор между методами конечных элементов, конечных разностей и интегральным методом не всегда очевиден.

Для численного интегрирования задачи Стефана необходимо использовать конечно-разностную аппроксимацию дифференциального

уравнения теплопроводности и условий Стефана (1-4). По мнению авторов работ <sup>[25,26]</sup>, для аппроксимации можно использовать явную схему интегрирования без потери устойчивости решения. Помимо существенного упрощения вычислений такая схема позволяет за счет надлежащего подбора соотношения шагов по времени  $\Delta t$  и по пространственной координате  $h$  повысить точность решения до  $\Delta t^2 + h^4$ . Как показано в <sup>[27]</sup>, для этого достаточно выполнения равенства  $a\Delta t/h^2 = 1/6$ , где  $a$ -коэффициент температуропроводности материала объекта.

Рассмотрим в качестве исследуемого объекта многослойную стенку. Температуру  $i$ -го пространственного узла слоя стенки в  $(j+1)$ -й момент времени можно определить через температуры  $i$ -ого,  $(i-1)$ -ого и  $(i+1)$ -ого узлов в  $j$ -ый момент времени с помощью следующего выражения:

$$T_{i,j+1} = (T_{i-1,j} + 4T_{i,j} + T_{i+1,j})/6. \quad (11)$$

Перемещение фронта промерзания можно вычислить по соотношению, являющемуся конечно-разностной аппроксимацией условий (3) и (4):

$$\Delta x_k = -(\lambda\Delta t / hwpr)(T_{i-1,j} - 2T_{i,j} + T_{i+1,j}). \quad (12)$$

Анализ соотношения (12) показал<sup>[25]</sup>, что рассмотренная схема конечно-разностной аппроксимации условий (3) и (4) недостаточно эффективна для решения нестационарной задачи Стефана в случае существенной зависимости теплофизических характеристик материалов от температуры.

Имеет смысл отказаться от ввода в задачу условий Стефана (3) и (4), а процесс фазового перехода учесть резким скачком удельной теплоемкости материала в окрестности температуры фазового перехода, которая рассчитывается по соотношению:

$$c(T) = c_0(T) + wr \frac{d\chi}{dT}, \quad (13)$$

где  $\chi$  - объемная доля влаги в веществе, которая для фазового перехода вода - лед в табличном виде выражается следующими значениями:

$T, ^\circ\text{C}$	-1,5	-1,0	-0,5	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
---------------------	------	------	------	---	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

$\chi$	0	0,09	0,20	0,45	0,70	0,81	0,87	0,92	0,95	0,97	0,99	1,00
--------	---	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------	------

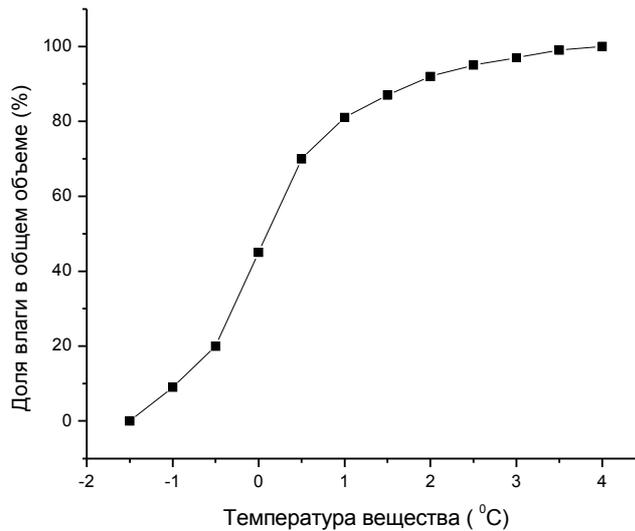


Рис. 3. Зависимость объемной доли воды в веществе от температуры вещества.

Итак, процесс охлаждения и промерзания вещества в многослойном объекте из  $n$  слоев описывается системой одномерных уравнений нестационарной теплопроводности:

$$\rho_m c_m(t) \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [r \lambda_m(T) \frac{\partial T}{\partial r}], \quad R_0 < r < R_n, \quad t > 0, \quad m=1, \dots, n. \quad (14)$$

Система уравнений записана в цилиндрической системе координат для большей. При задании значения радиуса кривизны, значительно превышающего характерную толщину материала, задача практически вырождается в плоскую.

Система уравнений (14) является нелинейной, так как и удельная теплоемкость, и коэффициент теплопроводности каждого слоя могут зависеть от температуры.

На внешней(индекс “н”) и внутренней(индекс “в”) поверхностях материала задается весь возможный набор граничных условий:

- а) теплообмен по закону Ньютона:  $\alpha_{\sigma(n)} [T_{\sigma(n)} - T(r = R_{0(n)})]$ ;
- б) теплообмен с заданным значением плотности теплового потока:  $q_{\sigma(n)}$ ;
- в) излучение по закону Стефана-Больцмана:  $A_{eff\sigma(n)} \sigma [T_{\sigma(n)}^4 - T^4(r = R_{0(n)})]$ ;

г) собственное излучение поверхностей стенки в окружающую среду:  $\varepsilon_{\varepsilon(n)}\sigma T_{\varepsilon(n)}^4$

Тогда, граничные условия на внешней и внутренней поверхности стенки формулируются следующим образом:

$$-\lambda_1 \frac{\partial T(r = R_0)}{\partial r} = \alpha_{\varepsilon} [T_{\varepsilon} - T(r = R_0)] + A_{eff\varepsilon} \sigma [T_{\varepsilon}^4 - T(r = R_0)^4] + q_{\varepsilon} - \sigma \varepsilon_{\varepsilon} T^4(r = R_0); \quad (15)$$

$$\lambda_n \frac{\partial T(r = R_n)}{\partial r} = \alpha_n [T_n - T(r = R_n)] + A_{effn} \sigma [T_n^4 - T(r = R_n)^4] + q_n - \sigma \varepsilon_n T^4(r = R_n). \quad (16)$$

В граничных условиях (15) и (16) коэффициенты конвективной теплоотдачи ( $\alpha$ ), температуры сред около внешней и внутренней поверхности материала ( $T$ ), плотности тепловых потоков ( $q$ ) и эффективные функции радиационных параметров (приведенные степени черноты поверхностей и излучающих сред)  $A_{eff}$  являются функциями времени.

Контакт между границами слоев, материалы которых имеют различные теплофизические характеристики, полагается идеальным, и, таким образом, имеют место условия теплового сопряжения:

$$\lambda_m \frac{\partial T(r = R_m - 0)}{\partial r} = \lambda_{m+1} \frac{\partial T(r = R_m + 0)}{\partial r}; \quad (17)$$

$$T(r = R_m - 0) = T(r = R_m + 0), \quad R_m = \sum_{m=1}^m h_m. \quad (18)$$

$$\text{Начальное условие: } T(t = 0) = T_0(r). \quad (19)$$

В начальный момент времени пространственное распределение температуры в материале задается некоторой функцией  $T(r, t = 0) = f(r)$ , которая может быть постоянной и равной некоторой температуре  $T_{нач}$ .

## 5. Примеры численных расчетов.

Алгоритм вычислений, приведенных в настоящей работе, построен на использовании однородной неявной разностной схемы. При этом дискретизация исходной краевой задачи вдоль радиальной координаты производится с помощью сетки, равномерной в пределах одного отдельно

взятого слоя. Временная сетка является переменной: шаг по времени определяются в ходе решения задачи и минимальным и максимальным значениями, которые определяются, исходя из величины временного интервала между двумя последовательными замерами температур на поверхностях исследуемой конструкции. Значения временного шага выбирается максимально возможным, но в то же время, выбранное значение шага должно обеспечивать заданную точность расчетов.

Рассмотрим первый пример – численное решение задачи о вычислении положения плоскости промерзания в толстой кирпичной стене при заданной постоянной температуре на ее поверхности – 253 °К без учета и с учетом скачка удельной теплоемкости в окрестности температуры фазового перехода - замерзания воды. Результаты расчета представлены на рисунке 1 кривыми «1» и «2».

Второй пример – численное решение задачи о вычислении положения плоскости промерзания в толстой стене из пенополистирола при заданной постоянной температуре на ее поверхности 253°К без учета и с учетом скачка удельной теплоемкости в окрестности температуры замерзания воды. Результаты расчета представлены на рисунке 2 кривыми «1» и «2».

Третий пример – численное решение задачи о вычислении положения плоскости промерзания в четырехслойной стене: наружный слой – кирпич толщиной 120 мм, второй слой – железобетон толщиной 100 мм, третий слой – пенополистирол толщиной 200 мм, четвертый слой – железобетон толщиной 100 мм. Температура холодной среды в течение суток колеблется по линейному закону от -20°С до -10°С, коэффициент теплоотдачи на внешней поверхности равен 23 Вт/м<sup>2</sup>°К. Температура теплой среды +20°С. Коэффициент теплоотдачи на теплой поверхности 6 Вт/м<sup>2</sup>°К. Начальная температура стены – +20°С. Результаты расчета зависимости температуры на поверхностях и на границах слоев стены от времени представлены на рисунке 4. Зависимость положения фронта промерзания от времени представлена на рисунке 5.

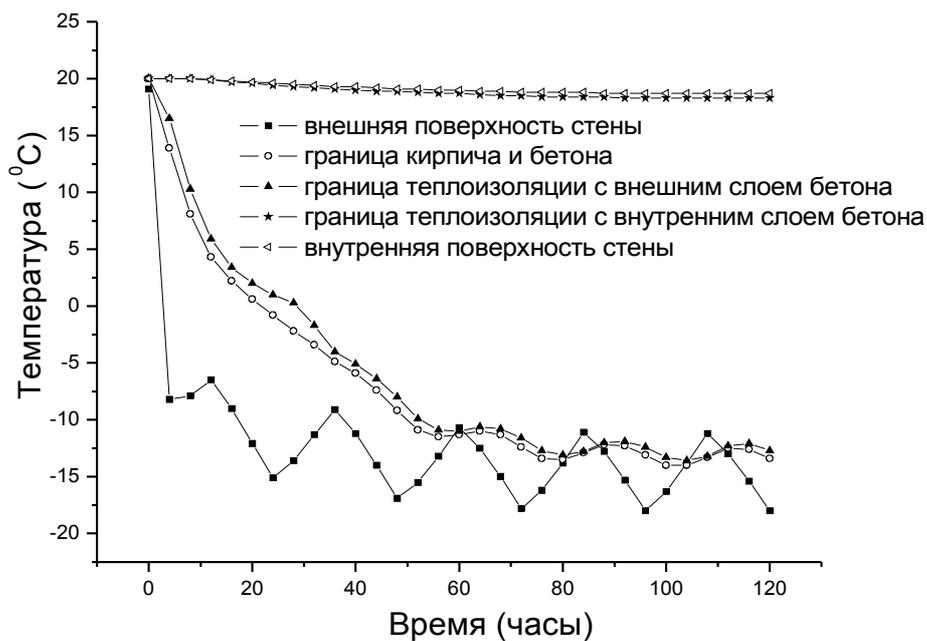


Рис.4. Зависимость температуры на границ слоев четырехслойной стены от временем.

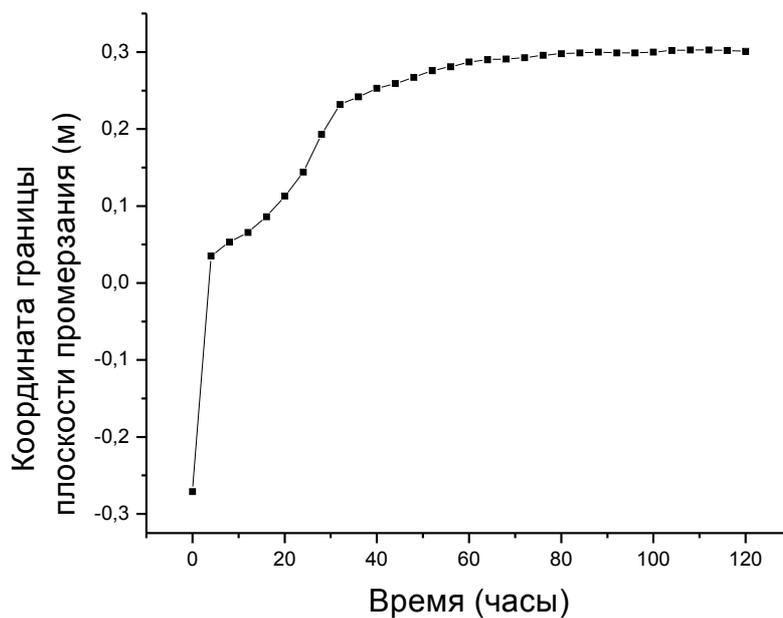


Рис.5. Зависимость положения плоскости промерзания в четырехслойной стене от времени.

## 6. Определение текущей координаты точки росы.

Решение задачи по определению фронта промерзания в многослойных конструкциях непосредственно связана с процедурой определения текущей координаты точки росы.

Точка росы - температура, при которой относительная влажность воздуха становится равной 100%. Если температура на поверхности утеплителя(или внутренней поверхности стены) многослойной конструкции будет выше точки росы, то конденсат на поверхности утеплителя (или внутренней поверхности стены) многослойной конструкции образовываться не будет. Исследование динамики изменения текущей координаты точки росы и своевременный анализ полученных данных помогает предотвратить образование конденсата, и, как следствие, избежать разрушения утеплителя или внутренней поверхности стены, а, также, образования грибковых соединений, негативно влияющих на здоровье людей, проживающих в помещении.

Для определения текущей координаты точки росы в наружных ограждающих конструкциях необходимо задать величину относительной влажности воздуха внутри помещения.

Алгоритм вычислений строится следующим образом:

- 1) по текущей температуре в толще определяется соответствующее ей давление насыщенных водяных паров;
- 2) рассчитывается давление ненасыщенных паров воды в толще стены на основе давления насыщенных паров и величины относительной влажности;
- 3) исходя из значения давления ненасыщенных паров воды в толще стены, определяется температура точки росы для каждой точки в толще стены.
- 4) определяется текущая координата точки росы, которая соответствует точке в толще стены, для которой соответствующее значение температуры ниже точки росы.

В качестве примера расчета рассматривается трехслойная стена, состоящая из кирпича (120 мм) – наружный слой, теплоизоляции (200 мм) средний слой и железобетона (200 мм) внутренний слой. Температура внешней

среды циклически в течение суток линейно изменяется в диапазоне от минус 20°C до минус 10°C (весь процесс рассматривается в течение 5 суток). Температура внутренней (теплой) среды меняется произвольно в диапазоне (+8...+25)°C.

Результаты расчетов представлены на рисунках 6 и 7.

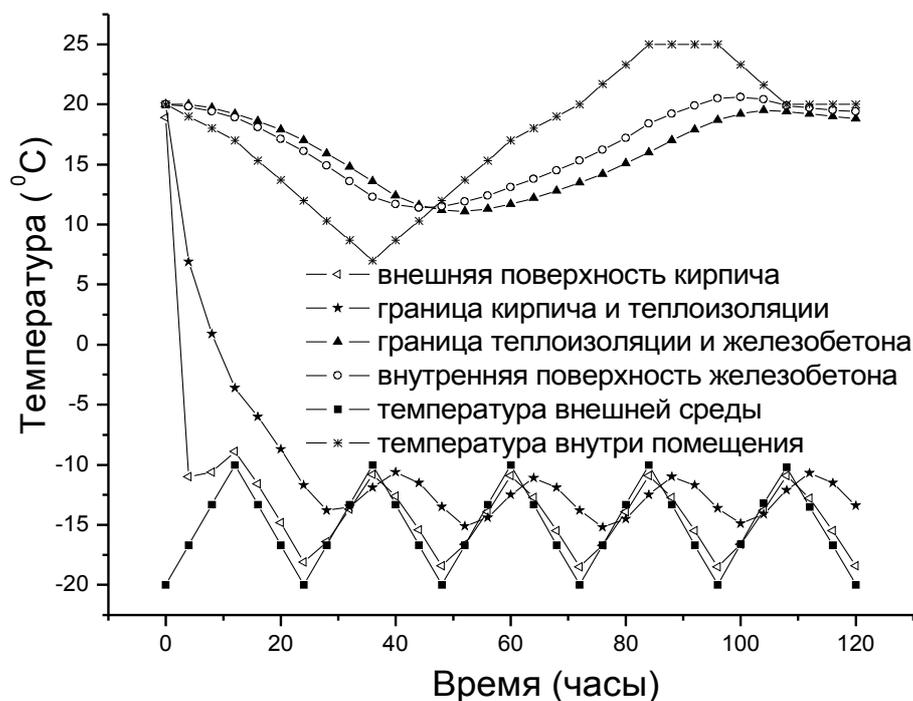


Рис.6. Графики зависимостей температуры на границах слоев трехслойной стены от времени.

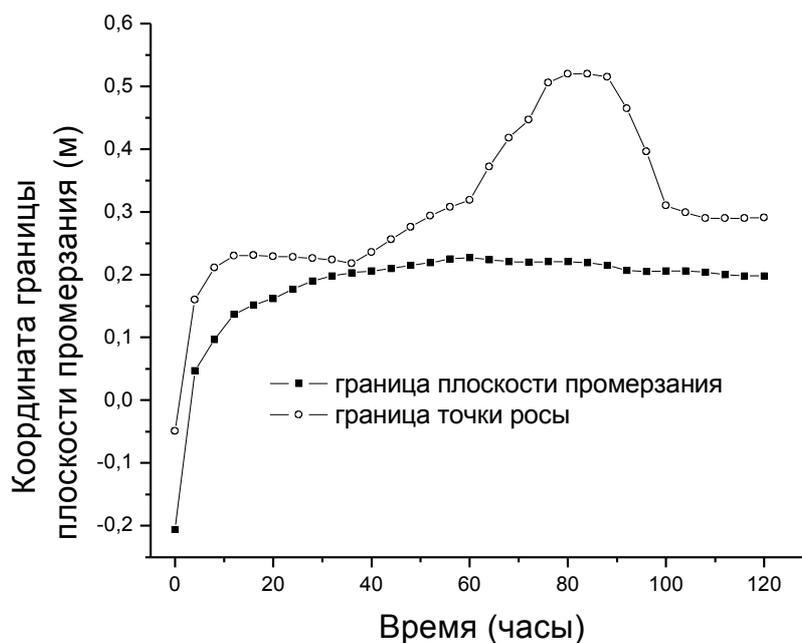


Рис.7. Зависимость координаты границы плоскости промерзания и границы точки росы в трехслойной стене от времени.

## 7. Заключение.

Таким образом, в данной статье рассмотрена задача Стефана о перемещении границы плоскости промерзания в многослойных объектах. Аналитическое решение задачи Стефана возможно лишь для ограниченного набора форм тел и граничных условий. На практике при расчете текущей координаты фронта промерзания в многослойных наружных ограждающих конструкциях, температуры поверхностей которых изменяются во времени, необходимо использовать численные методы для интегрирования уравнения теплопроводности и влагопереноса. На внешней и внутренней поверхностях конструкции могут реализовываться различные типы граничных условий. При интегрировании уравнения Стефана процесс фазового перехода необходимо учитывать с помощью резкого скачка удельной теплоемкости материала в окрестности температуры фазового перехода. Приведены примеры численных расчетов зависимости положения плоскости промерзания в многослойных

конструкциях от времени. В статье предложен алгоритм определения текущей координаты точки росы в многослойных объектах.

## **Литература**

- <sup>1</sup> A.V. Luikov, Heat and Mass Transfer in Capillary Porous Bodies, Pergamon, Oxford (1966).
- <sup>2</sup> J. Bransier, Storage periodique par chaleur latente: aspects fondamentaux lies a la cinetique des transferts, Int. J. Heat Mass Transfer 22 (1979) 875–883.
- <sup>3</sup> J.P. Bardon, E. Vrignaud, D. Delaunay, Etude experimentale de la fusion et de la solidification periodique d'une plaque de paraffine, Rev. Gen. Therm. 212–213 (1979) 501–510.
- <sup>4</sup> M. Hasan, A.S. Mujumdar, M.E. Weber, Cyclic melting and freezing, Chem. Eng. Sci. 46 (1991) 1573–1587.
- <sup>5</sup> V.R. Voller, P. Felix, C.R. Swaminathan, Cyclic phase change with fluid flow, Int. J. Numer. Meth. Heat Transfer Fluid Flow 6 (1996) 57–64.
- <sup>6</sup> B. Ghasemi, M. Molki, Cyclic melting and solidication of steel, Numer. Heat Transfer Part A 32 (1997) 877–896.
- <sup>7</sup> G. Casano, S. Piva, Experimental and numerical investigation of the steady periodic solid–liquid phase-change heat transfer , Int. J. Numer. Meth. Heat Transfer Fluid Flow 45 (2002) 4181–4190.
- <sup>8</sup> L.S. Yao, J. Prusa, Melting and freezing, Adv. Heat Transfer 19 (1989) 1–95.
- <sup>9</sup> А. И. Пехович, В.М. Жидких. Расчеты теплового режима твердых тел.- Л.: Энергия, 1976 – 352 с.
- <sup>10</sup> J. Crank, Free and Moving Boundary Problems, Clarendon Press, Oxford, 1984.
- <sup>11</sup> J. Mennig, M.N. Ozisik, Coupled integral equation approach for solving melting or solidification, Int. J. Mass Transfer 28 (1985) 1481–1485.
- <sup>12</sup> R.M. Furzeland, Acomparative study of numerical methods for moving boundary problems, J. Inst. Math. Appl. 5 (1980) 411–429.
- <sup>13</sup> Rizwan-uddin, One-dimensional phase change with periodic boundary conditions, Numer. Heat Transfer A35 (1999) 361–372.
- <sup>14</sup> T.R. Goodman, The heat-balance integral method and its application to problems involving a change of phase, Trans. ASME 80 (1958) 335–342.

- <sup>15</sup> G. Marshall, A front tracking method for one-dimensional moving boundary problems, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.* 7 (1986) 252–263.
- <sup>16</sup> S.W. Churchill, J.P. Gupta, Approximations for conduction with freezing or melting, *Int. J. Heat Mass Transfer* 20 (1976) 1251–1253.
- <sup>17</sup> V.R. Voller, M. Cross, Applications of control volume enthalpy methods in the solution of Stefan problems, in: R.W. Lewis, K. Morgan, J.A. Johnson, W.R. Smith (Eds.), *Computational Techniques in Heat Transfer*, Pineridge Press Ltd., Mambles, Swansea, UK, 1985.
- <sup>18</sup> J. Caldwell, C.C. Chan, Spherical solidification by the enthalpy method and the heat balance integral method, *Appl. Math. Model* 24 (2000) 45–53.
- <sup>19</sup> N.S. Asaithambi, A variable time-step Galerkin method for a one-dimensional Stefan problem, *Appl. Math. Comput.* 81 (1997) 189–200.
- <sup>20</sup> Rizwan-uddin, Anodal method for phase change moving boundary problems, *Int. J. Comp. Fluid Dynam.* 11 (1999) 211–221.
- <sup>21</sup> E.A. Moyano, A. Scarpettini, Numerical stability study and error estimation for two implicit schemes in a moving boundary problem, *Numer. Meth. Partial Di. Equat.* 16 (2000) 42–61.
- <sup>22</sup> W.D. Finn, E. Voro\_glu, Finite element solution of the Stefan problem, in: J.R. Whiteman (Ed.), *The Mathematics of Finite Elements and Applications, MAFELAP 1978*, Academic Press, New York, 1979.
- <sup>23</sup> N.S. Asaithambi, A Galerkin method for Stefan problems, *Appl. Math. Comput.* 52 (1992) 239–250.
- <sup>24</sup> R. Cerny, P. Prikryl, Numerical solution of a Stefan-like problem in laser processing of semiconducting alloys, *Math. Comput. Simulat.* 50 (1999) 165–173.
- <sup>25</sup> Н. А. Парфентьева, О. Д. Самарин. О колебаниях фронта промерзания в ограждениях и численном моделировании задачи Стефана. – *Строительные материалы, оборудование, технологии XXI.*-№11, 2002. С.46-47
- <sup>26</sup> Прусаков Г. М. Математические модели в расчетах на ЭВМ.-М.: Наука, 1993.- 144 с.

<sup>27</sup> Теория тепломассобмена /Под ред. А. И. Леонтьева.- М.: Высшая школа, 1979.-495 с.